GASTON DARBOUX

Mémoire sur les surfaces

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 1 (1872), p. 273-292
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1872_2_1__273_0>

MÉMOIRE

SUR

LES SURFACES CYCLIDES,

PAR M. DARBOUX,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE.

Dans un travail antérieur (¹), j'ai étudié la classification, les sections planes et sphériques des surfaces du quatrième ordre ayant le cercle de l'infini pour ligne double, et des surfaces du troisième ordre qui contiennent ce cercle. Ces surfaces comprennent, comme cas très-particulier, la *cyclide* de M. Dupin, et elles font partie d'une classe plus générale de surfaces nommées *anallagmatiques* par M. Moutard. J'ai proposé de réserver à ces surfaces le nom de cyclides, pour rappeler leur analogie avec la cyclide de M. Dupin (que j'appelle cyclide à quatre points doubles) et pour les distinguer des autres surfaces anallagmatiques d'ordre quelconque. J'adopterai ici cette nouvelle dénomination. Le présent travail est consacré au développement d'une série de propositions qui établissent la plus grande analogie entre la théorie des cyclides et celle des quadriques. Dans un Mémoire suivant, j'expliquerai cette analogie en indiquant les propriétés principales d'un nouveau système de coordonnées qui paraît très-important pour l'étude de certaines propriétés de l'espace; mais, dans le travail actuel, je n'emploierai que le système des coordonnées rectangulaires, dont on fait usage en Géométrie analytique. M. Moutard a démontré le premier

(¹) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVIII, p. 1311.

qu'étant donnée une cyclide, les sphères doublement tangentes à cette surface se divisent en cinq séries; les centres des sphères de chaque série sont situés sur une quadrique; les sphères coupent toutes à angle droit une sphère qui est la même pour chaque série. La cyclide peut donc être considérée, et de cinq manières différentes, comme l'enveloppe d'une série de sphères ayant leurs centres sur une surface du second degré Q_i, et coupant à angle droit une sphère S_i. On a en tout cinq quadriques Q_i, auxquelles correspondent cinq sphères S_i. Les cinq quadriques sont homofocales; les cinq sphères S_i sont orthogonales deux à deux. M. Laguerre a d'ailleurs donné des propriétés élégantes de ce système remarquable de dix surfaces.

Je me propose d'ajouter aux propriétés déjà connues d'autres propositions nouvelles, relatives surtout aux normales des cyclides. Ces propositions me paraissent mériter d'être développées; on connaît, en effet, peu de théorèmes sur les surfaces de degré supérieur; il n'est donc pas sans intérêt de donner des propriétés d'une classe de surfaces *qui donnent, par une transformation homographique, toutes les surfaces du troisième ordre et les surfaces du quatrième ordre à conique double*, et de généraliser, pour ces surfaces, des théorèmes importants dans la théorie des surfaces du second degré.

I.

On sait que, si l'on prend, sur chaque normale d'une quadrique, les trois points où elle coupe les plans principaux et le pied de la normale, ces quatre points déterminent sur chaque normale une division semblable à une division fixe. Les rapports de leurs distances mutuelles demeurent invariables; en d'autres termes, les quatre points où la normale rencontre les plans principaux et le plan de l'infini, le pied de la normale, déterminent sur chaque normale une division homographique à une division fixe. On sait enfin qu'un sixième point, pris sur la normale et assujetti à former avec trois quelconques des cinq points précédents un rapport anharmonique constant, décrit une surface du second degré ayant les mêmes plans de symétrie que la première, et dont le rôle est important dans la recherche des normales menées par un point à la quadrique. La proposition précédente s'étend aux cyclides, comme nous allons le démontrer.

Soit

$$(1)\qquad (x^2+y^2+z^2)^2-4Ax^2-4A'y^2-4A''z^2-8Cx-8C'y-8C''z-4D=0$$

l'équation réduite d'une cyclide que, pour plus de simplicité, nous supposons être du quatrième ordre.

Soit

$$(2)\qquad x^2+y^2+z^2=2\alpha x+2\beta y+2\gamma z+2\delta$$

l'équation d'une sphère. Si nous exprimons qu'elle est doublement tangente à la cyclide, nous trouverons les équations

$$(3)\qquad D+\lambda^2-\sum\frac{C^2}{A-\lambda}=L=0,$$

$$(4)\qquad \delta=\lambda+\sum\frac{C\alpha}{A-\lambda},$$

$$(5)\qquad \frac{\alpha^2}{A-\lambda}+\frac{\beta^2}{A'-\lambda}+\frac{\gamma^2}{A''-\lambda}=1;$$

λ sera déterminé par l'équation du cinquième degré (3). Le centre de la sphère décrira la quadrique représentée par l'équation (5); enfin l'équation (4) détermine δ en fonction des coordonnées du centre, et par conséquent l'équation de la sphère doublement tangente peut s'écrire

$$(6)\qquad x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z-2\lambda-2\sum\frac{C\alpha}{A-\lambda}=0.$$

On voit que cette équation contient au premier degré les variables α, β, γ, et par conséquent elle représente une suite de sphères orthogonales à une sphère fixe. En effet, la puissance par rapport à la sphère précédente du point dont les coordonnées sont

$$(7)\qquad x=\frac{C}{\lambda-A},\quad y=\frac{C'}{\lambda-A'},\quad z=\frac{C''}{\lambda-A''}$$

est constante et égale à

$$(8)\qquad \frac{C^2}{(A-\lambda)^2}+\frac{C'^2}{(A'-\lambda)^2}+\frac{C''^2}{(A''-\lambda)^2}-2\lambda.$$

Donc toutes les sphères d'une même série correspondant à une même valeur de λ sont orthogonales à la sphère fixe, dont l'équation est

$$(9)\qquad x^2+y^2+z^2+\frac{2Cx}{A-\lambda}+\frac{2C'y}{A'-\lambda}+\frac{2C''z}{A''-\lambda}+2\lambda=0.$$

En remplaçant, dans cette équation, λ par les cinq racines de l'équation (3), on obtient cinq équations remarquables représentant cinq sphères orthogonales. On peut même, si l'on veut, exprimer D, C, C', C'' en fonction de ces racines, et écrire ainsi un système d'équations générales représentant cinq sphères orthogonales. Nous indiquerons des procédés plus simples pour obtenir le même résultat.

Quand la sphère variable (6) se déplace, son enveloppe est la cyclide, et en prenant pour λ successivement les cinq racines de l'équation (3), nous aurons les cinq séries de sphères doublement tangentes indiquées par M. Moutard.

Le centre (α, β, γ) de la sphère est d'ailleurs lié aux coordonnées (x, y, z) du point de contact par les formules suivantes, dont la recherche n'offre aucune difficulté,

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}\alpha&=2\,\frac{x(\lambda-A)-C}{2\lambda-x^2-y^2-z^2},\\ \beta&=2\,\frac{y(\lambda-A')-C'}{2\lambda-x^2-y^2-z^2},\\ \gamma&=2\,\frac{z(\lambda-A'')-C''}{2\lambda-x^2-y^2-z^2};\end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit, en posant, pour abréger, $x^2+y^2+z^2=R^2$,

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}x&=\frac{\alpha(2\lambda-R^2)+2C}{2(\lambda-A)},\\ y&=\frac{\beta(2\lambda-R^2)+2C'}{2(\lambda-A')},\\ z&=\frac{\gamma(2\lambda-R^2)+2C''}{2(\lambda-A'')}.\end{aligned}\right.$$

La forme même des équations (10), qui sont du premier degré en λ, nous indique le théorème que nous nous proposions de démontrer. Si, dans ces formules, laissant invariables x, y, z, nous donnons à λ les cinq valeurs, racines de l'équation du cinquième degré (3), nous obtenons les centres des cinq sphères doublement tangentes à la surface, dont un des points de contact avec la cyclide est le point (x, y, z). Ainsi, en donnant à λ les six valeurs

$$\infty, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5,$$

λ_i désignant une racine de l'équation (3), on obtient le point x, y, z, et les cinq centres des sphères situées sur la normale à la cyclide au point x, y, z (centres qui sont sur les surfaces Q_i). Le rapport anharmonique de quatre quelconques de ces six points est constant et égal au rapport anharmonique des valeurs correspondantes du paramètre. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Si l'on considère, sur une normale à la cyclide, le pied de cette normale et les cinq points où elle coupe les cinq quadriques* Q_i, *le rapport anharmonique de quatre quelconques de ces six points est constant.*

Chaque normale coupe une des quadriques Q_i en deux points; il est à remarquer que nous prenons celui de ces points qui est le centre de la sphère doublement tangente à la cyclide au pied de la normale.

Les formules (10) conduisent même à un autre résultat : c'est que *les distances des six points considérés dans la proposition précédente conservent elles-mêmes un rapport invariable toutes les fois que le pied de la normale sur la cyclide se déplace, en restant à une distance invariable du centre des cinq surfaces* Q_i.

On conclurait facilement de cette remarque que *les seules surfaces du second degré inscrites à la cyclide sont celles pour lesquelles la courbe de contact avec la cyclide est sur une sphère concentrique aux surfaces* Q_i.

II.

Nous sommes naturellement conduit à nous proposer la question suivante :

Trouver le lieu du point qui, sur chaque normale, forme, avec les six points considérés, une division homographique à une division fixe, c'est-à-dire donne lieu, pris avec trois quelconques d'entre eux, à un rapport anharmonique constant.

Il est clair que le point dont nous nous proposons de trouver le lieu se déduit des formules (10), en donnant à λ une valeur quelconque, mais constante, quels que soient x, y, z. Il faudra, pour trouver l'équation du lieu, éliminer x, y, z entre les équations (10) ou (11) et l'équation (1) de la cyclide. On trouve ainsi

$$(12) \qquad 4R^2 = \sum \frac{[\alpha(2\lambda - R^2) + 2C]^2}{2(A-\lambda)^2},$$

et l'équation de la cyclide devient

$$(13) \qquad (R^2 - 2\lambda)^2 \left(1 + \sum \frac{\alpha^2}{\lambda - A}\right) - 4\left(D + \lambda^2 - \sum \frac{C^2}{A-\lambda}\right) = 0.$$

Il faut éliminer $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ entre ces deux équations. Nous posons, pour abréger,

$$(14) \qquad \begin{cases} 1 - \sum \frac{\alpha^2}{A-\lambda} = U, & D + \lambda^2 + \sum \frac{C^2}{\lambda - A} = L, \\ \sum \frac{\alpha^2}{(A-\lambda)^2} = V, & P = \sum \frac{C\alpha}{(\lambda - A)^2} + 1; \end{cases}$$

nos équations deviennent alors

$$(15) \qquad 2\lambda - R^2 = 2\sqrt{\frac{L}{U}},$$

$$(16) \qquad 2\sqrt{\frac{L}{U}} = \frac{L'U - LV}{PU}, \quad L' = \frac{dL}{d\lambda},$$

et, par suite, l'équation du lieu cherché est

$$(17) \qquad (L'U - LV)^2 - 4P^2LU = 0.$$

Si l'on remarque que U et V sont des fonctions du second degré, que P est du premier degré, on voit que le lieu cherché est une surface du quatrième ordre ayant pour ligne double la *conique* définie par les équations

$$P = 0, \quad L'U - LV = 0,$$

ce qui conduit à la proposition suivante :

THÉORÈME II. — *Si sur chaque normale à la cyclide on prend le point qui, avec les centres des cinq sphères doublement tangentes à la surface et avec le pied de la normale, forme une division homographique à une division fixe, le lieu de ce point est une surface du quatrième ordre à conique double, cette conique étant située à distance finie.*

Les résultats précédents donnent lieu à plusieurs remarques.

D'abord, toutes les fois que λ annule L, la surface du quatrième ordre se réduit à deux surfaces du second ordre confondues

$$L'^2 U^2 = 0,$$

ce qui est d'accord avec les résultats précédents. Dans tout autre cas la surface est indécomposable.

En second lieu, la cyclide, que nous appellerons C, et la surface actuelle, que nous désignerons par M, se correspondent point par point. On déduit, en effet, en remplaçant dans les formules (11) $2\lambda - R^2$ par sa valeur déduite de (16) et (17),

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} x + \frac{C}{A-\lambda} &= \frac{\alpha}{A-\lambda}\,\frac{2PL}{LV - L'U},\\ y + \frac{C'}{A'-\lambda} &= \frac{\beta}{A'-\lambda}\,\frac{2PL}{LV - L'U},\\ z + \frac{C''}{A''-\lambda} &= \frac{\gamma}{A''-\lambda}\,\frac{2PL}{LV - L'U}.\end{aligned}\right.$$

Ainsi, à tout point de la surface M correspond un seul point de la cyclide C. Il faut cependant faire une exception pour le cas où L est nul; alors la surface M se réduit à deux surfaces du second degré confondues, et à tout point de cette surface double correspondent deux points de la cyclide. On a en effet, dans tous les cas,

$$2\lambda - R^2 = 2\sqrt{\frac{L}{U}},$$

et, d'après l'équation (16), en tirant de cette équation $\sqrt{\frac{L}{U}}$, on trouve

$$(19)\qquad 2\lambda - R^2 = -2P \pm \sqrt{P^2 + L'V};$$

on déduit de là les formules

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{C - P\alpha}{\lambda - A} \pm \frac{\alpha}{2(\lambda - A)}\sqrt{P^2 + L'V},\\ y &= \frac{C' - P\beta}{\lambda - A'} \pm \frac{\beta}{2(\lambda - A')}\sqrt{P^2 + L'V},\\ z &= \frac{C'' - P\gamma}{\lambda - A''} \pm \frac{\gamma}{2(\lambda - A'')}\sqrt{P^2 + L'V},\end{aligned}\right.$$

qui donnent les deux points de la cyclide correspondant au point de la quadrique Q, à laquelle se réduit la surface M.

Les formules (18), qui font correspondre un point de la cyclide à un point de la surface M, souffrent une deuxième exception, qui se rapporte à toute surface M, et à des points particuliers de cette surface, *les points de la conique double*. On a, en effet, pour ces points,

$$P = 0, \quad LV - L'U = 0;$$

on doit avoir recours aux formules

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} 2\lambda - R^2 &= \pm\sqrt{\frac{L}{U}},\\ x &= \frac{C}{\lambda - A} \pm \frac{\alpha}{\lambda - A}\sqrt{\frac{L}{U}},\\ y &= \frac{C'}{\lambda - A'} \pm \frac{\beta}{\lambda - A'}\sqrt{\frac{L}{U}},\\ z &= \frac{C''}{\lambda - A''} \pm \frac{\gamma}{\lambda - A''}\sqrt{\frac{L}{U}},\end{aligned}\right.$$

qui montrent, comme cela doit être, qu'à tout point de la conique double de la surface M correspondent deux points sur la cyclide; mais les points de la cyclide correspondant à tous les points de la courbe double forment une courbe remarquable que nous allons étudier.

III.

Pour trouver sur la cyclide C le lieu des points qui correspondent aux points de la conique double de M, il suffira de remplacer α, β, γ, dans l'équation

$$P = 0,$$

par leurs valeurs en fonction de x, y, z. On obtient ainsi l'équation

$$(22) \qquad x^2+y^2+z^2+\frac{2Cx}{A-\lambda}+\frac{2C'y}{A'-\lambda}+\frac{2C''z}{A''-\lambda}+\sum\frac{2C^2}{(\lambda-A)^2}-2\lambda=0.$$

La courbe cherchée est à l'intersection de la cyclide et de la sphère représentée par l'équation précédente. Ce premier résultat est déjà remarquable; mais, si l'on tient compte des formules (21), on voit qu'à tout point de la conique double de M *correspondent sur la sphère* (22) *deux points diamétralement opposés*. Donc la section de la cyclide par cette sphère, qui est nécessairement une courbe du quatrième ordre, est ici une conique sphérique; on a le théorème suivant :

Théorème III. — *Il existe, sur toute cyclide, une série de coniques sphériques. Ces lignes sont celles qui correspondent sur les surfaces* M, *déjà définies, aux coniques doubles de ces surfaces.*

Nous verrons d'ailleurs qu'il n'existe pas d'autre série de coniques sphériques sur la cyclide. Étudions leur disposition et leurs propriétés.

L'équation (21) est du septième degré en λ : *il passe donc sept sphères et, par conséquent, sept coniques sphériques par tout point de la cyclide.*

Le centre de la sphère qui contient la conique est défini par les formules

$$x=\frac{C}{\lambda-A}, \quad y=\frac{C'}{\lambda-A'}, \quad z=\frac{C''}{\lambda-A''};$$

si l'on compare ces formules aux équations (7), on voit qu'elles sont semblables; donc :

Théorème IV. — *Le lieu des centres des sphères coupant la cyclide suivant une conique sphérique est une cubique gauche* [*dont on obtient tous les points en faisant varier* λ *dans les formules* (22)] *qui contient les centres des cinq sphères orthogonales* S_i, *et les sommets du tétraèdre conjugué commun aux cinq surfaces* Q_i.

Cette cubique gauche est d'une importance réelle dans la théorie des cyclides; mais auparavant nous ferons une remarque servant de vérification aux calculs qui précèdent.

Quand la sphère (22) a même centre que l'une des sphères S_i, on remarque que le carré du rayon est égal et de signe contraire au carré du rayon de S_i. C'est un résultat qu'il est facile d'expliquer; nous savons que les points de la cyclide situés sur les droites, passant par le centre O de S_i, se groupent par couples A, A'; B, B', tels que

$$OA\,OA' = R_i^2;$$

si donc on coupe la cyclide par la sphère de rayon $R_i\sqrt{-1}$, on aura

$$OA = -OA' = R_i\sqrt{-1};$$

les points A, A' seront diamétralement opposés, et la section sera une conique sphérique.

Revenons à la cubique gauche et aux coniques sphériques, et cherchons si, parmi elles, il en est qui se décomposent en deux grands cercles de la sphère (22). Dans ce cas, cette sphère sera nécessairement tangente à la cyclide aux deux extrémités d'un diamètre A, A', et, par suite, la droite AA' ira passer par un des cinq pôles, O par exemple, centre de S_i, et, comme cette droite est perpendiculaire au plan tangent, on voit qu'on aura les centres des sphères cherchées en abaissant du centre de l'une des cinq sphères S_i des normales sur la quadrique correspondante Q_i. Il y aura donc en tout $6.5 = 30$ sphères coupant la cyclide suivant deux grands cercles, et ces deux grands cercles se couperont suivant une droite AA', qui sera normale double de la cyclide. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème IV. — *Toute cyclide a* 30 *normales doubles qu'on obtient en abaissant de chacun des centres des sphères* S_i *des normales sur la surface correspondante* Q_i.

Les pieds de ces normales (sur les surfaces Q_i*) appartiennent à la cubique gauche, lieu des centres des sphères coupant suivant des coniques sphériques.*

Cette proposition nous conduit à énoncer la suivante, relative exclusivement aux surfaces du second degré, qu'on déduit sans peine des résultats précédents et sur la démonstration de laquelle nous n'insisterons pas.

Théorème V. — *Si d'un point on mène des normales à une quadrique, les pieds des six normales sont sur une cubique gauche passant par le point* A, *par le centre de la quadrique et par les trois points à l'infini dans la direction des axes de symétrie.*

Toute droite rencontrant cette cubique gauche en deux points est un axe (c'est-à-dire une droite perpendiculaire à sa polaire).

La cubique rencontre l'une quelconque des quadriques homofocales à la proposée en six points pour lesquels les normales vont concourir en un autre point de la même cubique. Les sécantes doubles de la cubique sont normales à une des quadriques homofocales; le plan tangent au pied de la normale à cette quadrique enveloppe une surface de Steiner coupée suivant des coniques doubles par les quatre faces du tétraèdre conjugué.

Enfin la cubique contient une infinité de systèmes de cinq points, tels que ces points puissent être les centres des cinq sphères orthogonales (ces points sont définis par la condition évidente que chacun d'eux est le point de rencontre des hauteurs du tétraèdre formé par les quatre autres).

Les cinq surfaces correspondant à ces cinq points peuvent être associées aux cinq sphères pour donner les cinq modes de génération d'une cyclide. La surface correspondant à un point de la cubique est celle pour laquelle les pieds des normales abaissées du point sont sur la cubique gauche.

IV.

Les calculs précédents et les résultats déjà établis conduisent à des propriétés des sections sphériques des cyclides, qui paraissent mériter d'être signalées. Il est naturel, du reste, de ne pas séparer l'étude des sections planes de celle des sections sphériques, car, une cyclide ne changeant pas de nature après une transformation par rayons vecteurs réciproques, toutes propriétés des sections planes doivent s'étendre aux sections sphériques.

Proposons-nous d'abord de construire géométriquement les points à l'infini de toute section sphérique. Une sphère contenant le cercle de l'infini coupe la cyclide suivant ce cercle, que j'appellerai I, et suivant une courbe H. Au point où cette courbe coupera le cercle de l'infini, la sphère et la cyclide seront tangentes. Or les plans tangents à la cyclide sur le cercle I sont les plans tangents communs à toutes les quadriques Q_i, les plans tangents à la sphère par le cercle I passant par son centre. On aura donc à mener du centre de la sphère les quatre plans tangents communs à toutes les surfaces homofocales aux cinq surfaces Q_i. Les points de contact, avec le cercle de l'infini de ces quatre plans, seront les points à l'infini de la section sphérique. Or ces quatre plans sont ceux qui déterminent les focales communes des cônes ayant pour sommet le centre de la sphère, et circonscrits à toutes les surfaces homofocales; on aura donc les points à l'infini de la courbe, en menant les plans perpendiculaires aux génératrices des surfaces homofocales à Q_i passant au centre de la sphère considérée. Ces plans coupent le cercle I en quatre points qui sont les points cherchés.

Par exemple, cherchons quelles sont les sections sphériques qui sont tangentes en deux points au cercle I. Nous avons dit quelques mots de ces courbes, dans le travail déjà cité, et proposé de les appeler cartésiennes, à cause de leur analogie avec les ovales de Descartes. Il faudra que la sphère sur laquelle elles se trouvent ait son centre sur l'une des focales des surfaces Q_i, et cette condition, qui est nécessaire, est aussi suffisante. Donc

Théorème VI. — *Toute cartésienne tracée sur une cyclide est sur une sphère ayant son centre sur la focale singulière de la cyclide (qui est une des focales des cinq surfaces* Q_i*).*

En particulier, si le rayon de la sphère est infini, on retrouve les sections planes formées d'ovales de Descartes. Les plans de ces sections sont parallèles aux plans cycliques des cônes doublement tangents à la surface.

Mais on peut obtenir les résultats qui précèdent, et quelques autres, par les remarques suivantes faites sur les calculs des paragraphes précédents.

Reprenons l'équation d'une sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z - 2\delta = 0. \tag{2}$$

Si cette sphère vérifie *seulement* les équations (4), (5)

$$\delta = \lambda + \sum \frac{C\alpha}{A + \lambda}, \tag{4}$$

$$\frac{\alpha^2}{A - \lambda} + \frac{\beta^2}{A' - \lambda} + \frac{\gamma^2}{A'' - \lambda} - 1 = 0, \tag{5}$$

elle coupera la cyclide suivant une courbe *située sur un cylindre du se-*

cond degré. Donc, si l'on donne à λ une valeur quelconque, mais fixe, on aura une série de sphères dont les centres décriront la quadrique (5) homofocale aux Q_i, qui seront toutes orthogonales à la sphère

$$(9) \qquad x^2+y^2+z^2+\frac{2Cx}{A-\lambda}+\frac{2C'y}{A'-\lambda}+\frac{2C''z}{A''-\lambda}+2\lambda=0,$$

dont le centre décrit la cubique gauche déjà considérée. Les sphères appartenant à cette série couperont toutes la cyclide, suivant une courbe située sur un cylindre. L'axe du cylindre, correspondant à chaque sphère, passera par le centre de la sphère (9), et sera perpendiculaire au plan tangent à la quadrique (5) au centre même de la sphère (2).

Ainsi, parmi toutes les sphères ayant leur centre en un point fixe, trois seulement coupent suivant des courbes situées sur un cylindre : ce sont celles qui correspondent aux trois surfaces homofocales aux Q_i, et passant par le point fixe, centre des sphères considérées.

Si les rayons de deux de ces sphères deviennent égaux, on a une courbe située sur deux cylindres; enfin, si les rayons sont égaux, la section sphérique correspondante est située sur trois cylindres : c'est une conique sphérique. On retrouve ainsi l'unique série déjà étudiée plus haut.

C'est ce qu'il est facile d'expliquer de la manière suivante. Soit une sphère coupant suivant une conique sphérique. Si l'on fait varier le terme constant D dans l'équation de la cyclide, on s'assure, par un calcul qui est très-simple, que la sphère continuera à couper suivant une conique sphérique. On pourra donc choisir le terme constant, de manière que la conique sphérique se décompose en deux cercles, ce qui donnera pour le centre de la sphère, λ variant avec D, un point quelconque de la cubique gauche déjà considérée.

V.

Proposons-nous maintenant d'étudier, d'une manière plus détaillée, la relation entre la cyclide C et la surface M, lieu des points divisant projectivement les normales.

Supposons que le point x, y, z décrive, sur la cyclide, la courbe située à l'intersection de cette surface et de la sphère

$$x^2+y^2+z^2+2Hx+2H'y+2H''z+2K=0, \tag{23}$$

quelle sera la courbe décrite par les points correspondants sur la surface M ? En effectuant la substitution des valeurs (11), on trouve

$$(R^2-2\lambda)\left(1-\sum\frac{\alpha H}{\lambda-A}\right)+2K+2\lambda+2\sum\frac{CH}{\lambda-A}=0; \tag{24}$$

posons

$$l=K+\lambda+\sum\frac{CH}{\lambda-A}, \tag{25}$$

$$Q=\sum\frac{\alpha H}{\lambda-A}-1, \tag{26}$$

on aura

$$2\sqrt{\frac{L}{U}}=\frac{-2P}{Q}, \tag{27}$$

et, par suite,

$$\frac{p^2}{Q^2}=\frac{L}{U},\quad p^2U-4Q^2=0, \tag{28}$$

et, en substituant la valeur de U dans l'équation de la surface,

$$-\frac{2p}{Q}=\frac{L'}{P}-\frac{LVP^2}{PLQ^2},\quad -2pPQ=L'Q^2-Vp^2. \tag{29}$$

Cette équation représente une surface du second degré qu'on peut remplacer par la suivante

$$-2pLPQ=(LV-L'U)p. \tag{30}$$

Cette dernière équation représente une quadrique passant par la courbe double de M. Ainsi, à toute courbe sphérique tracée sur la cyclide C correspond une courbe analogue intersection de M, avec une quadrique passant par la courbe double; cette quadrique joue, par rapport à la surface M, le même rôle que la sphère par rapport à la cyclide. La relation entre les surfaces C et M est donc réciproque, en ce sens qu'à une courbe de la première située sur une sphère (quadrique passant par la courbe double) correspond toujours une courbe de la seconde du quatrième ordre aussi, et située sur une quadrique contenant la conique double.

Ce dernier résultat nous permet de nous rendre compte de la nature de la surface formée par les normales en tous les points d'une section sphérique de la cyclide. Si, laissant la sphère sécante fixe, on fait varier λ, on aura une suite de courbes toutes du quatrième ordre, tracées sur la surface réglée que forment les normales en tous les points d'une section sphérique de la cyclide.

Quatre de ces courbes sont planes : ce sont celles qui correspondent aux valeurs de λ définies par l'équation

$$p = K + \lambda + \sum \frac{CH}{\lambda - A} = o;$$

le plan de la courbe est alors défini par l'équation

$$Q = \sum \frac{\alpha H}{\lambda - A} - 1 = o,$$

qui est le plan polaire du centre de la sphère sécante par rapport à la quadrique du paramètre λ. On voit donc que *les normales en tous les points de la section sphérique coupent quatre plans en des points dont le rapport anharmonique est constant.*

Théorème VII. — *Les surfaces réglées formées des normales à la cyclide en tous les points d'une courbe sphérique appartiennent à la classe de celles dont les génératrices coupent les faces d'un tétraèdre en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Elles sont du huitième ordre, et coupent les faces du tétraèdre suivant quatre droites et une courbe du quatrième ordre à deux points doubles.*

Il est clair que, si la section sphérique se décompose en deux cercles, la surface des normales se décompose en deux surfaces du quatrième ordre; mais les normales à la cyclide en tous les points d'une droite rencontrant le cercle de l'infini décrivent un plan, et elles enveloppent dans ce plan une conique.

La surface des normales acquiert une conique double toutes les fois que la sphère, qui détermine sa directrice sur la cyclide, devient orthogonale à une des cinq sphères S_i. Il peut ainsi y avoir jusqu'à trois coniques doubles sur la surface des normales.

On voit ainsi qu'aux droites de C correspondent des droites de M, aux cercles des coniques, etc. Cette relation paraît d'autant plus remarquable que les surfaces ne sont pas des transformées homographiques l'une de l'autre; car, parmi les surfaces M, il y en a trente correspondant aux coniques sphériques transformées en deux cercles, et pour lesquelles la conique double se décompose en deux droites. La méthode suivie permet ainsi de se rendre compte des propriétés de la surface du quatrième ordre à conique double, quand la conique se décompose en deux droites.

VI.

Des relations entre les cinq sphères et les cinq surfaces homofocales. — Ces relations sont extrêmement nombreuses; on les démontre d'ailleurs sans difficulté, soit par l'Analyse, soit par la Géométrie.

Désignons par C_i le centre de la sphère S_i, par P_{ij} le plan radical de S_i et de S_j; la droite C_iC_j sera l'axe radical des trois sphères autres que S_i, S_j. On peut d'ailleurs énoncer les propositions suivantes :

1° Deux centres C_i, C_j sont des pôles harmoniques dans les six surfaces autres que S_i, S_j, Q_i, Q_j.

2° Quatre centres, au nombre desquels ne se trouve pas C_i, sont les sommets du tétraèdre conjugué commun à S_i et à Q_i.

3° Le plan radical P_{ij} est le plan polaire, soit de C_i par rapport à Q_j, soit de C_j par rapport à Q_i. Par conséquent, la droite C_iC_j est le lieu des pôles du plan P_{ij} par rapport à toutes les surfaces homofocales.

4° Le plan P_{ij} coupe les deux sphères S_i, S_j suivant un cercle unique inscrit dans le quadrilatère circonscrit aux deux sections des surfaces Q_i, Q_j par le plan P_{ij}.

5° Si d'un axe C_iC_j on mène des plans tangents aux trois quadriques autres que Q_i, Q_j, les six points de contact sont, dans le plan P_{ij}, les six sommets du quadrilatère complet circonscrit aux deux sections des surfaces Q_i, Q_j, et au cercle dont il a été question dans l'énoncé précédent.

6° La développable $\boxed{S_iQ_i}$ a ses lignes doubles sur les autres quadriques Q. Cette élégante propriété a été énoncée par M. Laguerre, et elle comprend quelques-unes des propositions précédentes.

Les premières de ces relations se démontrent sans difficulté. En rapprochant d'ailleurs les résultats précédents de quelques autres que j'ai donnés dans un autre travail (*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, t. II, p. 40 et 301), on est conduit à quelques propriétés en partie nouvelles des surfaces homofocales. Rappelons d'abord une définition importante. Étant donné un système de surfaces homofocales, nous appelons axe toute droite perpendiculaire à sa polaire. Tout axe est normal à une des surfaces homofocales. Les axes situés dans un plan P enveloppent une parabole Q tangente aux trois plans de symétrie; les pieds de ces axes sur les surfaces auxquelles ils sont respectivement normaux forment une courbe du troisième ordre F, la focale à nœud. Cette courbe a pour point double le point p où le plan P est tangent à l'une des surfaces homofocales; elle est la polaire du point p par rapport à la parabole Q. D'ailleurs le lieu des pôles du plan P par rapport à toutes les quadriques homofocales est la perpendiculaire élevée au plan P en p. Cela posé, on a les relations suivantes :

1° Le point p se trouve sur la directrice de la parabole Q, car les deux axes qu'on peut mener par le point p, étant les normales aux surfaces passant en p, sont rectangulaires, et comme ce sont des tangentes de la parabole, le point p est un point de la directrice.

2° Cette directrice est le lieu des centres des sections K faites dans les quadriques par le plan, car les axes de symétrie de ces sections sont axes d'après la définition donnée plus haut, et le centre de chaque section est un point d'où l'on peut mener à la parabole deux tangentes rectangulaires.

3° La courbe F est le lieu des pieds des normales ou des points de contact des tangentes menées par p à la conique K et à toutes les courbes homofocales; car cette courbe contient les pieds des normales abaissées de p sur K, les points de contact des tangentes menées de p à K, elle a un point double en p. Elle a donc dix points communs, et par conséquent coïncide avec le lieu des pieds des normales à la conique K et aux courbes homofocales.

Ainsi la focale à nœud F est le lieu des pieds des normales ou des points de contact des tangentes menées de p à toutes les sections planes des surfaces homofocales. Elle joue d'ailleurs le même rôle par rapport à toutes les courbes homofocales aux précédentes, mais il est clair que ce résultat n'a lieu que pour le point p.

4° En chaque point de la focale, deux coniques K sont tangentes entre elles et normales à la troisième.

5° Les polaires du point p par rapport à toutes les coniques de section K sont des axes et enveloppent la parabole Q.

6° On peut inscrire, dans la focale F, une infinité de quadrilatères complets dont les côtés demeurent tangents à un cercle quelconque ayant pour centre le point p. Ces propositions mettent en évidence ce fait remarquable : que le point p joue, par rapport aux coniques de sections, le même rôle que si elles étaient homofocales. Nous aurons à utiliser surtout les premiers théorèmes que nous venons de donner, dans l'étude que nous allons faire des conditions qui déterminent une cyclide.

VII.

Si l'on donne deux des surfaces homofocales Q_i, Q_j et un plan P_{ij}, en prenant les pôles de ce plan par rapport aux deux surfaces, on aura les centres C_i, C_j. Les sphères S_i, S_j devant avoir ces points pour centres et couper le plan P_{ij} suivant un cercle qui est inscrit dans le quadrilatère $\boxed{K_i K_j}$, seront déterminées (nous appelons K_i la section de Q_i par le plan). On aura donc deux sphères et les deux surfaces correspondantes. Les trois autres centres C seront les sommets du triangle conjugué aux deux coniques K_i, K_j, etc. Nous obtenons la proposition suivante :

Les sections de deux surfaces homofocales par un plan quelconque sont des coniques inscrites dans un quadrilatère circonscriptible à un cercle.

On peut définir, à l'exemple de M. Laguerre, une cyclide comme le lieu des sphères de rayon nul dont le plan radical avec S_i enveloppe la surface correspondante Q_i. Donc, pour tout point m de la cyclide, les plans radicaux mS_i, mS_j se couperont suivant une droite située dans le plan radical P_{ij}. Or les premiers plans sont les plans tangents aux surfaces Q_i, Q_j, aux points où la normale en m à la cyclide va les rencontrer. On a donc l'élégante proposition suivante, due à M. Laguerre :

Si, par toutes les droites d'un plan P_{ij}, on mène des plans tangents à deux surfaces homofocales Q_i, Q_j, les droites de contact sont les normales d'une cyclide.

Si, au lieu de prendre toutes les droites du plan, on prend seulement celles qui passent par un point a, le point m, qui leur correspond sur la cyclide, est nécessairement sur une sphère ayant pour centre a et orthogonale à S_i, S_j. Donc

Si, par toutes les droites passant par un point et situées dans un plan, on mène des plans tangents à deux surfaces homofocales, les droites qui joignent les points de contact forment une surface réglée du huitième ordre, ayant deux coniques doubles et dont les génératrices coupent à angle droit une courbe sphérique du quatrième ordre, située sur une sphère ayant son centre au point considéré.

Cette surface réglée appartient à la classe de celles dont les génératrices coupent homographiquement les quatre faces d'un tétraèdre.

VIII.

Supposons que l'on se donne, *a priori*, trois des surfaces homofocales autres que Q_i, Q_j. L'axe radical $C_i C_j$ ne peut être choisi arbitrairement. On a vu en effet que, si par cet axe on mène des plans tangents aux trois surfaces homofocales correspondantes, les six points de contact sont les sommets d'un quadrilatère complet. Cette condition détermine un *système de rayons rectilignes* ou *congruence*. On s'assure aisément que deux de ces rayons passent par un point, qu'il y en a six dans un plan. Ce sont les tangentes doubles (d'après les recherches de Kummer) d'une surface du quatrième ordre à douze points singuliers. L'axe radical $C_i C_j$ doit être pris parmi ces tangentes doubles.

Si l'on considère encore un point m de la cyclide comme une sphère de rayon nul, le centre radical de ce point et des trois sphères correspondant aux trois surfaces données devra décrire l'axe $C_i C_j$. Supposons qu'on se donne un point de cet axe, il y aura deux solutions du problème, ce qui donne le théorème suivant :

Si l'on prend les trois coniques de contact des plans tangents menés d'un point m à trois surfaces homofocales, la surface du seizième ordre, engendrée par les droites qui s'appuient sur ces trois coniques, se décompose en deux surfaces du huitième ordre contenant chacune une courbe sphérique qui coupe à angle droit leurs génératrices, et dont les génératrices divisent homographiquement les quatre faces d'un tétraèdre; trois des faces de ce tétraèdre sont les plans des coniques de contact : chacune des deux *surfaces a pour lignes doubles les trois coniques de contact, et contient en outre quatre droites situées dans chacun des plans de ces coniques.*

Si le point m décrit une droite convenablement choisie, les surfaces réglées correspondantes ont leurs génératrices normales à une même cyclide.

Si l'on mène les plans tangents aux trois quadriques aux points où elles sont rencontrées, sur les coniques doubles, par une droite s'appuyant sur les trois coniques, ces trois plans tangents se coupent suivant une droite passant par le pôle commun m des plans des trois coniques.

IX.

Le cas où l'on se donnerait, *a priori*, quatre des surfaces homofocales Q_i n'offre pas une grande difficulté. Les axes radicaux décrivent des surfaces réglées tétraédrales dont l'étude n'offrirait aucun intérêt.

Mais si l'on se donne les cinq surfaces Q_i, on reconnaîtra que le problème est déterminé. On trouve huit cyclides symétriques par rapport aux plans principaux, et l'on est conduit à la proposition suivante, dont la démonstration directe offrirait peut-être quelque difficulté :

Les droites qui coupent cinq surfaces homofocales quelconques en cinq points dont les rapports anharmoniques sont constants et égaux à ceux des surfaces correspondantes se divisent en huit systèmes symétriques de droites normales à une cyclide.

De même, le complexe des droites qui coupent quatre surfaces homofocales en quatre points dont le rapport anharmonique est constant et égal à celui des surfaces se compose de droites normales à une série de cyclides, et par conséquent on saura trouver toutes les surfaces dont les normales font partie du complexe (1).

---

(1) J'ai indiqué en effet, dans un travail antérieur, que toutes les fois qu'on saura trouver un système de surfaces normales aux droites d'un complexe, on saura trouver toutes les surfaces dont les normales appartiennent au complexe. Ainsi, étant pris d'une manière quelconque un système de surfaces à un paramètre variable, les normales à ces surfaces forment un complexe, on saura déterminer *toutes* les surfaces normales aux droites de ce complexe et sans intégration.