Annales scientifiques de l'É.N.S.

Georges Giraud

Sur une catégorie d'équations fonctionnelles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 52 (1935), p. 109-130
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1935_3_52__109_0>

SUR UNE CATÉGORIE

D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

PAR M. GEORGES GIRAUD.

Sous le nom d'*équations intégrales de troisième espèce*, M. Picard a étudié [1] des équations

$$\text{(1)} \qquad A(x)f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy = \psi(x),$$

où $A(x)$ est une fonction holomorphe qui a des racines simples entre a et b; en posant $A(x)f(x) = F(x)$, il trouvait l'équation

$$\text{(2)} \qquad F(x) + \lambda \int_a^b \frac{K(x, y)}{A(y)} F(y)\, dy = \psi(x).$$

L'intégrale qui figure dans cette dernière équation n'aurait ordinairement un sens que pour des fonctions F s'annulant en même temps que A ; mais si l'on exclut de (a, b) des intervalles infiniment petits qui ont pour centres les racines de A, la limite existe pour toute fonction F continûment dérivable, et c'est ce qu'on nomme, avec Cauchy, la *valeur principale* de l'intégrale, ou simplement *l'intégrale principale*. Plus généralement on peut, avec M. Picard, exclure des inter-

(1) Émile PICARD, *Sur les équations intégrales de troisième espèce* (*Ann. scient. Éc. Norm. sup.*, t. 28, 1911, p. 459-472).

valles infiniment petits que les racines de A partagent dans des rapports donnés.

On étudie ici des équations qui généralisent l'équation (2) dans un champ à m dimensions. On considère un noyau G(X, A) qui est continu excepté quand A vient sur une certaine variété $\mathfrak{M}$ à un nombre quelconque de dimensions; $\mathfrak{M}$ peut même comprendre plusieurs variétés, ayant différents nombres de dimensions, et comprendre en outre des points isolés; cette variété ou cet ensemble $\mathfrak{M}$ est indépendant de X. La nature de cette discontinuité est précisée, de façon qu'il y ait lieu à une intégrale principale [1]; l'équation associée généralise l'équation (1). On retrouve les théorèmes de Fredholm; on voit aussi ce que deviennent les résultats de M. Picard, dans le cas où l'on fait varier les régions d'exclusion qui interviennent dans la définition des intégrales principales.

Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que le procédé mis en œuvre ici peut être considéré comme un cas particulier d'une méthode dont d'autres cas particuliers ont déjà été utilisés dans la théorie des équations intégrales. Si

$$\rho(X) - \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} G(X, A)\, \rho(A)\, dV_A = f(X) \tag{3}$$

est une équation donnée, ses solutions appartiennent aussi, moyennant des hypothèses très générales, à l'équation

$$\begin{aligned}\rho(X) + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} \left[H(X, \Xi; \lambda) - G(X, \Xi) - \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} H(X, A; \lambda)\, G(A, \Xi)\, dV_A \right] \\ \times \rho(\Xi)\, dV_\Xi = f(X) + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} H(X, A; \lambda)\, f(A)\, dV_A;\end{aligned} \tag{4}$$

d'autre part, si l'on pose

$$\rho(X) = \rho_1(X) + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} H(X, A; \lambda)\, \rho_1(A)\, dV_A, \tag{5}$$

---

[1] Un cas où G est discontinu quand A vient en X, de façon à donner lieu à une intégrale principale, est étudié dans deux articles : *Équations à intégrales principales, étude suivie d'une application* (*Ann. scient. Éc. Norm. sup.*, t. 51, 1934, p. 251-372); *Équations à intégrales principales d'ordre quelconque* (non encore paru).

on trouve que toute solution de l'équation

$$(6)\quad \rho_1(X) + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} \Big[H(X, \Xi; \lambda) - G(X, \Xi) - \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} G(X, A) H(A, \Xi; \lambda)\, dV_A \Big] \rho(\Xi)\, dV_\Xi = f(X)$$

donne, par la formule (5), une solution de (3), pourvu toujours que certaines conditions très générales soient remplies. En particulier, si H est le noyau résolvant, les noyaux

$$(7)\qquad H(X, \Xi; \lambda) - G(X, \Xi) - \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} H(X, A; \lambda) G(A, \Xi)\, dV_A,$$

$$(8)\qquad H(X, \Xi; \lambda) - G(X, \Xi) - \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} G(X, A) H(A, \Xi; \lambda)\, dV_A$$

de ces équations (4) et (6) sont identiquement nuls. Mais on peut aussi se proposer de choisir H de façon que ces noyaux (7) et (8) rentrent dans une catégorie pour laquelle on sache trouver la solution. Il est souvent inutile de considérer l'équation (6).

En particulier si $G(X, \Xi)$ est continu quand les deux points sont distincts, et admet une limitation $O[L^{h-m}(X, \Xi)]$ ($h > 0$; L = distance des deux points; O, symbole de M. Landau), on peut prendre

$$H(X, \Xi; \lambda) = G(X, \Xi) + \lambda G^{(2)}(X, \Xi) + \ldots + \lambda^{p-1} G^{(p)}(X, \Xi),$$

où les $G^{(n)}$ sont les noyaux itérés; les noyaux (7) et (8) se réduisent à $-\lambda^p G^{(p+1)}(X, \Xi)$, et ils sont continus si $(p+1)\,h$ surpasse m. On peut donc alors trouver les solutions des équations (4) et (6) à l'aide des séries de Fredholm. C'est ce qu'on appelle, depuis Fredholm, la *méthode de l'itération;* elle peut servir aussi pour d'autres types de noyaux.

Si maintenant $G(X, \Xi)$ est un noyau continu quelconque, on peut trouver des fonctions $U_n(X)$ et $V_n(\Xi)$ ($n = 1, 2, \ldots, p$) telles que la différence

$$G(X, \Xi) - \sum_{n=1}^{p} U_n(X) V_n(\Xi) = G_1(X, \Xi)$$

soit inférieure en valeur absolue à un nombre η arbitrairement choisi;

si η est assez petit, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} G_1^{(n)}(X, \Xi),$$

où les $G_1^{(n)}$ sont les noyaux itérés de G_1, est convergente quand $|\lambda|$ est inférieur à un nombre donné R. Si l'on prend H égal à la somme de cette série, les noyaux (7) et (8) sont des sommes de produits de fonctions de X par des fonctions de Ξ. On peut ainsi suppléer à l'emploi des séries de Fredholm. On sait que ce procédé est dû à M. Schmidt.

Une autre application de cette méthode a permis de traiter le cas de certains noyaux G, discontinus quand les deux points coïncident, et tels que l'itération ne conduise pas à des noyaux bornés [1].

Pour des équations dont le noyau G présente une discontinuité quand les deux points coïncident, cette discontinuité donnant lieu à une intégration principale, la même idée a été mise en œuvre, mais alors les intégrations superposées ne peuvent se permuter qu'à condition d'ajouter un terme correctif, de sorte que les équations (4) et (6) ne sont plus exactes. Dans le travail actuel, au contraire, ces équations sont exactes.

1. Hypothèses. — Dans l'espace à m dimensions ($m \geqq 1$) considérons la variété

$$x_\alpha = f_\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_p) \qquad (p < m;\ \alpha = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

qui se réduit à un point si p est nul. On suppose que les f_α sont définis quand $(t_1, \ldots, t_p)$ appartient à un certain champ $\mathcal{C}$, borné et fermé, et l'on suppose que, dans ce champ, les dérivées des f_α remplissent des conditions de Hölder, c'est-à-dire que, si φ est l'une

---

(1) *Validité de la théorie de Fredholm pour certains noyaux non bornés* (*Bull. Sciences math.*, t. 57, 1933, p. 327 à 334); *Sur certaines équations de Fredholm à noyaux non bornés* (*Bull. Sciences math.*, t. 57, 1933, p. 391 à 401). Les résultats du premier de ces articles sont partiellement compris dans ceux qu'ont obtenus M. Frédéric Riesz (*Acta Mathematica*, t. 41, 1916, p. 71 à 98) et M. Schauder (*Studia Mathematica*, t. 2, 1930, p. 183 à 196).

quelconque de ces dérivées, on a, quels que soient $(s_1, \ldots, s_p)$ et $(t_1, \ldots, t_p)$,

$$(2) \quad \varphi(s_1, s_2, \ldots, s_p) - \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_p) = O\left\{[(s_1 - t_1)^2 + \ldots + (s_p - t_p)]^{\frac{h}{2}}\right\} \\ (0 < h \leqq 1),$$

h étant constant, et O étant le symbole de Landau ([1]). On suppose en outre que les $\frac{m!}{p!(m-p)!}$ jacobiens des fonctions f_α prises p à p ne s'annulent simultanément nulle part. Enfin l'on suppose qu'à deux systèmes distincts de valeurs des paramètres $t_1, \ldots, t_p$ correspondent toujours deux points distincts.

Considérons dans l'espace une région $\mathcal{E}$ bornée et fermée, contenant des points de (1). Soit F(X) une fonction donnée d'un point X de $\mathcal{E}$, continue quand X n'appartient pas à (1). Pour indiquer nos hypothèses sur la fonction F quand X vient sur (1), nous imaginons qu'on forme m fonctions $f^*_\alpha(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ qui coïncident avec les f_α aussitôt que $t_{p+1} = \ldots = t_m = 0$ et que $(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ appartient à $\mathcal{C}$; on doit en outre faire en sorte que, si $(t_1, \ldots, t_p)$ est assez voisin de $\mathcal{C}$ et si $t_{p+1}, \ldots, t_m$ sont assez voisins de zéro, les dérivées des f^*_α existent et remplissent des conditions de Hölder, et le jacobien de ces m fonctions est partout positif; il existe une infinité de systèmes de fonctions f^*_α. Nous supposons que, si l'on exprime les coordonnées de X au moyen des paramètres $t_1, \ldots, t_m$ par les formules

$$x_\alpha = f^*_\alpha(t_1, \ldots, t_m),$$

on a

$$F(X) = F_1(t_1, \ldots, t_p, t_{p+1}, \ldots, t_m) + F_2(t_1, \ldots, t_p, t_{p+1}, \ldots, t_m),$$

la fonction F_1 étant homogène et d'ordre $p - m$ par rapport aux $m - p$ dernières variables $t_{p+1}, \ldots, t_m$, et étant continue tant que ces $m - p$ variables ne sont pas nulles ensemble; quant à la fonction F_2, on suppose qu'elle est sommable. Les fonctions F_1 et F_2 sont donc continues dès que $t_{p+1}, \ldots, t_m$ ne sont pas nuls ensemble; en outre on suppose que les dérivées de F_1 existent et sont continues quand $t_{p+1}, \ldots, t_m$

([1]) La notation $z = O(y)$ signifie, d'après M. Landau, que $\frac{z}{y}$ est borné.

ne sont pas nuls ensemble; on a alors certainement

$$\frac{\partial F_1}{\partial t_n} = \begin{cases} O\left[(t_{p+1}^2 + \ldots + t_m^2)^{\frac{p-m}{2}}\right] & (n \leqq p), \\ O\left[(t_{p+1}^2 + \ldots + t_m^2)^{\frac{p-m-1}{2}}\right] & (n > p), \end{cases}$$

car on constate que ces dérivées sont homogènes par rapport à $t_{p+1}, \ldots, t_m$, les unes avec l'ordre $p-m$, les autres avec l'ordre $p-m-1$. Enfin l'on suppose que l'intégrale

$$(3) \qquad \int^{(m-p)} F_1 d(t_{p+1}, \ldots, t_m),$$

étendue au champ

$$\eta^2 < \sum_{\alpha=p+1}^{m} \sum_{\beta=p+1}^{m} A_{\alpha,\beta}(t_1, \ldots, t_p)\, t_\alpha t_\beta < \zeta^2,$$

est identiquement nulle; les $A_{\alpha,\beta}$ sont des fonctions données, qui remplissent des conditions de Hölder, et qui sont telles que la forme quadratique qui figure ci-dessus, soit définie positive (on a d'ailleurs $A_{\alpha,\beta} = A_{\beta,\alpha}$); on laisse $t_1, \ldots, t_p$ constants pour l'intégration.

2. **Changement de paramètres.** — Il importe de prouver que, *si ces hypothèses sont remplies par la fonction* F, *elles restent remplies quand on change de paramètres*. Soient

$$x_\alpha = g_\alpha^\star(u_1, \ldots, u_m) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

d'autres fonctions, telles que la variété

$$x_\alpha = g_\alpha^\star(u_1, \ldots, u_p, 0, \ldots, 0),$$

soit la même que (1); on fait en outre sur ces fonctions et leurs dérivées les mêmes hypothèses que sur les $f_\alpha^\star$ et leurs dérivées. Nos hypothèses nous assurent que, dans un certain domaine qui contient la variété (1), $t_1, t_2, \ldots, t_m$ sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_m$; les dérivées de ces fonctions existent et remplissent des conditions de Hölder, et le jacobien n'est pas nul; donc, si $u_{p+1}, \ldots, u_m$ sont assez voisins de zéro, les paramètres $t_1, \ldots, t_m$ sont des fonctions de $u_1, \ldots, u_m$, les dérivées de ces fonctions existent et remplissent des conditions de Hölder, et le jacobien n'est pas nul. Si l'on remplace les t_α par ces fonctions dans F_2, on obtient une fonction de $u_1, \ldots, u_m$, qui satisfait aux mêmes hypothèses que F_2. Faisons la même substitution dans F_1. D'après nos hypothèses on a, pour $n > p$,

$$t_n(u_1, \ldots, u_p, u_{p+1}, \ldots, u_m) - \sum_{\alpha=p+1}^{m} u_\alpha \frac{\partial t_n}{\partial u_\alpha}(u_1, \ldots, u_p, 0, \ldots, 0)$$
$$= O\left[(u_{p+1}^2 + \ldots + u_m^2)^{\frac{1+h}{2}}\right];$$

par suite

$$F_1(t_1, \ldots, t_m) - F_1\Bigg[t_1(u_1, \ldots, u_p, 0, \ldots, 0), \ldots, t_p(u_1, \ldots, u_p, 0, \ldots, 0),$$
$$\sum_{\alpha=p+1}^{m} u_\alpha \frac{\partial t_{p+1}}{\partial u_\alpha}(u_1, \ldots, u_p, 0, \ldots, 0), \ldots,$$
$$\sum_{\alpha=p+1}^{m} u_\alpha \frac{\partial t_m}{\partial u_\alpha}(u_1, \ldots, u_p, 0, \ldots, 0)\Bigg]$$
$$= O\left[(u_{p+1}^2 + \ldots + u_m^2)^{\frac{h+p-m}{2}}\right];$$

la différence qui figure au premier membre remplit donc, relativement à $u_1, \ldots, u_m$, les hypothèses énoncées à propos de F_2; d'autre part, le second terme de cette différence satisfait aux hypothèses énoncées à propos de F_1, et en particulier à l'hypothèse relative à l'intégrale (3), pourvu seulement qu'on introduise, au lieu des $A_{\alpha,\beta}$, les fonctions

$$B_{\alpha,\beta}(u_1, \ldots, u_p) = \sum_{\gamma=p+1}^{m} \sum_{\delta=p+1}^{m} \frac{\partial t_\gamma}{\partial u_\alpha} \frac{\partial t_\delta}{\partial u_\beta} A_{\gamma,\delta}, \tag{4}$$

les paramètres $u_{p+1}, \ldots, u_m$ devant être pris nuls au second membre. Notre assertion est donc prouvée.

3. **Intégrales principales.** — Soit $\mathcal{E}$ une région fermée et bornée de l'espace. Dans cette région, nous supposons qu'il existe des variétés $\mathfrak{M}_p (0 \leq p < m)$, où p est le nombre des dimensions de chaque variété; on suppose que ces variétés sont deux à deux sans point commun; pour une valeur donnée de p, on ne suppose nullement que $\mathfrak{M}_p$ soit d'un seul tenant. De plus on suppose que, pour tout point M de $\mathfrak{M}_p$,

l'ensemble des points de $\mathfrak{M}_p$ dont la distance à M n'est pas supérieure à une certaine longueur indépendante de M, remplit les hypothèses énoncées au paragraphe 1 pour la variété (1); il n'y a donc aucun point multiple. On nomme $\mathfrak{M}$ l'ensemble des variétés $\mathfrak{M}_p$; $\mathfrak{M}$ est supposé *intérieur* à $\mathcal{E}$. On considère une fonction F(X), continue quand X est situé dans $\mathcal{E}$ en dehors de $\mathfrak{M}$, et qui, dans une petite région contenant des points d'une seule variété $\mathfrak{M}_p$, se comporte comme la fonction F du paragraphe 1.

Partageons les $\mathfrak{M}_p$ en régions, de façon que chaque point de $\mathfrak{M}$ soit intérieur à au moins une région, et que chaque région admette une représentation paramétrique. Nous considérons ces régions, dont le nombre est fini, et ces représentations comme fixes. A chaque région, nous attachons aussi un système de fonctions $f_\alpha^\star$. Nous désignons par σ un nombre positif tel que, pour tout point M de $\mathfrak{M}$, il existe au moins un système de fonctions $f_\alpha^\star$, parmi ceux que nous retenons, tel que les paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_m$ correspondants soient, dans toute l'hypersphère de centre M et de rayon 6σ, des fonctions bien déterminées de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, le jacobien de ces fonctions étant partout positif.

Nous allons définir une fonction $\varphi(\mathrm{M}, \mathrm{P})$ d'un point M de $\mathfrak{M}$ et d'un point P dont la distance à M est au plus égale à 2σ. Pour cela, nous attachons un poids aux diverses représentations paramétriques valables en M; toute représentation qui est valable dans toute l'hypersphère de centre M et de rayon égal à 6σ, a un poids égal à *un* (il y a au moins une représentation de cette sorte); celles qui sont valables dans une hypersphère de centre M et de rayon r compris entre 4σ et 6σ, reçoivent un poids égal à $\frac{r-4\sigma}{2\sigma}$, fonction nulle pour $r=4\sigma$, égale à *un* pour $r=6\sigma$, et croissante dans l'intervalle; les représentations qui ne sont pas valables dans toute l'hypersphère de centre M et de rayon 4σ, reçoivent un poids nul. On remarquera que toute représentation dont le poids n'est pas nul, est valable aussi au point P. Soient $t'_1, \ldots, t'_p, 0, \ldots, 0$ les paramètres de M et $t_1, \ldots, t_m$ ceux de P dans une quelconque des représentations dont le poids n'est pas nul; en introduisant les fonctions $\mathrm{A}_{\alpha,\beta}$ correspondantes, nous multiplions $\Sigma_{\alpha,\beta}\, \mathrm{A}_{\alpha,\beta}(t'_1, \ldots, t'_p)\, t_\alpha t_\beta$ par le poids de la représentation, nous ajoutons tous les produits analogues qui proviennent des diverses représentations, et nous divisons cette somme par la somme des poids : le résultat est, par définition, la fonction φ (M, P). Par rapport aux paramètres de M, cette fonction remplit une condition de Hölder; par rapport aux coordonnées $x_1, \ldots, x_m$ de P, elle remplit une condition de Lipschitz (c'est-à-dire une condition de Hölder avec l'exposant *un*); cette fonction est partout positive ou nulle, et elle est bornée.

Cette fonction $\varphi(M, P)$ nous sert à définir une fonction $\psi(P)$ pour tous les points P dont la distance à $\mathfrak{M}$ est au plus égale à σ. Pour cela, nous nous donnons une fonction positive $\mu(M)$ d'un point de $\mathfrak{M}$; cette fonction μ doit remplir une condition de Hölder, avec un certain exposant k. Pour tout point P dont la distance l à $\mathfrak{M}$ est inférieure à σ, nous calculons la borne supérieure de

$$\mu(M)\varphi(M, P)\,\frac{2l - L(M, P)}{l},$$

le point M variant dans la région définie par $L(M, P) < 2l$ (on désigne par L la distance des deux points); c'est cette borne supérieure qui, par définition, est la fonction $\psi(P)$. Cette borne supérieure est atteinte pour au moins un point M de cette région. La fonction $\psi(P)$ est évidemment nulle sur $\mathfrak{M}$, et positive partout ailleurs; cette fonction est continue.

Soit encore $f(P)$ une fonction continue valant $O(l^k)$. Nous excluons de $\mathcal{E}$ l'ensemble défini par

$$\psi(P) < \eta^2 \exp f(P) \qquad (\eta > 0),$$

et nous étendons à l'ensemble restant, qui est fermé, l'intégrale

$$\int^{(m)} F\,dV \qquad [dV = d(x_1, \ldots, x_m)].$$

Nous allons voir que, *quand η tend vers zéro, cette intégrale tend vers une limite indépendante de f et de la fonction μ qui intervient dans la définition de ψ.*

Considérons d'abord, pour l'un des $\mathfrak{M}_p$, la région où les fonctions f^*_α permettent de définir $t_1, t_2, \ldots, t_m$ comme fonctions bien déterminées de $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Je dis que, si P est dans cette région, la différence

$$\psi(P) - \mu(t_1, \ldots, t_p)\, \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(t_1, \ldots, t_p)\, t_\alpha t_\beta$$

vaut $O(l^{2+k})$, pourvu que k soit au plus égal à h. En effet, si N est un des points de $\mathfrak{M}_p$ dont la distance à P est égale à l, $\psi(P)$ est au moins égal à $\mu(N)\varphi(N, P)$; si $\psi(P)$ est plus grand que cette valeur, il existe un point M de $\mathfrak{M}_p$, situé à une distance de P inférieure à $2l$, et tel qu'on ait $\psi(P) < \mu(M)\varphi(M, P)$; mais on a $L(M, N) \leqq L(M, P) + L(N, P) < 3l$; on en conclut, sous la condition $k \leqq h$,

$$\psi(P) - \mu(N)\,\varphi(N, P) = O(l^{2+k}),$$

car les t_α valent $O(l)$ quand α dépasse p. Mais la distance de N au point P_1 dont les paramètres sont $(t_1, \ldots, t_p, 0, \ldots, 0)$, est au plus égale à $L(N, P) + L(P, P_1)$; donc $L(N, P_1) = O(l)$; par suite

$$\mu(P_1)\,\varphi(P_1, P) - \mu(N)\,\varphi(N, P) = O(l^{2+k}).$$

Enfin $\varphi(P_1, P) - \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(P_1)\, t_\alpha t_\beta$ vaut $O(l^{2+h})$; donc

$$\psi(P) - \mu(P_1)\, \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(P_1)\, t_\alpha t_\beta = O(l^{2+k}),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous pouvons ramener l'étude de l'intégrale proposée à celle de

$$\int^{(m)} F_1(P)\, D(P_1)\, d(t_1, \ldots, t_m),$$

avec

$$D(P) = \frac{d(x_1, \ldots, x_m)}{d(t_1, \ldots, t_m)},$$

car la nouvelle fonction intégrée ne diffère de la première que par une fonction sommable.

Nous allons montrer maintenant que l'intégrale étendue à la région

$$\psi(P) < \eta^2 \exp f(P) < \mu(P_1)\, \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(P_1)\, t_\alpha t_\beta$$

tend vers zéro avec η. En effet, puisque f est borné, les t_α d'indice α supérieur à p valent $O(\eta)$, et par suite, pour nos points P, $l = O(\eta)$; donc

$$\mu(P_1)\, \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(P_1)\, t_\alpha t_\beta - \psi(P) = O(\eta^{2+k}).$$

Par conséquent, pour tous ces points P, $\mu(P_1)\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(P_1)t_\alpha t_\beta$ varie entre deux limites $\eta^2(1+a\eta^k)$ et $\eta^2(1+b\eta^k)$, où a et b sont certaines constantes. En intégrant dans le domaine

$$\eta^2(1+a\eta^k) < \mu(P_1)\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(p_1)t_\alpha t_\beta < \eta^2(1+b^k),$$

par rapport à $t_{p+1}, \ldots, t_m$, on trouve un résultat $O(\eta^k)$, qui reste tel après l'intégration relative à $t_1, t_2, \ldots, t_p$: la limite est bien nulle. On démontrerait de même que l'intégrale étendue au domaine

$$\mu(P_1)\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha\,\beta}(P_1)t_\alpha t_\beta < \eta^2 \exp f(P) < \psi(P)$$

tend vers zéro avec η.

On prouverait de même que les intégrales étendues à chacune des régions

$$\eta^2 < \mu(P_1)\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(P_1)t_\alpha t_\beta < \eta^2 \exp f(P)$$

et

$$\eta^2 \exp f(P) < \mu(P_1)\Sigma_{\alpha,\beta}(P_1)t_\alpha t_\beta < \eta^2,$$

tendent vers zéro avec η.

Nous partageons la région des points dont la distance à $\mathcal{M}$ est inférieure à σ, en régions partielles de façon qu'une même représentation paramétrique, à l'aide des fonctions f_α^*, soit valable dans la totalité de chaque région; $\mathcal{M}$ ne doit nulle part être tangent à la frontière d'une région, et cette frontière doit remplir les mêmes conditions de régularité que $\mathcal{M}_{m-1}$. Il nous suffit de prouver que la partie de l'intégrale $\int^{(m)} F\,dV$ qui correspond à chaque région, a une limite bien déterminée, pour une fonction μ donnée, quand η tend vers zéro. Nous remplaçons, pour chaque région, la fonction F par la fonction F_1, l'élément dV par $D(P_1)\,d(t_1, \ldots, t_m)$, et la région d'exclusion par

$$\mu(t_1, \ldots, t_p)\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(t_1, \ldots, t_p)t_\alpha t_\beta < \eta^2,$$

ce qui suffit à notre objet, d'après ce qui vient d'être vu. On peut trouver une constante positive λ telle que, pour les points P_1 de $\mathcal{M}$ dont la distance à la frontière de la région est supérieur à $\lambda\eta$, tous les points P obtenus en associant aux paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_p$ de P_1 un système quelconque de valeurs de $t_{p+1}, \ldots, t_m$ satisfaisant à l'inégalité

$$\mu(P_1)\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(P_1)t_\alpha t_\beta < \eta^2 \qquad (0 < \eta < 1),$$

on ait toujours un point P du champ d'intégration dès que η est assez petit. Si l'on intègre par rapport à $t_{p+1}, \ldots, t_m$, on trouve $O(\log\eta)$ quand, pour la valeur de η considérée, la distance δ de P_1 à la frontière est moindre que $\lambda\eta$; si au contraire on a $\lambda\eta \leqq \delta$, le résultat de cette première intégration ne dépend pas de η et vaut $O(\log L_0 - \log\delta)$ (L_0 supérieur au maximum de δ); l'intégration relative à P_1 donne finalement $O(\eta \log\eta)$ pour les points P_1 de la première sorte, et une quantité bornée pour les points de la seconde sorte. Remplaçons η par un nombre $\zeta < \eta$, et calculons la différence des deux résulats; pour la région $\delta < \lambda\eta$, le second résultat est $O(\eta\log\eta + \zeta\log\zeta)$; pour la région $\delta \geqq \lambda\eta$, le second résultat est égal au premier; la différence finale est donc $O(\eta \log\eta + \zeta\log\zeta)$, ce qui est infiniment petit avec η, comme nous voulions le démontrer.

Nous allons voir enfin que cette limite est indépendante de la fonction μ. En effet on peut remplacer μ par *un* sans changer la limite, car, en intégrant d'abord par rapport à $t_{p+1}, \ldots, t_m$ dans chacun des domaines, la différence des résultats est nulle pour chaque point P_1, sauf pour ceux dont la distance δ à la frontière est inférieure à $\lambda\eta$ (λ étant convenablement choisi) : pour ceux-ci l'on obtient $O(\log\eta)$, d'où $O(\eta\log\eta)$ après l'intégration finale; la limite est zéro, et notre proposition est entièrement démontrée.

Définition : cette limite est ce que nous nommons la valeur principale de l'intégrale $\int_{\mathcal{S}}^{(m)} F\,dV$, *ou plus simplement l'intégrale principale.*

On voit que l'intégrale principale dépend des fonctions $A_{\alpha,\beta}$.

4. Théorème. — *Si la fonction* F *satisfait aux hypothèses du paragraphe* 3, *et si* $\rho(X)$ *remplit une condition de Hölder, la fonction* $F(X)\rho(X)$ *satisfait aux hypothèses du paragraphe* 3.

Il suffit de le démontrer pour un domaine partiel dans lequel un système de paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_m$ du type déjà introduit, est utilisable. Soit X_1 le point $(t_1, t_2, \ldots, t_p, 0, \ldots, 0)$. Nous écrivons, avec la notation du paragraphe 1,

$$\begin{aligned}\rho(X)F(X) = {} & \rho(X_1)F_1(t_1, \ldots, t_m) \\ & + [\rho(X) - \rho(X_1)]F_1(t_1, \ldots, t_m) + \rho(X)F_2(t_1, \ldots, t_m).\end{aligned}$$

Le premier terme du second membre est du type de la fonction F_1 du paragraphe 1, et les termes restants sont du type de la fonction F_2 du même paragraphe. Le théorème est donc démontré.

5. Théorème. — *Soit* $\omega(A)$ *une fonction positive, continue aux points de* $\mathcal{E}-\mathfrak{M}$ (§ 3) *et sommable dans* $\mathcal{E}$. *Soit* $H(X, A)$ *une fonction continue quand* A *n'appartient pas à* $\mathfrak{M}$ *et qui remplit les conditions*

$$|H(X, A)| < \omega(A),$$
$$|H(X, A) - H(Y, A)| < \omega(A)\, L^h(X, Y).$$

Je dis qu'on a

$$\int_{\mathcal{E}}^{(m)} F(X) \int_{\mathcal{E}}^{(m)} H(X, A)\, dV_A\, dV_X = \int_{\mathcal{E}}^{(m)} \int_{\mathcal{E}}^{(m)} F(X)\, H(X, A)\, dV_X\, dV_A. \tag{5}$$

Dans les deux membres, les intégrations relatives à X sont des intégrations principales. Introduisons la fonction ψ (X) du paragraphe 3, et soit $\mathcal{E}(\eta)$ le domaine $\mathcal{E}$ dont on a exclu la région

$$\psi(X) < \eta^2 \qquad (\eta > 0).$$

On a

$$\int_{\mathcal{E}(\eta)}^{(m)} F(X) \int_{\mathcal{E}}^{(m)} H(X, A)\, dV_A\, dV_X = \int_{\mathcal{E}}^{(m)} \int_{\mathcal{E}(\eta)}^{(m)} F(X)\, H(X, A)\, dV_X\, dV_A). \tag{6}$$

Si η tend vers zéro, nous allons voir que $\int_{\mathcal{E}(\eta)}^{(m)} F(X) H(X, A)\, dV_X$ tend vers une limite quand A n'est pas sur $\mathfrak{M}$, et la différence entre l'intégrale et sa limite est le produit de $\omega(A)$ par une fonction qui tend vers zéro avec η, uniformément par rapport à X et à A. Écrivons, dans un des domaines partiels, la fonction intégrée sous la forme indiquée au paragraphe 4, savoir

$$\begin{aligned} H(X_1, A)\, F_1(t_1, \ldots, t_m) + [H(X, A) - H(X_1, A)]\, F_1(t_1, \ldots, t_m) \\ + H(X, A)\, F_2(t_1, \ldots, t_m). \end{aligned}$$

Dans l'intégration du premier terme par rapport à $t_{p+1}, \ldots, t_m$, la fonction $H(X_1, A)$ peut sortir du signe d'intégration; il en résulte que la différence entre l'intégrale dans $\mathcal{E}(\eta)$ et sa limite vaut $\omega(A)\, O(\eta \log \eta)$. Comme les termes restants sont sommables dans $\mathcal{E}$, notre affirmation est vérifiée.

Si l'on intègre cette différence par rapport à A, on a donc un infiniment petit, puisque ω est sommable; le second membre de (6) tend donc vers celui de (5).

D'autre part le premier membre de (6) a une limite qui, par définition, est le premier membre de (5).

Le théorème est démontré.

6. **Validité des théorèmes de Fredholm pour certaines équations à intégrales principales.** — L'ensemble $\mathfrak{M}$ de variétés étant défini comme au paragraphe 3, et les fonctions $A_{\alpha,\beta}$ étant données une fois pour toutes, soient $V_1, V_2, \ldots, V_q$ un nombre quelconque de fonctions linéairement indépendantes données, qui satisfont aux hypothèses faites sur la fonction F. Soient $U_1, U_2, \ldots, U_q$ d'autres fonctions données, linéairement indépendantes, qui remplissent dans $\mathcal{E}$ une condition de Hölder. Nous posons

$$G_1(X, A) = \sum_{n=1}^{q} U_n(X) V_n(A). \tag{7}$$

Soit maintenant $\omega(A)$ une fonction positive, continue aux points de $\mathcal{E} - \mathfrak{M}$, et sommable dans $\mathcal{E}$. On donne une fonction $G_2(X, A)$, continue quand A n'est pas situé sur $\mathfrak{M}$, et qui satisfait aux inégalités

$$|G_2(X, A)| < \omega(A), \tag{8}$$

$$|G_2(X, A) - G_2(Y, A)| < \omega(A) L^h(X, Y) \qquad (0 < h \leqq 1). \tag{9}$$

On pose

$$G(X, A) = G_1(X, A) + G_2(X, A). \tag{10}$$

Enfin on donne une fonction $f(X)$ qui remplit dans $\mathcal{E}$ une condition de Hölder, et une fonction $g(X)$ qui satisfait aux conditions imposées dans le paragraphe 3 à la fonction F, et l'on considère les équations à intégrales principales

$$\rho(X) - \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} G(X, A) \rho(A) \, dV_A = f(X), \tag{11}$$

$$\sigma(X) - \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} G(A, X) \sigma(A) \, dV_A = g(X), \tag{12}$$

dont les inconnues sont ρ et σ; ρ doit remplir dans $\mathcal{E}$ une condition de Hölder, et σ doit remplir les conditions imposées à la fonction F du paragraphe 3; λ est un paramètre. On dit que ces équations sont *associées* l'une à l'autre.

Soit $H(X, A; \lambda)$ le noyau résolvant de $G_2(X, A)$, c'est-à-dire une fonction méromorphe de λ, à pôles indépendants de X et de A, identique à G_2 pour $\lambda = 0$, et qui satisfait à l'identité

$$(13) \qquad (\lambda - \mu)\int_{\mathcal{S}}^{(m)} H(X, A; \lambda)\, H(A, \Xi; \mu)\, dV_A = H(X, \Xi; \lambda) - H(X, \Xi; \mu).$$

Cette fonction H s'obtient immédiatement comme quotient des séries classiques de Fredholm; par exemple le coefficient de λ^n dans la série du dénominateur (fonction déterminante) a sa valeur absolue inférieure à

$$\frac{1}{n!}\left(\sqrt{n}\int_{\mathcal{S}}^{(m)} \omega\, dV\right)^n,$$

et par suite cette série converge quel que soit λ; la convergence du numérateur se vérifie immédiatement aussi, pourvu que A ne soit pas sur $\mathfrak{M}$. On a évidemment

$$(14) \qquad H(X, A; \lambda) = O[\omega(A)],$$

$$(15) \qquad H(X, A; \lambda) - H(Y, A; \lambda) = O[\omega(A)]\, L^h(X, Y),$$

les constantes impliquées dans les symboles O ne dépendant que de λ.

Si la fonction ρ satisfait à l'équation (11), elle satisfait aussi à l'équation

$$\rho(X) + \lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m)}\left[H(X, \Xi; \lambda) - G(X, \Xi) - \lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m)} H(X, A; \lambda)\, G(A, \Xi)\, dV_A\right]\rho(\Xi)\, dV_\Xi = f(X) + \lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m)} H(X, A; \lambda) f(A)\, dV_A,$$

qui s'écrit aussi, d'après (13),

$$(16) \qquad \rho(X) - \lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m)}\left[G_1(X, \Xi) + \lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m)} H(X, A; \lambda)\, G_1(A, \Xi)\, dV_A\right]\rho(\Xi)\, dV_\Xi = f(X) + \lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m)} H(X, A; \lambda) f(A)\, dV_A;$$

pour déduire cette équation de l'équation (11), il faut intervertir l'ordre de deux intégrations, mais, d'après (14) et (15), on en a le droit (§ 4 et 5). Si l'on pose maintenant

$$(17)\qquad \rho(X) = \rho_1(X) + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} H(X, A; \lambda)\, \rho_1(A)\, dV_A,$$

un calcul analogue montre que toute solution ρ_1 de l'équation

$$(18)\quad \rho_1(X) - \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} \left[G_1(X, \Xi) + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} G_1(X, A)\, H(A, \Xi; \lambda)\, dV_A \right] \rho_1(\Xi)\, dV_\Xi = f(X)$$

conduit, par la formule (17), à une solution de (11), pourvu toutefois que ρ_1 remplisse une condition de Hölder, car la fonction en remplit alors aussi une. Or les noyaux de ces équations (16) et (18) sont analogues à G_1, car

$$\begin{aligned}
& G_1(X, \Xi) + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} H(X, A; \lambda)\, G_1(A, \Xi)\, dV_A \\
& \quad = \sum_{n=1}^{q} \left[U_n(X) + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} H(X, A; \lambda)\, U_n(A)\, dV_A \right] V_n(\Xi) \\
& \quad = \sum_{n=1}^{q} U_n^*(X; \lambda)\, V_n(\Xi), \\
& G_1(X, \Xi) + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} G_1(X, A)\, H(A, \Xi; \lambda)\, dV_A \\
& \quad = \sum_{n=1}^{q} U_n(X) \left[V_n(\Xi) + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} V_n(A)\, H(A, \Xi; \lambda)\, dV_A \right] \\
& \quad = \sum_{n=1}^{q} U_n(X)\, V_n^*(\Xi; \lambda).
\end{aligned}$$

Il est immédiat que les $U_n^*(X; \lambda)$ remplissent des conditions de Hölder, et que les $V_n^*(\Xi; \lambda)$ remplissent les conditions du paragraphe 3. Ces équations (16) et (18) se résolvent par le procédé même qui réussit dans le cas particulier où les fonctions V_n et V_n^* sont sommables. La solution de (16) est du type

$$\rho(X) = f(X) + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} H(X, A; \lambda) f(A)\, dV_A + \lambda \sum_{n=1}^{q} b_n(\lambda)\, U_n^*(X; \lambda),$$

et les b_n sont données par les équations

$$\begin{aligned} b_n(\lambda) - \lambda \sum_{\nu=1}^{q} b_\nu(\lambda) \int_{\mathcal{E}}^{(m)} U_\nu^*(A; \lambda)\, V_n(A)\, dV_A \\ = \int_{\mathcal{E}}^{(m)} V_n f\, dV + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} V_n(\Xi) \int_{\mathcal{E}}^{(m)} H(\Xi, A; \lambda)\, f(A)\, dV_A\, dV_\Xi. \end{aligned}$$

On voit que, si la solution de ces équations existe, les $b_n(\lambda)$ sont des fonctions méromorphes de λ dans tout le plan; la solution existe d'ailleurs certainement quand λ n'est ni un pôle de H ni un zéro du déterminant de ce système (du reste les coefficients des inconnues et les seconds membres deviennent des fonctions entières si l'on multiplie les deux membres de chaque équation par la *fonction déterminante* relative à G_2). Sauf pour ces valeurs de λ, qui n'ont certainement aucune valeur d'accumulation, l'équation (11) n'a pas d'autre solution que celle de cette équation (16), qui peut s'écrire

$$\rho(X) = f(X) + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} N_1(X, A; \lambda) f(A)\, dV_A, \tag{19}$$

où N_1 est une fonction méromorphe de λ, avec des pôles indépendants de X et de A; quand λ a une valeur fixe autre qu'un pôle, N_1 est un noyau d'intégrale principale du même type que G; pour $\lambda = 0$, N_1 est identique à G. La solution de (18) est du type

$$\rho_1(X) = f(X) + \lambda \sum_{n=1}^{q} c_n(\lambda)\, U_n(X),$$

où les c_n sont donnés par les équations

$$c_n(\lambda) - \lambda \sum_{\nu=1}^{q} c_\nu(\lambda) \int_{\mathcal{E}}^{(m)} U_\nu(A) V_n^*(A; \lambda)\, dV_A = \int_{\mathcal{E}}^{(m)} V_n^*(A; \lambda) f(A)\, dV_A,$$

qui donnent pour les c_n des fonctions méromorphes de λ; en portant l'expression obtenue dans (17), on obtient une fonction

$$\rho(X) = f(X) + \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m)} N_2(X, A; \lambda) f(A) \, dV_A, \tag{20}$$

qui est certainement une solution de (11), sauf pour des valeur exceptionnelles de λ; ce qui a été dit de N_1 peut être répété pour N_2. Il en résulte que les fonctions méromorphes N_1 et N_2 sont identiques, et leur valeur commune N satisfait aux identités

$$\begin{aligned} N(X, \Xi; \lambda) - G(X, \Xi) &= \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m)} N(X, A; \lambda) \, G(A, \Xi) \, dV_A \\ &= \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m)} G(X, A) \, N(A, \Xi; \lambda) \, dV_A, \end{aligned}$$

qui entraînent que la fonction (19) satisfait effectivement à (11) et que cette équation n'a pas d'autre solution, excepté quand λ est un pôle de N. De ces identités on peut déduire, comme pour les équations de Fredholm, l'identité

$$(\lambda - \mu) \int_{\mathcal{S}}^{(m)} N(X, A; \lambda) \, N(A, \Xi; \mu) \, dV_A = N(X, \Xi; \lambda) - N(X, \Xi; \mu), \tag{21}$$

qui comprend les deux précédentes comme cas particuliers; en effet la fonction N étant, pour λ fixe, du même type que G, on constate que, toutes les fois que deux intégrations principales se superposent dans le calcul, on peut les intervertir, et le calcul est donc tout pareil à celui qui intervient dans la théorie de Fredholm.

Pour l'équation (12), il est inutile de reprendre tous ces raisonnements, car on constate immédiatement que, si λ n'est pas un pôle du *noyau résolvant* N, la fonction

$$\sigma(X) = g(X) + \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m)} N(A, X; \lambda) \, g(A) \, dV_A \tag{22}$$

est du type voulu, et elle satisfait à l'équation (12), qui n'a pas d'autre solution.

Si λ est un pôle de N, l'étude se poursuit toujours comme pour les équations de Fredholm, à l'aide de l'identité (21).

On parvient ainsi aux trois théorèmes fondamentaux :

Si λ n'est pas un pôle du noyau résolvant, les équations (11) *et* (12) *ont chacune une solution et une seule.*

Si λ est un pôle λ_0 du noyau résolvant, les solutions de l'équation homogène correspondant à (11) *sont des combinaisons d'un nombre fini de solutions linéairement indépendantes; il en est de même pour les solutions de l'équation homogène correspondant à* (12), *et le nombre des solutions linéairement indépendantes est le même pour les deux équations.*

Pour que l'équation (11) *soit soluble quand λ est un pôle λ_0 du noyau résolvant, il faut et il suffit que f soit orthogonal à toute solution ψ de l'équation homogène associée, c'est-à-dire qu'on ait*

$$\int_{\mathcal{E}}^{(m)} f\psi\, dV = 0; \tag{23}$$

de même, pour que (12) *soit alors soluble, il faut et il suffit que g soit orthogonal à toute solution φ de l'équation homogène correspondant à* (11), *c'est-à-dire qu'on ait*

$$\int_{\mathcal{E}}^{(m)} g\varphi\, dV = 0. \tag{24}$$

On remarquera que dans les conditions (23) et (24) figurent des intégrales principales.

7. **Changement des domaines d'exclusion.** — Il peut se faire que, si l'on exclut de $\mathcal{E}$ des champs autres que ceux du paragraphe 3, l'intégrale $\int^{(m)} F\, dV$ ait encore une limite; cette limite est alors ordinairement différente de l'intégrale principale. Si la fonction ρ remplit une condition de Hölder, il suffit d'écrire $F\rho$ comme au paragraphe 4 pour voir que, dans des cas assez généraux, l'intégrale $\int^{(m)} F\rho\, dV$ a aussi une limite pour les nouveaux domaines d'exclusion, et cette limite est égale à la somme de l'intégrale principale et de

$$\sum^{m-1} \int_{\mathfrak{M}_p}^{(p)} \varphi_p \rho\, dS_p + \Sigma\varphi_0\rho,$$

où φ_p est une fonction d'un point de $\mathfrak{M}_p (p = 1, 2, \ldots, m-1)$, et dS_p est la mesure euclidienne d'un élément de $\mathfrak{M}_p$; φ_0 est une constante attachée à un point de $\mathfrak{M}_0$, et la dernière somme est étendue à tous ces points.

Nous sommes alors amené à considérer, au lieu de l'équation (11) du paragraphe 6, une équation

$$(25)\quad \rho(X) - \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} G(X, A)\,\rho(A)\,dV_A - \lambda \sum_{\nu=1}^{q} \sum_{p=1}^{m-1} U_\nu(X) \int_{\mathfrak{M}_p}^{(p)} \varphi_{\nu,p}\,\rho\,dS_p - \lambda \sum_{\nu=1}^{q} \sum_{n=1}^{N} U_\nu(X)\,b_{\nu,n}\,\rho(M_n) = f(X),$$

où $M_1, M_2, \ldots, M_N$ sont les points de $\mathfrak{M}_0$; $\varphi_{\nu,p}$ est une fonction d'un point de $\mathfrak{M}_p$, pour toutes les valeurs employées de ν et de p; les $b_{\nu,n}$ sont des constantes.

En regardant ces fonctions $\varphi_{\nu,p}$ et ces constantes $b_{\nu,n}$ comme arbitrairement données, sous la seule condition que les $\varphi_{\nu,p}$ soient continus, nous voulons rechercher de quelle façon la solution ρ dépend des $\varphi_{\nu,p}$ et des $b_{\nu,n}$. Nous introduisons pour cela la même fonction $H(X, A; \lambda)$ qu'au paragraphe 6, et nous remarquons que ρ doit satisfaire à l'équation.

$$(26)\quad \rho(X) - \lambda \sum_{\nu=1}^{q} U_\nu^*(X; \lambda) \left[\int_{\mathcal{E}}^{(m)} V_\nu(\Xi)\,\rho(\Xi)\,dV_\Xi + \sum_{p=1}^{m-1} \int_{\mathfrak{M}_p}^{(p)} \varphi_{\nu,p}\,\rho\,dS_p + \sum_{n=1}^{N} b_{\nu,n}\rho(M_n) \right] = f(X) + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} H(X, A; \lambda) f(A)\,dV_A,$$

où les fonctions U_ν^* sont les mêmes qu'au paragraphe 6. Pour résoudre cette équation, on remarque que ρ a nécessairement la forme

$$\rho(X) = f(X) + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} H(X, A; \lambda) f(A)\,dV_A + \lambda \sum_{\nu=1}^{q} c_\nu(\lambda)\,U_\nu^*(X; \lambda).$$

Les c_ν sont donnés par un système d'équations du premier degré, savoir

$$c_\nu(\lambda) - \lambda \sum_{s=1}^{q} c_s(\lambda) \left[\int_{\mathcal{E}}^{(m)} \mathrm{U}_s^\star(\mathrm{A}\,;\,\lambda)\, \mathrm{V}_\nu(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A} + \sum_{p=1}^{m-1} \int_{\mathfrak{M}_p}^{(p)} \varphi_{\nu,p} \mathrm{U}_s^\star \, d\mathrm{S}_p \right.$$
$$\left. + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} b_{\nu,n} \mathrm{U}_s^\star(\mathrm{M}_n\,;\,\lambda) \right]$$
$$= \int_{\mathcal{E}}^{(m)} \mathrm{V}_\nu f\, d\mathrm{V} + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} \mathrm{V}_\nu(\Xi) \int_{\mathcal{E}}^{(m)} \mathrm{H}(\Xi,\,\mathrm{A}\,;\,\lambda) f(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}\, d\mathrm{V}_\Xi$$
$$+ \sum_{p=1}^{m-1} \left[\int_{\mathfrak{M}_p}^{(p)} \varphi_{\nu,p} f\, d\mathrm{S}_p + \lambda \int_{\mathfrak{M}_p}^{(p)} \varphi_{\nu,p}(\Xi) \int_{\mathcal{E}}^{(m)} \mathrm{H}(\Xi,\,\mathrm{A}\,;\,\lambda) f(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}\, d\mathrm{S}_p \right]$$
$$+ \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} b_{\nu,n} \left[f(\mathrm{M}_n) + \lambda \int_{\mathcal{E}}^{(m)} \mathrm{H}(\mathrm{M}_n,\,\mathrm{A}\,;\,\lambda) f(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A} \right].$$

Multiplions les deux membres de chaque équation par la *fonction déterminante* relative à G_2 : tous les coefficients et les seconds membres deviennent des fonctions entières de λ, et le déterminant du système est égal à *un* pour $\lambda = 0$. On voit ainsi bien nettement que les $c_\nu(\lambda)$ se présentent comme des quotients de fonctions entières, la fonction du dénominateur étant indépendante de ν. Ce dénominateur et chacun des numérateurs sont des sommes d'un nombre fini de termes, dont chacun s'obtient en intégrant dans un certain domaine une fonction qui contient au premier degré les $\varphi_{\nu,p}$ et les $b_{\nu,n}$ qui correspondent à chaque valeur donnée de ν.

Quand λ n'annule pas la fonction entière du dénominateur, l'équation (25) n'a pas d'autre solution que la fonction qui vient d'être trouvée. On démontre d'ailleurs toujours par la même voie que cette fonction est effectivement une solution, c'est-à-dire qu'on change d'inconnue en employant la formule (17) du paragraphe 6. C'est l'extension du premier théorème de Fredholm aux équations du présent paragraphe.

Si ρ annule la fonction entière du dénominateur, il est bien certain que l'équation homogène relative à (25) possède des solutions non identiquement nulles, et que celles-ci sont des combinaisons linéaires d'un nombre fini de solutions linéairement indépendantes. On pourrait étendre le second et le troisième théorème fondamental de Fredholm, en remplaçant l'équation associée par un système associé d'équations [1].

8. **Solutions nulles sur $\mathfrak{M}$.** — Si la fonction ρ, qui remplit une condition de Hölder, s'annule identiquement sur $\mathfrak{M}$, il est évident que l'intégrale principale, au premier membre de l'équation (25), se réduit à une intégrale ordinaire, et que toutes les intégrales d'ordre inférieur à m, ainsi que les $\rho(M_n)$, disparaissent : cette nullité subsiste donc de quelque façon qu'on choisisse les $\varphi_{\nu,p}$ et les $b_{\nu,n}$. Pour voir si cette nullité se produit pour une certaine valeur de λ, on peut supposer que tous les $\varphi_{\nu,p}$ et tous les $b_{\nu,n}$ sont nuls, c'est-à-dire se placer dans le cas du paragraphe 6. En écrivant que ρ est nul sur $\mathfrak{M}$, on a une équation entre λ et un point variable de $\mathfrak{M}$, et l'on cherche les solutions indépendantes de ce point variable. C'est seulement dans le cas où $\mathfrak{M}$ se réduit à un point, que la question se ramène à trouver les racines d'une fonction méromorphe de λ seul : pour toutes ces racines, si elles existent, l'intégrale qui figure dans l'équation donnée est une intégrale ordinaire.

---

(1) *Sur certains problèmes de Dirichlet et de Neumann*, *Journal de Math.*, 11, 1932, p. 389 à 416, spécialement Chap. I, § 8 et 9, p. 397 et 398.