ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JULES HAAG

Sur l'hypothèse des fibres dans la théorie des fils élastiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 52 (1935), p. 317-347

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1935_3_52__317_0>

SUR L'HYPOTHÈSE DES FIBRES

DANS LA

THÉORIE DES FILS ÉLASTIQUES

PAR M. J. HAAG.

FORMULES GÉNÉRALES.

1. **Énoncé du problème.** — Les théories élémentaires de la résistance des matériaux reposent, comme on sait, sur l'hypothèse des *fibres*. On considère le corps élastique comme décomposable en petits cylindres parallèles, indépendants les uns des autres et à chacun desquels on applique les formules de l'extension. On admet implicitement que chaque fibre n'est soumise à aucun effort latéral, ce qui est, en général, manifestement faux [1]. J'ai montré, dans un précédent Mémoire [2], dans quelles conditions les formules habituelles de la théorie des fils élastiques infiniment minces, déduites des raisonnements approchés de la résistance des matériaux, peuvent être considérées néanmoins comme une conséquence rigoureuse de la théorie mathématique de l'élasticité.

Je me propose, dans le présent travail, de *rechercher dans quels cas*

---

(1) *Cf.* BOUASSE, *Résistance des matériaux*, p. 103.

(2) J. HAAG, *Extension de la théorie de Saint-Venant aux fils élastiques* (*Ann. Éc. Norm.*, 3e série, t. XLVI, mai 1929).

l'hypothèse des fibres est théoriquement correcte, pour un corps de dimensions quelconques.

2. Nous allons d'abord préciser, tout en la généralisant, la notion de *fibre*.

Considérons une famille de plans P, dépendant d'un seul paramètre t et leurs trajectoires orthogonales F. Dans l'un des plans P, soit P_0, traçons une courbe fermée Γ et considérons la surface S engendrée par les courbes F qui s'appuient sur Γ (¹). Nous supposerons que le corps élastique est limité, d'une part par la surface S, qui sera appelée sa *surface latérale*, et, d'autre part, par le plan P_0 et un autre plan P_1 de la famille des plans P; ces deux plans seront appelés les *plans de base*.

On peut aussi considérer le corps solide comme engendré par l'aire Γ, quand P roule sans glisser sur son enveloppe, depuis la position P_0 jusqu'à la position P_1. Dans ce mouvement, il faut supposer que la caractéristique D de P ne pénètre jamais à l'intérieur de Γ, sans quoi la surface S présenterait des points de rebroussement.

Prenons maintenant une aire infiniment petite, intérieure à Γ et construisons, à partir de cette aire, un corps défini comme le corps précédent l'a été à partir de Γ. C'est un tel corps, infiniment délié, qui sera appelé une *fibre*.

En passant à la limite, nous désignerons aussi sous le nom de fibres les courbes F intérieures à S, c'est-à-dire appartenant au corps élastique.

3. Voici maintenant les trois problèmes que nous allons nous poser :

PROBLÈME I. — *Déterminer la déformation et la loi de forces de telle manière que l'effort sur la surface latérale de chaque fibre soit normal à cette surface.*

PROBLÈME II. — *Déterminer la déformation et la loi de forces de telle*

(¹) C'est ce que les géomètres appellent une *surface moulure*. Dans le Mémoire précité, j'ai employé improprement l'expression de *surface canal*, qui convient seulement au cas où Γ est un cercle.

manière que l'effort sur la surface latérale de chaque fibre soit identiquement nul.

PROBLÈME III. — *Les conditions du problème* I *étant supposées réalisées, déterminer la courbe* Γ *de telle manière que l'effort sur la surface latérale* S *soit nul.*

4. **Tenseur fondamental.** — Nous emploierons une méthode analogue à celle du Mémoire déjà cité, reposant sur les équations générales de l'élasticité en coordonnées curvilignes.

Prenons comme *courbe de référence* une fibre quelconque (¹) F. Soit O l'un quelconque de ses points, dont nous supposerons que l'abscisse curviligne a été prise comme paramètre t. Menons la tangente Oz, puis, dans le plan normal P, deux axes rectangulaires quelconques Ox et Oy, invariablement liés à Γ (²). Les rotations et translations du trièdre $Oxyz$ sont

$$p, \quad q, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad 1,$$

p et q désignant deux fonctions données de t.

Appelons maintenant $(x, y, 0)$ les coordonnées d'un point M quelconque intérieur à Γ. Nous prendrons pour *coordonnées contrevariantes* de ce point (³)

$$x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = t.$$

Si ces coordonnées augmentent infiniment peu, le déplacement élémentaire de M a pour *composantes cartésiennes*

$$dx^1, \quad dx^2, \quad h\,dx^3, \tag{1}$$

en posant

$$h = 1 + py - qx.$$

(¹) Dans mon précédent Mémoire, j'ai snpposé que cette fibre était le lieu des centres de gravité des sections droites ; nous nous affranchissons ici de cette restriction.

(²) Dans mon précédent Mémoire, j'ai pris pour axes les axes de Frenet de F. On peut aussi traiter le problème actuel avec ces mêmes axes ; les calculs sont un peu plus compliqués.

(³) Cf. *loc. cit.*, p. 110.

On en déduit

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + h^2(dx^3)^2;$$

d'où

$$(2) \qquad g_{11} = g_{22} = 1, \qquad g_{33} = h^2, \qquad g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0.$$

Le discriminant a pour valeur

$$(3) \qquad g = h^2,$$

et les composantes contrevariantes du tenseur fondamental sont

$$(4) \qquad g^{11} = g^{22} = 1, \qquad g^{33} = \frac{1}{g}, \qquad g^{23} = g^{31} = g^{12} = 0.$$

5. **Déformation de la fibre de référence.** — Produisons une *déformation infiniment petite*. La fibre F devient une certaine courbe F_1, et le point O vient en O_1. Nous définissons encore la position de O_1 sur F_1 par la valeur de t qui correspondait au point O avant la déformation. Menons O_1z_1 tangent à F_1 et prenons, en outre, deux axes rectangulaires O_1x_1 et O_1y_1 tels que les rotations du trièdre $O_1x_1y_1z_1$ soient $p+p_1$, $q+q_1$, o, p_1 et q_1 désignant deux fonctions infiniment petites de t. Les translations du même trièdre sont évidemment o, o, $1+e$, e désignant la *dilatation linéaire de la fibre de référence*.

Remarque. — On peut, sans cesser de remplir les conditions ci-dessus, faire tourner les axes $O_1x_1y_1z_1$ d'un angle infiniment petit, mais *constant*, autour de O_1z_1.

6. Connaissant les fonctions p_1, q_1, e, il est facile d'obtenir, par des quadratures, les équations de la courbe F_1.

Soient a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3, les cosinus directeurs de Ox, Oy, Oz par rapport à des axes fixes. Chacun des systèmes de fonctions (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) satisfait au système différentiel

$$\frac{dx}{dt} + qz = 0, \qquad \frac{dy}{dt} - pz = 0, \qquad \frac{dz}{dt} + py - qx = 0.$$

Après déformation, les neuf cosinus subissent les accroissements infiniment petits α_1, β_1, ..., γ_3, et l'on a, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\frac{d\alpha_1}{dt} + q\alpha_3 = -q_1 a_3,$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} - p\alpha_3 = p_1 a_3,$$

$$\frac{d\alpha_3}{dt} + p\alpha_2 - q\alpha_1 = q_1 a_1 - p_1 a_2.$$

En remarquant que l'on connaît l'intégrale générale des équations sans second membre et appliquant la méthode de la variation des constantes, on trouve

$$\alpha_i = \mathrm{B}c_i - \mathrm{C}b_i, \qquad \beta_i = \mathrm{C}a_i - \mathrm{A}c_i, \qquad \gamma_i = \mathrm{A}b_i - \mathrm{B}a_i, \tag{5}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= \int_0^t (p_1 a_1 + q_1 a_2)\, dt, \\ \mathrm{B} &= \int_0^t (p_1 b_1 + q_1 b_2)\, dt, \\ \mathrm{C} &= \int_0^t (p_1 c_1 + q_1 c_2)\, dt. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Les accroissements que subissent les coordonnées du point O pendant la déformation sont ensuite donnés par la formule

$$x_1 = \int_0^t (e a_3 + \mathrm{B}c_3 - \mathrm{C}b_3)\, dt \tag{7}$$

et celles qu'on en déduit par permutations circulaires.

7. Si l'on appelle ζ la troisième translation du trièdre $Oxyz$, la caractéristique D du plan normal xOy a pour équation

$$\zeta + py - qx = 0. \tag{8}$$

Le *rayon de courbure* R de F en O est donné par

$$\mathrm{R}^2 = \frac{\zeta^2}{p^2 + q^2}.$$

Après déformation, il subit l'accroissement ΔR donné par

(9) $$\frac{\Delta R}{R} = e - \frac{pp_1 + qq_1}{p^2 + q^2}.$$

Soit φ l'angle polaire de la binormale, compté à partir de Ox. On a

$$\varphi = \text{arc tang}\frac{q}{p}.$$

Les composantes du vecteur vitesse du point décrivant l'indicatrice des binormales sont, en désignant par des accents les dérivées par rapport à t,

$$-\varphi' \sin\varphi, \quad \varphi' \cos\varphi, \quad 0.$$

Si l'on oriente la normale principale par l'angle $\varphi - \frac{\pi}{2}$, la mesure algébrique du vecteur précédent suivant la normale principale est $-\varphi'$. Le *rayon de torsion* de F est donc

$$T = -\frac{\zeta}{\varphi'} = \frac{\zeta(p^2 + q^2)}{qp' - pq'}.$$

Après déformation, on a

(10) $$\frac{\Delta T}{T} = e + 2\frac{pp_1 + qq_1}{p^2 + q^2} + \frac{pq'_1 + p_1 q' - q_1 p' - qp'_1}{qp' - pq'}.$$

8. **Déformation des sections droites.** — Considérons maintenant un point M quelconque du corps élastique, défini par les coordonnées (x, y, t) avant la déformation. Après la déformation, il vient occuper la position M'. Projetons M' en O'_1 sur F_1 et appelons t' la valeur de t qui correspond à O'_1, comme il a été expliqué au n° 5. Soient d'autre part $(x', y', 0)$ les coordonnées cartésiennes de M' par rapport aux axes $O'_1 x'_1 y'_1 z'_1$ définis précédemment. Il est clair que la déformation est entièrement déterminée si l'on se donne, outre les trois fonctions p_1, q_1, e du n° 5, les trois fonctions suivantes :

(11) $$u = x' - x, \qquad v = y' - y, \qquad w = t' - t.$$

Il est à remarquer que, d'après leur définition même, *ces trois fonctions doivent s'annuler identiquement pour $x = y = 0$.*

9. **Accroissements des composantes covariantes du tenseur fondamental.** — Ce sont les quantités que j'ai appelées ε_{ik} dans mon précédent Mémoire. D'après les formules (2), tous ces accroissements sont nuls, sauf

$$\varepsilon_{33} = 2hh_1,$$

en posant

$$h_1 = e + p_1 y - q_1 x. \tag{12}$$

10. **Calcul des efforts élastiques.** — En appliquant les formules (10) de mon précédent Mémoire, on a

$$\left\{\begin{aligned} &T_{11} = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad T_{22} = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \\ &T_{33} = \lambda\theta g + 2\mu h\left[h\frac{\partial w}{\partial t} + pv - qu + w(p'y - q'x) + h_1\right], \\ &T_{23} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad T_{31} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad T_{12} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Dans ces formules, θ représente la *dilatation cubique*, donnée par la formule [1]

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{h_1 + pv - qu + w(p'y - q'x)}{h}. \tag{14}$$

Considérons maintenant un vecteur dont les composantes cartésiennes sont α, β, γ. D'après les formules (1), ses composantes contrevariantes et covariantes sont

$$\alpha^1 = \alpha, \qquad \alpha^2 = \beta, \qquad \alpha^3 = \frac{\gamma}{h};$$
$$\alpha_1 = \alpha, \qquad \alpha_2 = \beta, \qquad \alpha_3 = \gamma h.$$

Si α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale à un élément plan intérieur au corps élastique, les composantes covariantes de l'effort élastique correspondant sont

$$T_1 = T_{11}\alpha^1 + T_{12}\alpha^2 + T_{13}\alpha^3,$$
$$T_2 = T_{21}\alpha^1 + T_{22}\alpha^2 + T_{23}\alpha^3,$$
$$T_3 = T_{31}\alpha^1 + T_{32}\alpha^2 + T_{33}\alpha^3.$$

---

(1) Appliquer la formule (5) du Mémoire cité.

Ses composantes cartésiennes sont donc

$$(15)\qquad \begin{cases} T_x = T_{11}\alpha + T_{12}\beta + T_{13}\dfrac{\gamma}{h}, \\ T_y = T_{21}\alpha + T_{22}\beta + T_{23}\dfrac{\gamma}{h}, \\ T_z = \dfrac{T_{31}\alpha + T_{32}\beta}{h} + T_{33}\dfrac{\gamma}{g}. \end{cases}$$

PROBLÈME I.

11. **Conditions du problème.** — Si l'on appelle N l'effort normal qui doit s'exercer sur un élément plan quelconque parallèle à Oz, on doit avoir, quels que soient α, β,

$$T_x = N\alpha, \qquad T_y = N\beta, \qquad T_z = 0.$$

D'où les conditions

$$(16)\qquad T_{23} = T_{31} = T_{12} = 0, \qquad T_{11} = T_{22} = N.$$

Si l'on pose

$$\frac{T_{33}}{g} = N',$$

les formules (15) se réduisent à

$$T_x = N\alpha, \qquad T_y = N\beta, \qquad T_z = N'\gamma.$$

On voit que N' représente l'effort normal exercé sur un élément parallèle à xOy.

12. **Intégration du système** (16). — D'après les formules (13), on a d'abord

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Donc, les fonctions u et v sont des *fonctions harmoniques conjuguées*.

On a ensuite

$$(17)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + g\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Or, les fonctions $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$ sont aussi harmoniques conjuguées; donc

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial w}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(g\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0.$$

Comme $g=h^2$ et que h est une fonction linéaire, ces équations s'écrivent

$$\frac{\partial^2(hw)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2(hw)}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2(hw)}{\partial x\,\partial y}=0.$$

D'où l'on déduit, en se rappelant que w doit s'annuler pour $x=y=0$,

$$hw=A(x^2+y^2)+2Bx+2Cy, \tag{18}$$

A, B, C désignant des fonctions quelconques de t.

Portant dans (17), il vient

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}&=qA(x^2-y^2)-2pAxy-2Ax-2y(pB+qC)-2B,\\ \frac{\partial v}{\partial t}&=pA(x^2-y^2)+2qAxy+2x(pB+qC)-2Ay-2C. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Pour $x=y=0$, u et v doivent s'annuler identiquement; il en est donc de même de $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$. On en conclut que $B=C=0$. On a donc

$$hw=A(x^2+y^2). \tag{20}$$

Les formules (19) donnent ensuite, en intégrant par rapport à t,

$$\left\{\begin{aligned} u&=a(x^2-y^2)-2bxy+mx+P,\\ v&=b(x^2-y^2)+2axy+my+Q, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

où P et Q désignent deux fonctions harmoniques conjuguées, *indépendantes de t*, s'annulant pour $x=y=0$ et où a, b, m désignent des fonctions de t vérifiant les relations

$$qA=a', \qquad pA=b', \qquad 2A=-m'. \tag{22}$$

13. *Remarque I.* — On peut ajouter des constantes arbitraires aux coefficients a, b, m, car cela ne fait que modifier les fonctions P et Q. En particulier, si l'un de ces coefficients est constant, on peut le supposer nul.

Remarque II. — Inversement, on peut ajouter à P et Q deux polynomes harmoniques conjugués quelconques, du second degré et à coefficients constants. Cela revient à ajouter des constantes à a, b, m et à négliger une rotation infiniment petite du trièdre $O_1x_1y_1z_1$ autour de O_1z_1 (n° 5). En particulier, *si* P *et* Q *sont des polynomes du second degré, on peut les supposer nuls.*

Remarque III. — Supposons que l'on fasse tourner les axes Oxy, de l'angle constant φ, autour de l'origine. Soient (x', y') les nouvelles coordonnées du point $M(x, y)$ et u', v' les nouvelles composantes de son déplacement élémentaire. Posons

$$x+iy=z,\qquad u+iv=\zeta,\qquad P+iQ=Z,$$
$$x'+iy'=z',\qquad u'+iv'=\zeta',\qquad P'+iQ'=Z'.$$

On a

$$\zeta'=\zeta e^{-i\varphi},\qquad z=z'e^{i\varphi}.$$

Convenons de plus de définir P' et Q' par la condition

$$Z=Z'e^{i\varphi}.$$

Les formules (21) équivalent à

$$\zeta=(a+ib)z^2+mz+Z.$$

D'où l'on déduit

$$\zeta'=e^{i\varphi}(a+ib)z'^2+mz'+Z'.$$

Les formules (21) *subsistent donc après le changement de coordonnées, sous la seule condition de faire subir le même changement aux fonctions* P *et* Q [1] *et la rotation* $-\varphi$ *aux coefficients a et b, considérés comme des coordonnées cartésiennes.*

14. **Cas où les sections droites restent planes.** — Ceci arrive pour $A=0$. Les formules (22) montrent alors que les fonctions a, b, m sont constantes; on peut donc les supposer nulles, d'après la Remarque I du n° 13. Les formules (21) se réduisent à

$$u=P,\qquad v=Q.$$

Les coordonnées x', y' du point M' sont indépendantes de t. On en

[1] Ceci revient à considérer comme fixe le point représentatif de l'imaginaire Z.

conclut que la trajectoire de ce point est orthogonale au plan $O_1x_1y_1$. Autrement dit, *les fibres restent des fibres* après la déformation.

15. **Calcul des forces.** — On a d'abord, d'après (14),

$$\theta = \frac{H}{h} + 2\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{23}$$

en posant

$$H = \frac{\partial(hw)}{\partial t} + pv - qu + h;$$

ou, en tenant compte de (20) et (21),

$$\begin{aligned} H = {} & A'(x^2+y^2) + (pb-qa)(x^2-y^2) + 2(pa+qb)xy \\ & + m(py-qx) + h_1 + pQ - qP. \end{aligned} \tag{24}$$

Les formules (13) donnent ensuite

$$N = \lambda\frac{H}{h} + 2(\lambda+\mu)\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{25}$$

$$N' = (\lambda+2\mu)\frac{H}{h} + 2\lambda\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda}N - \frac{2\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{26}$$

Calculons également les composantes cartésiennes X, Y, Z de la *force de volume*. Il suffit d'appliquer la formule (11) du Mémoire déjà cité. On trouve immédiatement, en tenant compte de (16),

$$\left\{\begin{aligned} hX &= q(N-N') - h\frac{\partial N}{\partial x}, \\ hY &= p(N'-N) - h\frac{\partial N}{\partial y}, \\ hZ &= -\frac{\partial N'}{\partial t}. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Il est à remarquer que, h ne s'annulant jamais (n° 2), N, N', X, Y et Z sont toujours finis.

Le problème I est maintenant entièrement résolu.

16. **Cas où les forces de volume sont nulles.** — Ce cas particulier est intéressant, parce que, dans les problèmes pratiques, on néglige généralement les forces de volume devant les forces de surface.

D'après les formules (27), on doit avoir

$$(28)\qquad h\frac{\partial N}{\partial x} = q(N - N'),\qquad h\frac{\partial N}{\partial y} = p(N' - N),\qquad \frac{\partial N'}{\partial t} = 0.$$

En éliminant $N - N'$ entre les deux premières de ces équations, on a

$$p\frac{\partial N}{\partial x} + q\frac{\partial N}{\partial y} = 0;$$

d'où

$$(29)\qquad N = f(h),$$

puis

$$(30)\qquad N' = f(h) + hf'(h) = \frac{d(hN)}{dh}.$$

En remplaçant N et N′ par (25) et (26), on en déduit que H et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont des fonctions de la seule variable h. Comme $\frac{\partial u}{\partial x}$ est une fonction harmonique, c'est nécessairement une fonction linéaire de h; il s'ensuit que u et v sont des polynomes du second degré en x, y et, d'après (21), il en est de même de P et Q. En vertu de la Remarque II du n° 13, nous pouvons dès lors supposer $P = Q = 0$.

D'après (24), H se réduit alors à un polynome du second degré en x, y, donc à un trinome du second degré en h, soit

$$H = 2\alpha h^2 + \beta h + \gamma.$$

En identifiant les termes du second degré, on obtient trois équations linéaires en a, b, A′, d'où l'on tire

$$(31)\qquad a = -\alpha q,\qquad b = -\alpha p,\qquad A' = \alpha(p^2 + q^2).$$

La formule (26) devient

$$(32)\quad N' = 2\alpha(3\lambda + 2\mu)h + (\lambda + 2\mu)\beta + 2\lambda(m - 2\alpha) + (\lambda + 2\mu)\frac{\gamma}{h}.$$

Cette fonction doit être indépendante de t.

Premier cas. — Supposons que p et q ne soient pas des constantes. La variable h dépend de t. Dès lors, N′ doit être indépendant de h. Ceci exige $\alpha = \gamma = 0$; puis

$$N' = (\lambda + 2\mu)\beta + 2\lambda m = \text{const.}$$

Les formules (31) nous donnent maintenant $a = b = 0$; d'où, d'après (22), $A = 0$, $m = \text{const.}$; donc $\beta = \text{const.}$

D'autre part, on a, d'après (25),

$$N = \lambda\beta + 2(\lambda + \mu)m = \text{const.}$$

La formule (30) exige que $N' = N$; donc $\beta = m$.

En achevant l'identification de H avec mh, on a enfin

$$p_1 = q_1 = 0, \qquad e = m.$$

D'autre part,

$$u = mx, \qquad v = my.$$

On en conclut que la déformation considérée est la *déformation homothétique* bien connue, correspondant à une compression uniforme du corps solide. Cette déformation satisfait évidemment aux conditions I, quelle que soit la manière de choisir les fibres.

Deuxième cas. — Supposons les fonctions p et q constantes et non toutes deux nulles. La variable h est indépendante de t. Pour que N′ ne dépende pas de t, il faut d'abord que α soit constant; donc aussi a et b, d'après (31). Mais alors, $A = 0$, d'après (22); donc $\alpha = 0$, d'après (31).

D'autre part, la formule (25) donne

$$N = \lambda\frac{\gamma}{h} + \lambda\beta + 2(\lambda + \mu)m.$$

En portant les valeurs de N et N′ dans (30) et identifiant, on obtient

$$\gamma = 0, \qquad \beta = m = \text{const.}$$

On retombe sur le cas précédent.

Troisième cas. — Supposons $p = q = 0$; autrement dit, *les fibres sont rectilignes*.

Revenons aux conditions (28); elles exigent que N soit indépendant de x, y et que N′ soit indépendant de t. La formule (25) nous montre ensuite que H doit être harmonique, ce qui, d'après (24), exige que A′ soit nul. Mais alors H se réduit au polynome linéaire h_1 et l'on en conclut, comme précédemment, que P et Q peuvent être supposés nuls.

Dautre part, d'après (22), a et b sont des constantes. En vertu de la Remarque III du n° 13, nous pouvons, par une rotation des axes Oxy, supposer, par exemple, $b=0$. En annulant les coefficients de y et de x dans N, nous obtenons

$$p_1=0, \qquad q_1=\frac{4a(\lambda+\mu)}{\lambda}.$$

Moyennant quoi (26) devient

$$N'=-\frac{4\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda}ax+(\lambda+2\mu)e+2\lambda m.$$

Pour que N' ne dépendent pas de t, il faut et il suffit que

$$(\lambda+2\mu)e+2\lambda m=\text{const.}$$

On a d'ailleurs, d'après la troisième formule (22),

$$m=-2At+m_0, \qquad m_0=\text{const.};$$

donc *la dilatation linéaire e est une fonction linéaire de l'arc t.*

D'autre part, l'axe instantané de rotation du trièdre $O_1x_1y_1z_1$ a pour équation $x=\frac{1}{q_1}=\text{const.}$; il est fixe. On en conclut qu'après déformation, *la fibre de référence devient circulaire*.

Dans le cas particulier où $N=0$, e et m sont des constantes; donc $A=0$; c'est le cas de la *flexion simple*, que nous retrouverons au n° 21.

PROBLÈME II.

17. **Calcul de la déformation.** — Il faut avoir identiquement $N=0$ ou, d'après (25),

$$\lambda H+2(\lambda+\mu)h\frac{\partial u}{\partial x}=0. \tag{33}$$

Égalons les laplaciens des deux membres :

$$\lambda A'+(\lambda+\mu)\left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)=0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(qv-pu)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}A'. \tag{34}$$

Si les rotations p et q ne sont pas toutes deux nulles, on en conclut que $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont du premier degré en x, y; donc, u et v sont des polynomes harmoniques du second degré. Il en est de même des fonctions P et Q, qui peuvent dès lors être supposées nulles, en vertu de la Remarque II du n° 13.

L'équation (33) s'écrit alors

$$(35)\quad \begin{aligned} &\lambda A'(x^2+y^2)+\lambda(pb-qa)(x^2-y^2)+2\lambda(pa+qb)xy+\lambda m(py-qx) \\ &\quad +\lambda(e+p_1 y-q_1 x)+2(\lambda+\mu)(1+py-qx)(2ax-2by+m)=0. \end{aligned}$$

Annulons les coefficients de x^2 et y^2 et retranchons les équations obtenues; il vient

$$pb-qa=0.$$

En annulant le coefficient de xy et combinant avec l'équation ci-dessus, on obtient

$$a=b=0.$$

Les équations (22) donnent ensuite

$$A=0, \qquad m=\text{const.}$$

En achevant l'identification de (35), on trouve

$$(36)\quad p_1=-\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda}mp, \qquad q_1=-\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda}mq, \qquad e=-\frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda}m;$$

d'où, en portant dans (9) et (10),

$$\frac{\Delta R}{R}=m, \qquad \frac{\Delta T}{T}=e.$$

La nouvelle fibre de référence est donc entièrement déterminée. Quant aux fonctions u, v, w, elles se réduisent à

$$u=mx, \qquad v=my, \qquad w=0.$$

Donc, *chaque section droite reste plane et se déforme homothétiquement suivant le coefficient de Poisson.*

18. Il est aisé, d'après le n° 6, d'obtenir les *équations de la nouvelle*

fibre de référence. Posons, pour simplifier l'écriture,

$$-\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda}m=k.$$

La première des formules (6) s'écrit

$$A=k\int_0^t(pa_1+qa_2)\,dt.$$

Or, on a

$$p=-(a_2a'_3+b_2b'_3+c_2c'_3),\qquad q=a_1a'_3+b_1b'_3+c_1c'_3;$$

d'où

$$A=k\int_0^t(b_3c'_3-c_3b'_3)\,dt.$$

Si l'on appelle x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point O par rapport aux axes fixes, la formule (7) s'écrit, en faisant une intégration par parties,

$$\begin{aligned}x_1&=ex_0+Bz_0-Cy_0\\&\quad+k\int_0^t[x'_0(x_0x''_0+y_0y''_0+z_0z''_0)-x''_0(x_0x'_0+y_0y'_0+z_0z'_0)]\,dt.\end{aligned}$$

Posons

$$2K=x_0^2+y_0^2+z_0^2.$$

Nous obtenons, en remplaçant e par sa valeur en fonction de m,

$$x_1=x_0+Bz_0-Cy_0+kx'_0K'-2k\int_0^t K'x''_0\,dt$$

et les formules analogues.

Quant à la formule qui donne A, elle s'écrit

$$A=k\int_0^t(y'_0z''_0-z'_0y''_0)\,dt.$$

19. **Loi de forces.** — L'équation (26) donne, en tenant compte de (33) et (36),

$$N'=Ee,$$

E désignant le *module de Young*. Donc, *les efforts sur la section droite sont exactement les mêmes que dans le problème classique de l'extension d'un cylindre*.

Les formules (27) donnent ensuite

$$X = -Ee\frac{q}{h}, \qquad Y = Ee\frac{p}{h}, \qquad Z = 0.$$

On en conclut que *la force de volume est une répulsion* (*si* $e > 0$) *ou une attraction* (*si* $e < 0$) *exercée sur le point* M *par l'axe de courbure* D. *Cette répulsion a pour valeur* $\frac{Ee}{d}$, *en appelant* d *la distance de* D *à* M (1).

Malgré sa simplicité, une telle loi de forces est tout à fait *artificielle* et ne présente aucun intérêt pratique.

20. **Cas des fibres rectilignes.** — C'est le cas particulier $p = q = 0$, laissé de côté au n° 17.

L'équation (34) nous donne d'abord $A' = 0$; donc $A = \text{const}$. La formule (24) se réduit à $H = h_1$ et l'équation (33) nous apprend que $\frac{\partial u}{\partial x}$ est un polynome linéaire. Comme précédemment, nous en déduisons que les fonctions P et Q peuvent être supposées nulles. D'autre part, d'après (22), a et b sont constants. Par une rotation des axes (n° 13, Remarque III), nous pouvons supposer $b = 0$; d'où

$$u = a(x^2 - y^2) + mx, \qquad v = 2axy + my. \tag{37}$$

En achevant l'identification de (33), on obtient

$$p_1 = 0, \qquad q_1 = \frac{4a(\lambda + \mu)}{\lambda}, \qquad e = -\frac{2m(\lambda + \mu)}{\lambda}. \tag{38}$$

---

(1) Les forces de volume appliquées au cylindre élémentaire compris entre deux sections droites infiniment voisines admettent une résultante dont la mesure algébrique sur la normale principale est

$$\iiint \frac{Ee}{d} h\, dx\, dy\, dt = -\frac{EeS\,dt}{R},$$

en appelant S l'aire de chaque section et R le rayon de courbure algébrique de la fibre de référence. Cette résultante est appliquée au centre de gravité de la section droite moyenne. Si la fibre de référence passe par ce centre de gravité, on voit qu'elle se comporte comme un *fil parfait*, dont la tension serait constante et égale à ESe et qui serait soumis à une force normale égale à $-\frac{ESe}{R}$ par unité de longueur. Les équations intrinsèques des fils parfaits sont bien vérifiées pour un tel fil.

Enfin, la troisième équation (22) donne

$$m = -2At + m_0, \qquad m_0 = \text{const.}$$

La fibre déformée est un arc de cercle dont la courbure est $\rho = q_1$; *sa dilatation linéaire est une fonction linéaire de t.* Rappelons qu'on a obtenu une déformation analogue au n° 16 (troisième cas).

21. Cherchons la *loi de forces*. La formule (26) donne

$$N' = E(e - \rho x).$$

On a ensuite, d'après (27),

$$X = Y = 0, \qquad Z = -Ee'.$$

La force de volume est une force constante parallèle aux fibres. Dans le cas particulier où cette force est nulle, $A = 0$; on retrouve tous les résultats classiques du problème bien connu de la *flexion simple*, traité par Barré de Saint-Venant ([1]).

Si la fibre de référence passe par les centres de gravité des sections droites, les efforts normaux s'exerçant sur une section équivalent à la force ESe appliquée en O et à un couple, dont le moment a pour composantes

$$L = -EC\rho, \qquad M = EB\rho, \qquad N = 0,$$

en appelant B le moment d'inertie de la section droite par rapport à Oy et C le produit d'inertie relatif aux axes Ox, Oy ([2]).

Le problème II est entièrement résolu. On voit que *la seule solution pratique est celle de la flexion simple.*

([1]) *Cf.* Lecornu, *Cours de Mécanique*, t. II, p. 386. Les équations (1) de cet ouvrage diffèrent des formules (37) ci-dessus par la présence d'un terme en z dans u et dans w; mais cela tient à ce que l'auteur utilise des axes fixes, tandis que nous rapportons le corps déformé à des axes mobiles. La courbure ρ calculée par les formules de Saint-Venant est bien d'accord avec la deuxième de nos équations (38), si l'on suppose z infiniment petit.

Pour le cas où A n'est pas nul, *voir* mon Mémoire déjà cité, p. 129.

([2]) Ces formules sont bien d'accord avec les formules (49) de mon Mémoire déjà cité, quand on y suppose $q = 0$ et $\Theta = 0$.

PROBLÈME III.

22. **Condition générale du problème.** — L'équation (33) ne doit plus être vérifiée identiquement, mais *seulement sur* Γ. Cette équation s'écrit

$$2(\lambda+\mu)\frac{\partial P}{\partial x}+pH_2-qH_1=F, \tag{39}$$

en posant

$$H_1=2(\lambda+\mu)x\frac{\partial P}{\partial x}+\lambda P, \qquad H_2=2(\lambda+\mu)y\frac{\partial P}{\partial x}+\lambda Q, \tag{40}$$

$$\begin{aligned}F={}&x^2[-\lambda A'+(5\lambda+4\mu)qa-\lambda pb]+y^2[-\lambda A'+(5\lambda+4\mu)pb-\lambda qa]\\&-2(3\lambda+2\mu)(pa+qb)xy+x[-4(\lambda+\mu)a+(3\lambda+2\mu)qm+\lambda q_1]\\&+y[4(\lambda+\mu)b-(3\lambda+2\mu)pm-\lambda p_1]-2(\lambda+\mu)m-\lambda e.\end{aligned} \tag{41}$$

En tout point intérieur à Γ, on a

$$N=\frac{2(\lambda+\mu)\dfrac{\partial P}{\partial x}+pH_2-qH_1-F}{h}. \tag{42}$$

23. **Cas où P et Q sont des polynomes du second degré.** — D'après la Remarque II du n° 13, nous pouvons supposer $P=Q=0$. L'équation (39) se réduit à $F=0$ et ne peut représenter qu'une *ellipse*. Soit

$$G\equiv\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-1=0$$

l'équation de cette ellipse. Nous allons démontrer que l'on peut mettre le polynome F sous la forme $F\equiv SG$, S désignant une fonction inconnue de t. Les équations d'identification s'écrivant

$$\left\{\begin{aligned}&-\lambda A'+(5\lambda+4\mu)qa-\lambda pb=\frac{S}{\alpha^2},\\&-\lambda A'+(5\lambda+4\mu)pb-\lambda qa=\frac{S}{\beta^2},\\&\qquad pa+qb=0;\end{aligned}\right. \tag{43}$$

$$\left\{\begin{aligned}&\lambda q_1=4(\lambda+\mu)a-(3\lambda+2\mu)qm,\\&\lambda p_1=4(\lambda+\mu)b-(3\lambda+2\mu)pm,\\&\lambda e=S-2(\lambda+\mu)m.\end{aligned}\right. \tag{44}$$

La troisième équation (43) donne, d'après (22),

$$ab = k = \text{const.} \tag{45}$$

Éliminons maintenant S entre les deux premières :

$$\lambda A'(\alpha^2 - \beta^2) + pb[(5\lambda + 4\mu)\beta^2 + \lambda\alpha^2] - qa[(5\lambda + 4\mu)\alpha^2 + \lambda\beta^2] = 0. \tag{46}$$

Si l'ellipse Γ *est un cercle,* $\alpha = \beta$ et l'équation ci-dessus se réduit à

$$pb - qa = 0.$$

En la combinant avec la troisième équation (43), on voit que a et b sont nuls, *si les rotations p et q ne sont pas nulles toutes deux.* Les formules (22) donnent ensuite $A = 0$. Dès lors, les équations (43) montrent que $S = 0$; donc F est identiquement nul; l'équation (39) devient une identité; *on retombe sur le problème II.* Ce cas particulier doit donc être écarté; autrement dit, *la courbe* Γ *doit être une véritable ellipse.*

Nous plaçant dans cette hypothèse, multiplions (46) par $2A$ et intégrons, en tenant compte de (22) :

$$A^2 + \frac{b^2[(5\lambda + 4\mu)\beta^2 + \lambda\alpha^2] - a^2[(5\lambda + 4\mu)\alpha^2 + \lambda\beta^2]}{\lambda(\alpha^2 - \beta^2)} = k_1, \tag{47}$$

k_1 désignant une constante.

Nous avons dès lors la *solution suivante :*

On choisit arbitrairement a en fonction de t; on en déduit $b = \frac{k}{a}$; on a ensuite A par (47); puis p et q par (22) et m par une quadrature. En retranchant les deux premières équations (43), on a

$$S = \frac{2\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}(3\lambda + 2\mu)(pb - qa).$$

Les formules (44) donnent enfin p_1, q_1, e.

La déformation est entièrement déterminée.

24. Cherchons la *loi de forces.*

On a d'abord, d'après (42),

$$N = -\frac{F}{h} = -\frac{SG}{h},$$

soit

$$N = \frac{2\alpha^2\beta^2}{\alpha^2 - \beta^2}(3\lambda + 2\mu)(qa - pb)\frac{\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} - 1}{1 + py - qx}.$$

Pour que D ne coupe pas Γ, on doit avoir constamment

$$p^2\beta^2 + q^2\alpha^2 < 1$$

ou, d'après (22),

$$A^2 > \beta^2 b'^2 + \alpha^2 a'^2.$$

Il suffit, pour cela, de choisir la constante k_1 suffisamment grande, après qu'on a choisi la fonction a et la constante k.

Ayant N, on a N′ par (26) et la force de volume par (27).

La loi de forces obtenue est *très artificielle*, ce qui enlève tout intérêt pratique à la présente solution.

25. Revenons maintenant aux équations (43) dans l'hypothèse, précédemment écartée, où p et q sont nuls, c'est-à-dire dans le cas où *les fibres sont rectilignes*. Ces équations se réduisent à

$$S = -\lambda A'\alpha^2 = -\lambda A'\beta^2.$$

Si l'on ne veut pas que S soit nul, ce qui nous ramènerait au problème II, il faut que $\alpha = \beta$, c'est-à-dire *que* Γ *soit un cercle*.

D'autre part, les formules (22) montrent que a et b sont constants. En utilisant la Remarque III du n° 13, on peut supposer $b = 0$. Les formules (44) nous donnent alors

$$p_1 = 0, \qquad q_1 = \frac{4(\lambda + \mu)a}{\lambda} \tag{48}$$

et, en utilisant la troisième formule (22),

$$e = \frac{1}{2}\left(\alpha^2 m'' - 4m\frac{\lambda + \mu}{\lambda}\right), \qquad A = -\frac{m'}{2}. \tag{49}$$

On obtient la *solution suivante :*

On choisit arbitrairement la constante a et la fonction m. On a ensuite p_1, q_1, e et A par les formules (48) et (49). *La déformation est alors parfaitement déterminée.*

Il est à remarquer que *la fibre déformée est plane*, puisque p_1 est nul. On peut s'arranger pour qu'elle ait une forme quelconque en choisissant convenablement la fonction m. En particulier, elle devient un arc de cercle si e est constant, c'est-à-dire si l'on prend

$$m = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + C_3; \qquad C_1, C_2, C_3 = \text{const.}; \qquad \omega^2 = 4\frac{\lambda+\mu}{\lambda\alpha^2}.$$

26. Cherchons la *loi de forces*. La formule (42) donne d'abord

$$N = -F = -SG = \lambda A'(x^2 + y^2 - \alpha^2).$$

On a ensuite, par la formule (26),

$$N' = (\lambda + 2\mu) A'(x^2 + y^2) + E(e - q_1 x) - \frac{\lambda^2\alpha^2}{\lambda+\mu} A',$$

E désignant toujours le module de Young.

On a enfin, par les formules (27),

$$X = \lambda m'' x, \qquad Y = \lambda m'' y, \qquad Z = \frac{\lambda + 2\mu}{2} m'''(x^2 + y^2 - \alpha^2) + \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda} m'.$$

La loi est assez simple, mais encore artificielle.

Nous allons maintenant *rechercher systématiquement toutes les autres solutions*, en commençant par envisager les cas particuliers, en ce qui concerne la forme de la fibre de référence.

27. **Cas des fibres rectilignes.** — On a $p = q = 0$ et il en résulte, d'après (22), que a et b sont constants.

L'équation (39) se réduit à

$$2(\lambda + \mu)\frac{\partial P}{\partial x} = F. \tag{50}$$

En dérivant par rapport à t, il vient

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0, \tag{51}$$

puisque P ne dépend pas de t.

28. Supposons d'abord *que cette équation soit vérifiée identiquement*. Les coefficients de F sont constants. En utilisant la Remarque I du n° 13, nous pouvons supposer que les coefficients de x et de y et le

terme constant sont nuls. En appliquant ensuite la Remarque III, n° 13, nous pouvons encore supposer $b = 0$. On a finalement

$$F = \lambda\alpha(x^2 + y^2), \quad \alpha = \text{const.},$$

avec les conditions $A = -\alpha t$ et

$$(52) \quad p_1 = 0, \qquad q_1 = 4\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\alpha, \qquad e = -2\frac{\lambda+\mu}{\lambda}m, \qquad m = \alpha t^2 + \beta,$$

où β désigne une nouvelle constante.

La courbe Γ étant arbitrairement choisie, la fonction $\frac{\partial P}{\partial x}$ est entièrement déterminée par la condition (50), d'après le principe de Dirichlet. On en déduit P, à un terme de la forme $-ny$ près, que l'on peut d'ailleurs négliger, d'après la remarque du n° 5.

En définive, *la déformation est entièrement déterminée*. Signalons que, d'après la première équation (52), la fibre de référence déformée est plane; c'est d'ailleurs une développante de développante de cercle, si $\alpha \neq 0$; c'est un cercle, si $\alpha = 0$.

La *loi de forces* peut être obtenue par les formules (42), (26) et (27). Mais elle dépend de P, donc de la forme du contour Γ.

29. Supposons maintenant *que l'équation* (51) *ne soit pas vérifiée identiquement*. Elle doit représenter Γ, qui est donc un *cercle*. En ajoutant une constante convenable à m, on peut supposer que F s'annule sur Γ. On en conclut que la fonction $\frac{\partial P}{\partial x}$ est identiquement nulle. En appliquant la remarque du n° 5, on peut ensuite supposer que les fonctions P et Q sont également nulles. *On retombe* dès lors *sur la solution particulière du* n° 25.

30. **Cas où le corps est de révolution.** — Il est caractérisé par la condition que p et q soient constants. La fibre de référence est un cercle. Si l'on appelle R son rayon et si l'on dirige Ox vers son centre Q, on a

$$p = 0, \qquad q = \frac{1}{R}.$$

D'après (22) et la Remarque I du n° 13, on peut prendre $b = 0$. On a, en outre,

$$\text{(53)} \qquad A = Ra', \qquad m + 2Ra = m_0 = \text{const.}$$

L'équation (39) devient

$$\text{(54)} \qquad 2(\lambda + \mu)(x - R)\frac{\partial P}{\partial x} + \lambda P = - RF.$$

En dérivant par rapport à t, nous retombons sur (51).

31. Supposons d'abord que cette dernière équation soit *vérifiée identiquement;* autrement dit, les coefficients de F sont constants. En considérant les coefficients de x^2 et de y^2, on voit immédiatement que a est une constante. D'où l'on déduit, en appliquant (22) et la Remarque I du n° 13,

$$A = a = 0, \qquad m = \text{const.}$$

En choisissant convenablement la valeur de m, on peut annuler le coefficient de x dans F. Enfin, en appliquant la remarque du n° 5, on peut également annuler le coefficient de y. Finalement, F se réduit à une constante, soit λkq.

Les hypothèses que nous venons de faire entraînent les conditions

$$\text{(55)} \qquad p_1 = 0, \qquad q_1 = -\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda} qm, \qquad e = -kq - 2\frac{\lambda + \mu}{\lambda} m.$$

Ces formules nous montrent que *la fibre de référence reste circulaire* après déformation.

L'équation (54) s'écrit maintenant

$$2(\lambda + \mu)(x - R)\frac{\partial P}{\partial x} + \lambda P = -\lambda k.$$

En portant l'origine au point Q et posant

$$\text{(56)} \qquad P + k = P',$$

elle devient

$$\text{(57)} \qquad 2(\lambda + \mu) x \frac{\partial P'}{\partial x} + \lambda P' = 0.$$

Nous sommes ainsi conduits au *problème d'analyse* suivant : *Étant* *donnée une courbe fermée* Γ, *ne coupant pas* Oy, *trouver une fonction harmonique* P', *continue à l'intérieur de* Γ *et vérifiant* (57) *sur* Γ.

J'ai donné [1] la solution générale de ce problème; elle comporte deux constantes arbitraires.

Si l'on possède une solution, on choisit le point O arbitrairement sur Qx et à l'intérieur de Γ. La surface S est engendrée par la rotation de Γ autour de Qy. La constante k est la valeur de P' en O. On choisit arbitrairement la constante m et les formules (55) déterminent la nouvelle fibre de référence. La déformation dans chaque plan méridien est enfin donnée par les formules (21), en calculant P par la formule (56) et ramenant l'origine en O.

32. Supposons maintenant *que l'équation* (51) *ne soit pas vérifiée identiquement.* Elle doit représenter Γ, qui est donc une *ellipse*. Comme $p = b = 0$, F n'a pas de terme en xy et l'on peut supposer l'ellipse rapportée à ses axes. Si l'on garde les notations du n° 23, on doit avoir

$$F \equiv SG + F_1,$$

S désignant une fonction de t et F_1 un polynome du second degré à coefficients constants, ne possédant pas de terme en xy. Observons d'ailleurs que l'on peut retrancher une constante arbitraire S_0 de la fonction S, en ajoutant $S_0 G$ à F_1. En choisissant convenablement S_0 et ajoutant une constante convenable à a (n° 13, Remarque I), on peut abaisser F_1 au premier degré. En ajoutant une constante convenable à m, on peut faire disparaître son terme en x et en utilisant la remarque du n° 5, on peut faire disparaître son terme en y. Finalement, F_1 se réduit à une constante λkq et l'on est ramené au *même problème d'analyse* que précédemment, avec cette seule particularité que Γ est une ellipse.

33. **Cas des fibres planes.** — Supposons *que les rotations* p *et* q *soient liées par une relation linéaire et homogène, à coefficients constants.* L'axe D garde une direction fixe; le plan P enveloppe un cylindre; *les fibres sont planes.* Prenons Oy parallèle à D; nous avons

---

[1] *Comptes rendus*, 198, 1934, p. 1337; *J. Math. p. et appl.*, 1936.

$p = 0$. D'après (22), la fonction b est constante. On pourrait la supposer nulle, comme au n° 30; mais il est préférable de la laisser provisoirement indéterminée.

L'équation (39) s'écrit

$$2(\lambda + \mu)\frac{\partial P}{\partial x} - q H_1 = F. \tag{58}$$

En dérivant par rapport à t, divisant par q' et dérivant une nouvelle fois, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{q'}\frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0. \tag{59}$$

34. Supposons cette équation *vérifiée identiquement*. On en déduit

$$F = -q F_1 + F_2, \tag{60}$$

F_1 et F_2 désignant deux polynomes du second degré à coefficients constants. Portant (60) dans (58), on obtient les deux conditions

$$2(\lambda + \mu)\frac{\partial P}{\partial x} = F_2, \qquad H_1 = F_1, \tag{61}$$

qui doivent être *vérifiées sur* Γ.

Nous aboutissons à un *nouveau problème d'analyse*, dont je n'ai pu trouver (*loc. cit.*, problème IV) que des solutions particulières.

Les polynomes F_1 et F_2 étant supposés connus, il reste à procéder à l'identification de (60). Ce calcul, qui ne présente pas de difficultés, permet, dans le cas général, de déterminer, par des quadratures, la fibre de référence et sa déformation.

35. Supposons maintenant *que l'équation* (59) *ne soit pas vérifiée identiquement*. Elle doit représenter Γ, qui est donc une *ellipse*. Si l'équation de cette ellipse est $G = 0$, on a

$$F \equiv SG + q F_1 + F_2,$$

S désignant une fonction de t et F_1, F_2 des polynomes du second degré à coefficients constants.

Sur Γ, on a encore (61). Mais cette fois, Γ étant une ellipse, on peut affirmer que, si F_2 est du second degré, P est nécessairement un polynome harmonique du troisième degré [1]. Il est facile de voir que l'équation (58) représente alors une cubique ayant ses trois directions asymptotiques réelles, donc indécomposable en une droite et une ellipse. Dès lors, les fonctions P et Q sont du second degré et *l'on retombe sur la solution du* n° 23.

36. **Cas où les fibres sont sphériques.** — Supposons que p et q soient liés par une *relation linéaire et non homogène*, à coefficients constants, que l'on peut mettre sous la forme

$$(62)\qquad 1 + p y_0 - q x_0 = 0,$$

x_0 et y_0 désignant des constantes. Cette relation exprime que le point $Q(x_0, y_0)$ du plan xOy est fixe. Donc, *les fibres sont sur des sphères* de centre Q.

On pourrait prendre Q sur Ox par exemple. Nous ne le ferons pas, afin de ne pas détruire la symétrie des calculs et aussi afin de pouvoir particulariser les axes par la suite.

L'équation (39) peut s'écrire, en tenant compte de (62),

$$(63)\qquad p K_2 - q K_1 = F,$$

en posant

$$(64)\qquad K_1 = 2(\lambda + \mu)(x - x_0)\frac{\partial P}{\partial x} + \lambda P, \qquad K_2 = 2(\lambda + \mu)(y - y_0)\frac{\partial P}{\partial x} + \lambda Q.$$

Dérivons (63) par rapport à t :

$$p' K_2 - q' K_1 = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

De cette équation, combinée avec (63), on tire

$$(65)\qquad K_1 = F_1, \qquad K_2 = F_2,$$

---

[1] D'une façon générale, si une fonction harmonique prend, sur une ellipse $G = 0$, les mêmes valeurs qu'un polynome F de degré p, cette fonction est un polynome de degré p. On voit, en effet, très facilement qu'on peut trouver un polynome P_1 et un polynome harmonique P tels que l'on ait identiquement

$$P = GP_1 + F.$$

D'après le principe de Dirichlet, le polynome P est la fonction cherchée.

en posant

$$(66) \qquad F_1 = \frac{p'F - p\dfrac{\partial F}{\partial t}}{pq' - qp'}, \qquad F_2 = \frac{q'F - q\dfrac{\partial F}{\partial t}}{pq' - qp'}.$$

Si l'on dérive de nouveau par rapport à t, en remarquant que p'', q'' sont, d'après (62), proportionnels à p', q', on obtient l'équation unique

$$(67) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(qp' - pq') + \frac{\partial F}{\partial t}(pq'' - qp'') = 0.$$

37. Supposons d'abord que cette équation soit *vérifiée identiquement*. On en déduit que F_1 et F_2 sont des polynomes du second degré à coefficients constants et l'on tire des formules (66)

$$(68) \qquad F = pF_2 - qF_1.$$

Posons

$$F_i = a_i x^2 + 2b_i xy + c_i y^2 + d_i x + e_i y + f_i.$$

En identifiant les termes du second degré dans (68), on obtient trois relations, qui, multipliées par A et intégrées en tenant compte de (22), donnent

$$\begin{aligned} -\lambda A^2 + (5\lambda + 4\mu)a^2 - \lambda b^2 &= 2(a_2 b - a_1 a) + \text{const.},\\ -\lambda A^2 + (5\lambda + 4\mu)b^2 - \lambda a^2 &= 2(c_2 b - c_1 a) + \text{const.},\\ -(3\lambda + 2\mu)ab &= b_2 b - b_1 a + \text{const.} \end{aligned}$$

On en déduit que a, b, A sont des constantes et peuvent être supposés nuls (n° 13, Remarque I). La troisième formule (22) montre ensuite que m est également constant et peut aussi être supposé nul. Dans ces conditions, F se réduit à $-\lambda h_1$. Donc, F_1 et F_2 s'abaissent au premier degré et l'identification de (68) donne

$$(69) \qquad \lambda p_1 = -pe_2 + qe_1, \qquad \lambda q_1 = pd_2 - qd_1, \qquad \lambda e = -pf_2 + qf_1.$$

Si l'on connaît les constantes d_i, e_i, f_i, *la déformation de la fibre de référence est déterminée.* Il est d'ailleurs facile de vérifier que les rotations et translations $p + p_1$, $q + q_1$, $1 + e$ du trièdre $O_1x_1y_1z_1$ sont liées par une équation linéaire à coefficients constants et l'on en conclut que *les fibres restent sphériques* après la déformation.

Il nous reste à examiner les équations (65). En portant l'origine au point Q, elles s'écrivent

$$(70)\qquad 2(\lambda+\mu)x\frac{\partial P}{\partial x}+\lambda P = F'_1, \qquad 2(\lambda+\mu)y\frac{\partial P}{\partial x}+\lambda Q = F'_2,$$

F'_1 et F'_2 désignant les polynomes linéaires déduits de F_1 et F_2 par le changement d'origine.

Ces relations doivent être *vérifiées sur* Γ. Nous sommes ainsi conduits à un *nouveau problème d'analyse*, que j'ai également étudié (*loc. cit.*, problème II), mais dont je n'ai pu trouver la solution générale. Je signalerai seulement que si F_1 et F_2 sont des polynomes conjugués, c'est-à-dire si $d_1 = e_2$ et $e_1 = -d_2$, P et Q sont des polynomes linéaires et les égalités (70) et par conséquent (39) sont vérifiées dans tout le plan. On retombe sur le problème II du présent Mémoire.

38. Supposons maintenant *que l'équation* (67) *ne soit pas vérifiée identiquement*. Elle doit représenter Γ, qui est donc une *ellipse*. En conservant les notations du n° 23, nous avons les identités

$$F_1 = S_1 G + G_1, \qquad F_2 = S_2 G + G_2,$$

G_1 et G_2 désignant des polynomes du second degré à coefficients constants et S_1, S_2 des fonctions de t.

On doit avoir, sur Γ,

$$K_1 = G_1, \qquad K_2 = G_2.$$

En portant l'origine au point Q, on retombe sur le problème d'analyse du n° 37, avec cette seule particularité que Γ est une ellipse.

Les polynomes G_1 et G_2 étant connus, on a

$$F \equiv SG + pG_2 - qG_1.$$

En effectuant l'identification, on trouve d'abord que *si* Γ *est un cercle*, on peut supposer $a = b = A = m = S = 0$ et l'on retombe sur la solution du n° 37.

Si Γ *est une véritable ellipse*, on peut, par des quadratures, calculer les fonctions a, b, m, A, S, p_1, q_1, e; on sait donc déterminer la déformation, sous la seule réserve de savoir calculer les fonctions P et Q.

39. **Cas général.** — Nous supposons, cette fois, *qu'il n'existe aucune relation linéaire à coefficients constants entre p et q.* Dérivons deux fois (39) par rapport à t :

$$p' H_2 - q' H_1 = \frac{\partial F}{\partial t}, \qquad p'' H_2 - q'' H_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}.$$

Comme $p'q'' - q'p''$ n'est pas nul, on en déduit

$$H_1 = F_1, \qquad H_2 = F_2, \tag{71}$$

en posant

$$F_1 = \frac{1}{p'q'' - q'p''}\left(p'' \frac{\partial F}{\partial t} - p' \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right),$$
$$F_2 = \frac{1}{p'q'' - q'p''}\left(q'' \frac{\partial F}{\partial t} - q' \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}\right).$$

En dérivant par rapport à t, on obtient l'unique équation

$$(p'''q'' - q'''p'')\frac{\partial F}{\partial t} + (p'q''' - q'p''')\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + (p''q' - q''p')\frac{\partial^3 F}{\partial t^3} = 0. \tag{72}$$

40. Supposons d'abord que cette équation soit *vérifiée identiquement*. Les polynomes F_1 et F_2 ont leurs coefficients constants et l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial t} = p' F_2 - q' F_1;$$

d'où, en intégrant,

$$F = pF_2 - qF_1 + F_3, \tag{73}$$

F_3 désignant un nouveau polynome du second degré à coefficients constants. En portant dans (39), on obtient les trois conditions

$$H_1 = F_1, \qquad H_2 = F_2, \qquad 2(\lambda + \mu)\frac{\partial P}{\partial x} = F_3, \tag{74}$$

qui doivent être *vérifiées sur* Γ.

On aboutit à un *nouveau problème d'analyse* (*loc. cit.*, problème III), dont je n'ai pu trouver la solution que dans le cas où Γ est une ellipse, ce qui revient à considérer la solution particulière du n° 23.

Si l'on possédait une autre solution de ce problème d'analyse, on pourrait, en effectuant l'identification de (73), calculer les fonctions a, b, m, A, p_1, q_1, e, c'est-à-dire achever la détermination complète de la déformation.

41. Supposons maintenant *que l'équation* (72) *ne soit pas vérifiée identiquement*. Elle doit représenter Γ, qui est donc une *ellipse*. On doit encore avoir (74) sur cette ellipse. Mais deux de ces relations sont identiques aux relations (61). On en conclut, comme au n° 35, que l'on retombe sur la solution du n° 23.

42. **Conclusion.** — Les trois problèmes que nous venons d'étudier admettent tous des solutions plus ou moins simples, mais pour lesquelles *la loi de forces présente généralement un caractère artificiel*. Les seuls cas qui puissent vraiment se rencontrer dans la pratique sont les cas classiques de la *compression uniforme* (pour le problème I) et de la *flexion simple* (pour le problème II).