ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE BOOS

Propriétés caractéristiques de courbes ou de surfaces

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 53 (1936), p. 125-182

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1936_3_53__125_0>

PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES

DE

COURBES OU DE SURFACES

PAR M. PIERRE BOOS.

Dans ce travail nous avons envisagé certaines figures simples attachées à des arcs de courbes ou à des portions de surfaces analytiques et nous avons cherché à déterminer les courbes ou les surfaces par des propriétés caractéristiques relatives à ces figures. Les différents éléments des figures sont définis par des fonctions d'un paramètre de grandeur et d'un paramètre de position, nous cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces fonctions aient certaines formes simples. La conclusion générale à laquelle nous arrivons, est que la simplicité de la structure de ces fonctions semble liée à l'*existence d'un groupe continu de transformations en elles-mêmes pour les courbes ou les surfaces*, si bien que les propriétés obtenues constituent des réciproques de théorèmes élémentaires.

Dans une première partie nous étudions la figure formée par un arc MM_1 d'une courbe tracée sur une surface et la corde géodésique qui sous-tend cet arc. Le paramètre qui définit la position de la figure est l'abscisse curviligne s de l'origine M de l'arc et le paramètre qui fixe la grandeur de cette figure est la longueur l de l'arc ou l'angle α

sous lequel on voit l'arc de son origine (ce dernier paramètre est, de beaucoup, plus intéressant, mais ne permet pas une généralisation immédiate en géométrie affine).

La première fonction envisagée est celle qui exprime la relation existant entre s, l et α (l'angle α pouvant être déterminé par sa tangente d) et les seules formes simples que nous avons pu obtenir pour $l(s, d)$ sont celle *où l ne dépend pas de s* et celle *où l est le produit d'une fonction de s par une fonction de d*. Dans le premier cas nous disons que *la courbe est une courbe* (P) et dans le second *une courbe* (P′). Pour déterminer ces courbes nous utilisons la fonction implicite des constantes d'intégration définie par l'intégrale générale de l'équation différentielle des géodésiques de la surface sur laquelle est tracée la courbe. Nous avons démontré ainsi les théorèmes suivants donnant les propriétés géométriques des courbes (P) et (P′) :

S'il existe, sur une surface, une courbe (P), *la surface est applicable sur une surface de révolution et la courbe correspond à un parallèle.*

S'il existe, sur une surface, une courbe (P′), *la surface est applicable sur une surface spirale de Maurice Lévy et la courbe correspond à une hélice conique.*

Les propriétés correspondantes de la fonction $l(s, d)$ caractérisent donc des courbes tracées sur des surfaces admettant un groupe continu de transformations en elles-mêmes et ces courbes sont les trajectoires des points de la surface soumis aux transformations du groupe.

La nature géométrique des courbes (P) et (P′) étant connue, il nous a semblé intéressant de rechercher si ces mêmes courbes ne pourraient pas être caractérisées à l'aide d'autres éléments de la figure considérée. Nous avons en particulier étudié la longueur L de la corde, le rapport r_1 de L à l, l'aire A balayée par une géodésique passant par M et dont un point décrit l'arc MM_1, le rapport r_2 de l'aire A au produit des longueurs l et L, la longueur F de la flèche, le rapport r_3 de F à l, le rapport r_4 à l de la distance du point M au point d'incidence de la flèche, l'angle β (déterminé par sa tangente d_1) sous lequel on voit l'arc de son extrémité, l'angle γ (déterminé par sa tangente d_2) sous lequel on voit du point M l'arc opposé à MM_1 et nous avons obtenu les résultats suivants :

Si l'une des fonctions l, L, A, r_2, r_3, d_1, d_2 *est une fonction impaire de* d, *la courbe est une courbe* (P), *de même si l'une des fonctions* F, r_1, r_4 *est une fonction paire de* d.

Si l'une ou l'autre des fonctions l, L, A, F *est indépendante de* s, *la courbe est une courbe* (P); *si l'une de ces fonctions est égale au produit d'une fonction de* s *par une fonction de* d, *la courbe est une courbe* (P').

Si l'une des fonctions r_1, r_2, r_3 *est indépendante de* s (*et ne dépend que de* d) *la courbe est une courbe* (P) *ou une courbe* (P'). Le rapport r_4, les angles β et γ posent d'autres problèmes dont la résolution complète paraît difficile par le procédé utilisé.

Les courbes (P) possèdent donc beaucoup de propriétés caractéristiques élémentaires des cercles du plan; elles sont encore caractérisées par le fait que l'*enveloppe de la corde qui sous-tend un arc de longueur fixe est, quelle que soit la longueur de l'arc, une courbe parallèle* (sur la surface) *à la courbe étudiée*. Par contre : *pour que la longueur de l'arc soit proportionnelle à l'angle sous lequel on le voit de son origine, il ne suffit pas que la courbe soit une courbe* (P), *il faut, de plus, que la surface soit applicable sur un plan.*

Dans une deuxième Partie nous établissons des propriétés analogues pour des surfaces analytiques. Nous construisons une figure dépendant de deux paramètres en coupant la surface par un plan sécant qui pivote autour d'un point régulier fixe O de la surface, le plan sécant est défini par la tangente λ de l'angle qu'il fait avec le plan tangent en O et par l'angle α que fait sa trace avec une direction fixe de ce plan tangent. Le premier élément étudié est le volume V compris entre le plan sécant et la calotte qu'il découpe et nous avons pu montrer que : *si ce volume ne dépend que de* λ (et non de α) *la surface est de révolution autour de la normale en* O. Il en est de même si l'aire de la calotte est indépendante de α.

Les transformations affines nous ont conduit à envisager des propriétés caractéristiques de surfaces transformées des surfaces de révolution. Afin de simplifier et de préciser les énoncés des théorèmes, nous utilisons le nom de *surfaces de révolution affine autour d'une droite* D *parallèlement à un plan* P pour désigner les surfaces engendrées par une courbe G soumise au groupe continu de transformations défini ainsi qu'il suit : Soit une droite D et un plan P non parallèle à D, le groupe est celui des transformations affines de déterminant égal à 1 qui maintiennent invariants les points de D et sont telles que les trajectoires des différents points de l'espace sont des ellipses situées dans des plans parallèles à P (il faut supposer que la courbe G n'est pas située dans un plan parallèle à P). Cela étant, nous avons démontré que si le volume V ne dépend que du produit de λ par une fonction de α, la surface est de révolution affine autour de la normale en O parallèlement au plan tangent en ce point. Plus généralement :

Nous avons démontré qu'une surface est nécessairement de révolution affine autour d'une droite D, *passant par* O, *parallèlement au plan tangent en* O, *si cette droite* D *est telle que les volumes compris entre la surface et les plans sécants passant par* O *ne dépendent que de la distance du point* O *aux points d'intersection de la droite* D *avec les plans tangents parallèles aux plans sécants.*

Pour démontrer les différentes propriétés résumées ci-dessus nous déterminons la forme nécessaire du développement de la cote z d'un point de la surface au voisinage du point O étudié en établissant le développement du volume compris entre le plan sécant et la surface. Nous obtenons ainsi des conditions auxquelles doivent satisfaire des polynomes de Fourier déduits des polynomes homogènes comprenant tous les termes d'un même degré figurant dans le développement de z. Le calcul pourrait être conduit d'une manière différente, mais on est alors arrêté par des formules dans lesquelles interviennent les coefficients du binome; nous n'avons pu démontrer ces formules directement, mais les résultats obtenus par le premier procédé nous montrent qu'elles sont exactes et nous avons cru utile d'en signaler quelques-unes.

Les procédés de calcul utilisés dans la première Partie peuvent être appliqués à des équations différentielles plus générales que celles des géodésiques d'une surface et nous démontrons ainsi des propriétés de leur intégrale générale considérée comme fonction des constantes d'intégration.

D'autre part, nous avons généralisé la définition des courbes (P) et (P′) au cas des courbes gauches d'un espace euclidien ou non-euclidien de courbure constante ainsi qu'au cas des courbes planes ou gauches en géométrie affine. Ces résultats ont été résumés dans des Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* [1], et ils feront l'objet d'une publication séparée. Remarquons que, là encore, il existe un groupe continu transformant en eux-mêmes l'espace, où sont tracées les courbes (P) ou (P′), ainsi que ces courbes.

[1] *C. R. Ac. Sc.*, t. 194, 1932, p. 1623 et 2271; t. 198, 1934, p. 1898; t. 200, 1935, p. 1820; t. 201, 1935, p. 928; t. 202, 1936, p. 197.

PREMIÈRE PARTIE.

COURBES TRACÉES SUR UNE SURFACE.

CHAPITRE I.

CALCULS PRÉLIMINAIRES.

1. Pour étudier la relation qui existe entre la longueur d'un arc de courbe et l'angle sous lequel on voit cet arc de son origine, nous envisageons d'abord le cas des courbes planes; il est naturel de définir la courbe par son équation intrinsèque et de déterminer un développement limité de l'angle α (sous lequel on voit l'arc) en fonction des puissances de la longueur l de l'arc. Si $y(s)$ désigne la courbure de la courbe au point d'abscisse curviligne s, l'angle que fait la tangente en ce point avec une direction fixe est $\theta(s) = \int y\, ds$ et l'angle cherché est déterminé par la relation

$$\operatorname{tang}[\theta(s) + \alpha(l, s)] = \frac{\displaystyle\int_s^{s+l} \sin\theta(x)\, dx}{\displaystyle\int_s^{s+l} \cos\theta(x)\, dx},$$

d'où l'on déduit, par des transformations simples, en posant $e^{i\theta(s)} = f(s)$,

$$(1) \qquad e^{-2i\alpha(l,s)} \int_0^l \frac{f(x+s)}{f(s)}\, dx = \int_0^l \frac{f(s)}{f(x+s)}\, dx.$$

Cette relation nous permet de calculer un développement limité de la détermination de l'angle α qui tend vers zéro en même temps que l. En effet $\frac{f'}{f}$ est égal à iy (que nous désignons par z) et le développement des intégrales précédentes (en fonction de l, de z et ses dérivées) s'obtient très facilement. Comme la seconde se déduit de la première par le changement de z en $-z$, il est naturel de calculer $-(e^{-2i\alpha}-1)$, d'où l'on déduit sans peine

$$-2i\alpha = -zl - z'\frac{l^2}{3} - z''\frac{l^3}{12} - l^4\left[\frac{z'''}{60} + \frac{z^2 z'}{360}\right] - \ldots;$$

comme il était à prévoir, l'expression ci-dessus ne contient que des puissances impaires par rapport à l'ensemble des lettres z, z', z'', ..., donc le retour à la fonction y nous permet de diviser les deux membres par i, et nous obtenons finalement

$$\alpha(l, s) = \frac{y(s)}{2}l + \frac{y'}{6}l^2 + \frac{y''}{4!}l^3 + l^4\left(\frac{y'''}{5!} - \frac{y^2 y'}{6!}\right) + \ldots. \tag{2}$$

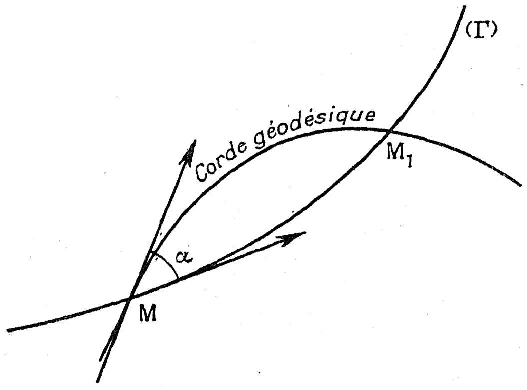
Ce développement est valable jusqu'au terme de degré p inclus, si la fonction $y(s)$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$, la dérivée $(p-1)^{\text{ième}}$ étant continue.

Nous remarquons immédiatement que y doit être une constante pour que α soit indépendant de s; nous disons alors que la courbe est une courbe (P) et nous voyons que les cercles sont les seules courbes planes possédant cette propriété. Il serait intéressant d'étudier l'équation (1) lorsque l est une longueur fixe donnée et chercher les courbes telles que pour cette valeur de l, l'angle α soit égal à une certaine constante c (ou même plus généralement soit une fonction de s donnée à l'avance); cette étude ne paraît pas aisée et nous n'avons pu obtenir que les résultats élémentaires suivants : parmi les solutions figurent : 1° les fonctions $f = e^{-2i\frac{c}{l}s + 2ik\frac{\pi}{l}s + ih}$ (k entier, h constante arbitraires) qui correspondent aux cercles de rayon $\frac{l}{2(c+k\pi)}$; 2° des fonctions f qui admettent la période $\frac{l}{k}$ et qui correspondent à des courbes fermées de longueur $\frac{l}{k}$.

2. Si maintenant nous supposons la courbe tracée sur une surface, l'angle α est l'angle que fait la tangente à la courbe (Γ) avec une géodésique de la surface passant par l'origine M et l'extrémité M_1 de

l'arc (cet angle α doit tendre vers zéro en même temps que la longueur de l'arc MM_1). Il faut remarquer que par deux points d'une surface peuvent passer plusieurs géodésiques, donc il importe de préciser celle que nous désignons par géodésique-corde de l'arc MM_1 : on sait

Fig. 1.



qu'à tout point *régulier* M de la surface, on peut associer une longueur λ, telle que si l'on porte à partir de M sur les géodésiques qui passent par ce point un arc de longueur λ, la région balayée par ces arcs jouit de la propriété suivante : par M et par tout point intérieur de la région passe une géodésique et une seule de longueur inférieure à λ. Il en résulte que nous devons supposer qu'il existe une portion de la courbe (Γ) sur laquelle aucun point n'est un point singulier de la surface, ensuite nous déterminons les valeurs de λ correspondant aux différents points de la courbe (ces valeurs ont une borne inférieure non nulle) et nous nous limiterons à la considération d'arcs (qui ne sont pas nécessairement infiniment petits) dont la longueur l sera inférieure à la borne inférieure des λ, la géodésique-corde aura, elle aussi, une longueur inférieure à la même borne.

Ces remarques faites, la géodésique-corde est bien déterminée et nous définissons la surface au voisinage du point M par le système de coordonnées polaires géodésiques : v désigne l'angle d'une géodésique passant par M avec la tangente en M à la courbe (Γ), u désigne la longueur de l'arc de cette géodésique compris entre M et le point de coordonnées (u, v). On a alors sur la surface $ds^2 = du^2 + C^2 dv^2$, où C est une fonction de u et v qui dépend en général de la position du point M sur la surface, donc de l'abscisse curviligne du point M sur (Γ). Si $K(u, v)$ est la courbure totale de la surface au point (u, v), on a les relations

$$(3) \qquad K(u, v) = -\frac{1}{C}\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}, \qquad C = u - \frac{K_0}{6}u^3 + Q(v)u^4 + \ldots$$

L'angle α cherché n'est autre que la valeur de v qui correspond à l'extrémité de l'arc de (Γ) ayant pour longueur l; or, si l'on désigne par $z(s)$ la courbure géodésique de la courbe (Γ) au point d'abscisse curviligne s, cet angle v est déterminé par le système

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{c} 1 = u'^2 + C^2 v'^2, \\ z(l, s) = C(u'v'' - u''v') + C'_u(v' + u'^2 v') + C'_v u' v'^2, \end{array} \right.$$

dans lequel $u', v', \ldots$ désignent les dérivées par rapport à l'arc de (Γ), s est un paramètre fixe et la variable est l. Ce système nous permet de trouver les valeurs en M des dérivées successives de v par rapport à l, et par suite d'écrire le développement limité cherché.

En effet, en dérivant les relations (3) on obtient les valeurs en M des dérivées partielles de C en fonction de celles de K; en dérivant la première relation (4) on obtient les valeurs, pour $u = 0$, $v = 0$, des dérivées de u par rapport à l en fonction des dérivées de v; enfin en dérivant la dernière équation (4) et tenant compte des relations précédemment établies, il est simple de calculer les valeurs de $v', v'', \ldots$ en fonction des valeurs de $z, z', z'', \ldots$ en M et des valeurs en ce même point de la courbure totale de la surface et de ses dérivées partielles successives.

En supposant que la courbure totale de la surface admette autant de dérivées partielles qu'il est nécessaire, on remarque que pour faire le calcul de $v^{(p)}$, il faut dériver $(p-1)$ fois les équations (4), donc il faut que la fonction z admette des dérivées jusqu'à l'ordre $p-1$, si cette dérivée $(p-1)^{\text{ième}}$ est continue au voisinage de M, la fonction $v^{(p)}(l)$ est continue au voisinage de $l = 0$, et le développement limité sera valable jusqu'au terme de degré p. On obtient

$$v' = \frac{z}{2}, \qquad v'' = \frac{z'}{3}, \qquad v''' = \frac{z''}{4} + K\frac{z}{4},$$

K désigne ici la courbure totale en M,

$$5\rho^{(4)} = z''' - \frac{z^2 z'}{6} + \frac{7}{3} \mathrm{K} z' + 2\mathrm{K}' z,$$

en désignant par K′ la valeur en M de la dérivée $\frac{d\mathrm{K}}{ds}$ de la courbure totale considérée comme fonction de l'abscisse curviligne le long de (Γ),

$$6\rho^{(5)} = z^{(4)} - zz'^2 - \frac{z^2 z''}{2} - \frac{3\mathrm{K} z^3}{2} + 4\mathrm{K} z'' + 3\mathrm{K}^2 z + 6\mathrm{K}' z' + 3z\mathrm{K}''_{u^2} + \frac{9}{2} z^2 \mathrm{K}''_{uv},$$

K''_{u^2} et K''_{uv} sont les valeurs en M des dérivées partielles de K, la relation qui existe entre ces dérivées partielles et la dérivée seconde $\frac{d^2\mathrm{K}}{ds^2}$ ne permet pas de les éliminer de l'expression ci-dessus, afin de ne conserver que les dérivées de la courbure totale le long de la courbe (Γ). Le développement de α s'écrit donc

$$(5) \quad \begin{aligned} \alpha(l, s) = {} & \frac{z}{2} l + \frac{z'}{3!} l^2 + \frac{l^3}{4!}(z'' + \mathrm{K} z) + \frac{l^4}{5!}\left(z''' - \frac{z^2 z'}{6} + \frac{7}{3}\mathrm{K} z' + 2\mathrm{K}' z\right) \\ & + \frac{l^5}{6!}\Big(z^{(4)} - zz'^2 - \frac{z^2 z''}{2} - \frac{3\mathrm{K} z^3}{2} \\ & \qquad + 4\mathrm{K} z'' + 3\mathrm{K}^2 z + 6\mathrm{K}' z' + 3z\mathrm{K}''_{u^2} + \frac{9}{2} z^2 \mathrm{K}''_{uv}\Big) + \ldots, \end{aligned}$$

en définitive, l'angle α dépend de la courbure géodésique de (Γ) et ses dérivées successives, ainsi que de la courbure totale de la surface et ses dérivées partielles successives. La connaissance de la courbure totale de la surface le long de la courbe ne suffit pas pour obtenir l'angle α, mais permet de le connaître jusqu'au quatrième ordre.

3. Le développement (5) nous montre que si la courbe est une courbe (P), la fonction $z(s)$ est une constante. Nous éliminons le cas où z serait nul identiquement (la courbe est alors une géodésique) car l'angle α est lui aussi identiquement nul. Nous éliminons également ce cas particulier de toutes les recherches ultérieures. Si la fonction z est une constante, la courbe est un cercle géodésique, mais cette condition vérifiée par la courbe (Γ) n'est pas en général suffisante pour que cette courbe soit une courbe (P); en effet tous les coefficients de (5) doivent être indépendants de s et en général la cour-

bure totale de la surface varie avec la position du point M sur la courbe; il ne suffit même pas que cette courbure totale soit constante le long de (Γ), d'après ce que nous avons remarqué plus haut.

Si tous les cercles géodésiques passant par M possèdent la propriété (P), la courbure totale de la surface est constante dans toute une région entourant le point M et cette condition est suffisante, car alors la fonction C qui figure dans le ds^2 de la surface est indépendante du choix du point M origine des coordonnées polaires. Dès lors, comme la courbe (Γ) est un cercle géodésique, le système (4) ne dépend pas de la position de M sur la courbe, les conditions initiales auxquelles doivent satisfaire u et v sont également indépendantes de s et l'angle cherché est indépendant de s. Donc :

Les surfaces à courbure totale constante sont les seules surfaces analytiques telles que tous leurs cercles géodésiques possèdent la propriété (P); par un point quelconque d'une telle surface passe une infinité de courbes (P) et, réciproquement, si par un point d'une surface analytique passe une infinité continue de courbes (P), la surface est à courbure totale constante.

4. Le développement limité (5) ne nous permet pas de répondre simplement à la question suivante : la courbe (Γ) peut-elle être la seule courbe de la surface passant par M et possédant la propriété (P)? Il faudrait en effet déterminer les conditions imposées à la courbure totale par tous les coefficients de (5).

Pour faire cette étude nous choisissons un autre mode de représentation de la surface S sur laquelle est tracée la courbe : v est l'arc de la courbe (Γ) compté à partir d'une origine O, les courbes, $v=$ const., sont les géodésiques de S qui sont orthogonales à (Γ), u est l'arc de la géodésique v compté à partir de (Γ) dans un sens choisi une fois pour toutes. Le ds^2 de la surface est alors de la forme $ds^2 = du^2 + C^2\,dv^2$ où C est une fonction de u et v se réduisant à 1 pour $u=0$. [Nous verrons plus loin la condition imposée à C par le fait que (Γ) n'est pas une géodésique de S.]

Nous prenons comme paramètre arbitraire l'angle α sous lequel on voit l'arc MM_1 de son origine et nous déterminons la longueur l en fonction de s et de α (ou de la tangente d de cet angle). Nous obtiendrons cette fonction $l(s, d)$ en cherchant la valeur de v qui correspond au point d'intersection M_1 de (Γ) et de la géodésique qui passe par M et fait en ce point avec (Γ) un angle dont la tangente est d, ce point M_1 doit tendre vers M lorsque d tend vers zéro. Les géodésiques de la surface sont déterminées par l'équation différentielle

$$(6) \qquad \frac{d^2 u}{dv^2} = 2\frac{C'_u}{C}\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + \frac{C'_v}{C}\left(\frac{du}{dv}\right) + CC'_u$$

qui ne doit pas admettre la solution $u = 0$, puisque la courbe (Γ) n'est pas une géodésique, donc $C'_u(0, v)$ n'est pas identiquement nul.

La corde qui sous-tend l'arc MM_1 est définie par l'intégrale

$$u = u[v - s, d, s]$$

de l'équation (6) répondant aux conditions initiales suivantes :

$$u = 0, \qquad \frac{du}{dv} = d$$

pour $v = s$; et la longueur l de l'arc MM_1 de (Γ) est une fonction de s et d telle que $u[l, d, s]$ soit identiquement nul et que l tende vers zéro en même temps que d.

5. Le problème auquel nous sommes ramené est donc l'étude de la fonction implicite des constantes d'intégration définie par l'intégrale générale d'une certaine équation différentielle du second ordre; cette équation est de la forme $u'' = F(u', u, v)$ dans laquelle la fonction inconnue u est définie par les conditions initiales $u = 0$, $u' = d$ pour $v = s$, la fonction F est holomorphe en u', u, v au voisinage des valeurs 0, 0, s et de plus $F(0, 0, v)$ n'est pas identiquement nul. Pour faire cette étude nous utilisons le changement de variable et fonction suivant :

$$d = \lambda^2, \qquad v = \lambda V + s, \qquad u = \lambda^2 U,$$

la fonction $U(V)$ est définie par l'équation différentielle

$$(7) \qquad U'' = F(\lambda U', \lambda^2 U, \lambda V + s),$$

et les conditions initiales $U = 0$, $U' = \lambda$ pour $V = 0$.

D'après un théorème de Poincaré, les hypothèses faites sur la fonction F nous permettent d'affirmer la possibilité de développer le deuxième membre de (7) suivant les puissances de λ, soit

$$(8)\qquad F = 2a(s) + \lambda[2a'V + bU'] + \lambda^2[a''V^2 + b'U'V + cU'^2 + dU] + \ldots,$$

la fonction $a(s)$ n'est pas identiquement nulle; le coefficient de la puissance $m^{\text{ième}}$ de λ est une somme de termes de la forme $g(s)U'^kU^pV^q$ dans lesquels $g(s)$ est une fonction holomorphe au voisinage de la valeur s considérée et les exposants k, p, q sont liés par la relation

$$k + 2p + q = m.$$

Nous pouvons alors calculer le développement de l'intégrale U en fonction de λ. Les premiers termes sont

$$\begin{aligned}(9)\qquad U = aV^2 &+ \lambda\left[V + \frac{V^3}{3}(a' + ab)\right]\\ &+ \lambda^2\left[V^2\frac{b}{2} + \frac{V^4}{12}(4a^2c + ab^2 + 2ab' + ad + ba' + a'')\right]\\ &+ \lambda^3\left[\frac{V^3}{6}(4ac + b^2 + b' + d) + \ldots\right] + \lambda^4\left[\frac{V^2}{2}c + \ldots\right] + \ldots.\end{aligned}$$

Pour obtenir dans ce développement le terme de degré m, connaissant tous ceux qui le précèdent, il suffit de déterminer les développements (limités par le degré du dernier terme connu de U) de toutes les expressions coefficients des puissances de λ, inférieures à la $m^{\text{ième}}$, contenues dans (8); nous obtenons ainsi un certain polynome en V et en intégrant deux fois nous avons le coefficient de λ^m dans U, compte tenu des conditions initiales. Quel que soit m, le polynome en V coefficient de λ^m ne contient pas de terme constant et, si $m \neq 1$, il ne contient pas non plus de terme du premier degré.

6. Nous aurons besoin d'exprimer les conditions nécessaires pour que tous les termes de (9) aient certaines formes particulières; nous ne précisons pas ici ces formes, car il nous a semblé préférable d'exposer le raisonnement général qui, convenablement modifié, nous sera utile dans des questions plus compliquées.

Soit

$$(10)\qquad F = 2a(v) + b(v)u' + cu'^2 + du + eu'^3 + fuu' + \ldots$$

le développement de F avant le changement de variable et fonction; si tous les termes de ce développement pour lesquels la somme de l'exposant de u' et du double de l'exposant de u est inférieure à m vérifient des conditions suffisantes pour que l'intégrale u ait la forme désirée entraînant pour chacun des coefficients de (9) une expression particulière, les premiers termes de U qui pourront empêcher cette fonction d'avoir la forme cherchée sont tels que la somme des degrés de λ et de V est égale à $2m+2$, et ces termes proviennent uniquement des termes de (10) pour lesquels la somme de l'exposant de u' et du double de l'exposant de u est égale à m.

En effet, les termes du développement (8), de plus bas degré en λ, qui ne vérifient pas la condition supposée suffisante, sont de la forme

$$\lambda^m \sum_p g_p(s)\,\mathrm{U}'^{m-2p}\,\mathrm{U}^p,$$

puisque les termes en $\lambda^m \mathrm{U}'^k \mathrm{U}^p \mathrm{V}^q$, où $k+2p+q=m$, proviennent des termes en $u'^k u^p$ de (10) et vérifient la condition suffisante si

$$k+2p<m.$$

Or, du développement (9) nous déduisons que les termes de U sont de degré au moins égal à 2 par rapport à l'ensemble des lettres V et λ et ceux de U' au moins de degré 1; donc la somme des degrés de V et λ pour les différents termes du développement de $\mathrm{U}'^k \mathrm{U}^p$ aura pour valeur minima $k+2p$. Il en résulte qu'un terme $\lambda^n \mathrm{U}'^k \mathrm{U}^p \mathrm{V}^q$ de (8), dans lequel $k+2p+q=n$, aura un développement limité qui ne contiendra que des éléments ayant, par rapport à l'ensemble des lettres V et λ, un degré au moins égal à $n+k+2p+q=2n$; et, après les intégrations pour obtenir les éléments correspondants de (9), nous aurons des termes dont le degré par rapport à l'ensemble des lettres V et λ sera au moins égal à $2n+2$, donc toujours supérieur à $2m+2$ si $n>m$.

Si n est égal à m, nous obtiendrons effectivement dans U des éléments de degré $2m+2$ par rapport à l'ensemble des lettres V et λ en remplaçant U et U' par les deux premiers termes de leurs développements (nous ferons plus loin le calcul de ces termes).

Si nous considérons dans (8) un terme de degré, en λ, inférieur à m, nous aurons des éléments de l'intégrale satisfaisant aux conditions désirées en remplaçant U et U' par les premiers termes de leurs développements; il faudra donc pour obtenir, à partir de ce terme de (8), un élément de (9) non conforme aux conditions imposées, prendre soit dans le développement de U, soit dans celui de U', au moins un terme lui-même non conforme à ces conditions. Or, les termes de ce genre dont nous connaissons actuellement l'existence sont au moins, par rapport à l'ensemble des lettres V et λ, de degré $2m+2$ dans U ou $2m+1$ dans U'; donc dans le développement de $U'^k U^p$ les termes non conformes aux conditions sont au moins de degré $2p+k+2m$ et après les intégrations les éléments correspondants pour (9) sont au moins de degré $n+2p+k+2m+q+2$, donc toujours de degré supérieur à $2m+2$, puisque n ne peut être nul.

Pour calculer les termes de degré $2m+2$ dans (9) provenant des termes de (10) tels que la somme de l'exposant de u' et du double de l'exposant de u soit égale à m, nous déterminons les termes de plus bas degré en V figurant dans les coefficients de λ^0 des développements de U^p et U'^k et ces termes eux-mêmes ne peuvent nous être utiles que s'ils proviennent des deux premiers termes de U ou U'. On a

dans U^p $\qquad \lambda^0 V^{2p-0} a^{p-0} C_p^0 \qquad$ à condition que $\theta \leqq p$,

dans U'^k $\qquad \lambda^0 V^{k-0} a^{k-0} 2^{k-0} C_k^0 \qquad$ à condition que $\theta \leqq k$,

Les seuls termes du développement de $U'^{m-2p} U^p$ dont le degré, par rapport à l'ensemble des deux lettres V et λ, est m sont donc

$$\lambda^j V^{m-j} \sum_q 2^q C_p^q C_{m-2p}^{j-q} 2^{m-2p-j} a^{m-p-j},$$

la somme par rapport à q étant prise depuis la plus grande des valeurs O ou $2p+j-m$ jusqu'à la plus petite des valeurs p ou j et l'entier j variant de O à $m-p$. Par conséquent, dans U, l'ensemble des termes de degré $2m+2$ provenant des termes étudiés de (10) est

$$(11) \qquad \sum_j \frac{\lambda^{m+j} V^{m-j+2}}{(m-j+2)(m-j+1)} \sum_p g_p(s) a^{m-p-j} 2^{m-2p-j} \sum_q 2^q C_p^q C_{m-2p}^{j-q},$$

les sommes étant prises : celle par rapport à j depuis O jusqu'à m, celle par rapport à p depuis O jusqu'à $E(m/2)$ ou $m-j$, celle par rapport à q depuis O ou $2p+j-m$ jusqu'à p ou j.

En outre, dans certains problèmes nous aurons besoin de connaître les deuxièmes et même les troisièmes termes des intégrales contenant des fonctions de forme inconnue. Une méthode analogue à la précédente peut être utilisée, mais elle exige un développement beaucoup plus compliqué que nous ne présenterons pas en détail.

CHAPITRE II.

RECHERCHE DES COURBES (P) ET (P′).

7. Pour que la courbe (Γ) possède la propriété (P), il faut que la fonction implicite $l(s, d)$, définie à la fin du paragraphe 4, soit indépendante de s. Après le changement de variable et fonction, nous devons considérer la relation $U(V, \lambda, s) = 0$ qui définit, pour λ assez petit, une fonction $V(\lambda, s)$ tendant vers zéro en même temps que λ et dont nous pourrons déterminer le développement suivant les puissances de λ à partir du développement (9). La longueur l de l'arc MM_1 est égale à $\lambda V(\lambda, s)$ et par suite la courbe sera une courbe (P) si la fonction $V(\lambda, s)$ est indépendante de s quel que soit λ.

Il faut donc calculer le développement du deuxième membre de (6) après le changement de variable et fonction, puis les développements de U et de la fonction implicite V. La surface étant analytique, la fonction $C(u, v)$ peut être développée sous la forme

$$C = 1 + 2a(v)u + b(v)u^2 + \ldots, \tag{12}$$

donc, après le changement de variable et fonction, nous avons

$$U'' = 2a(s) + \lambda 2a'V + \lambda^2[a''V^2 + 4aU'^2 + 2bU + 4a^2U] + \ldots,$$

et, appliquant (9), il vient

$$U = a(s)V^2 + \lambda\left[V + \frac{V^3a'}{3}\right] + \frac{\lambda^2V^4}{12}(20a^3 + 2ab + a'') + \frac{\lambda^3V^5}{3}(10a^2 + b) + \lambda^4 2aV^2 + \ldots. \tag{13}$$

La fonction $V(\lambda, s)$ admet au voisinage de la valeur $\lambda = 0$ et de la valeur s correspondant au point M un développement limité dont nous déterminons les premiers termes par la méthode des coefficients indéterminés. On obtient très simplement

$$(14) \qquad V = -\frac{1}{a}\lambda - \frac{a'}{3a^3}\lambda^3 + \left[\frac{1}{3a} - \frac{b}{6a^3} - \frac{2a'^2}{9a^5} + \frac{a''}{12a^4}\right]\lambda^5 + \ldots .$$

Pour que la courbe possède la propriété (P), il est nécessaire et suffisant que tous les coefficients de (14) soient indépendants de s; donc en particulier *les premiers termes de* (12) *doivent être indépendants de* v.

Ce résultat nous conduit à étudier le cas où C serait indépendant de v; alors s ne figure pas dans (7) ni dans les conditions initiales, donc U est indépendant de s, donc aussi V défini par la relation $U = 0$; donc la courbe est une courbe (P).

8. La condition que C soit indépendant de v est donc suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. Soit m le degré, en u, du premier terme de C dont le coefficient n'est pas indépendant de v, on aura, après le changement de variable et fonction,

$$(15) \qquad C = 1 + 2aU\lambda^2 + \ldots + \lambda^{2m} g(s) U^m + \ldots,$$

d'où

$$(16) \qquad U'' = 2a + \lambda^2(\ldots) + \ldots + \lambda^{2m-2} U^{m-1} m g(s) + \ldots,$$

les termes non écrits sont indépendants de s ou sont de degré, en λ, supérieur à $2m - 2$.

Nous pouvons alors appliquer la formule (11), particulièrement simple ici, et nous obtenons

$$(17) \qquad U = aV^2 + \lambda V + \ldots + \sum_0^{m-1} \frac{\lambda^{2m-2+j} V^{2m-j} m C_{m-1}^j}{(2m-j)(2m-j-1)} a^{m-j-1} g(s) + \ldots,$$

les termes non écrits sont tels que la somme des degrés de V et λ surpasse 2 si ces termes sont indépendants de s et surpasse $4m - 2$ s'ils dépendent de s.

La fonction V admet un développement de la forme

$$(18) \qquad \beta_1\lambda + \beta_3\lambda^3 + \ldots + \beta_q\lambda^q + \ldots,$$

et pour obtenir β_q il faut diviser par a un certain polynome formé à l'aide des β d'indice inférieur à q et des termes de (17) dans lesquels la somme des exposants de V et λ est égale ou inférieure à $q+1$. Par suite le premier des β qui peut dépendre de s est le coefficient de λ^{4m-3} et il est égal à

$$g(s)\frac{1}{a^{m+1}}m!\sum_{j=0}^{m-1}\frac{(-1)^j}{(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)!}+k,$$

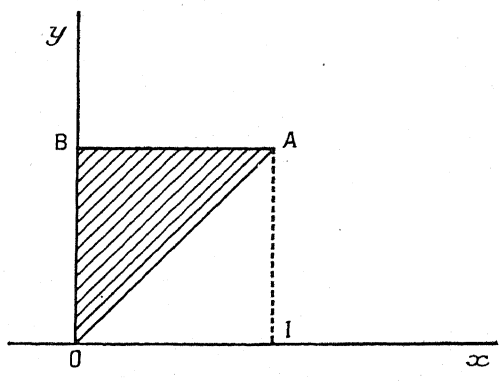
en désignant par k une certaine constante correspondant aux termes de U indépendants de s.

Pour calculer le coefficient de $g(s)$ dans l'expression ci-dessus, il nous suffit de connaître la valeur pour $x=1$ de l'expression

$$G(x)=\sum\frac{(-1)^j x^{2m-j}(m-1)!}{(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)!}$$

nulle pour $x=0$. Or, on a $G''(x)=(-1)^{m+1}x^{m-1}(1-x)^{m-1}$, donc $G(1)$ est égal à l'intégrale $(-1)^{m+1}\int_0^1 dy\int_0^y x^{m-1}(1-x)^{m-1}\,dx$ ou encore

Fig. 2.



à l'intégrale double $(-1)^{m+1}\iint x^{m-1}(1-x)^{m-1}\,dx\,dy$ entendue au triangle OAB; donc, en intervertissant l'ordre des intégrations à

$$(-1)^{m+1}B(m, m+1)=(-1)^{m+1}\frac{m!(m-1)!}{2m!},$$

et nous obtenons

$$V = -\frac{1}{a}\lambda + \left(\frac{1}{3a} - \frac{b}{6a^3}\right)\lambda^5 + \ldots + \lambda^{4m-3}\left[g(s)\frac{(-1)^{m+1}(m!)^2}{a^{m+1}(2m!)} + k\right] + \ldots$$

Donc, pour que la fonction $V(\lambda, s)$ soit indépendante de s quel que soit λ, il faut que g soit une constante; par suite il est nécessaire que tous les coefficients de (12) soient des constantes.

Le ds^2 de la surface rapportée au système de coordonnées défini plus haut (§ 4) est donc de la forme $du^2 + C^2(u)\,dv^2$ *lorsque la courbe* (Γ) *est une courbe* (P) : *la surface est applicable sur une surface de révolution et la courbe* (Γ) *correspond à un parallèle.* La surface S admet donc un groupe continu de transformations en elle-même (qui correspondent aux rotations de la surface de révolution autour de son axe); ces transformations transforment en elle-même la courbe (Γ), elles permettent de faire coïncider les différentes figures construites à partir d'arcs de (Γ) ayant même longueur et des origines différentes et ceci nous montre géométriquement que la condition trouvée est suffisante.

On en conclut que *par un point régulier d'une surface ne passe en général aucune courbe* (P); *s'il en passe une, la surface est applicable sur une surface de révolution et, dans ce cas, par tout point régulier de la surface passe en général une telle courbe et une seule* (de même que par un point régulier d'une surface de révolution passe en général un parallèle et un seul non géodésique). Ce résultat complète celui que nous indiquions au paragraphe 3.

9. Si la longueur l de l'arc MM_1 dépend de l'abscisse curviligne s de M, il est intéressant de chercher à quelles conditions on pourra séparer les deux variables de cette fonction; autrement dit, à quelles conditions la fonction l est-elle la somme ou le produit d'une fonction de s et d'une fonction de d. On remarque immédiatement que l'on ne peut avoir $l = \varphi(s) + h(d)$ car l doit être nul lorsque d est nul quel que soit s, donc la fonction φ devrait se réduire à la constante $-h(0)$. Il nous reste donc seulement à chercher les courbes, que nous appelons courbes (P′), pour lesquelles on a $l = \varphi(s)\,h(d)$, les fonctions φ et h inconnues étant supposées holomorphes dans un certain intervalle. Dans ce cas l'angle α ne doit dépendre que du quotient de la

longueur de l'arc par la fonction φ de l'abscisse curviligne. Le développement (5) nous donne immédiatement des conditions nécessaires pour qu'il en soit ainsi, il faut que l'on ait, en désignant par a, b, m des constantes

$$z = (as + b)^{-1}, \qquad \varphi(s) = m(as + b),$$

mais ces conditions ne sont pas en général suffisantes et la surface doit, elle aussi, vérifier certaines conditions [en particulier la courbure totale le long de la courbe (Γ) doit être proportionnelle à z^2, *et il n'existe pas de courbe* (P') *sur une surface à courbure totale constante*].

Dans le cas où la surface est développable, la condition imposée à la courbure de la courbe est suffisante. La courbure totale est nulle en tout point de la surface et le système (4) conserve la même expression pour toutes les surfaces développables, nous pouvons donc examiner uniquement ce qui a lieu sur un plan (en utilisant les calculs du paragraphe 1). On trouve ainsi que l'angle α, dans le cas d'une courbe dont l'équation intrinsèque est $z = (as + b)^{-1}$ (spirale), a pour expression $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ en désignant par α_1 un angle dont la tangente est a et par α_2 l'angle défini par

$$\operatorname{tang}\alpha_2 = \frac{\cos\left\{a^{-1}\log\left[1 + \dfrac{al}{as+b}\right]\right\} - \left[1 + \dfrac{al}{as+b}\right]^{-1}}{\sin\left\{a^{-1}\log\left[1 + \dfrac{al}{as+b}\right]\right\}},$$

l'angle α ne dépend donc en effet que du quotient $\dfrac{l}{as+b}$, d'où l'on déduit, car il est possible de faire l'inversion au voisinage des valeurs $l = 0$, $\alpha = 0$, que l'on a bien $l = (as + b)h(\alpha)$.

10. Il existe donc des courbes (P') sur un plan, mais nous voulons préciser ce résultat en cherchant les conditions strictement nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe (Γ) tracée sur une surface S quelconque soit une courbe (P'). Nous utilisons le système de coordonnées défini au paragraphe 4 et la courbe (Γ) possède la propriété (P') si la fonction $V(\lambda, s)$ est égale au produit d'une fonction $\varphi(s)$ par une fonction $h(\lambda)$. Comme plus haut, nous cherchons d'abord les conditions auxquelles doivent satisfaire les premiers termes de $C(u, v)$,

cela nous permettra de trouver une condition suffisante et enfin nous établirons que cette condition est nécessaire.

Si C admet le développement (12), le développement de V est (14), ce qui montre que l'on doit avoir nécessairement

$$\varphi(s) = \frac{A}{a(s)}, \qquad \frac{A}{a} = AB\frac{a'}{a^3}, \qquad A, B, D = \text{const.},$$

donc

$$a = -\frac{B}{s - s_0}, \qquad b = Da^2,$$

nous pouvons changer l'origine sur la courbe (Γ) et multiplier φ par une constante, nous en déduisons qu'il est nécessaire que les premiers termes de $C(u, v)$ soient des puissances de u/v.

Nous sommes conduit ainsi à étudier le cas où C est une fonction de u/v, alors le deuxième membre de (6) est de la forme $\frac{1}{v}F\left(u', \frac{u}{v}\right)$. Il en résulte que l'intégrale u, définie par les conditions initiales $u = 0$, $u' = d$ pour $v = s$, est de la forme $u = sG\left[\frac{v-s}{s}, d\right]$; en effet en effectuant le changement $v = s(x+1)$, $u = sy$ la fonction $y(x)$est définie par l'équation $y'' = \frac{1}{x+1}F\left(y', \frac{y}{x+1}\right)$ et par les conditions initiales $y = 0$, $y' = d$ pour $x = 0$; par suite y est de la forme $G(x, d)$, donc $u = sG\left(\frac{v-s}{s}, d\right)$. Dès lors la fonction $l(s, d)$ définie par la relation $u(l, s, d) = 0$ est égale au produit de s par une fonction de d. Bien entendu nous supposons que s n'est pas nul, autrement dit, nous éliminons le point origine des arcs sur (Γ), nous savons qu'en ce point le rayon de courbure est nul (d'après le paragraphe 9).

11. Démontrons que la condition suffisante trouvée ci-dessus est nécessaire : soit m le degré (en u) du premier terme de C dont le coefficient n'est pas égal au produit de v^{-m} par une constante, on a

$$C = 1 + 2au + \ldots + g(v)u^m + \ldots \tag{19}$$

où a est une fonction de v $\left(a = \frac{a_1}{v}\right)$. Après le changement de variable et fonction, l'équation différentielle a encore l'expression (16), mais les termes non écrits de degré inférieur à $2m-2$ ne sont pas indépendants de s et vérifient la condition suffisante. Le développement de U s'obtient en remplaçant a par $\frac{a_1}{s}$ dans les termes écrits de (17), les termes non écrits de U correspondent aux termes en u/v de C ou bien sont de degré, par rapport à V et λ, supérieur à $4m-2$. La fonction $V(\lambda, s)$ admet un développement de la forme (18) où les β d'indice inférieur à $4m-3$ sont égaux au produit d'une constante par s^{-1}, puisque les termes correspondants de C vérifient une condition suffisante. On déduit des calculs du paragraphe 8 que

$$V = s\left[-\frac{\lambda}{a_1}+\ldots+\lambda^{4m-3}\left(h+s^m g(s)\,\frac{(-1)^{m+1}(m!)^2}{a_1^{m+1}(2m)!}\right)+\ldots\right],$$

en désignant par h une certaine constante. Pour que la courbe soit une courbe (P′) il est nécessaire que $g(s)$ soit le produit de s^{-m} par une constante. Donc nécessairement C est une fonction de u/v.

12. Le ds^2 de la surface sur laquelle est tracée la courbe (P′) est donc de la forme $du^2+C^2\left(\frac{u}{v}\right)dv^2$, et cette surface S est applicable sur une surface spirale de Maurice Lévy, nous pouvons en effet mettre ce ds^2 sous la forme classique du ds^2 d'une surface spirale, à savoir

$$ds^2 = e^{2v_1}[du_1^2+g^2(u_1)\,dv_1^2],$$

il suffit pour cela d'effectuer la transformation définie par

$$u = vw,\qquad \frac{dv}{v} = dv_1 - \frac{w\,dw}{w^2+C^2(w)},\qquad du_1 = \frac{C(w)\,dw}{\sqrt{w^2+C^2(w)}}\,e^{-\int\frac{w\,dw}{w^2+C^2(w)}}$$

qui conduit à un ds^2 du type précité avec

$$g = \sqrt{w^2+C^2(w)}\,e^{-\int\frac{w\,dw}{w^2+C^2(w)}},$$

où le second membre a été exprimé en fonction de u_1.

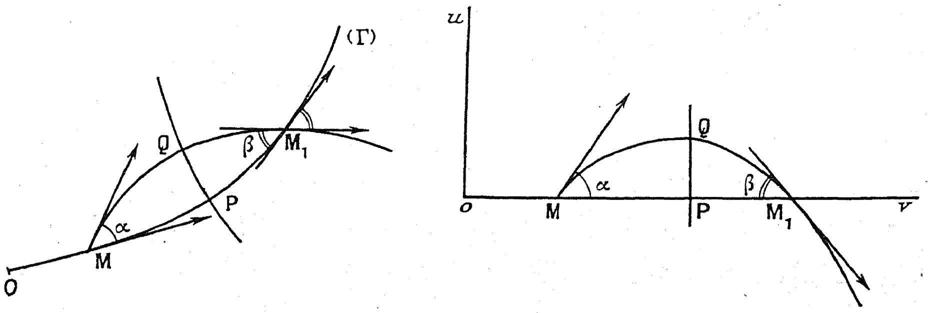
La courbe (Γ) correspond à une courbe $u=$ const. de la surface spirale, c'est-à-dire à une hélice conique (ou spirale logarithmique). Comme dans le cas des courbes (P) nous voyons que la surface S admet un groupe continu de transformations en elle-même, ces transformations correspondent aux rotations et homothéties qui transforment la surface spirale en elle-même et la courbe (Γ) est aussi transformée en elle-même par ces transformations. Géométriquement l'existence de ce groupe nous montre que la condition trouvée est bien suffisante.

CHAPITRE III.

QUELQUES PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DE (P) OU (P′).

13. Les courbes (P) et (P′) sont telles que la figure formée par un arc et sa corde subisse une transformation géométrique simple lorsque l'origine M de l'arc varie et l'angle en M reste constant. Cette transformation est analogue à une translation le long de la courbe dans le cas des courbes (P) et analogue à une homothétie de centre O dans le cas des courbes (P′). D'ailleurs, si l'on considère dans le plan Ouv

Fig. 3.



l'image de la courbe et des géodésiques, la figure représentant celle que nous étudions subit effectivement une translation ou une homothétie de centre O suivant le cas.

Il en résulte que tous les éléments que nous pouvons considérer sur la figure, et qui en général dépendent à la fois de s et de d, sont indépendants de s sur une courbe (P). Sur une courbe (P′) les longueurs sont égales au produit de s par une fonction de d, les angles, les rapports de deux longueurs, ... sont indépendants de s comme sur une courbe (P), etc.

Il nous a semblé intéressant de chercher si l'on peut caractériser les courbes (P), ou les courbes (P′), ou l'ensemble des courbes (P) et (P′), par des propriétés relatives à la forme des fonctions donnant la grandeur d'autres éléments de la figure. Nous n'examinons d'abord que les éléments qui nous ont donné des propriétés caractéristiques aussi bien pour (P) que pour (P′).

14. Quelles sont les courbes telles que la longueur L de la corde géodésique MM_1 soit indépendante de s [c'est le cas des courbes (P)] ou soit égale au produit d'une fonction de s par une fonction de d [c'est le cas des courbes (P′)] ? La longueur L est égale à une intégrale prise le long de la géodésique de M en M_1, or nous connaissons l'expression de u en fonction de v le long de cette courbe et nous obtenons, après les changements de variable et fonction,

$$L = \lambda \int_0^{V(\lambda, s)} \left[\lambda^2 \left(\frac{dU}{dV}\right)^2 + C^2(\lambda^2 U, \lambda V + s)\right]^{\frac{1}{2}} dV. \tag{20}$$

Nous calculons très simplement, à partir des développements (12), (13) et (14), les premiers termes du développement de L

$$L = \frac{\lambda^2}{a} - \frac{a'}{3a^3}\lambda^4 + \lambda^6\left[\frac{1}{2a} - \frac{b}{6a^3} - \frac{2a'^2}{9a^5} + \frac{a''}{12a^4}\right] + \ldots. \tag{21}$$

Il est donc nécessaire que a soit constant pour que L soit indépendant de s; il est nécessaire que a' soit proportionnel à a^2 pour que L soit égal au produit d'une fonction de s $\left(\text{qui est } \frac{1}{a}\right)$ par une fonction de d. Il en résulte — en changeant au besoin l'origine des arcs sur (Γ) — que les premiers termes de C doivent correspondre suivant le cas à une courbe (P) ou à une courbe (P′).

Il est visible sur l'intégrale $\int_s^{s+l} \sqrt{\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + C^2(u, v)}\, dv$, donnant L, qu'il suffit que la courbe soit une courbe (P) pour que L soit indépendant de s. En effet C est alors indépendant de v. De même, si la courbe est une courbe (P′), en tenant compte des expressions de C, u, l dans ce cas, on peut mettre cette intégrale sous la forme

$$s \int_0^{h)} \left\{ g'^2(x, d) + C^2\left[\frac{1}{1+x} g(x, d)\right]\right\}^{\frac{1}{2}} dx.$$

Supposons alors que C admette le développement (15) dans lequel a et les coefficients des termes non écrits de degré inférieur à $2m$ sont des fonctions de s vérifiant la condition suffisante. L'élément différentiel de (20) admet alors le développement

$$1+4a^2\lambda^2V^2+4a\lambda^3V+\frac{\lambda^4}{2}+\ldots+\frac{1}{2}g(s)H(\lambda, V)+\ldots,$$

où la fonction $H(\lambda, V)$ est homogène de degré $4m$ par rapport à l'ensemble des lettres V et λ, les termes non écrits ont un degré supérieur à $4m$, ou bien correspondent à des termes vérifiant la condition suffisante et ont un degré supérieur à 4. Nous aurons besoin ultérieurement de l'expression de $H(\lambda, V)$ qui est

$$\begin{aligned} H(\lambda, V) &= \sum_{j=0}^{m} \frac{2\lambda^{2m+j}V^{2m-j}m!}{a^{-m+j}j!(m-j)!} \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} \frac{2\lambda^{2m+j}V^{2m-j-1}a^{m-j-1}m!}{(2m-j-1)j!(m-j-1)!}\left[\lambda+\frac{2aV(2m-j+1)}{2m-j}\right]. \end{aligned}$$

Pour obtenir L, il suffit de remplacer V par son expression déjà calculée (§ 8 ou 11), à savoir

$$V=-\frac{\lambda}{a}-\frac{a'\lambda^3}{3a^3}+\ldots+(-1)^{m+1}\frac{g(s)(m!)^2}{a^{m+1}(2m)!}\lambda^{4m-3}+\ldots \tag{22}$$

dans le développement

$$\lambda V+\lambda\left[\frac{4}{3}a^2\lambda^2V^3+2a\lambda^3V^2+\frac{\lambda^4V}{2}\right]+\ldots+\frac{1}{2}\lambda g(s)\int_0^V H(\lambda, V)\,dV+\ldots. \tag{23}$$

En tenant compte des degrés des termes qui figurent dans les puissances de V et dépendent de $g(s)$, on calcule le premier terme de L qui dépend de cette fonction inconnue et l'on trouve

$$L=-\frac{\lambda^2}{a}+\ldots+\lambda^{4m-2}(-1)^{m+1}g(s)\frac{(m!)^2}{a^{m+1}(2m)!}+\ldots, \tag{24}$$

les termes non écrits correspondent à des éléments qui vérifient la condition suffisante ou bien sont de degré supérieur à $4m-2$. Il en résulte que $g(s)$ doit être une constante pour que L soit indépendant de s et que $g(s)$ doit être égal au produit par une constante de la fonction a^m pour que L soit égal au produit d'une fonction de s, à savoir $\frac{1}{a}$, par une fonction de λ.

On peut donc caractériser les courbes (P) *par le fait que la longueur de la corde ne dépend pas de la position de l'arc et les courbes* (P′) *par le fait que la longueur de la corde est égale au produit d'une fonction de l'abscisse curviligne de l'origine de l'arc par une fonction de l'angle sous lequel on voit l'arc de son origine.*

15. Nous avons remarqué déjà que le rapport r_1 des longueurs de la corde et de l'arc est indépendant de s aussi bien sur les courbes (P) que sur les courbes (P′) et nous nous proposons de chercher si ce rapport permet de caractériser ces courbes.

Une difficulté se présente ici pour obtenir les conditions imposées aux premiers termes de C : les développements limités donnés précédemment ne permettent pas de conclure et nous devons compléter les calculs du paragraphe précédent en déterminant tous les termes de L qui ont un degré inférieur ou égal a 8. On a

$$\int_0 [\lambda^2 U'^2 + C^2]^{\frac{1}{2}} dV = V + \frac{4}{3} a^2 \lambda^2 V^3 + 2a\lambda^3 V^2 + \frac{\lambda^4 V}{2} + \frac{7}{6} a a' \lambda^3 V^4 + a' \lambda^4 V^3 + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur à 7 par rapport à l'ensemble des lettres V et λ. On obtient les premiers termes du rapport r_1 en remplaçant V par (14) dans le quotient par V de l'expression ci-dessus, donc

$$r_1 = 1 - \frac{\lambda^4}{6} + \frac{\lambda^6 a'}{18 a^2} + \ldots$$

et par suite r_1 ne peut être indépendant de s que si $\frac{a'}{a^2}$ est une constante; donc, ou bien a est une constante, ou bien $a = \frac{a_1}{s}$ (en changeant au besoin l'origine sur la courbe).

Puisqu'il suffit que la courbe soit une courbe (P) ou (P′) pour que r_1 soit indépendant de s, nous pouvons employer le même procédé que plus haut pour montrer que cette condition suffisante est aussi nécessaire. Si C admet le développement (15), nous connaissons le développement (23) de L, suivant les puissances de V et λ. En tenant compte de l'expression de H, les termes non écrits sont de degré supérieur à $4m+2$ (par rapport à l'ensemble des lettres V et λ) ou bien ne dépendent pas des fonctions inconnues et sont de degré supérieur à 6.

Nous obtenons r_1 en remplaçant V par (22) dans le quotient du développement (23) par λV. Le premier terme de r_1 qui peut dépendre de s doit contenir $g(s)$ et pour le calculer nous remarquons que dans le développement de V^p la première puissance de λ dont le coefficient dépend de $g(s)$ est de degré $4m-4+p$. On trouve ainsi que le premier terme de r_1 qui peut dépendre de s est de degré $4m$ et son coefficient est (à une constante additive près)

$$\frac{g(s)}{a^m}\left\{\frac{2}{3}(-1)^m\frac{(m!)^2}{2m!}+\sum_0^m\frac{(-1)^j C_m^j}{2m-j+1}+\sum_0^{m-1}\frac{(-1)^j m\, C_{m-1}^j}{(2m-j)(2m-j-1)}\right\}.$$

La deuxième somme qui figure ci-dessus est connue, la première s'obtient par un procédé analogue à celui employé plus haut et l'on voit que le coefficient de λ^{4m} dans r_1 est (à une constante additive près)

$$\frac{g(s)}{a^m}\,\frac{2}{3}(-1)^{m+1}\frac{(m-1)(m!)^2}{(2m+1)!}.$$

Donc le rapport r_1 ne peut être indépendant de s que si $\frac{g(s)}{a^m}$ est une constante, et par suite il est nécessaire que la courbe soit une courbe (P) ou une courbe (P').

16. Cela étant établi, peut-on distinguer d'après la valeur du rapport r_1 les courbes (P) des courbes (P') sans avoir besoin de calculer la courbure géodésique ? Pour faire cette recherche nous exprimons le rapport r_1 en fonction de d (il est facile de montrer que le développement ne peut contenir aucune puissance fractionnaire); on a

$$(25)\quad r_1 = 1-\frac{d^2}{6}+\frac{d^3}{18}\frac{a'}{a^2}+\ldots+(-1)^{m+1}\frac{g}{a^m}\,\frac{2(m-1)[m!]^2}{3(2m+1)!}\,d^{2m}+\ldots.$$

Ce rapport n'est donc certainement pas une fonction paire de d si la courbe est une courbe (P') puisqu'alors a'/a^2 n'est pas nul. Au contraire sur une courbe (P) il est une fonction paire; on peut le vérifier géométriquement en examinant la surface de révolution sur laquelle s'applique la surface portant la courbe (P). L'équation différentielle des géodésiques nous le montre aussi aisément, car dans le cas d'une courbe (P) l'équation (6) est de la forme $u'' = 2\frac{C'_u}{C}u'^2 + CC'_u$ puisque C est indépendant de v; donc la fonction $u(v-s, -d)$ définie par les conditions initiales $u = 0$, $\frac{du}{dv} = -d$ pour $v - s = 0$ est identique à la fonction $u[-(v-s), +d]$ définie par les conditions $u = 0$, $\frac{du}{d(-v)} = +d$. Donc les valeurs algébriques de deux arcs correspondant à $+d$ et $-d$ sont deux nombres opposés (ce qui prouve que l est alors une fonction impaire de d), les longueurs des cordes correspondantes sont égales (plus précisément on obtient, en comptant les cordes positivement dans un sens défini par le sens positif sur la courbe, deux valeurs opposées), donc le rapport r_1 ne doit pas être modifié par le changement de d en $-d$.

Nous avons donc là un moyen de distinguer les courbes (P) des courbes (P′) lorsqu'on sait que r_1 est indépendant s; mais *il n'est même pas nécessaire de démontrer que r_1 est indépendant de s pour caractériser une courbe sur laquelle ce rapport est une fonction paire de d.*

En effet, supposons seulement que r_1 soit une fonction paire de d, il faut que les coefficients des puissances de λ dont le degré est un multiple de 4 plus 2, soient tous nuls dans le développement de r_1. Il faut en particulier que a'/a^2 soit nul, donc que le premier terme de C corresponde à une courbe (P). Soit alors m le degré en u du premier terme de C qui dépend de v, on a

$$(15') \qquad C = 1 + 2\lambda^2 a U + \ldots + \lambda^{2m} g(s) U^m + \lambda^{2m+1} g'(s) U^m V + \ldots,$$

d'où

$$(17') \qquad U = a V^2 + \lambda V + \lambda^2 V^4(\ldots) + \ldots + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda^{2m-2+j} V^{2m-j} a^{m-j-1} m!\, g(s)}{(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)!}$$
$$+ \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda^{2m-1+j} V^{2m+1-j} a^{m-1-j} m!}{(2m-j+1)(2m-j)j!(m-j-1)!} g'(s) + \ldots,$$

les termes non écrits dans (17′) sont indépendants de s et de degré supérieur à 5 ou bien dépendent de s mais sont de degré supérieur à $4m$ (degré par rapport à l'ensemble des lettres V et λ). Nous pouvons calculer dans le développement de $V(\lambda; s)$ le terme qui dépend de s et est de degré $4m-1$ en λ. On trouve, en évaluant encore à l'aide des fonctions B une certaine somme, que

$$(26) \qquad V = -\frac{\lambda}{a} + \lambda^3(\ldots) + \ldots + \lambda^{4m-3}\frac{g(s)}{a^{m+1}}(-1)^{m+1}\frac{(m!)^2}{2m!} + \lambda^{4m-1}\frac{g'(s)}{a^{m+2}}(-1)^m\frac{m[m!]^2}{(2m+1)!} + \ldots.$$

D'autre part nous calculons dans l'élément différentiel de (20) les termes dépendants de s qui sont de degré $4m$ ou $4m+2$ par rapport à l'ensemble des lettres V et λ et l'on en déduit que l'on obtient le développement de r_1 en remplaçant V par (26) dans le développement ci-dessous :

$$1 + \frac{4}{3}a^2\lambda^2V^2 + 2a\lambda^3V + \frac{\lambda^4}{2} + \ldots + \sum_{j=0}^{m-1}\frac{\lambda^{2m+j}V^{2m-j-1}a^{m-j-1}(2aV+\lambda)m!}{(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)!}g(s)$$
$$+ \sum_{j=0}^{m}\frac{\lambda^{2m+j}V^{2m-j}a^{m-j}m!}{(2m-j+1)j!(m-j)!}g(s) + \sum_{j=0}^{m-1}\frac{\lambda^{2m+j+1}V^{2m-j}a^{m-j-1}(2aV+\lambda)m!}{(2m-j+1)(2m-j)j!(m-j-1)!}g'(s)$$
$$+ \sum_{j=0}^{m}\frac{\lambda^{2m+j+1}V^{2m-j+1}a^{m-j}m!\,g'(s)}{(2m-j+2)j!(m-j)!} + \ldots,$$

les termes non écrits sont indépendants de s et, par rapport à l'ensemble des deux lettres V et λ, de degré supérieur à 7 ou bien dépendent de s et sont de degré supérieur à $4m+2$. Or, dans le développement de V^p les termes contenant $g(s)$ sont, en λ, de degré $4m+p-4$ ou de degré au moins égal à $4m+p$ et les termes contenant g' de degré au moins égal à $4m+p-2$, les premiers termes sont de degré p et les suivants au moins de degré $p+4$. Donc les seuls termes de r_1 qui ont pour degré $4m+2$, sont

$$\lambda^{4m+2}\left\{\frac{(-1)^m g' m[m!]^2}{3a^{m+1}(2m+1)!} + \frac{g'}{a^{m+1}}\sum_0^m\frac{(-1)^{j+1}m!}{(2m-j+2)j!(m-j)!} + k\right\},$$

où k est le coefficient correspondant à l'hypothèse $g'=0$; donc k est nul puisque les premiers termes de C vérifient une condition suffisante pour que r_1 soit une fonction paire de d. La somme ci-dessus se calcule facilement et l'on obtient en remplaçant λ^2 par d

$$(27) \qquad r_1 = 1 - \frac{d^2}{6} + \ldots + d^{2m}\left[\frac{g(s)}{a^m}(-1)^{m+1}\frac{2(m-1)[m!]^2}{3(2m+1)!} + h\right] + d^{2m+1}\frac{g'(s)}{a^{m+1}}\frac{(-1)^m(2m-3)[m!]^2}{6(2m+1)!} + \ldots.$$

Donc le rapport r_1 ne peut être une fonction paire de d que si $g'(s)$ est nul, on démontrera ainsi de proche en proche que tous les coefficients de (12) sont indépendants de v, donc la courbe est une courbe (P). On démontrerait de même très simplement à l'aide des développements (14), (26), (21), (24) que l'on peut caractériser les courbes (P) par le seul fait que l'une des fonctions l ou L est une fonction impaire de d (sans faire aucune hypothèse sur la dépendance de ces fonctions vis-à-vis de s).

17. Les hypothèses que nous avons faites sur la surface, la courbe, la valeur de d, ... nous permettent de revenir à la variable l, au lieu de la variable d, en calculant la fonction inverse définie par $l = \lambda V(\lambda, s)$, $\lambda^2 = d$. Ce retour à la variable l permettra une généralisation plus facile en géométrie affine, que nous publions séparément; nous ne donnons ci-dessous que les résultats et certains calculs qui nous serons utiles plus loin.

Si l'on a

$$l = -\frac{d}{a} - \frac{a'}{3a^3}d^2 + \ldots + \alpha_k d^k + \alpha_{k+1} d^{k+1} + \ldots,$$

on obtient

$$(28) \qquad d = -al - \frac{a'}{3}l^2 + \ldots + l^k[(-1)^k a^{k+1}\alpha_k + \ldots] + l^{k+1}\left[(-1)^{k+1}a^{k+2}\alpha_{k+1} + \frac{(-1)^k(2+k)}{3}a^k a' \alpha_k + \ldots\right] + \ldots.$$

Il est alors facile de calculer le développement de r_1 en fonction de l [en utilisant les développements (25) et (27)] et d'en conclure que : *si le rapport des longueurs de la corde et de l'arc ne dépend que de la longueur de l'arc, la courbe est une courbe* (P), de même, *ce rapport ne peut être une fonction paire de l que si la courbe est une courbe* (P) ; enfin *si ce rapport ne dépend que du quotient de la longueur de l'arc par une* *fonction de l'abscisse curviligne de l'origine, la courbe est une courbe* (P').

La substitution de la longueur de la corde à celle de l'arc en tant que paramètre indépendant nous conduit à des énoncés tout à fait analogues. On les démontre en cherchant l'expression de d en fonction de L à l'aide des développements (21) et (24), où l'on remplace λ^2 par d.

18. En utilisant de nouveau la variable arbitraire d, nous étudions l'aire balayée par une géodésique de la surface qui passe par M et dont un point décrit l'arc MM_1. Nous avons remarqué géométriquement que pour une courbe (P) cette aire est indépendante de s et pour une courbe (P') elle est égale au produit de s^2 par une fonction de d. Or cette aire $A(s, d)$ est égale à l'intégrale $\iint C(u, v)\, du\, dv$ étendue au domaine limité sur la surface par l'arc et sa corde. C'est donc, après les changements de variable et fonction

$$A = \lambda^3 \int_0^{V(\lambda, s)} dV \int_0^{U(V, \lambda, s)} C[\lambda^2 U, \lambda V + s]\, dU. \tag{29}$$

L'intégrale donnant A nous montre très simplement que les conditions — (Γ) courbe (P) ou courbe (P') — sont suffisantes pour que l'aire soit indépendante de s ou produit d'une fonction de s par une fonction de d. Par exemple, dans le cas des courbes (P') on a pour définir cette aire l'intégrale $\int_s^{s+l} dv \int_0^u C\left(\frac{u}{v}\right) du$, d'où, en désignant par $K(x)$ la fonction $\int_0^x C(x)\, dx$ et en posant $v = s(1 + x)$,

$$A = s^2 \int_0^{h(d)} (1 + x) K\left[\frac{1}{x + 1} g(x, d)\right] dx.$$

A l'aide des formules (13) et (14) on calcule les premiers termes de A qui sont

$$A = \frac{\lambda^6}{6a^2} + \frac{\lambda^8 a'}{12a^4} + \ldots, \tag{30}$$

donc l'aire ne peut être indépendante de s que si a est une constante et cette aire ne peut être le produit d'une fonction de s par une fonction de d que si cette fonction de s est égale à $\frac{1}{a^2}$ et si a' est proportionnel à a^2. Donc il est nécessaire que les premiers termes de C correspondent à une courbe (P) ou à une courbe (P′) suivant le cas.

Nous démontrons que ces conditions suffisantes sont nécessaires en utilisant toujours le même procédé : soit m le degré en u du premier terme de C dont le coefficient ne vérifie pas la condition suffisante; alors, en tenant compte de (17),

$$\int_0^{\mathrm{U}} \mathrm{C}\, d\mathrm{U} = a\mathrm{V}^2 + \lambda\mathrm{V} + \ldots + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda^{2m-2+j}\,\mathrm{V}^{2m-j}\,a^{m-j-1}\,m\,!}{(2m-j)(2m-j-1)j\,!\,(m-j-1)\,!}\, g(s) + \ldots$$

les termes non écrits sont par rapport à V et λ de degré supérieur à $4m-2$ s'ils dépendent d'une fonction inconnue ou de degré supérieur à 2 s'ils correspondent à des éléments de C vérifiant la condition suffisante.

Nous multiplions l'expression ci-dessus par $d\mathrm{V}$, puis nous intégrons et remplaçons V par le développement (22). Les remarques faites (§ 15) au sujet du développement de V^p nous montrent que l'on a

$$\mathrm{A} = \frac{\lambda^6}{6a^2} + \ldots + \lambda^{4m+2}\,\frac{g(s)}{a^{m+2}} \sum_0^{m-1} \frac{(-1)^{j+1}\,m\,!}{(2m-j+1)(2m-j)(2m-j-1)j\,!\,(m-j-1)\,!} + \ldots,$$

les termes non écrits étant, en λ, d'un degré supérieur à $4m+2$ ou bien sont de la forme voulue.

La somme précédente s'exprime simplement à l'aide de sommes déjà calculées (§ 8 et 16) et l'on a

$$\mathrm{A} = \frac{d^3}{6a^2} + \frac{d^4 a'}{12a^4} + \ldots + d^{2m+1}\left\{\frac{g(s)}{a^{m+2}}(-1)^m \frac{m\,!\,(m+1)\,!}{2(2m+1)\,!} + \frac{k}{a^2}\right\} + \ldots$$

et A ne peut être une fonction de la forme désirée que si $g(s)$ est le produit de a^m par une constante. Donc :

Si l'aire limitée sur une surface par un arc de courbe et sa corde géodésique est indépendante de la position de l'origine de l'arc sur la courbe, la courbe est une courbe (P); *si cette aire est égale au produit d'une* *fonction de l'abscisse curviligne de l'origine de l'arc par une fonction de l'angle sous lequel on voit l'arc de son origine, la courbe est une courbe* (P').

19. Comme pour les fonctions étudiées plus haut, le fait que la fonction A est impaire suffit pour caractériser une courbe (P) sans même que l'on ait besoin d'établir l'indépendance de A vis-à-vis de s. En effet le coefficient de λ^8 dans (30) ne peut être nul que si a est une constante; nous pouvons alors supposer que C admet le développement (15') et nous déterminons le coefficient de λ^{4m+4} dans le développement de A; ce coefficient est nul si $g(s)$ est une constante, car les premiers termes de C vérifient une condition suffisante pour que A soit une fonction impaire de d. En utilisant la formule (17'), on voit que les termes de A dépendants de $g(s)$ et de degré, en λ, $4m+2$ et $4m+4$ s'obtiendront en remplaçant V par (26) dans

$$\lambda^3 a \frac{V^3}{3} + \frac{\lambda^4 V^2}{2} + \ldots + \sum_{0}^{m-1} \frac{\lambda^{2m+j+1} V^{2m-j+1} a^{m-j-1} m!\, g(s)}{(2m-j+1)(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)!}$$
$$+ \sum_{0}^{m-1} \frac{\lambda^{2m+j+2} V^{2m-j+2} a^{m-j-1} m!\, g'(s)}{(2m-j+2)(2m-j+1)(2m-j)j!(m-j-1)!} + \ldots,$$

les termes non écrits sont, par rapport à l'ensemble V et λ, de degré supérieur ou égal à 10 s'ils sont indépendants de g ou de degré supérieur à $4m+4$ s'ils dépendent de fonctions inconnues. Par suite le coefficient de d^{2m+2} dans le développement de A est $g'(s)\dfrac{(-1)^{m+1} m[m!]^2}{4a^{m+3}(2m+1)!}$ et A ne peut être une fonction impaire de d que si g' est identiquement nul.

Une propriété élémentaire de l'aire d'un triangle nous a conduit à chercher dans quel cas l'aire A est égale au produit des longueurs de l'arc et de la corde par une fonction de l'angle à l'origine; autrement dit, quelles conditions doit vérifier la courbe pour que le rapport r_2 de A au produit lL soit une fonction de d seulement? Nous savons déjà qu'il suffit que la courbe soit une courbe (P) ou une courbe (P'). Les premiers termes du rapport r_2 s'obtiennent aisément à l'aide des développements (30), (21) et (14); on trouve, en revenant à la variable d, $\frac{d}{6} - \frac{a'}{36a^2}d^2 + \ldots$, ce qui montre que r_2 n'est indépendant de s, quel que soit d, que si a' est proportionnel à a^2 [donc le premier terme de C correspond à une courbe (P'), ou à une courbe (P) si le coefficient de proportionnalité est nul]; nous remarquons aussi que ce rapport ne peut être une fonction impaire de d que si la fonction a est une constante. En supposant alors que C admet le développement (15) dans lequel les termes non écrits correspondent à la condition suffisante ou bien sont de degré (en λ) supérieur à $2m$ et en utilisant les développements déjà calculés de V, L, A, on démontre que le premier terme de r_2 qui peut dépendre de la fonction g est en λ de degré $4m-2$ et le coefficient de $g(s)$ dans ce terme est $\frac{[m!]^2(m-1)(-1)^{m+1}}{6a^m(2m+1)!}$; donc le rapport r_2 ne peut être indépendant de s que si $g(s)$ est égal au produit d'une constante par a^m. Donc, *si le rapport r_2 est indépendant de s, et dépend seulement de d, la courbe est une courbe* (P) *ou une courbe* (P'). Pour démontrer que ce rapport ne peut être une fonction impaire de d que sur les courbes (P), il suffit de calculer le coefficient de d^{2m} dans ce rapport, calcul qui n'offre aucune difficulté, car tous les termes utiles ont déjà été donnés; on trouve que le coefficient en question est égal à $\frac{(-1)^{m+1}m[m!]^2g'(s)}{12a^{m+3}(2m+1)!}$; donc il ne peut être nul que si $g'(s)$ est identiquement nul.

20. Nous nous proposons maintenant d'étudier la longueur de la flèche PQ de l'arc MM_1, c'est la longueur de la portion de géodésique normale en P à (Γ) et normale en Q à la corde MM_1 (*fig.* 3). L'équation de cette géodésique est donc $v =$ const., et la valeur de la constante est telle que l'on ait, en Q, $\frac{du}{dv} = 0$; la longueur cherchée est la valeur de u correspondant au point Q.

Donc, après le changement de variable nous pourrons déterminer le point P comme correspondant à la valeur V_1 de V telle que $\frac{dU}{dV}$ soit nul, cette valeur V_1 doit être comprise entre 0 et V et tendre vers 0 en même temps que d. La longueur de la flèche F est alors égale à la valeur de $\lambda^2 U$ où l'on remplace V par V_1.

Nous calculons V_1 par la méthode des coefficients indéterminés à partir du développement de $\frac{dU}{dV}$. Or, si C admet le développement (12),

(31) $$\frac{dU}{dV} = 2aV + \lambda[1 + V^2 a'] + \lambda^2 V^3 \left[\frac{20}{3}a^3 + \frac{2}{3}ab + \frac{a''}{3}\right] + \lambda^3 V^2(10a^2 + b) + 4aV\lambda^4 + \ldots,$$

les termes non écrits sont, par rapport à V et λ, de degré supérieur à 5; les premiers termes de V_1 sont donc

(32) $$V_1 = -\frac{\lambda}{2a} - \frac{\lambda^3 a'}{8a^3} + \lambda^5 \left[\frac{1}{6a} + \frac{a''}{48a^4} - \frac{a'^2}{16a^5} - \frac{b}{12a^3}\right] + \ldots.$$

En remplaçant V par (32) dans (13), on obtient, après multiplication par λ^2,

(33) $$F = -\frac{\lambda^4}{4a} - \frac{\lambda^6 a'}{24a^3} + \lambda^8 \left[\frac{3}{16a} - \frac{a'^2}{32a^5} - \frac{b}{32a^3} + \frac{a''}{192a^4}\right] + \ldots.$$

Pour que F soit indépendant de la position de l'arc sur la courbe il faut donc que a soit une constante; pour que F soit égal au produit d'une fonction de s par une fonction de d, il faut que a' soit proportionnel à a^2; nous obtenons bien les premières conditions correspondant soit à une courbe (P), soit à une courbe (P').

Il est facile de vérifier analytiquement qu'il suffit que la courbe soit une courbe (P) ou une courbe (P') pour que F ait l'une des formes désirées car nous connaissons alors les formes des fonctions C et u.

Démontrons que ces conditions suffisantes sont nécessaires en désignant toujours par m le degré du premier terme de C dont le coefficient ne correspond pas à la condition suffisante. Nous connaissons alors l'expression de U (17), d'où l'on déduit celle de $\frac{dU}{dV}$, et enfin

(34) $$V_1 = -\frac{\lambda}{2a} + \ldots + \lambda^{4m-3} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} \frac{m!\, 2^{-2m+j}(-1)^j g(s)}{(2m-j-1)j!(m-j-1)!\, a^{m+1}} + \ldots \right\} + \ldots,$$

les termes non écrits sont, en λ, de degré supérieur à $4m-3$ ou bien proviennent d'éléments de C qui vérifient la condition suffisante.

Nous aurons F en remplaçant V par (34) dans le développement de $\lambda^2 U$ et par suite

$$F = -\frac{\lambda^4}{4a} + \ldots + \lambda^{4m} \left\{ \sum_{0}^{m-1} \frac{(-1)^j m!\, 2^{-2m+j} g(s)}{(2m-j)(2m-j-1)j!(m-j-1)!\, a^{m+1}} + \ldots \right\},$$

les termes non écrits sont de degré supérieur à $4m$ ou bien correspondent à des éléments de C qui vérifient la condition suffisante.

Pour calculer le coefficient figurant dans l'expression ci-dessus, nous remarquons qu'il est égal à

$$\sum \frac{(-1)^{j+1} m!\, 2^{-2m+j}}{(2m-j)j!(m-j-1)!} + \frac{1}{2} \sum \frac{(-1)^{j} m!\, 2^{-2m+j+1}}{(2m-j-1)j!(m-j-1)!},$$

or ces sommes sont les valeurs pour $x = 1/2$ des fonctions suivantes, nulles toutes deux pour $x = 0$,

$$\sum \frac{(-1)^{j+1} m!\, x^{2m-j}}{(2m-j)j!(m-j-1)!} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^{j} m!\, x^{2m-j-1}}{(2m-j-1)j!(m-j-1)!},$$

dont les dérivées sont respectivement

$$(-1)^m m x^m (1-x)^{m-1} \quad \text{et} \quad (-1)^{m+1} m (1-x)^{m-1} x^{m-1},$$

et nous sommes amené au calcul des intégrales

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1}(1-x)^{m-1}\, dx \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^m (1-x)^{m-1}\, dx,$$

or le changement de x en $1-x$ montre que I a aussi pour expression

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{m-1}(1-x)^{m-1}\, dx$$

et, par suite,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{m-1}\, dx = \frac{m!(m-1)!}{(2m)!}.$$

D'autre part on a

$$\mathrm{I} - \mathrm{J} = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{m-1}(1-x)^m\, dx,$$

d'où, en faisant une intégration par parties, $\mathrm{J} = \frac{\mathrm{I}}{2} - \frac{2^{-2m-1}}{m}$. Donc le coefficient de $\lambda^{4m}\frac{g(s)}{a^{m+1}}$ dans le développement de F est égal à $(-1)^m m\left(\mathrm{J} - \frac{\mathrm{I}}{2}\right)$ ou $(-1)^{m+1} 2^{-2m-1}$, il n'est jamais nul et

$$\mathrm{F} = -\frac{\lambda^4}{4a} + \ldots + \lambda^{4m}\left[\frac{(-1)^{m+1} g(s)}{2^{2m+1} a^{m+1}} + \ldots\right] + \ldots \tag{35}$$

ne peut être de la forme désirée que si la courbe est une courbe (P) ou une courbe (P′). Donc : *si la longueur de la flèche est indépendante de s la courbe est une courbe* (P); *si cette longueur est le produit d'une fonction de s par une fonction de d la courbe est une courbe* (P′).

Nous pourrions démontrer maintenant que le rapport r_3 des longueurs de la flèche et de l'arc permet de caractériser les courbes (P) et (P′), courbes sur lesquelles il ne dépend que de d. De même, si r_3 est une fonction impaire de d ou si F est une fonction paire de d, la courbe est une courbe (P). Nous n'avons pas jugé utile de reproduire ici la démonstration de la première de ces propriétés (qui doit être faite tout à fait comme les précédentes); nous aurons plus loin besoin d'effectuer un calcul plus complet que celui qu'il y aurait lieu de faire pour établir les deux autres propriétés mentionnées et nous renvoyons le lecteur au paragraphe 24.

CHAPITRE IV.

AUTRES PROPRIÉTÉS DES COURBES (P) ET (P′). PROPRIÉTÉS CARACTÉRISTIQUES DES COURBES (P).

21. Les recherches précédentes ont toutes abouti à des résultats complets et nous avons obtenu, assez simplement, des propriétés caractéristiques des courbes (P) ou (P′); il n'en sera pas de même dans les cas que nous allons étudier. Nous nous proposons en effet d'envisager des éléments de notre figure qui sont indépendants de s, aussi bien sur les courbes (P) que sur les courbes (P′), mais qui, dans le cas des courbes (P), conduisent à des expressions particulièrement simples (ils sont indépendants de s et de d, ou bien sont du premier degré en d). En raison même de cette simplicité les conditions nécessaires que nous obtiendrons en exprimant que ces éléments sont indépendants de s, seront moins restrictives que celles indiquées par la condition suffisante connue et il ne nous a pas été possible, en général, d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes. Cependant nous pourrons toujours caractériser les courbes (P) par des propriétés intéressantes relatives à ces éléments.

L'élément qui nous a permis d'obtenir les conclusions les plus précises, est le rapport r_4 des arcs MP et MM_1; r_4 fixe la position de la flèche et est manifestement indépendant de s aussi bien sur (P) que sur (P′), il s'obtient en déterminant le quotient des fonctions $V_1(s, \lambda)$ et $V(s, \lambda)$ que nous connaissons déjà (§ 20 et 7). Les premiers termes de ce rapport sont

$$r_4 = \frac{1}{2} - \lambda^2 \frac{a'}{24a^2} + \lambda^4\left(\frac{a''}{48a^3} - \frac{5a'^2}{144a^4}\right) + \ldots.$$

Pour que r_4 soit indépendant de s il faut donc que a' soit proportionnel à a^2, et a est une constante ou bien correspond à une courbe (P′); mais nous remarquons que le coefficient b de C ne figure pas dans le coefficient de λ^4 du développement précédent. Celà était à prévoir car dans le cas des courbes (P) le rapport r_4 est constant et égal à 1/2; en effet si nous examinons le modèle particulier de courbe (P) réalisé par un parallèle de surface de révolution, nous remarquons que l'arc MM_1 et la figure formée par l'arc et sa corde sont symétriques par rapport au plan méridien passant par le milieu de l'arc, par suite la flèche est un arc de ce méridien et le rapport MP/MM_1 est bien égal à 1/2. Nous en concluons que dans le développement de r_4 doivent disparaître tous les termes qui ne contiennent aucune des dérivées des fonctions de v figurant dans le développement par rapport à u de la fonction C. Cette remarque nous fournira une vérification des calculs ultérieurs si nous conservons dans C la lettre a, sans expliciter cette fonction de s dans le cas des courbes (P′); cette vérification est d'autant plus intéressante que les termes qui doivent disparaître dans les résultats sont ceux qui correspondent aux calculs les plus complexes.

Supposons que m soit le degré (en u) du premier terme de C dont le coefficient ne correspond pas à une courbe (P) ou (P′) suivant le choix fait pour a, et déterminons les conditions nécessaires auxquelles doit satisfaire la fonction $g(s)$; nous devons trouver une (ou plusieurs) équation différentielle.

Nous avons vu que V_1 admet le développement (34), la somme qui figure dans le coefficient de λ^{4m-3} a été calculée et l'on vérifie que le coefficient de λ^{4m-4} dans r_4 est indépendant de la fonction $g(s)$, donc est indépendant de s d'après nos hypothèses sur les premiers termes de C.

Nous devons alors calculer dans V et V_1 les coefficients de λ^{4m-1} dans le cas où a est une fonction de s (le calcul pour V a été déjà fait plus haut lorsque a est une constante). Soit donc

$$C = 1 + 2au + bu^2 + \ldots + g(s)u^m + h(s)u^{m+1} + \ldots; \tag{36}$$

l'équation (6) devient après le changement de variable

$$\begin{aligned} U'' = {} & 2a + 2\lambda a' V + \lambda^2[a'' V^2 + (4a^2 + 2b)U + 4aU'^2] + \ldots \\ & + \lambda^{2m-2} mg U^{m-1} + \lambda^{2m-1} mg' U^{m-1} V \\ & + \lambda^{2m}\left[\frac{m}{2} g'' U^{m-1} V^2 + 2mg U^{m-1} U'^2 + (m+1)(h + 2ag)U^m\right] + \ldots, \end{aligned} \tag{37}$$

les termes non écrits sont, en λ, de degré supérieur à $2m$ s'ils contiennent des fonctions de forme inconnue, ou supérieur à 2, s'ils ne contiennent que des fonctions correspondant à la condition suffisante.

Dans ce paragraphe nous n'avons besoin que des termes de U dont le degré est inférieur ou égal à $4m$, on trouve

$$\begin{aligned} U = {} & aV^2 + \lambda V + \lambda V^3 \frac{a'}{3} + \lambda^2 V^4\left(\frac{5}{3}a^3 + \frac{ab}{6} + \frac{a''}{12}\right) + \lambda^3 V^3\left(\frac{10}{3}a^2 + \frac{b}{3}\right) \\ & + \lambda^4 V^2 2a + \ldots + \sum_0^{m-1} \frac{\lambda^{2m-2+j} V^{2m-j} m!\, a^{m-1-j}}{(2m-j)(2m-j-1)j!\,(m-j-1)!} g(s) \\ & + \sum_0^{m-1} \frac{\lambda^{2m-1+j} V^{2m+1-j} m!\, a^{m-1-j} g'(s)}{(2m-j+1)(2m-j)j!\,(m-j-1)!} \\ & + \sum_0^{m-2} \frac{\lambda^{2m-1+j} V^{2m+1-j} m!\, a^{m-2-j} a' g(s)}{3(2m-j+1)(2m-j)j!\,(m-j-2)!} + \ldots. \end{aligned} \tag{38}$$

Les degrés des différents termes figurant dans le développement d'une puissance V^p de V sont $p, p+2, \ldots$ si ces termes sont indépendants des fonctions inconnues et $4m+p-4$, $4m+p-2$, $\ldots$ s'ils en dépendent; cette remarque nous permet de calculer

$$\begin{aligned} V = {} & -\frac{\lambda}{a} + \frac{\lambda^3 a'}{3a^3} + \lambda^5\left[\frac{1}{3a} - \frac{b}{6a^3} - \frac{2a'^2}{9a^5} + \frac{a''}{12a^4}\right] + \ldots \\ & + \lambda^{4m-3}\frac{g}{a^{m+1}}(-1)^{m+1}\frac{(m!)^2}{2m!} + \lambda^{4m-1}\frac{g'}{a^{m+2}}(-1)^m\frac{m[m!]^2}{(2m+1)!} \\ & + \lambda^{4m-1}\frac{ga'}{a^{m+3}}(-1)^{m+1}\frac{(m^2+6m+2)[m!]^2}{3(2m+1)!} + \ldots, \end{aligned} \tag{39}$$

les termes non écrits sont indépendants des fonctions inconnues et de degré supérieur à 5 ou bien dépendent des fonctions inconnues et sont de degré supérieur à $4m-1$. La somme, coefficient de $\lambda^{4m-1}ga'a^{-m-3}$, a été calculée comme les précédentes en utilisant une fonction B.

Pour calculer V_1 nous utilisons l'expression de $\frac{dU}{dV}$ et nous faisons des remarques, analogues aux précédentes, sur les degrés des termes du développement de V_1^p. Nous obtenons ainsi

$$
(40)\qquad \begin{aligned}
V_1 = &-\frac{\lambda}{2a}-\frac{\lambda^3 a'}{8a^3}+\ldots+\lambda^{4m-3}(-1)^{m+1}\frac{g(s)}{a^{m+1}}\frac{[m!]^2}{2(2m)!}\\
&+\lambda^{4m-1}\frac{(-1)^m g'}{4a^{m+2}}\left[\frac{(m!)^2}{2m!}-\frac{1}{2^{2m}}\right]\\
&+\lambda^{4m-1}\frac{ga'}{a^{m+3}}\left[\frac{(-1)^m}{3.2^{2m+2}}+(-1)^{m+1}\frac{(m+4)[m!]^2}{12(2m)!}\right]+\ldots,
\end{aligned}
$$

les coefficients de cette expression s'obtiennent à l'aide d'intégrales définies prises entre les limites o et $1/2$, comme nous l'avons fait pour calculer F au paragraphe 20. Les termes non écrits correspondent à la condition suffisante ou sont de degré supérieur à $4m-1$. Donc le rapport cherché admet pour développement

$$
\begin{aligned}
r_4 = &\frac{1}{2}-\lambda^2\frac{a'}{24a^2}+\ldots+\lambda^{4m-2}\frac{ga'}{a^{m+2}}(-1)^{m+1}\left[\frac{1}{3.2^{2m+2}}+\frac{(m!)^2(4m-1)}{24(2m+1)!}\right]\\
&+\lambda^{4m-2}\frac{(-1)^{m+1}g'}{4a^{m+1}}\left[\frac{(m!)^2}{(2m+1)!}-\frac{1}{2^{2m}}\right]+\ldots,
\end{aligned}
$$

les termes non écrits sont indépendants de s ou bien sont de degré supérieur à $4m-2$.

Pour que ce rapport soit indépendant de s, il est seulement nécessaire que g' soit une constante si les premiers termes de C correspondent à une courbe (P) ou bien que g vérifie l'équation différentielle suivante si les premiers termes correspondent à une courbe (P')

$$
(41)\qquad gs^m\left[\frac{1}{3.2^{2m}}+\frac{(4m-1)[m!]^2}{6(2m+1)!}\right]+g's^{m+1}\left[\frac{1}{2^{2m}}-\frac{(m!)^2}{(2m+1)!}\right]=\text{const.},
$$

le coefficient de $g(s)$ dans cette équation ne peut pas être nul, puisqu'il est la somme de deux termes positifs, le coefficient de $g'(s)$ non plus, comme on le vérifie aisément, car il faudrait que $2^{2m}(m!)^2$ soit égal à $(2m+1)!$, or $(2m+1)!$ est égal au produit des nombres impairs $1.3.5.7\ldots(2m+1)$ par $2^m m!$, donc si le coefficient de $g'(s)$ était nul, $2^m m!$ serait égal à un nombre impair. La relation que nous venons de trouver n'exige donc pas que la fonction inconnue $g(s)$ ait la forme correspondant à une courbe (P) ou (P'); si les premiers termes de C sont indépendants de s, il est seulement nécessaire que g soit de la forme $k_2 s + k_1$ (k_1 et k_2 étant des constantes); si les premiers termes de C correspondent à une courbe (P') on doit avoir $g = k_1 s^{-m} + k_2 s^{-\frac{\mu}{\nu}}$ en désignant par μ et ν les coefficients de l'équation (41), notons d'ailleurs que l'on ne peut pas avoir $\mu = m\nu$ car il faudrait que le produit par $(3m - 1)$ des $m + 1$ premiers nombres impairs fût égal à $(10m - 1)2^{m-1}m!$

22. Le terme suivant du rapport r_4 dépend de g, g', g'', mais non pas de la fonction inconnue nouvelle $h(s)$; par suite il nous fournira une seconde équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction g et l'on peut espérer que cette équation ne sera pas une conséquence de (41) et donnera la condition k_2 nul.

L'équation différentielle donnant U, telle qu'elle est écrite sous la forme (37), nous permet d'effectuer le calcul des termes de U dans lesquels la somme des degrés de V et λ est égale à $4m + 2$ et qui contiennent une des fonctions inconnues g ou h ou leurs dérivées. Ces termes sont obtenus en faisant des remarques analogues à celles qui nous ont permis d'établir la formule (11).

Bien que ce ne soit pas la manière la plus rapide d'écrire ces termes de U, nous les donnons en indiquant les termes de l'équation (37) auxquels ils correspondent :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{m-1} \frac{\lambda^{2m+j} V^{2m-j+2} m!\, a^{m-1-j} g''(s)}{2(2m-j+2)(2m-j+1)j!\,(m-j-1)!} \\
&+ \sum_{0}^{m} \frac{\lambda^{2m+j} V^{2m-j+2}(m+1)!\, a^{m-j}}{(2m-j+2)(2m-j+1)j!\,(m-j)!}(h + 2ag) \\
&+ \sum_{0}^{m-1} \frac{8\lambda^{2m+j} V^{2m-j+1} m!\, a^{m-j}}{(2m-j+1)j!\,(m-j-1)!}\left[\frac{aV}{2m-j+2} + \frac{\lambda}{2m-j}\right] g \\
&+ \sum_{0}^{m-1} \frac{2\lambda^{2m+j+2} V^{2m-j} a^{m-j-1} g}{(2m-j)(2m-j-1)j!\,(m-j-1)!}
\end{aligned}$$

provenant des termes en λ^{2m+1} de (37);

$$\sum_0^{m-1}\frac{\lambda^{2m+j}V^{2m-j+2}\,m\,!\,a^{m-j-1}(4a^2+2b)\,g(s)}{(2m-j+2)(2m-j+1)(2m-j)(2m-j-1)j\,!\,(m-j-1)\,!}$$

$$+\sum_0^{m-1}\frac{\lambda^{2m+j}V^{2m-j+1}\,m\,!\,a^{m-j}\,8g(s)}{(2m-j+1)(2m-j-1)j\,!\,(m-j-1)\,!}\left[\frac{2aV}{2m-j+2}+\frac{\lambda}{2m-j}\right]$$

provenant des termes en λ^2 de (37);

$$\sum_0^{m-2}\frac{\lambda^{2m+j}V^{2m-j+2}\,m\,!\,a^{m-2-j}\,g(s)}{(2m-j+2)(2m-j+1)j\,!\,(m-j-2)\,!}\left(\frac{5a^3}{3}+\frac{ab}{6}+\frac{a''}{12}\right)$$

$$+\sum_0^{m-2}\frac{\lambda^{2m+j+1}V^{2m-j}\,m\,!\,a^{m-j-2}}{(2m-j)j\,!\,(m-j-2)\,!}\left[\frac{(10a^2+b)V}{3(2m-j+1)}+\frac{2a\lambda}{2m-j-1}\right]g(s)$$

$$+\sum_0^{m-3}\frac{\lambda^{2m+j}V^{2m-j+2}\,m\,!\,a^{m-3-j}a'^2\,g(s)}{18(2m-j+2)(2m-j+1)j\,!\,(m-j-3)\,!}$$

provenant du terme $\lambda^{2m-2}mgU^{m-1}$ de (37) dans lequel nous avons tenu compte de tous les termes de U dont le degré est inférieur ou égal à 6 [*voir* formule (13)]; ces termes ne peuvent pas être calculés par la formule générale ci-dessus dans le cas particulier où $m=2$ et il sera nécessaire de faire une étude directe dans cette hypothèse;

$$\sum_0^{m-2}\frac{\lambda^{2m+j}V^{2m-j+2}\,m\,!\,a^{m-2-j}a'\,g'(s)}{3(2m-j+2)(2m-j+1)j\,!\,(m-j-2)\,!}$$

provenant du terme $\lambda^{2m-1}mg'U^{m-1}V$.

Nous pouvons alors calculer le coefficient de λ^{4m+1} dans le développement de V; on trouve en omettant les éléments qui ne contiennent aucune fonction inconnue et correspondent aux premiers termes de C :

$$(42)\quad \frac{h(s)}{a^{m+2}}(-1)^m\frac{[(m+1)\,!]^2}{(2m+2)\,!}+\frac{g''(s)}{a^{m+3}}(-1)^{m+1}\frac{(m\,!)^2}{(2m+1)\,!}\,\frac{m}{4}$$
$$+\frac{a'g'm(m+7)[m\,!]^2(-1)^m}{6a^{m+4}(2m+1)!}+\frac{a''g(m^2+17m+6)[m\,!]^2(-1)^m}{24a^{m+4}(2m+1)\,!}$$
$$+\frac{a'^2g}{a^{m+5}}(-1)^{m+1}\frac{(m\,!)^2}{(2m+1)\,!}\,\frac{m^3+15m^2+80m+24}{36}$$
$$+\frac{(-1)^m g}{a^{m+1}}\,\frac{[m\,!]^2}{(2m+1)\,!}\,\frac{m(3m-1)}{2}+\frac{gb}{a^{m+3}}(-1)^{m+1}\frac{m\,!\,(m+2)\,!}{4(2m+1)\,!}.$$

Le calcul des coefficients des différents produits $a''g$, a'^2g, g, $g'a'$, g'', h doit être conduit comme celui des sommes rencontrées précédemment en effectuant d'abord, s'il y a lieu, une décomposition en éléments simples pour ramener le dénominateur au produit de deux factorielles par une ou deux fonctions linéaires de j, puis en utilisant les fonctions B.

Du développement de U on déduit celui de U′ puis on calcule le coefficient de λ^{4m+1} dans le développement de V_1. Ce coefficient est, en négligeant les termes indépendants des fonctions inconnues,

$$
\begin{aligned}
(43)\quad & \frac{h}{a^{m+2}}(-1)^m \frac{m!\,(m+1)!}{4(2m+1)!} + \frac{g''}{a^{m+3}}(-1)^m\left[\frac{1}{2^{2m+3}} - \frac{m!\,(m+1)!}{8(2m+1)!}\right] \\
& + \frac{a'g'}{a^{m+4}}(-1)^m\left[\frac{[m!]^2(2m^2+12m+7)}{24(2m+1)!} - \frac{(m+7)}{3.2^{2m+3}}\right] \\
& + \frac{a''g}{a^{m+4}}(-1)^m\left[\frac{[m!]^2(m^2+9m+5)}{48(2m+1)!} - \frac{1}{3.2^{2m+3}}\right] \\
& + \frac{a'^2g}{a^{m+5}}(-1)^m\left[\frac{(m+9)}{9.2^{2m+3}} - \frac{[m!]^2(2m^3+24m^2+94m+45)}{144(2m+1)!}\right] \\
& + \frac{bg}{a^{m+3}}(-1)^{m+1}\frac{m!\,(m+2)!}{8(2m+1)!} + \frac{g}{a^{m+1}}(-1)^m\frac{[m!]^2(3m^2-m)}{4(2m+1)!}.
\end{aligned}
$$

Le calcul des sommes rencontrées dans l'expression de ce coefficient se fait en les décomposant en d'autres sommes n'ayant au dénominateur qu'un seul facteur de la forme $2m-j+k$ et ces dernières sont évaluées à l'aide d'intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{p_1}(1-x)^{p_2}\,dx$ comme plus haut (§ 20).

Le coefficient de λ^{4m} dans le rapport r_4 est alors, à une constante additive près provenant des premiers termes de C supposés conformes à une condition suffisante,

$$
\begin{aligned}
& \frac{g''}{a^{m+2}}\left[\frac{1}{2^{2m}} - \frac{[m!]^2}{(2m+1)!}\right]\frac{(-1)^{m+1}}{8} + \frac{a'g'}{a^{m+3}}\left[\frac{(m-5)(m!)^2}{(2m+1)!} + \frac{m+5}{2^{2m}}\right]\frac{(-1)^m}{24} \\
& \quad + \frac{a''g}{a^{m+3}}\left[\frac{1}{3.2^{2m}} + \frac{m[m!]^2}{(2m+1)!}\right]\frac{(-1)^m}{8} \\
& \quad + \frac{a'^2g}{a^{m+4}}\left[\frac{(m!)^2(m^2+9m-1)}{(2m+1)!} + \frac{m+7}{2^{2m+1}}\right]\frac{(-1)^{m+1}}{36} + \ldots.
\end{aligned}
$$

Donc, si a n'est pas une constante mais correspond à une courbe (P′), nous obtenons une nouvelle équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction g, c'est

$$(44)\quad g'' s^{m+2}\left[\frac{1}{2^{2m}}-\frac{(m\,!)^2}{(2m+1)\,!}\right]+g' s^{m+1}\left[\frac{(m-5)[m\,!]^2}{3(2m+1)\,!}+\frac{m+5}{3.2^{2m}}\right]$$
$$+g s^m\left[\frac{m+1}{9.2^{2m}}+\frac{2(m^2-1)[m\,!]^2}{9(2m+1)\,!}\right]=\text{const.},$$

or, en dérivant (41), multipliant par s et retranchant de (44), nous obtenons une nouvelle équation du premier ordre

$$(45)\qquad g' s^{m+1}\left[\frac{2m-1}{3.2^{2m}}-\frac{[m\,!]^2(4m-3)}{6(2m+1)\,!}\right]$$
$$+g s^m\left[\frac{2m-1}{9.2^{2m}}+\frac{[m\,!]^2(8m^2-3m+4)}{18(2m+1)\,!}\right]=\text{const.}$$

et finalement, en multipliant les deux membres de (41) par $(2m-1)/3$ et retranchant membre à membre de (45), nous obtenons la relation

$$\frac{(m\,!)^2}{6(2m+1)\,!}\left\{g' s^{m+1}+(m+1)g s^m\right\}=\text{const.},$$

qui exige que g soit égal à $k_1 s^{-m}+k_2 s^{-m-1}$, mais g devant aussi vérifier (45), il faut que

$$k_2 s^{-1}\left\{\frac{5(m\,!)^2}{6(2m)\,!}-\frac{3m+2}{3.2^{2m}}\right\}=\text{const.},$$

or, $5(m\,!)^2 2^{2m-1}$ ne peut être égal à $(3m+2)(2m!)$; en effet $2m!$ est égal au produit de $2^m m\,!$ par des nombres impairs, il faudrait donc que $3m+2$ fût divisible par $2^{m-1+E(m/2)}$ (donc au moins par 2^m) et $3m+2$ est toujours inférieur à 2^m lorsque $m \geqq 4$. Par suite, comme le coefficient de k_2 n'est pas nul, la relation précédente n'est possible que si k_2 est nul, donc si la fonction g correspond, elle aussi, au cas d'une courbe (P').

23. Nous avons remarqué en calculant les termes de U dont le degré est $4m+2$, que la formule générale ne pouvait s'appliquer sans précaution au cas où $m=2$, c'est-à-dire pour trouver la forme de la fonction b figurant dans le développement de C. Il est nécessaire de déterminer cette forme pour conclure dans le cas où a n'est pas une constante; d'autre part on peut prévoir les différences que nous

devrons constater entre les coefficients calculés directement et ceux que l'on obtiendrait en appliquant la formule générale si bien que nous aurons une vérification précieuse de la valeur de nos différents coefficients.

Nous remarquons que les formules générales contiennent des éléments où b (supposé connu) et g (fonction inconnue) interviennent par leur produit, au contraire, dans le cas où $m=2$ (alors $g=b$), nous aurions des termes correspondant à des carrés et non à des produits et l'on peut prévoir que dans les coefficients de λ^9 de V et V_1 le terme en b^2/a^5 calculé par la formule générale sera double de celui calculé directement. Ensuite dans le calcul des formules générales nous avons rencontré les sommes suivantes :

$$\frac{a'^2 g}{18a^{m+4}}\sum_0^{m-3}\frac{(-1)^{j+1}m\,!}{(2m-j+2)(2m-j+1)j\,!(m-j-3)\,!}$$

et

$$\frac{a'^2 g}{18a^{m+4}}\sum_0^{m-3}\frac{(-1)^{j+1}m\,!\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-j+1}}{(2m-j+1)j\,!(m-j-3)\,!},$$

qui n'existent pas pour $m=2$ et dont les valeurs sont dans le cas général

$$\frac{a'^2 g}{18a^{m+4}}(-1)^m\frac{m\,!(m+3)\,!(m-2)}{(2m+2)\,!}$$

et

$$\frac{a'^2 g}{18a^{m+4}}(-1)^m\left\{\frac{m\,!(m+3)\,!}{2(2m+1)\,!}-\frac{3m^2+7m+6}{2^{2m+1}}\right\};$$

par suite, si l'on fait $m=2$ dans la formule générale, les termes correspondants disparaissent. La seule différence que nous devons donc trouver en appliquant la formule générale au cas $m=2$ est celle signalée plus haut pour le coefficient de b^2/a^5. On a en effet, en représentant, dans les crochets, par des points des termes qui ne contiennent que a et ses dérivées

$$\begin{aligned}V=-\frac{\lambda}{a}-\frac{\lambda^3 a'}{3a^3}+\lambda^5\left[-\frac{b}{6a^3}+\frac{a''}{12a^4}-\frac{2a'^2}{9a^5}+\frac{1}{3a}\right]+\lambda^7\left[\frac{b'}{15a^4}-\frac{a'b}{5a^5}+\ldots\right]\\+\lambda^9\left[\frac{c}{20a^4}-\frac{b''}{60a^5}+\frac{a'b'}{10a^6}+\frac{11a''b}{180a^5}+\frac{b}{6a^3}-\frac{b^2}{20a^5}-\frac{7ba'^2}{30a^7}+\ldots\right]+\ldots\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$V_4 = -\frac{\lambda}{2a} - \frac{\lambda^3 a'}{8a^3} + \lambda^5\left[-\frac{b}{12a^3} + \frac{a''}{48a^4} - \frac{a'^2}{16a^5} + \frac{1}{6a}\right] + \lambda^7\left[\frac{5b'}{192a^4} - \frac{5a'b}{64a^5} + \dots\right.$$
$$\left. + \lambda^9\left[\frac{c}{40a^4} - \frac{3b''}{640a^5} + \frac{59a'b'}{1920a^6} - \frac{9a'^2b}{128a^7} + \frac{31a''b}{1920a^5} + \frac{b}{12a^3} - \frac{b^2}{40a^5} + \dots\right] + \dots\right.$$

donc, conformément à la formule générale

$$r_4 = \frac{1}{2} - \frac{\lambda^2 a'}{24a^2} + \lambda^4\left[\frac{a''}{48a^3} - \frac{5a'^2}{144a^4}\right] + \lambda^6\left[\frac{7b'}{960a^3} - \frac{43a'b}{2880a^4} + \dots\right]$$
$$+ \lambda^8\left[-\frac{7b''}{1920a^4} + \frac{9a'b'}{640a^5} - \frac{157ba'^2}{5760a^6} + \frac{7ba''}{640a^4} + \dots\right] + \dots,$$

par suite, lorsque a' est proportionnel à $a^2 (a = a_1 s^{-1})$ la fonction b doit satisfaire aux deux équations différentielles

$$21b's^3 + 43bs^2 = \text{const.},$$
$$21b''s^4 + 81b's^3 + 31bs^2 = \text{const.},$$

sur lesquelles on peut opérer les mêmes transformations que celles indiquées dans le cas général pour obtenir finalement la condition nécessaire $b = b_1 s^{-2}$. Il en résulte que si le premier terme de C correspond à une courbe (P′), il doit en être de même pour le second et ainsi de suite de proche en proche. Donc :

Si le rapport (MP/MM$_1$), *dans lequel le pied de la flèche divise l'arc, est indépendant de la position de l'arc sur la courbe* (et ne dépend que de l'angle à l'origine) ET SI LA COURBE N'EST PAS UN CERCLE GÉODÉSIQUE, *la courbe est une courbe* (P′).

Si ce rapport est une fonction paire de l'angle en M, *la courbe est une courbe* (P) *et le rapport est constant et égal à* 1/2. Ce dernier théorème est une conséquence immédiate des calculs du paragraphe 21; en effet pour que r_4 soit une fonction paire de d, il faut et il suffit que ce rapport ne contienne que des puissances de λ dont le degré est un multiple de 4, donc le coefficient de λ^2 doit être nul et a est une constante. D'autre part, la condition que C soit indépendant de v est suffisante puisque r_4 est alors égal à 1/2; donc si C admet le développement (15), le premier coefficient non nul d'une puissance de λ dont le degré ne soit pas multiple de 4, est le coefficient de λ^{4m-2} et il est égal à $\frac{g'}{a^{m+1}} \frac{(-1)^{m+1}}{4}\left[\frac{(m!)^2}{(2m+1)!} - \frac{1}{2^{2m}}\right]$, puisque a' est nul, donc g' doit être nul.

La restriction qui figure dans le premier des énoncés ci-dessus provient de ce que les équations trouvées ne nous imposent pas la condition $g =$ const. dans l'hypothèse où a est une constante, car alors les équations (41) et (44) se réduisent à $g' =$ const. et $g'' =$ const. Dans ce cas, il ne suffit certainement pas de choisir dans C pour les coefficients des puissances de u, supérieures ou égales à la deuxième, des binomes du premier degré; mais il semble que l'on puisse déterminer de proche en proche les coefficients des puissances de u comme étant des polynomes en v dont le degré croît (d'une unité à chaque coefficient, si b n'est pas une constante). Il ne nous a pas été possible de démontrer que ce calcul est possible ni que la série obtenue converge.

24. Nous avons maintenant à notre disposition les formules nécessaires pour démontrer les propriétés signalées à la fin du paragraphe 20. Pour que la longueur de la flèche soit une fonction paire de l'angle en M, le développement (33) ne doit contenir que des puissances de λ dont le degré est divisible par 4, il est donc nécessaire que a' soit nul; il est suffisant pour cela que C ne dépende pas de v et nous pouvons supposer que C admet le développement (15) en désignant par m le degré en u du premier terme qui n'est pas indépendant de v. Nous obtenons les deux premiers termes de V_1 qui dépendent de g en utilisant le développement (40) où l'on fait $a' = 0$; puis en remplaçant V par (40) dans le produit de (38) par λ^2 nous obtenons

$$(46)\quad \mathrm{F} = -\frac{d^2}{4a} + \ldots + d^{2m}(\ldots) + d^{2m+1}\left[\frac{(-1)^m g'}{4a^{m+2}}\left(\frac{1}{2^{2m}} - \frac{(m!)^2}{(2m+1)!}\right) + k\right] + \ldots,$$

or, k est nul puisque la condition vérifiée par les premiers termes de C est suffisante, il est donc nécessaire que g' soit nul, car son coefficient n'est jamais nul (*voir* § 21). Donc *il faut et il suffit que la courbe soit une courbe* (P) *pour que* F *soit une fonction paire de d*.

De même la recherche du développement du quotient de (46) par le développement de $l(s, d)$ nous montre que le rapport $r_3(s, d)$ des longueurs de la flèche et de l'arc ne peut être une fonction impaire de d que si la courbe est une courbe (P).

25. L'étude du rapport r_4 nous a permis d'obtenir une propriété caractéristique de (P′) moyennant une hypothèse sur a; dans les questions que nous abordons maintenant nous n'obtiendrons même pas ce résultat, car des deux équations différentielles auxquelles doit satisfaire simultanément la fonction inconnue, l'une est conséquence de l'autre. Nous trouverons pourtant des propriétés caractéristiques des courbes (P).

Nous envisageons d'abord l'*angle sous lequel on voit l'arc* MM_1 *de son extrémité* M_1. Cet angle β ne dépend que de d aussi bien sur les courbes (P) que sur les courbes (P′). Nous le déterminons par sa tangente d_1 qui est égale au produit par λ de la valeur de $\frac{dU}{dV}$ lorsqu'on y remplace V par la valeur correspondant à l'extrémité M_1 de l'arc. Nous obtenons donc immédiatement les premiers termes du développement de d_1

$$d_1 = -\lambda^2 + \lambda^4 \frac{a'}{3a^2} + \lambda^6 \left(\frac{2a'^2}{9a^4} - \frac{a''}{6a^3}\right) + \ldots,$$

on voit que a' doit être proportionnel à a^2 pour que d_1 ne dépende que de d. Nous supposons alors que les premiers termes de C vérifient la condition suffisante de correspondre, soit à une courbe (P), soit à une courbe (P′), et nous cherchons la forme de la fonction inconnue $g(s)$. Nous remarquons que, dans le cas des courbes (P), nous devons avoir $d_1 + d = 0$, soit en examinant le modèle particulier de courbe (P) constitué par un parallèle de surface de révolution, soit en nous rappelant qu'alors $u(x, -d) = u(-x, d)$; ceci prouve que l'arc MM_1 et l'arc MM_2, ayant pour origine M et pour valeur algébrique $-l$, sont vus de leur origine M sous deux angles ayant une détermination égale en valeur absolue, or le déplacement du point M_2 n'altère pas la figure quand la longueur de l'arc reste constante et l'égalité précédente nous montre que les angles en M et M_1 doivent, eux aussi, être égaux en valeur absolue (il suffit d'amener M_2 en M).

Dans le développement de d_1 doivent donc disparaître tous les éléments (excepté le terme $-d$) qui ne contiennent aucune dérivée de fonctions figurant dans le développement de C. En tenant compte des formules établies plus haut, on voit facilement que le premier coefficient de d_1 qui peut dépendre de la fonction inconnue g est celui de λ^{4m-2} et ce coefficient est, à une constante additive près,

$$2\frac{g}{a^m}\frac{(-1)^{m+1}(m\,!)^2}{2m\,!}+\frac{g}{a^m}\sum\frac{(-1)^{j+1}m\,!}{(2m-j-1)j\,!(m-j-1)\,!}+\ldots;$$

et dans cette expression la fonction g a bien un coefficient nul.

Les termes en λ^{4m} s'obtiennent en évaluant des sommes analogues à celles déjà rencontrées et l'on trouve qu'ils ont pour expression

$$\left[\frac{g'}{a^{m+1}}(-1)^{m+1}\frac{(m\,!)^2}{(2m+1)\,!}+\frac{ga'}{a^{m+2}}(-1)^m\frac{m\,!(m+1)\,!}{(2m+1)\,!}+k\right]\lambda^{4m},$$

k étant une constante provenant des premiers termes de C. Par suite, si les premiers termes de C correspondent à une courbe (P), on obtient seulement la condition $g' = \text{const.}$, et si les premiers termes de C correspondent à une courbe (P′), on obtient l'équation différentielle

$$(47)\qquad \frac{(m\,!)^2}{(2m+1)\,!}\{g's^{m+1}+(m+1)gs^m\}=\text{const.},$$

exigeant que g soit égal à $k_1 s^{-m}+k_2 s^{-m-1}$.

Si m est différent de 2, les calculs faits pour U nous permettent de trouver le coefficient de λ^{4m+2} dans le développement de d_1 ; on obtient, à une constante additive près,

$$\begin{aligned}&\frac{g''}{a^{m+2}}\frac{(-1)^m(m\,!)^2}{2(2m+1)\,!}+\frac{2a'g'm\,!(m+1)\,!}{3a^{m+3}(2m+1)\,!}(-1)^{m+1}\\&\quad+\frac{(-1)^{m+1}a''g(m\,!)^2(5m+4)}{6a^{m+3}(2m+1)\,!}+\frac{a'^2g[m\,!]^2(m^2+9m+6)}{6a^{m+4}(2m+1)\,!}(-1)^m,\end{aligned}$$

et par suite nous devons avoir, si a' n'est pas nul, la nouvelle relation

$$\frac{(m\,!)^2}{6(2m+1)\,!}\{3g''s^{m+2}+g's^{m+1}(4m+4)+gs^m(m^2-m-2)\}=\text{const.},$$

mais celle-ci est toujours vérifiée, quelles que soient les constantes k_1 et k_2, lorsque $g=k_1s^{-m}+k_2s^{-m-1}$.

Dans le cas particulier où $m=2$, nous ne pouvons pas utiliser, du moins sans précaution, la formule générale; ici nous effectuons le calcul uniquement en vue d'une vérification, car il est facile de prévoir qu'en réalité la formule générale donne le résultat exact. En effet, dans le calcul de cette formule générale figure la somme

$$\sum_{0}^{m-3} \frac{(-1)^{j+1} m\,!\, a'^2 g(s) a^{-m-4}}{18(2m-j+1) j\,!\,(m-j-3)\,!},$$

qui n'existe pas pour $m=2$; son expression, dans le cas général, est $(-1)^m \dfrac{a'^2 g m\,!\,(m+3)\,!}{18 a^{m+4}(2m+1)\,!}$, ce qui devient $+\dfrac{a'^2 b}{9a^6}$ pour $m=2$. D'autre part, nous avons rencontré dans le calcul les sommes

$$\sum_{0}^{m-1} \frac{(-1)^{j+1}(2m-j-2) m\,!\, a'^2 g}{18 a^{m+4} j\,!\,(m-j-1)\,!} \quad \text{et} \quad \sum \frac{(-1)^j m\,!\, a'^2 g}{9 a^{m+4} j\,!\,(m-j-2)\,!}$$

qui sont nulles dans le cas général mais ont, pour $m=2$, les valeurs respectives $-\dfrac{a'^2 b}{9a^6}$ et $+\dfrac{2a'^2 b}{9a^6}$. Par suite, en appliquant la formule générale au cas particulier $m=2$, nous négligeons deux termes dont la somme est égale au terme ajouté. Le calcul direct des coefficients en question ne présente aucune difficulté et les deux équations auxquelles doit satisfaire b sont bien

$$s^3 b' + 3 s^2 b = \text{const.}, \qquad s^4 b'' + 4 s^3 b' = \text{const.}$$

Dans ce problème, que a soit ou non une constante, nous n'avons pu obtenir des conditions nécessaires et suffisantes, mais du moins nous avons vu que : *les courbes* (P) *sont caractérisées par le fait que l'angle sous lequel on voit l'arc de son extrémité est une fonction impaire de l'angle sous lequel on le voit de son origine;* et encore que *les courbes* (P) *sont caractérisées par le fait que l'angle en* M *et l'angle en* M_1 *ont une détermination égale en valeur absolue.*

26. Nous étudions une dernière propriété commune aux courbes (P) et (P′), qui a été signalée au paragraphe précédent dans le cas des courbes (P), au sujet de l'angle γ sous lequel on voit de M l'arc MM_2 opposé à MM_1. Les deux angles α et γ ont même valeur absolue sur une courbe (P); dans le cas des courbes (P′), si d_2 désigne la tangente de γ, on a les deux relations $l = s.h(d)$ et $-l = s.h(d_2)$; donc il

existe entre d et d_2 une relation indépendante de s

$$h(d) + h(d_2) = 0.$$

Pour déterminer le développement de d_2 en fonction de d, il suffit de chercher la condition pour que $l(s, d_2)$ soit opposé à $l(s, d)$, donc il suffit d'égaler à 0 le développement de V, correspondant à l'extrémité de l'arc MM_1, après avoir remplacé dans ce développement λ^{2p-1} par $d^p + d_2^p$, nous avons donc

$$0 = -\frac{d+d_2}{a} - \frac{(d^2+d_2^2)a'}{3a^3} + (d^3+d_2^3)\left[\frac{1}{3a} - \frac{2a'^2}{9a^5} + \frac{a''}{12a^4} - \frac{b}{6a^3}\right] + \ldots,$$

et, comme d_2 doit tendre vers 0 en même temps que d,

$$\begin{aligned} d_2 = -d - \frac{2a'}{3a^2}d^2 - \frac{4a'^2}{9a^4}d^3 + d^4\left[\frac{2b'}{15a^3} - \frac{a'b}{15a^4} + \ldots\right] \\ + d^5\left[\frac{4a'b'}{15a^5} - \frac{2a'^2 b}{15a^6} + \ldots\right] + \ldots + \gamma_k d^k + \ldots. \end{aligned}$$

Supposons que C admette le développement (15) dans lequel les premiers termes correspondent à une courbe (P) ou (P′), le premier coefficient γ_k qui peut dépendre de s est celui de d^{2m}, il a pour valeur

$$\gamma_{2m} = \frac{g'}{a^{m+1}} \frac{(-1)^m 2m(m!)^2}{(2m+1)!} + \frac{a'g}{a^{m+2}}(-1)^m \frac{2(m^2-2m-1)(m!)^2}{(2m+1)!} + \ldots,$$

le coefficient suivant est

$$\gamma_{2m+1} = \frac{2a'}{3a^2}(m+1)\gamma_{2m} + \ldots;$$

de sorte que γ_m et γ_{m+1} n'imposent qu'une même condition pour la fonction g. Les termes non écrits dans les deux égalités précédentes sont des constantes et l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire g, si a n'est pas une constante, est

$$ms^{m+1}g' - (m^2-2m-1)s^m g = \text{const.};$$

si a est une constante g', doit être une constante.

Sans expliciter les coefficients du développement de V, nous allons chercher une deuxième relation à laquelle doit satisfaire g et qui pourrait ne pas être une conséquence de la précédente. Pour simplifier l'écriture nous désignons par des lettres, dont la signification est évidente, les différents coefficients de V, de sorte que le développement de d_2 est donné par

$$d + d_2 = \mathrm{A}(d^2 + d_2^2) + \mathrm{B}(d^3 + d_2^3) + \mathrm{D}(d^4 + d_2^4) + \ldots + \mathrm{X}(d^{2m-1} + d_2^{2m-1}) + \mathrm{Y}(d^{2m} + d_2^{2m}) + \mathrm{T}(d^{2m+1} + d_2^{2m+1}) + \mathrm{Z}(d^{2m+2} + d_2^{2m+2}) + \ldots,$$

X et Y dépendent de la fonction inconnue g et sont liés par la relation établie plus haut, nécessaire pour que γ_{2m} et γ_{2m+1} soient des constantes ; cette relation s'écrit $\mathrm{Y} + (2m - 1)\mathrm{AX} = \text{const.}$ Les fonctions T et Z dépendent de g et de la nouvelle fonction inconnue h, nous obtiendrons entre T, Z, X, Y deux relations nécessaires pour que γ_{2m+2} et γ_{2m+3} soient des constantes. On obtient, en représentant par des points des constantes dont la valeur ne nous intéresse pas,

$$\gamma_{2m+2} = 2\mathrm{Z} + 2\mathrm{AT}(2m+1) + 4m(2m+1)\mathrm{A}^2\mathrm{Y} + 6(2m-1)\mathrm{ABX} + 2(2m-1)\mathrm{DX} + \frac{4}{3}(2m-1)(4m^2 + 2m + 3)\mathrm{A}^3\mathrm{X} + \ldots,$$

puis, si nous supposons ce coefficient γ_{2m+2} constant, on aura

$$\gamma_{2m+3} = -4\mathrm{A}(m+1)\mathrm{Z} - 4\mathrm{A}^2(m+1)(2m+1)\mathrm{T} - \frac{8}{3}m(4m^2 + 6m + 5)\mathrm{A}^3\mathrm{Y} - 12m\mathrm{ABY} - 4m\mathrm{DY} - \frac{8}{3}(2m-1)(2m^3 + 3m^2 + 7m + 3)\mathrm{A}^4\mathrm{X} - 12(2m-1)(2m+1)\mathrm{A}^2\mathrm{BX} - 4(2m-1)(2m+1)\mathrm{ADX} + \ldots,$$

qui doit être constant. Il est donc nécessaire que X et Y vérifient la relation obtenue en exprimant que $2\mathrm{A}(m+1)\gamma_{2m+2} + \gamma_{2m+3}$ est une constante (relation dans laquelle ne figurent ni T ni Z)

$$\frac{8}{3}m(2m^2 + 3m - 2)\mathrm{A}^3\mathrm{Y} + \frac{8}{3}m(2m-1)(2m^2 + 3m - 2)\mathrm{A}^4\mathrm{X} - 12m\mathrm{ABY} - 4m\mathrm{DY} - 12m(2m-1)\mathrm{A}^2\mathrm{BX} - 4m(2m-1)\mathrm{ADX} = \text{const.}$$

Ceci peut s'écrire

$$[\mathrm{Y} + (2m-1)\mathrm{AX}]\left[-4m\mathrm{D} - 12m\mathrm{AB} + \frac{8}{3}m(2m^2 + 3m - 2)\right] = \text{const.},$$

et n'est donc qu'une conséquence de la première relation trouvée. Ici encore nous ne pouvons obtenir simplement une condition nécessaire et suffisante.

Le calcul du début de ce paragraphe nous montre pourtant que *les courbes* (P) *sont caractérisées par le fait que les angles, sous lesquels on voit du milieu d'un arc ses deux moitiés, ont une détermination égale en valeur absolue*, ou encore, *si l'angle* γ *est une fonction impaire de l'angle* α, *la courbe est une courbe* (P). Il suffit, en effet, d'étudier les conditions imposées au premier terme de C par la propriété envisagée, puis de déterminer la forme de la fonction g pour que le coefficient de d^{2m} dans d_2 soit nul, sachant que la condition vérifiée par les premiers termes de C est suffisante. Il en résulte que g doit être aussi une constante et la courbe est bien une courbe (P).

CHAPITRE V.

REMARQUES DIVERSES.

27. Les courbes (P) et (P′) correspondent donc à une relation de forme très simple existant entre la longueur d'un arc, l'angle sous lequel on le voit de son origine et l'abscisse curviligne de cette origine. Les deux formes trouvées pour cette relation sont deux cas particuliers de la forme plus générale suivante :

$$g(l) = h(d)\,k(s), \tag{48}$$

g, h, et k étant des fonctions d'une variable, holomorphes au voisinage des valeurs O, O, s et telles que $g(0)$ et $h(0)$ sont nuls.

Les courbes (P) correspondent à $k(s)$ constante et les courbes (P′) au cas où $g(l)$ est une fonction du premier degré. Nous nous étions proposé de chercher, par la même méthode que précédemment, s'il existe d'autres courbes conduisant à la relation (48).

Nous supposons que la fonction $g(l)$ est développable au voisinage de $l = 0$, soit

$$g(l) = l + g_2 l^2 + g_3 l^3 + g_4 l^4 + \ldots, \tag{49}$$

et nous utilisons les développements déjà calculés pour déterminer les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions inconnues et les premiers coefficients du développement de C. On a

$$k(s) = p\,a^{-1}(s), \qquad a' = \mathrm{A}a + \mathrm{B}a^2, \qquad g_2 = \mathrm{A}/3,$$

en désignant par A, B, p des constantes arbitraires. Alors il faut que

$$b(s) = 6g_3 + \frac{\mathrm{A}^2}{2} + \frac{\mathrm{AB}}{6}a + \mathrm{D}a^2,$$

en désignant par D une nouvelle constante. La considération du terme de degré 4 en d nous fournit un certain nombre de relations auxquelles doivent satisfaire les constantes arbitraires introduites ci-dessus. Ce sont :

$$g_4 + \frac{\mathrm{A}^3}{45} - \frac{23}{15}g_3\mathrm{A} = 0,$$

$$-\frac{\mathrm{A}_1^2\mathrm{B}}{60} - \frac{11}{5}g_3\mathrm{B} = 0,$$

$$\frac{2}{45}\mathrm{DA} + \frac{\mathrm{A}}{90} - \frac{\mathrm{B}^2\mathrm{A}}{108} = 0.$$

Nous supposons que A n'est pas nul — sinon on se trouve dans le cas des courbes (P′) — alors, si B n'est pas nul, nous calculons D, g_3 et g_4 ; si B est nul nous pouvons choisir arbitrairement l'une des constantes g_3 ou g_4. L'étude du terme en d^5 nous donnera l'expression du coefficient $c(v)$ de $\mathrm{C}(u, v)$, expression dans laquelle interviendront deux nouvelles constantes arbitraires et le terme en d^6 nous donnera 6 relations auxquelles devront satisfaire les différentes constantes (au nombre de 6), il est donc probable que nous déterminerons ainsi toutes les constantes arbitraires (nous n'avons pu faire le calcul, très compliqué) et, même si nous pouvons poursuivre la détermination des différents coefficients, nous n'obtiendrons pas une classe de courbes aussi générale que les courbes (P) et (P′).

Remarquons que les calculs faits nous donnent la conclusion suivante : *il n'existe aucune courbe* [autre que les courbes (P) ou (P′)] *pour laquelle la relation entre l, s, d aurait la forme* (48) *avec g égal à un polynome du second degré.*

Dans le cas particulier où l'on sait que la surface, sur laquelle est tracée la courbe, a une courbure totale constante (ou si l'on veut, dans l'étude des courbes planes d'un espace non euclidien de courbure constante K), nous pouvons utiliser le développement (5). Si la relation entre l, s, d a la forme (48), il en résulte que $\alpha(l, s)$ est une fonction du quotient x de $g(l)$ par $h(s)$ et, si $g(l)$ admet le développement (49), il faudrait pouvoir identifier (5) avec un développement de la forme

$$A_1 \frac{l}{k(s)} + \left[\frac{A_2}{k^2} + \frac{A_1 g_2}{k}\right] l^2 + l^3 \left[\frac{A_3}{k^3} + \frac{2 g_2 A_2}{k^2} + \frac{A_1 g_3}{k}\right]$$
$$+ l^4 \left[\frac{A_4}{k^4} + \frac{3 g_2 A_3}{k^3} + \frac{(g_2 + 2 g_3) A_2}{k^2} + \frac{g_4 A_1}{k}\right] + \ldots,$$

où A_1, A_2, ... désignent les coefficients du développement de la fonction de x à laquelle est égal $\alpha(l, s)$. On en conclut facilement que

$$z = \frac{2 A_1}{k(s)} \quad \text{et} \quad z' = k_1 z + k_2 z^2,$$

puis, que k_1 et k_2 sont tous deux nuls (cas des courbes P) ou bien que k_1 et K sont nuls (cas des courbes P′ qui n'existent pas dans un espace non euclidien de courbure constante non nulle, *voir* § 9).

28. Les courbes (P) possèdent plusieurs propriétés caractéristiques élémentaires des cercles du plan et il est naturel de rechercher si ces courbes ne possèdent pas également la propriété suivante vraie pour un cercle : la longueur de l'arc MM_1 est proportionnelle à l'angle sous lequel on le voit de M.

Le développement (5) ne nous permet pas de conclure facilement; il faut en effet que tous les coefficients de ce développement soient nuls, à l'exception du premier; cela entraîne des conditions pour la courbure totale de la surface le long de la courbe, mais il est difficile d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes par ce procédé. Nous utilisons encore la représentation de la surface introduite au paragraphe 4, nous avons calculé (28) le développement de la tangente de l'angle α en fonction de l et il est facile d'en déduire le développement de l'angle lui-même, c'est

$$(50) \qquad \alpha = -al - \frac{a'}{3} l^2 + \ldots + [(-1)^k a^{k+1} \alpha_k + \ldots] l^k + \ldots,$$

les termes non écrits sont de degré supérieur ou égal à 3, les points dans le coefficient de l^k représentent les éléments de ce coefficient qui proviennent des termes du développement de $C(u, v)$ dont le degré en u est inférieur à $(k+1)/2$.

Pour que l soit proportionnel à α, il faut que tous les coefficients de (50) soient nuls à l'exception du premier. Donc a' est nul et a est une constante.

La condition que C se réduise à $1 + 2au$ (a constant) est suffisante : géométriquement, la courbe est alors tracée sur une surface applicable sur un plan et correspond à un cercle; analytiquement, l'équation (6) s'intègre facilement, car alors

$$u'' = \frac{4a}{1+2au} u'^2 + 2a(1+2au),$$

donc

$$u = \frac{\sin[a(v-s)+\alpha]\sin[a(v-s)]}{a\cos[2a(v-s)+\alpha]} \qquad \text{d'où} \qquad l = -\frac{\alpha}{a}.$$

Alors si l'on suppose que C admet le développement suivant :

$$C = 1 + 2au + g(v)u^m + \ldots$$

dans lequel les termes non écrits sont de degré en u supérieur à m, le premier coefficient de (50) qui n'est pas nul est celui de l^{2m-1} et il est égal à $g(s)a^{m-1}(-1)^m \frac{(m!)^2}{2m!}$ (puisque les deux premiers termes de C ne peuvent fournir aucun terme en l^{2m-1}), donc pour que l soit proportionnel à α, il est nécessaire que g soit nul et, par suite :

Si la longueur d'un arc d'une courbe tracée sur une surface est proportionnelle à l'angle sous lequel on voit l'arc de son origine, la surface est développable et la courbe est un cercle géodésique.

29. La propriété caractéristique précédente des cercles ne s'étend donc pas aux courbes (P) dans leur généralité; par contre, toutes les courbes (P), et elles seules, sont telles que l'enveloppe de la corde soit une courbe parallèle à la courbe (Γ) lorsque l'angle en M est constant ou lorsque la longueur de l'arc MM_1 est constante.

La surface étant rapportée au système de coordonnées du paragraphe 4, l'équation de la corde qui sous-tend l'arc est

$$u = u[v-s, s, d_1]$$

ce qui devient, après le changement de variable et fonction,

$$u = \lambda^2 U[V, s, \lambda], \qquad v = s + \lambda V.$$

L'enveloppe de la corde sera une courbe parallèle à (Γ) si cette enveloppe s'obtient en portant sur les géodésiques normales à (Γ) une longueur constante; et par suite cette enveloppe doit avoir une équation de la forme $u = \text{const}$.

Premier cas : *l'arc* MM_1 *est vu de son origine sous un angle constant*, donc d et λ sont des constantes; nous aurons le point caractéristique de la corde en cherchant la valeur de v, comprise entre s et $s+l$, telle que $\frac{\partial u}{\partial s}$ soit nul. Donc ce point est déterminé par la valeur $V_2(s, \lambda)$ qui annule

$$-\frac{\partial U}{\partial V} + \lambda \frac{\partial U}{\partial s},$$

et la courbe possédera la propriété étudiée ici, si U prend une valeur indépendante de s lorsqu'on y remplace V par V_2.

Les premiers termes du développement de V_2 suivant les puissances de λ sont déterminés par la relation

$$0 = -2aV - \lambda - \frac{\lambda^2 V^3}{3}(20a^3 + 2ab) - \lambda^3 V^2 (10a^2 + b) - 4aV\lambda^4 + \ldots,$$

dans laquelle les termes non écrits sont de degré supérieur à 5, donc

$$V_2 = -\frac{\lambda}{2a} + \lambda^3\left(\frac{1}{6a} - \frac{b}{12a^3}\right) + \ldots,$$

d'où, en remplaçant V par cette valeur dans (13), nous déduisons l'ordonnée u_2 du point caractéristique

$$u_2 = -\frac{\lambda^4}{4a} - \frac{\lambda^6 a'}{8a^3} + \frac{\lambda^8}{8.4!}\left(\frac{36}{a} - \frac{6b}{a^3} + \frac{a''}{a^4}\right) + \ldots,$$

qui ne peut être indépendante de s que si a et b sont indépendants de s, donc si les premiers termes de C correspondent à une courbe (P).

Comme il suffit que la courbe soit une courbe (P) pour qu'elle possède la propriété étudiée ici, nous pouvons supposer que C admet le développement (15), où m désigne le degré en u du premier terme de C dont le coefficient n'est pas indépendant de v. L'équation donnant V_2 est alors

$$0 = -2aV - \lambda + \ldots - \sum \frac{\lambda^{2m-2+j} V^{2m-j-1} a^{m-j-1} m!}{(2m-j-1) j! (m-j-1)!} g(s) + \ldots,$$

où les termes non écrits sont indépendants de s et de degré supérieur à 4 ou bien dépendent de s et sont de degré supérieur à $4m-3$.

Il en résulte que le premier coefficient de V_2 qui peut dépendre de s est celui de λ^{4m-3} et V_2 ne diffère de (34) que par des termes non écrits.

Le premier terme de u_2 qui peut dépendre de s est de degré $4m$ et son coefficient nous est connu, car nous avons effectué les calculs au paragraphe 20; on voit que u_2 ne peut être indépendant de s que si g est une constante; donc finalement, il faut que la courbe soit une courbe (P) et nous trouvons pour u_2 la valeur déjà calculée de la flèche F.

Deuxième cas : *l'arc variable* MM_1 *est tel que sa longueur l soit constante.* Nous devons donc chercher l'enveloppe de la courbe définie par $u = u[(v-s), s, d]$ sachant que d est lié au paramètre s par la condition $u(l, s, d) = 0$; le point caractéristique s'obtient en joignant, à l'équation de la corde, l'équation

$$-\frac{\partial u}{\partial v} = 0, \qquad \text{car} \qquad \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial d}\frac{\partial d}{\partial s} = 0.$$

Ce point caractéristique correspond donc à la valeur V_1 de V qui annule $\frac{\partial U}{\partial V}$. Comme nous devons ensuite remplacer V par V_1 dans $\lambda^2 U$ pour obtenir l'ordonnée u_3 du point cherché, nous pouvons utiliser les calculs faits plus haut pour déterminer la flèche, mais nous devons ici revenir à la variable l en utilisant le développement (28). Nous trouvons ainsi que les premiers termes de u_3 sont $-\frac{al^2}{4} - \frac{a'l^3}{8} - \ldots$, donc ne peuvent être indépendants de s que si a est une constante.

Puis supposant que C admet le développement (15), les développements (35) et (28) nous montrent que le premier terme de u_3 qui peut dépendre de s est de degré $2m$ (en l) et a pour coefficient, à une constante additive près, $g(s)\frac{(-1)^m a^{m-1}}{2}\left[\frac{[m!]^2}{2m!} - \frac{1}{2^{2m}}\right]$, ce qui ne peut être indépendant de s que si la fonction g est une constante, car $2^m(m!)$ ne peut être un nombre impair. Donc, *si l'enveloppe de la corde qui soustend un arc de longueur constante sur une courbe tracée sur une surface est toujours une courbe parallèle, sur la surface, à la courbe donnée, cette courbe est une courbe* (P).