MAURICE GEVREY

Les quasi-fonctions de Green et les systèmes d'équations aux dérivées partielles du type elliptique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 52 (1935), p. 39-108
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1935_3_52__39_0>

LES

QUASI-FONCTIONS DE GREEN

ET LES

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE ELLIPTIQUE

PAR M. MAURICE GEVREY.

Sommaire.

I. — Introduction.

Le présent Mémoire pourrait porter comme sous-titre, avec quelque paradoxe, « de l'inutilité des fonctions de Green ». Et cependant nous avons consacré un précédent travail à l'emploi de celles-ci dans les problèmes aux limites relatifs à une équation du type elliptique (*Journal de Math.*, 1930, p. 1 à 80). D'autre part, dans une Note antérieure des *Comptes rendus* (t. 182, 1926, p. 36), nous avions déjà indiqué comment ces problèmes peuvent être résolus sans fonctions de Green.

Ces deux méthodes (*avec* ou *sans* fonction de Green), qui ne nécessitent l'une et l'autre que la résolution d'*une seule* équation de Fredholm pour des conditions aux limites linéaires, s'opposent-elles ? En réalité il n'en est rien, et nous l'avons déjà signalé dans notre Mémoire (p. 65), ainsi que dans une autre Note des *Comptes rendus* (t. 188, 1929, p. 1652). Nous allons tout d'abord revenir sur ce point et, dans cette introduction, préciser la méthode relative à une équation linéaire du type elliptique : elle s'étendra d'elle-même aux systèmes.

Un second Chapitre (*voir* le sommaire ci-dessus) concernera les intégrales qui permettront la mise en équation des problèmes aux limites et la formation de la *fonction de frontière* figurant dans la quasi-fonction de Green. Nous y ajouterons quelques propriétés complémentaires en vue de travaux ultérieurs.

Enfin les chapitres suivants seront consacrés aux systèmes à n fonctions inconnues et m variables. Notons que le problème de Dirichlet et les problèmes mixtes linéaires *simples* (c'est-à-dire ceux où chacune des n conditions aux limites ne contient qu'une inconnue) sont ramenés à la résolution *d'une seule équation de Fredholm dans un domaine multiple* (1).

---

(1) Les principaux de ces résultats ont été publiés dans les *Comptes rendus*, t. 193, 1931, p. 693, et t. 197, 1933, p. 296. Enfin on consultera avec fruit les beaux travaux de M. Giraud dans le *Journal de Math.*, les *Annales de l'Éc. Norm.*, le *Bulletin des Sc. math.*, le *Bulletin de la Soc. math. de France* à partir de 1926.

1. Deux méthodes se ramenant l'une à l'autre. Problème de Dirichlet [1]. — Soit l'équation linéaire du type elliptique à m variables $x_1, \ldots, x_m$

$$(\mathrm{E}) \qquad \mathrm{F}u \equiv \Sigma a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_j} + \Sigma b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \qquad (a_{ij} = a_{ji}),$$

les coefficients a_{ij}, b_i, c, f étant fonctions du point $\mathrm{P}(x_i)$ dans une région $\mathcal{R}$ de l'espace E_m à m dimensions et la forme $\Sigma a_{ij}\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j$ étant définie positive et de discriminant égal à *un*. Nous envisageons tout d'abord le *problème de Dirichlet* relatif à un domaine ouvert et borné D, de frontière S, situé dans $\mathcal{R}$.

Rappelons ici *la formule fondamentale* qu'on obtient, dans le cas où $\mathrm{F}u = 0$ admet une adjointe $\mathrm{F}_1 v = 0$, en intégrant $v\mathrm{F}u - u\mathrm{F}_1 v = 0$ dans $\mathrm{D} + \mathrm{S}$: si P est intérieur à D, cette formule s'écrit (Mémoire cité, p. 8).

$$(\mathrm{I}_1) \qquad (m-2)\sigma_m u_{\mathrm{P}} = \int_{\mathrm{S}}\left[-v\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}} + u\frac{\partial v}{\partial \mathrm{N}} - uv\,\Sigma_i\left(b_i + \Sigma_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right)\alpha_i\right]d\mathrm{S} - \int_{\mathrm{D}} vf\,d\omega,$$

σ_m étant l'aire de la sphère unitaire dans E_m, N la *conormale intérieure* [2] à S (appelée aussi transversale), (α_i) les cosinus directeurs de la normale intérieure, $d\mathrm{S}$ et $d\omega$ les éléments respectifs de S et de D. Quant à v, c'est une solution de $\mathrm{F}_1 v = 0$ qui, si $\Pi(\xi_i)$ est le point courant et A_{ij} le mineur de a_{ij}, se comporte, quand Π vient en P et pour $m > 2$, comme $[\Sigma \mathrm{A}_{ij}(\mathrm{P})(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)]^{1-\frac{m}{2}}$ (et a d'ailleurs cette expression si les a_{ij} sont constants et les b_i, c nuls) : c'est la solution *élémentaire*,

---

[1] Ce numéro et le suivant ont pour objet de montrer comment les fonctions de Green se rattachent au point de vue du présent Mémoire : dans ce but nous rappelons certains résultats antérieurs, mais ceux-ci (à part la formule fondamentale, d'ailleurs classique) n'interviendront pas dans la suite, qui constituera un exposé *complètement indépendant*.

[2] C'est la direction conjuguée (prise intérieurement à D) du plan tangent par rapport au cône des directions caractéristiques ($\Sigma a_{ij}\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j = 0$) au point de S envisagé : on pose

$$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}} = \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} \qquad \text{avec } \Psi = \Sigma a_{ij}\alpha_i\alpha_j.$$

$\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}}$ s'écrit aussi $\sum_{ij} a_{ij}\alpha_i\frac{\partial u}{\partial x_j}$, et nous l'appellerons *dérivée conormale*. Dans le présent Mémoire la normale et la conormale *seront toujours prises intérieurement*.

dite encore fondamentale, se réduisant au potentiel spatial $|P\Pi|^{2-m}$ quand les a_{ij} sont égaux à 1 pour $i=j$ et à 0 pour $i\neq j$ (c'est-à-dire quand les a_{ij} forment une *matrice unité*).

Si φ est astreinte de plus à s'annuler quand Π vient sur S, on l'appelle alors *fonction de Green* G_P^Π, et (1_1) devient

$$(1_2)\qquad (m-2)\sigma_m u_P=\int_S \frac{\partial G_P^M}{\partial N_M} u_M\, dS_M-\int_D G_P^\Pi f_\Pi\, d\omega_\Pi,$$

formule qui donne la solution du problème de Dirichlet : calculer u en P connaissant ses valeurs en chaque point M de S. La méthode employée prouve d'ailleurs l'*unicité* de cette solution.

Ce qui précède nécessite l'existence de l'adjointe. Or, au moyen de (1_1) on montre que G, solution de $F_1=0$ relativement à Π, *est aussi solution de* $F=0$ *relativement à* P et s'annule si P est sur S. On peut donc se proposer de former G comme solution de $F=0$ par rapport à P, sans qu'il y ait nécessairement une équation adjointe, et envisager la fonction u_P donnée par (1_2) : on établit *ensuite* qu'elle est bien solution de (E) et prend les valeurs données sur S.

Comment obtenir effectivement G? On commence par former d'une façon très simple (en utilisant la *fonction de frontière*) une fonction auxiliaire V_P^Π qui n'est autre qu'une *quasi-fonction de Green* : nous entendons par là qu'elle satisfait aux mêmes conditions que G, quand P vient en Π ou sur S, et que $F_P V_P^\Pi$, c'est-à-dire l'opération F *faite sur* V *relativement à* P, admet pour $P\Pi=0$ *un pôle d'ordre moindre que m.*

Posons alors

$$(1_3)\qquad G_P^\Pi=V_P^\Pi+\int_D V_P^Q \Phi_Q^\Pi\, d\omega_Q.$$

En écrivant que G satisfait à $F_P=0$ on trouve, par application de la formule de Poisson généralisée,

$$(1_4)\quad \Phi_P^\Pi=\lambda\int_D q F_P V_P^Q . \Phi_Q^\Pi\, d\omega_Q+q F_P V_P^\Pi \quad \text{avec } q=\frac{1}{(m-2)\sigma_m}=\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{4\pi^{\frac{m}{2}}},$$

λ ayant ici la valeur *un*. Ceci montre que Φ_P^Π *est la résolvante du noyau* $qF_P V_P^\Pi$ pour $\lambda=1$: la résolution du problème de Dirichlet se ramène donc au calcul de cette résolvante [pour $m=2$, $q=(2\pi)^{-1}$].

Voyons maintenant la *seconde méthode*, faisant intervenir *seulement* la quasi-fonction de Green. Nous mettrons la solution cherchée sous la forme

$$(15)\qquad u_P = q\int_D V_P^Q \varphi_Q \, d\omega_Q + \chi_P,$$

χ étant une fonction de P prenant sur S les valeurs données : il en est de même de u, car l'intégrale du second membre s'y annule. En écrivant que u est solution de (E), on trouve que φ vérifie l'équation de Fredholm

$$(16)\qquad \varphi_P = \int_D q F_P V_P^Q . \varphi_Q \, d\omega_Q + F_P \chi - f_P$$

et la résolution de cette équation *se ramène, ici encore, au calcul de la résolvante du noyau* $qF_P V_P^Q$.

Mais il y a plus : plaçons Π en M sur S et dérivons (13) par rapport à N_M : nous obtenons, en supposant, ainsi que dans ce qui suit, que les opérations effectuées soient légitimes,

$$(17)\qquad \frac{\partial G_P^M}{\partial N_M} = \frac{\partial V_P^M}{\partial N_M} + \int_D V_P^Q \frac{\partial \Phi_Q^M}{\partial N_M} d\omega_Q.$$

Portant dans (12) les valeurs de G_P^Π et de $\dfrac{\partial G_P^M}{\partial N_M}$ fournies par (13) et (17), nous constatons immédiatement que u_P a la forme (15) en posant

$$(18)\qquad \varphi_P = \int_S \frac{\partial \Phi_P^M}{\partial N_M} u_M \, dS_M - \int_D \Phi_P^\Pi f_\Pi \, d\omega_\Pi - f_P, \qquad \chi_P = q\int_S \frac{\partial V_P^M}{\partial N_M} u_M \, dS_M.$$

Il nous reste à montrer que φ vérifie (16). Or si, dans l'expression (18) de φ, nous remplaçons Φ_P^Π par sa valeur (14), avec $\lambda = 1$, et

$$\frac{\partial \Phi_P^M}{\partial N_M} \quad \text{par} \quad \int_D q F_P V_P^Q \frac{\partial \Phi_Q^M}{\partial N_M} d\omega_Q + q F_P \frac{\partial V_P^M}{\partial N_M},$$

il vient

$$\varphi_P = q\int_D F_P V_P^Q \, d\omega_Q \left[\int_S \frac{\partial \Phi_Q^M}{\partial N_M} u_M \, dS_M - \int_D \Phi_Q^\Pi f_\Pi \, d\omega_\Pi - f_Q \right]$$
$$+ q\int_S F_P \frac{\partial V_P^M}{\partial N_M} u_M \, dS_M - f_P,$$

ce qui n'est autre que l'équation (16) où φ et χ ont les valeurs (18). Nous sommes ainsi conduits à constater que l'intégrale χ donnée par

(1_8) *prend sur* S *les valeurs données,* ce que nous montrerons directement plus loin (n° 7).

Nos deux procédés se ramènent donc bien à un seul, mais le second peut comporter un choix de la fonction χ plus avantageux, par exemple si u doit coïncider sur S avec une fonction ψ deux fois dérivable en (x_i) ou plus généralement telle qu'en posant $\chi = \psi$ l'équation (1_6) soit résoluble.

2. **Problèmes mixtes.** — Le problème de Dirichlet est un cas particulier des *problèmes aux limites linéaires* dans lesquels la condition donnée en chaque point M de S est (¹)

$$(2_1) \qquad \mathrm{H}\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}} + \mathrm{K}u = \mathrm{L} \qquad (\mathrm{H, K, L} \text{ fonctions de M}).$$

A chacun de ces problèmes correspond une fonction de Green. Pour $\mathrm{K} = 0$ et $\mathrm{H} = 1$, nous avons affaire au *problème de Neumann* qui donne lieu à des considérations analogues aux précédentes. Ici la fonction $\mathrm{G}_\mathrm{P}^\Pi$ (appelée aussi *fonction de Neumann*) doit être une solution de $\mathrm{F}_1 = 0$ par rapport à Π (toujours avec la même singularité pour $\mathrm{P}\Pi = 0$) telle que $\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{N}_\Pi}$ s'annule quand Π vient sur S. D'où, d'après (1_4),

$$(2_2) \qquad u_\mathrm{P} = -q\int_\mathrm{S} \mathrm{G}_\mathrm{P}^\mathrm{M}\frac{\partial u}{\partial \mathrm{N}_\mathrm{M}}\,d\mathrm{S}_\mathrm{M} - q\int_\mathrm{D} \mathrm{G}_\mathrm{P}^\Pi f_\Pi\, d\omega_\Pi.$$

Ici encore G est solution de $\mathrm{F} = 0$ en P et peut se calculer à l'aide d'une quasi-fonction de Green $\mathrm{V}_\mathrm{P}^\Pi$ ayant sa dérivée conormale nulle quand P est sur S : G est donnée par (1_3) et (1_4) où V désigne cette nouvelle fonction auxiliaire.

Si maintenant nous employons la seconde méthode pour résoudre le problème de Neumann, χ désignera dans (1_5) une fonction telle que $\frac{\partial \chi}{\partial \mathrm{N}} = \mathrm{L}$ sur S et nous aboutirons ainsi à une nouvelle équation (1_6). Pour retrouver celle-ci en partant de (2_2), il suffit de rem-

---

(¹) Ce problème (avec $\mathrm{H} = 1$) s'appelle aussi *problème de Neumann généralisé.* D'autre part, nous avons étudié *dans le plan* le cas où la condition aux limites contient la dérivée tangentielle (*Journ. de Math.*, 1930, p. 75). *Voir* les recherches de M. Giraud (basées sur une autre méthode) dans le cas de m variables.

placer G par son expression (1_3) et de poser

$$(2_3)\qquad \varphi_P = -\int_S \Phi_P^M \frac{\partial u}{\partial N_M}\, dS_M - \int_D \Phi_P^\Pi f_\Pi\, d\omega_\Pi - f_P, \qquad \chi_P = -q\int_S V_P^M \frac{\partial u}{\partial N_M}\, dS_M.$$

Φ est donnée par (1_4) : substituant dans φ_P donnée par (2_3), on retrouve encore l'équation (1_6). Nous sommes ainsi conduits à prendre ici comme fonction χ celle qui est fournie par (2_3).

Le cas général de la condition aux limites (2_1) *se ramène au problème de Neumann* par un changement de fonction inconnue. Posons

$$(2_4)\qquad u = v\, e^z \qquad \text{avec } \frac{\partial z}{\partial N} + \frac{K}{H} = 0 \text{ sur } S;$$

(2_1) devient $\dfrac{\partial v}{\partial N} = \dfrac{L}{H} e^{-z}$ et la détermination de v est un problème de Neumann : il suffira donc de poser

$$z_P = q\int_S V_P^M \left(\frac{K}{H}\right)_M dS_M.$$

Bien entendu, ce que nous venons d'exposer n'est légitime que sous les conditions (frontière et coefficients) rendant valables les opérations effectuées dans nos calculs. Nous examinerons ces points plus loin, ainsi que les questions d'unicité.

L'identité des deux points de vue est donc établie, mais la seconde méthode a sur la première l'avantage de se généraliser immédiatement pour les systèmes de n équations de la forme

$$(2_5)\qquad \Sigma_{ij} a_{ij}^k \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i\, \partial x_j} + \Sigma_{hi} b_{hi}^k \frac{\partial u_h}{\partial x_i} + \Sigma_h c_h^k u_h = f^k$$

avec $i, j = 1, \ldots, m$; $h, k = 1, \ldots, n$ (l'indice *supérieur* k étant relatif à l'équation de rang k). A chaque équation (2_5) correspondra une fonction auxiliaire V^k qu'on substituera dans (1_5), ce qui donnera, pour chaque valeur de k, une expression de u_k à l'aide d'une fonction inconnue φ_k; en écrivant ensuite que les u_k vérifient le système (2_5) on aura n équations de Fredholm pour déterminer les φ_k [*cf.* (9_2) et (9_3)].

Cette méthode étant l'extension toute naturelle de celle qui concerne une seule équation, nous allons reprendre directement la résolution des problèmes aux limites par le second procédé pour l'équation (E).

Nous établirons tous les résultats dont nous avons besoin sans qu'il soit nécessaire pour le lecteur de se reporter à notre précédent Mémoire. Nous emploierons une exposition plus synthétique, qui nous permettra de préciser et de compléter nos résultats antérieurs.

II. — Étude de certaines intégrales.

3. Potentiels généralisés : conditions d'existence des dérivées secondes et formule de Poisson. — Dans ce qui suit nous emploierons la notation [les coordonnées de P étant (x_i)] :

$$\mathcal{D}_\mathrm{P}\, u \equiv \Sigma a_{ij}(\mathrm{P}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}$$

(l'indice P peut être supprimé quand toute confusion est impossible); nous ferons d'ailleurs plus loin une extension de ce symbole. A_{ij} étant le mineur de a_{ij}, nous poserons aussi, P et Π étant les points déjà envisagés au n° 1 (avec $\mathrm{P\Pi} = r$),

(3₁) $\quad \mathfrak{S}_\mathrm{M}(\mathrm{P}, \Pi) = \Sigma \mathrm{A}_{ij}(\mathrm{M})\,(x_i - \xi_i)\,(x_j - \xi_j), \qquad w_\mathrm{M}(\mathrm{P}, \Pi) = \mathfrak{S}_\mathrm{M}^{1-\frac{m}{2}},$

en remarquant qu'on a $\lambda < r^{-2}\mathfrak{S}_\mathrm{M} < \mu$, λ et μ étant fixes, car on peut toujours choisir λ assez petit et μ assez grand pour que $\mathfrak{S}_\mathrm{M} - \lambda r^2$ et $\mu r^2 - \mathfrak{S}_\mathrm{M}$ soient constamment positifs. D'où

(3₂) $\quad \mathfrak{S}_\mathrm{M}(\mathrm{P}, \Pi) = \overline{\mathrm{P\Pi}}^2\, \mathrm{L}_\mathrm{M}(\mathrm{P}, \Pi),$

L_M étant une fonction positive continue de M, P, Π, sauf peut-être pour $\mathrm{P\Pi} = 0$, et comprise entre λ et μ. Pour $m = 2$, $w_\mathrm{M} = \mathcal{L}\mathfrak{S}_\mathrm{M}^{-1}$.

Lorsque les a_{ij} sont *constants*, w est la solution élémentaire de $\mathcal{D}u = 0$ et l'on passe de ce cas à celui des fonctions harmoniques par une substitution linéaire $x_i = \Sigma_k \beta_{ik} x'_k$ qui transforme $\Sigma \mathrm{A}_{ij} x_i x_j$, $\Sigma a_{ij} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $\Sigma a_{ij} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ respectivement en $\Sigma x'^2_i$, $\Sigma \dfrac{\partial^2 u}{\partial x'^2_i}$, $\Sigma \left(\dfrac{\partial u}{\partial x'_i}\right)^2$ et la conormale en normale. Si maintenant les a_{ij} *ne sont pas constants*, on peut supposer que, dans la transformation précédente, les coefficients ont les valeurs constantes correspondant aux valeurs prises par les a_{ij} *en un point* O *déterminé*, qu'on peut d'ailleurs choisir comme origine : alors, dans la nouvelle équation obtenue, $\mathcal{D}u$ devient Δu, *mais en* O *seulement* [les $a_{ij}(\mathrm{O})$ devenant égaux à 1 pour $i=j$ et à 0 pour $i \neq j$], et $\mathfrak{I}_0(\mathrm{P}, \Pi)$ devient $\overline{\mathrm{P}'\Pi'}^2$, P' et Π' correspondant à P et Π.

Nous désignerons par (T) *la transformation ainsi définie en* O : le module de cette substitution est égal à *un*, puisque le déterminant des dérivées secondes dans (E) a la valeur *un* avant comme après.

Envisageons la fonction $w_\Pi(\mathrm{P}, \Pi)$: si les a_{ij} dépendent de P, elle n'est pas solution de $\mathrm{F_P}=0$, mais en écrivant les termes du second ordre sous la forme

$$(3_3) \qquad \mathcal{D}_{\mathrm{P}} w_\Pi = \Sigma a_{ij}(\Pi)\frac{\partial^2 w_\Pi}{\partial x_i \partial x_j} + \Sigma[a_{ij}(\mathrm{P}) - a_{ij}(\Pi)]\frac{\partial^2 w_\Pi}{\partial x_i \partial x_j},$$

le premier terme est nul et le second *présente pour* $\mathrm{P}\Pi = 0$ *un pôle d'ordre* $< m$, et il en est de même pour $\mathrm{F_P} w_\Pi$: le produit $|\mathrm{P}\Pi|^m \mathrm{F_P} w_\Pi$ tend vers zéro avec PΠ. C'est ce que nous exprimons en disant que $w_\Pi(\mathrm{P}, \Pi)$ est *quasi-solution élémentaire*.

Rappelons maintenant la formule de Poisson [1]:

$$\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\int_{\mathrm{D}} |\mathrm{PQ}|^{2-m} \rho_{\mathrm{Q}}\, d\omega_{\mathrm{Q}} = -(m-2)\sigma_m \rho_{\mathrm{P}}$$

avec les notations du n° 1. Que devient-elle quand $|\mathrm{PQ}|^{2-m}$ est remplacé par $w_{\mathrm{Q}}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ et que nous effectuons sur l'intégrale l'opération F? Le problème qui se pose alors est l'étude des dérivées premières et secondes du *potentiel spatial généralisé*

$$(3_4) \qquad \varpi_{\mathrm{P}} = \int_{\mathrm{D}} \mathfrak{I}_{\mathrm{Q}}^{1-\frac{m}{2}}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\rho_{\mathrm{Q}}\, d\omega_{\mathrm{Q}} = \int_{\mathrm{D}} w_{\mathrm{Q}}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\rho_{\mathrm{Q}}\, d\omega_{\mathrm{Q}}.$$

Les dérivées premières se calculent par la formule de Leibniz [2]. Avant de passer aux dérivées secondes faisons une remarque préliminaire sur l'accroissement d'une dérivée quelconque $w_{\mathrm{M}}^{(p)}$, d'ordre p, de $w_{\mathrm{M}}(\mathrm{P}, \Pi)$ prise par rapport aux x_i : d'après (3_2) on a

$$(3_5) \qquad w_{\mathrm{M}}^{(p)} = |\mathrm{P}\Pi|^{2-m-p} \mathrm{L}_{\mathrm{M}}^{(p)} \qquad [\mathrm{L}_{\mathrm{M}}^{(p)} \text{ borné}].$$

---

(1) Nous désignerons, dans ce numéro, par Q le point courant d'*intégration* dans D.

(2) Une des façons de le voir est d'envisager l'intégrale ainsi obtenue par dérivation sous le signe $\int$ (par rapport à x_i) étendue au domaine D − γ, γ étant un cylindre de rayon ε, d'axe parallèle à $\mathrm{O}x_i$ et passant par P : cette intégrale converge uniformément quand ε tend vers zéro, quel que soit P sur l'axe de γ, et ceci établit la légitimité de l'opération (*Journ. Math.*, 1930, p. 33).

Nous désignerons dans ce qui suit par la notation générale (K) *tout coefficient borné dans un domaine de* $\mathcal{R}$ *et pouvant dépendre des coefficients de* (E). On a alors

$$(3_6) \qquad |w_{M'}^{(p)}(P, \Pi) - w_M^{(p)}(P, \Pi)| < (K)\,\Delta a\,|P\Pi|^{2-m-p},$$

Δa désignant une borne supérieure des modules d'accroissement des a_{ij} quand on passe de M à M'. Il suffit, pour le voir, de remarquer que $w_M^{(p)}$ a la forme d'un quotient $\frac{u}{v}$ (avec $v = \vartheta_M^{\frac{m}{2}-1+p}$ et u polynome en $x_i - \xi_i$ de degré p) dont l'accroissement est $\frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v\,(v + \Delta v)}$: Δu et Δv s'évaluent par la formule des accroissements finis appliquée à u et v considérés comme fonctions des a_{ij}, avec $|\Delta A_{ij}| < (K)\,\Delta a$. On trouve ainsi un dénominateur de l'ordre de $|P\Pi|^{2m-4+4p}$ et un numérateur d'ordre $m - 2 + 3p$ en $(x_i - \xi_i)$, dont la limitation contient Δa en facteur. D'où se déduit la formule (3_6).

Nous allons maintenant faire la convention suivante : nous désignerons par $\bar{\rho}_P$ et $\bar{w}_P$ les fonctions ρ_P et $w_P\,(P, Q)$ figurant après un symbole de dérivation ou d'accroissement par rapport à P, toutes les fois que nous considérerons les $A_{ij}(P)$ *comme des constantes* dans ces dérivations ou ces accroissements. En d'autres termes, nous aurons par exemple

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_P}{\partial x_i\,\partial x_j} = \left[\frac{\partial^2 w_M(P, Q)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right]_{M=P},$$

ceci signifiant que nous dérivons $w_M(P, Q)$ par rapport au point P et qu'*ensuite* nous plaçons M en P.

Cela posé, calculons $\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x_i \partial x_j}$. Supposons d'abord *les* a_{ij}, A_{ij} *et* ρ *constants* : l'équation $\mathcal{D}u = 0$ (identique à son adjointe) admet alors w comme solution élémentaire et la fonction $u^\star = \frac{\rho x_1^2}{2\,a_{11}}$ vérifie $\mathcal{D}u = \rho$. D'où, d'après (1_1) avec $u = u^\star$, $v = w$, $f = \rho$,

$$(3'_6) \quad \varpi_P = \int_D w(P, Q)\,\rho\,d\omega_Q = -(m-2)\,\sigma_m u_P^\star + \int_S \left(\frac{\partial w(P, M)}{\partial N_M}\,u_M^\star - w(P, M)\,\frac{\partial u^\star}{\partial N_M}\right) dS_M.$$

Le second membre étant indéfiniment dérivable en tout point P de D, il en est de même de ϖ dans ce cas particulier ; de plus, la dernière intégrale étant solution de $\mathcal{D}_P u = 0$, on a $\mathcal{D}_P \varpi = -(m-2)\,\sigma_m \rho$.

Passons maintenant au *cas général des* A_{ij} *et* ρ *fonctions continues de* P. Soit Σ la sphère de centre P et de rayon $2|\Delta x_j|$: la dérivée $\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x_i \partial x_j}$ existera si l'expression

$$(3_7) \quad \rho_P \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_D \overline{\varpi}_P \, d\omega_Q + \lim \frac{1}{\Delta x_j} \left[\Delta \int_\Sigma \left(\frac{\partial \varpi_Q}{\partial x_i} \rho_Q - \frac{\partial \overline{\varpi}_P}{\partial x_i} \bar{\rho}_P \right) d\omega_Q + \int_{D-\Sigma} \Delta \left(\frac{\partial \varpi_Q}{\partial x_i} \rho_Q - \frac{\partial \overline{\varpi}_P}{\partial x_i} \bar{\rho}_P \right) d\omega_Q \right]$$

a un sens quand Δx_j tend vers zéro [nous supprimons, pour simplifier l'écriture, les parenthèses (P, Q) après les ϖ]. Nous venons de démontrer *l'existence du premier terme*; avant d'étudier les deux autres faisons une remarque générale. Posons [toujours avec les notations de (3_6), sauf le changement de Π en Q] :

$$(3_8) \quad H^{(p)} = \varpi_{M'}^{(p)}(P, Q)\rho_{M'} - \varpi_M^{(p)}(P, Q)\rho_M = \varpi_{M'}^{(p)}(\rho_{M'} - \rho_M) + [\varpi_{M'}^{(p)} - \varpi_M^{(p)}]\rho_M,$$

les $\varpi^{(p)}$ étant les ϖ elles-mêmes pour $p = 0$. On a, en utilisant (3_6),

$$(3'_8) \quad |H^{(p)}| < [(K)\eta + (K)\Delta a]\,|PQ|^{2-m-p} \qquad \text{avec } |\rho_{M'} - \rho_M| < \eta.$$

Or la seconde intégrale de (3_7) est du type $\int_\Sigma H^{(1)} d\omega_Q$ avec M' en Q, M en P et $|\rho_Q - \rho_P| < \eta$; $|H^{(1)}|$ est $< [(K)\eta + (K)\Delta a]\,|PQ|^{1-m}$, l'intégrale est limitée par $[(K)\eta + (K)\Delta a]\,|\Delta x_j|$ et il en est de même de son accroissement (pour un même domaine Σ). Comme η et Δa tendent vers zéro avec Δx_j, *le second terme de* (3_7) *tend vers zéro*.

Voyons le troisième : nous pouvons appliquer à cette intégrale la formule de Taylor jusqu'au second terme, puisque P est dans Σ ainsi que P_1 (obtenu par l'accroissement Δx_j). Nous aurons donc à intégrer la fonction

$$(3_9) \quad \Delta x_j \left(\frac{\partial^2 \varpi_Q}{\partial x_i \partial x_j} \rho_Q - \frac{\partial^2 \overline{\varpi}_P}{\partial x_i \partial x_j} \rho_P \right) + \frac{\Delta x_j^2}{2} \left[\frac{\partial^3 \varpi_Q(P', Q)}{\partial x_i \partial x_j'^2} \rho_Q - \frac{\partial^3 \overline{\varpi}_P(P', Q)}{\partial x_i \partial x_j'^2} \rho_P \right],$$

P' étant un point situé entre P et P_1 et dont la coordonnée de rang j est x'_j. Si nous remplaçons, dans la troisième intégrale de (3_7), $\Delta(\quad)$ par la somme des deux termes (3_9), le premier de ceux-ci nous donne, en divisant par Δx_j,

$$(3_{10}) \qquad \lim \int_{D-\Sigma} \left(\frac{\partial^2 \varpi_Q}{\partial x_i \partial x_j} \rho_Q - \frac{\partial^2 \overline{\varpi}_P}{\partial x_i \partial x_j} \rho_P \right) d\omega_Q;$$

quant au second terme de (3_9), il nous donne une intégrale que nous décomposons en deux, $\int_{D-\Sigma'}$ et $\int_{\Sigma'-\Sigma}$, Σ' étant une sphère concentrique à Σ et dont le rayon R' est un infiniment petit d'ordre *inférieur* à celui de Δx_j [1]. Pour évaluer $\int_{\Sigma'-\Sigma}$ nous mettrons la fonction à intégrer sous la forme (3_8) et nous appliquerons $(3'_8)$, avec M' en Q, M en P, P en P' et $|\rho_Q - \rho_P| < \eta'$: elle sera donc limitée par

$$[(K)\eta' + (K)\Delta a]\,|P'Q|^{-1-m},$$

et comme $P'Q$ est compris entre $|\Delta x_j|$ et $|\Delta x_j| + R' < (K)R'$, l'intégrale obtenue aura un module moindre que

$$|\Delta x_j|\,[(K)\eta' + (K)\Delta a]\left(\frac{1}{|\Delta x_j|} - \frac{1}{R'}\right) = [(K)\eta' + (K)\Delta a]\left(1 - \frac{|\Delta x_j|}{R'}\right),$$

quantité qui tend vers zéro avec Δx_j d'après l'hypothèse faite sur R'.

Enfin pour limiter $\int_{D-\Sigma'}$, il suffit de remarquer que l'élément différentiel est de l'ordre de $|P_1 Q|^{-1-m}$, ce qui donne une intégrale limitée par $(K)\dfrac{|\Delta x_j|}{R'}$, qui tend vers zéro avec Δx_j.

En résumé, $\dfrac{\partial^2 \varpi}{\partial x_i \partial x_j}$ n'existera que si (3_{10}) existe. D'où :

THÉORÈME. — *La condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée seconde* $\dfrac{\partial^2 \varpi}{\partial x_i \partial x_j}$ *du potentiel généralisé* (3_4) *existe est que l'intégrale*

$$(3_{11}) \qquad \int_D \left(\frac{\partial^2 w_Q(P, Q)}{\partial x_i\, \partial x_j}\rho_Q - \frac{\partial^2 \overline{w}_P(P, Q)}{\partial x_i\, \partial x_j}\rho_P\right) d\omega_Q$$

ait un sens

Supposons cette condition réalisée pour toutes les dérivées secondes figurant dans $\mathcal{D}$. Ce qui précède nous montre qu'on aura

$$(3_{12}) \qquad \mathcal{D}_P \varpi = \rho_P \mathcal{D} \int_D \overline{w}_P\, d\omega_Q + \lim \int_{D-\Sigma} (\mathcal{D}_P w_Q \rho_Q - \rho_P \mathcal{D}_P \overline{w}_P)\, d\omega_Q,$$

---

[1] Nous emploierons systématiquement, dans ce numéro et dans le suivant, cette *méthode des deux sphères*.

Σ étant simplement ici une sphère dont le rayon tend vers zéro. Pour évaluer le premier terme du second membre, il suffit d'appliquer la remarque qui suit la formule $(3'_6)$: le premier terme est donc $-(m-2)\sigma_m \rho_P$.

D'autre part, dans l'intégrale $\int_{D-\Sigma}$ de (3_{12}) on a $\mathcal{D}_P \overline{w}_P = 0$. Il reste donc

$$\mathcal{D}_P \varpi = -(m-2)\sigma_m \rho_P + \int_D \mathcal{D}_P w_Q(P, Q)\rho_Q \, d\omega_Q, \tag{3_{13}}$$

l'intégrale de cette formule ayant un sens, d'après les hypothèses faites. On peut d'ailleurs mettre en évidence le fait que $|PQ|^m \mathcal{D}_P w_Q$ tend vers zéro avec PQ en mettant $\mathcal{D}_P w_Q$ sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\mathcal{D}_P w_Q(P, Q) = \mathcal{D}_P(w_Q - \overline{w}_P) = (\mathcal{D}_P - \mathcal{D}_Q)\overline{w}_Q, \tag{3_{14}}$$

la dernière n'étant autre que (3_3) où Π a été remplacé par Q, car

$$\frac{\partial^2 w_\Pi(P, \Pi)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \overline{w}_\Pi(P, \Pi)}{\partial \xi_i d\xi_j}.$$

On déduit immédiatement de (3_{13})

$$F_P \varpi = -(m-2)\sigma_m \rho_P + \int_D F_P w_Q(P, Q)\rho_Q \, d\omega_Q.$$

Remarque. — Nous pouvons chercher simplement des conditions *suffisantes* d'existence des dérivées secondes en séparant, par exemple, les conditions relatives à ρ et celles relatives à w_Q, donc aux a_{ij}. L'existence de l'intégrale (3_{11}) sera assurée si les intégrales [dont (3_{11}) est la somme]

$$\int_D \frac{\partial^2 w_Q}{\partial x_i \partial x_j}(\rho_Q - \rho_P)\, d\omega_Q \quad \text{et} \quad \int_D \frac{\partial^2 (w_Q - \overline{w}_P)}{\partial x_i \partial x_j}\rho_P \, d\omega_Q$$

ont un sens. D'après (3_5) et (3_6), ceci sera réalisé en particulier si les intégrales

$$\int_D \frac{|\rho_Q - \rho_P|}{|PQ|^m}\, d\omega_Q \quad \text{et} \quad \int_D \frac{|A_{ij}(Q) - A_{ij}(P)|}{|PQ|^m}\, d\omega_Q$$

ont un sens, et une condition suffisante de cela est que les intégrales

$$\int_{P\Pi} \frac{|\rho_Q - \rho_P|}{|PQ|}\, ds_Q \qquad \text{et} \qquad \int_{P\Pi} \frac{|A_{ij}(Q) - A_{ij}(P)|}{|PQ|}\, ds_Q$$

prises le long du segment $P\Pi$ convergent uniformément quel que soit Π, c'est-à-dire soient moindres que ε pour $|P\Pi| < \eta$. *On aura évidemment les mêmes conditions pour les* a_{ij}.

Ces dernières conditions (dont la première est celle qui concerne ρ pour le potentiel spatial ordinaire) sont *des cas particuliers du théorème ci-dessus*, puisqu'elles sont obtenues par une suite de conditions suffisantes de généralité décroissante.

4. **Extension du symbole $\mathcal{D}u$ et de la formule de Poisson.** — Supposons que, au lieu de chercher les conditions d'existence de *toutes* les dérivées secondes d'une fonction u qui figurent dans $\mathcal{D}u$, nous voulions seulement assurer l'existence de l'expression

$$(4_1) \qquad \mathcal{E}_P u = \lim \Sigma a_{ij}(P) \frac{1}{\Delta x_j} \Delta \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

quand les Δx_j tendent vers zéro, chaque accroissement $\Delta \frac{\partial u}{\partial x_i}$ correspondant à l'accroissement Δx_j. Tous les raisonnements faits dans le numéro précédent à partir de (3_7) peuvent être reproduits pour calculer $\mathcal{E}\varpi$, en remplaçant $\Delta \frac{\partial u}{\partial x_i}$ par $\Sigma a_{ij} \Delta \frac{\partial u}{\partial x_i}$ et Σ par la sphère Γ de rayon R égal au double du plus grand des $|\Delta x_j|$. Si l'on suppose que *tous les rapports mutuels des Δx_j restent bornés*, on aboutit ainsi à une expression de $\mathcal{E}\varpi$ identique à celle de $\mathcal{D}\varpi$ donnée par (3_{12}). Donc :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante de l'existence du symbole $\mathcal{E}_P\varpi$, quand ρ est continue en P, est que l'intégrale $\int_D \mathcal{D}_P w_Q(P, Q)\, \rho_Q d\omega_Q$ ait un sens.* Ici encore, d'ailleurs, $\mathcal{D}_P w_Q$ pourra se mettre sous l'une ou l'autre forme (3_{14}). On aura :

$$(4_2) \qquad \mathcal{E}_P\varpi = -(m-2)\sigma_m \rho_P + \int_D \mathcal{D}_P w_Q(P, Q)\, \rho_Q\, d\omega_Q.$$

Une condition suffisante sera que l'intégrale $\int_D |\mathcal{D}_P w_Q|\, d\omega_Q$ ait un sens : sous cette forme, en dehors de la continuité de ρ, il n'y a plus de condition relative à ρ.

Mais la forme (4_1) du symbole fait intervenir les dérivées premières : on peut n'introduire que les symboles servant à définir les dérivées secondes *directes* et poser (toujours avec la même hypothèse sur les rapports mutuels des Δx_i)

$$(4_3)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathcal{E}u = \lim \Sigma a_{ij} \dfrac{\Delta_{ij} u}{\Delta x_i \Delta x_j} \\ \text{avec} \\ \Delta_{ij} u = u(x_i + \Delta x_i,\ x_j + \Delta x_j) - u(x_i + \Delta x_i) - u(x_j + \Delta x_j) + u \end{array}\right.$$

(pour simplifier l'écriture nous avons omis dans les parenthèses les variables ne subissant pas d'accroissement). Lorsque les dérivées secondes de u existent séparément, $\mathcal{E}u$ se confond avec $\mathcal{D}u$: c'est ainsi que $\mathcal{E}\varpi \equiv \mathcal{D}\varpi$ quand les a_{ij} et ρ sont constants. Pour calculer $\mathcal{E}\varpi$ dans le cas général, on fera encore une décomposition analogue à (3_7) :

$$\rho_P \mathcal{E} \int_D \overline{w}_P \, d\omega_Q + \lim \left[\int_\Gamma \Sigma a_{ij} \frac{\Delta_{ij}(w_Q \rho_Q - \overline{w}_P \overline{\rho}_P)}{\Delta x_i \Delta x_j} d\omega_Q \right.$$
$$\left. + \Sigma a_{ij} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta x_i \Delta x_j} \int_{D-\Gamma} (w_Q \rho_Q - \overline{w}_P \overline{\rho}_P) \, d\omega_Q \right],$$

Γ étant la sphère de rayon R définie plus haut. Le premier terme est $-(m-2)\sigma_m \rho_P$; la seconde intégrale est limitée par

$$[(K)\eta + (K)\Delta a] \frac{R^2}{\Delta x_i \Delta x_j},$$

ce qui tend vers zéro avec R; la troisième se décompose en deux autres en utilisant les formules

$$f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)$$
$$= hkf''x) + \frac{hk}{2}[hf'''(x+\theta h) + kf'''(x+\theta' h + \theta'' k)],$$

$$f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$
$$= hkf''_{xy} + \frac{hk}{2}[h f'''_{x^2y}(x+\theta h, y) + k f'''_{xy^2}(x+\theta' h, y+\theta'' k)];$$

l'emploi d'une sphère Γ' (de rayon R' infiniment petit d'ordre inférieur à celui de R) et des formules (3_8) et $(3'_8)$ permet de traiter comme précédemment l'intégrale portant sur les termes du troisième ordre. On aboutit ainsi au *même théorème* que plus haut et à la même formule (4_2).

Nous pouvons enfin chercher *une autre extension de* $\mathcal{D}u$ analogue à celle qui généralise le laplacien *par une médiation périphérique ou spatiale.* On sait que la moyenne des valeurs prise par une fonction u_P, harmonique dans l'espace E_m, sur la frontière d'une sphère de centre O (médiation périphérique) ou dans le domaine limité par celle-ci (médiation spatiale) est égale à u_0. La valeur moyenne de $u_P - u_0$ est donc nulle, et c'est cette propriété qui a donné l'idée de caractériser une fonction harmonique *en un point* O par le fait que $\int_\sigma \frac{u_M - u_0}{\varepsilon^{m+1}} d\sigma_M$ ou $\int_{\omega_0} \frac{u_P - u_0}{\varepsilon^{m+2}} d\omega_P$ tendent vers zéro avec ε, ω_0 étant le domaine défini par $OP < \varepsilon$ et σ sa frontière ($OM = \varepsilon$).

Plus généralement, quand u est une fonction quelconque, il est facile de trouver la limite de ces intégrales. Prenons, par exemple, le cas de la médiation spatiale : les coordonnées de O étant (x_i^0) et celles de P, *par rapport à* O, (x_i), nous avons

$$u_P - u_0 = \Sigma x_i \frac{\partial u}{\partial x_i^0} + \frac{1}{2} \Sigma \left(x_i \frac{\partial u}{\partial x_i^0} \right)^{(2)} + \varepsilon' r^2 \qquad (r = OP),$$

ε' tendant vers zéro avec r. Les intégrales $\int_{\omega_0} x_i d\omega$ sont nulles. D'autre part,

$$\int_{\omega_0} x_i x_j \, d\omega = 0,$$

$$\int_{\omega_0} x_i^2 \, d\omega = \int_{\omega_0} \frac{r^2}{m} d\omega = \int_0^\varepsilon \frac{\sigma_m r^{m+1}}{m} dr = \frac{\sigma_m \varepsilon^{m+2}}{m(m+2)}.$$

On trouverait de même $\frac{\sigma_m}{m}$ dans le cas de la médiation périphérique. D'où

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_\sigma \frac{u_M - u_0}{\varepsilon^{m+1}} d\sigma_M = \frac{\sigma_m}{2m} \Delta_0 u,$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\omega_0} \frac{u_P - u_0}{\varepsilon^{m+2}} d\omega_P = \frac{\sigma_m}{2m(m+2)} \Delta_0 u.$$

Cela suppose que u admette des dérivées premières et secondes en O.

Sinon on pourra prendre *comme extension du laplacien en* O l'un ou l'autre des symboles lim $\mathcal{I}_1$ ou lim $\mathcal{I}_2$ quand ε tend vers zéro, avec

$$\mathcal{I}_1 = \frac{2m}{\sigma_m} \int_\sigma \frac{u_M - u_O}{\varepsilon^{m+1}} d\sigma_M,$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{2m(m+2)}{\sigma_m} \int_{\omega_0} \frac{u_P - u_O}{\varepsilon^{m+2}} d\omega_P,$$

si toutefois ces limites existent. Effectuant alors dans $\mathcal{I}_1$ ou $\mathcal{I}_2$ le changement de variables inverse de la transformation (T) en O [p. 47], on aura *une extension du symbole* $\mathcal{D}_0 u$. Précisons ceci pour $\mathcal{I}_2$: l'élément $d\omega$ se conserve, comme nous le savons, et ω_0 devient le domaine défini par $\Sigma A_{ij}(O) x_i x_j < \varepsilon^2$. Nous poserons alors, en intégrant dans ce nouveau domaine ω_0,

$$\mathcal{E}_0 u = \lim_{\varepsilon=0} \frac{2m(m+2)}{\sigma_m} \int_{\omega_0} \frac{u_P - u_O}{\varepsilon^{m+2}} d\omega_P,$$

et ce symbole coïncide avec $\mathcal{D}_0 u$ quand u admet des dérivées secondes.

La *formule de Poisson* relative au potentiel généralisé ϖ s'étend-elle à ce nouveau symbole en supposant simplement ρ continue ? Pour le voir nous pouvons supposer que, par la transformation (T), nous avons fait coïncider $\mathcal{D}_0$ avec le laplacien : écrivons alors

$$\varpi_P = \rho_O \int_D w_O(P, Q)\, d\omega_Q + \int_D [w_Q(P, Q)\rho_Q - w_O(P, Q)\rho_O]\, d\omega_Q.$$

La première intégrale admet, comme nous l'avons vu, des dérivées secondes satisfaisant à la formule de Poisson : pour elle $\mathcal{E}_0$ se confond avec $\mathcal{D}_0$ et l'on a par conséquent

$$\mathcal{E}_0 \rho_O \int w_O(P, Q)\, d\omega_Q = -(m-2)\sigma_m \rho_O. \tag{4$_4$}$$

Il nous reste donc à calculer

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{2m(m+2)}{\sigma_m} \int_{\omega_0} d\omega_P \times \int_D \frac{w_Q(P, Q)\rho_Q - w_O(P, Q)\rho_O - w_Q(O, Q)\rho_Q + w_O(O, Q)\rho_O}{\varepsilon^{m+2}} d\omega_Q. \tag{4$_5$}$$

Nous employons à nouveau une sphère Γ de rayon 2ε pour décomposer $\int_{\mathrm{D}}$ en deux intégrales : dans $\int_{\Gamma}$ nous remarquerons que

$$\varpi_{\mathrm{Q}}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\rho_{\mathrm{Q}} - \varpi_0(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\rho_0$$

est une fonction $\mathrm{H}^{(0)}$ [*cf.* (3_8) et $(3'_8)$] avec M' en Q et M en O : elle est donc limitée par $[(\mathrm{K})\eta + (\mathrm{K})\Delta a]|\mathrm{PQ}|^{2-m}$ et il en est de même de $\varpi_{\mathrm{Q}}(\mathrm{O}, \mathrm{Q})\rho_{\mathrm{Q}} - \varpi_0(\mathrm{O}, \mathrm{Q})\rho_0$. D'après $\mathrm{PQ} < 3\varepsilon$, $\int_{\Gamma}$ est limitée par $[\mathrm{K}(\eta) + (\mathrm{K})\Delta a]\varepsilon^{-m}$, et ceci, intégré dans ω_0, donne un résultat moindre que $(\mathrm{K})\eta + (\mathrm{K})\Delta a$, ce qui tend vers zéro avec ε.

Voyons maintenant $\int_{\mathrm{D}-\Gamma}$: écrivons la formule de Taylor

$$u_{\mathrm{P}} - u_0 = \Sigma x_i \frac{\partial u}{\partial x_i^0} + \frac{1}{2}\left(\Sigma x_i \frac{\partial u}{\partial x_i^0}\right)^{(2)} + \frac{1}{3!}\left(\Sigma x_i \frac{\partial u}{\partial x'_i}\right)^{(3)},$$

le point $\mathrm{P}'(x'_i)$ étant situé sur le segment OP, et remplaçons u_{P} par

$$\int_{\mathrm{D}-\Gamma} [\varpi_{\mathrm{Q}}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\rho_{\mathrm{Q}} - \varpi_0(\mathrm{P}, \mathrm{Q})\rho_0]\, d\omega_{\mathrm{Q}},$$

puis intégrons dans ω_0. Comme nous l'avons vu plus haut, les termes du premier ordre en x_i ne donnent rien, ceux du second ordre donnent le laplacien de u en O, c'est-à-dire

$$\int_{\mathrm{D}-\Gamma} \mathcal{D}_0\, \varpi_{\mathrm{Q}}(\mathrm{O}, \mathrm{Q})\rho_{\mathrm{Q}}\, d\omega_{\mathrm{Q}},$$

puisque $\mathcal{D}_0 \varpi_0(\mathrm{O}, \mathrm{Q}) = 0$.

Quant aux termes du troisième ordre, qui contiennent les dérivées troisièmes de $\varpi_{\mathrm{Q}}(\mathrm{P}', \mathrm{Q})\rho_{\mathrm{Q}} - \varpi_0(\mathrm{P}', \mathrm{Q})\rho_0$ en P', ils nous fournissent une intégrale que nous décomposons à nouveau en deux autres au moyen de la sphère Γ' de rayon R', déjà utilisée : dans $\int_{\Gamma'-\Gamma}$, l'emploi de (3_8) et $(3'_8)$, avec $p = 3$, nous montre qu'elle est limitée par

$$\int_{\Gamma'-\Gamma} |\mathrm{OP}|^3 \frac{(\mathrm{K})\eta' + (\mathrm{K})\Delta a}{\varepsilon^{m+2}|\mathrm{P}'\mathrm{Q}|^{m+1}}\, d\omega_{\mathrm{Q}} < \frac{|\mathrm{OP}|^3}{\varepsilon^{m+2}}[(\mathrm{K})\eta' + (\mathrm{K})\Delta a]\left(\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{\mathrm{R}'}\right)$$

(en utilisant $\mathrm{OQ} < 2\mathrm{P}'\mathrm{Q}$), et l'intégration dans ω_0 donne une quantité moindre que

$$[(K)\eta' + (K)\Delta a]\left[\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{R'}\right],$$

ce qui tend vers zéro avec ε (supposé infiniment petit par rapport à R'). Il ne nous reste plus alors que $\int_{D-\Gamma'}$, pour laquelle nous remarquerons simplement que la fonction à intégrer est limitée par $(K)|OP|^3|OQ|^{-m-1}$, ce qui donne

$$\int_{\omega_0}\frac{|OP|^3}{\varepsilon^{m+2}}\,d\omega_P\int_{D-\Gamma'}\frac{d\omega_Q}{|OQ|^{m+1}} < (K)\frac{\varepsilon}{R'},$$

qui tend encore vers zéro avec ε.

La limite (4_5) est donc celle de $\int_{D-\Gamma}\mathcal{D}_0\,\varpi_Q(O,\ Q)\,\rho_Q\,d\omega_Q$, et nous retrouvons ainsi, au changement près de P en O, la même condition que plus haut : l'existence de l'intégrale

$$\int_D \mathcal{D}_0\,\varpi_Q(O,\ Q)\,\rho_Q\,d\omega_Q.$$

En résumé si, en un point P quelconque de D, nous définissons le symbole $\mathcal{E}_P$, soit par (4_1), soit par (4_3), soit par

$$(4_6)\qquad \mathcal{E}_P u = \lim_{\varepsilon=0}\frac{2m(m+2)}{\sigma_m}\int_\omega \frac{u_\Pi - u_P}{\varepsilon^{m+2}}\,d\omega_\Pi,$$

ω étant le domaine $\Sigma A_{ij}(P)(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j) < \varepsilon^2$, *le théorème énoncé au début de ce numéro et la formule* (4_2) *sont valables.*

$\mathcal{E}$ étant ainsi défini, nous poserons dans tout ce qui suit

$$(4_7)\qquad \mathcal{F}u = \mathcal{E}u + \Sigma b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu,$$

que nous écrirons $\mathcal{F}_P u$ quand il sera nécessaire de bien spécifier le point P où se fait l'opération. *Le symbole* $\mathcal{F}$ *se confond d'ailleurs avec* F *quand* $\mathcal{D}$ *existe.* On a

$$(4_8)\qquad \mathcal{F}_P\varpi = -(m-2)\sigma_m\rho_P + \int_D F_P\,\varpi_Q(P,\ Q)\,\rho_Q\,d\omega_Q,$$

à condition que $\int_D \mathcal{D}_P\varpi_Q(P,\ Q)\,\rho_Q\,d\omega_Q$ ait un sens.

Comme nous l'avons dit plus haut, l'existence de $\int_D |\mathcal{D}_P w_Q(P, Q)|\, d\omega_Q$ est pour cela une condition suffisante et ceci sera réalisé en particulier si les intégrales $\int_D \frac{|a_{ij}(Q) - a_{ij}(P)|}{|PQ|^m} d\omega_Q$ ont un sens ou si les intégrales $\int_{P\Pi} \frac{|a_{ij}(Q) - a_{ij}(P)|}{|PQ|} ds_Q$ convergent uniformément (*cf.* fin du n° 3). Cette dernière condition permet l'édification de la théorie des problèmes aux limites, mais au prix de certaines complications. Pour les éviter dans ce premier travail, nous supposerons simplement les a_{ij} *höldériens*. Nous dirons, à ce sujet, qu'une fonction f_P satisfait à (H_β) [ou est une fonction (H_β)] si l'on a [1]

$$|f_{P'} - f_P| < K|PP'|^\beta \qquad (0 < \beta < 1).$$

5. **Introduction de fonctions satisfaisant à des conditions aux limites données. Les intégrales** I_μ et J_ν. — Soit une fonction W_P^Π des deux points P et Π prenant la même valeur que $w_\Pi(P, \Pi)$ quand P vient sur S, Π étant dans D, et de plus admettant des dérivées premières et secondes par rapport à P dans D. La fonction $V_P^\Pi = w_\Pi(P, \Pi) - W_P^\Pi$ pourra jouer le rôle de quasi-fonction de Green pour le problème de Dirichlet, à la condition que l'équation (1_6) soit résoluble : il conviendra pour cela de voir comment $F_P V_P^\Pi$ se comporte quand P et Π viennent sur S. On cherchera de même une quasi-fonction de Neumann en ajoutant à w_Π une fonction dont la dérivée conormale, prise par rapport à P supposé sur S, soit équiopposée à celle de w_Π.

Nous voyons ainsi se poser des problèmes aux limites consistant à déterminer des fonctions satisfaisant sur S à des conditions données, dans D à des conditions de régularité, et dont il conviendra d'étudier l'allure (et celle de leurs dérivées) au voisinage de S.

Dans ce but nous avons antérieurement (*J. M.*, 1930, p. 55) introduit des intégrales permettant de résoudre ces problèmes avec de larges hypothèses. Nous reprenons ici cette question en la présentant différemment et précisant certaines propriétés de ces intégrales.

---

[1] Nous employons dans ce Mémoire la lettre β, au lieu de α dans le Mémoire précédent, pour éviter un double emploi avec les fonctions de classe α, dont le travail actuel servira à préparer l'étude.

Posons

$$(5_1) \qquad I_\mu(P; u) = d^\mu \int_S \frac{u_M \, dS_M}{|PM|^{m-1+\mu}} \qquad (\mu > 0),$$

S étant ici un domaine borné ouvert d'une multiplicité à $m-1$ dimensions, d la distance de P à celle-ci, M un point de S et u une fonction continue sur S. Nous allons tout d'abord étudier les propriétés de cette intégrale. Nous supposerons *toujours* μ *positif*.

A. *Quand* P *tend vers un point* P_0 *de* S, I_μ *tend vers* $k_\mu u_0$, *avec* $u_0 = u_{P_0}$ *et*

$$k_\mu = \pi^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left[\frac{m-1+\mu}{2}\right]^{-1}.$$

Nous pouvons le démontrer en supposant P_0 *au pied* p *de la distance* d car, s'il n'est pas ainsi, notre démonstration prouve que I_μ diffère aussi peu qu'on le veut, pour d suffisamment petit, de $k_\mu u_p$ qui tend vers $k_\mu u_0$ quand P tend vers P_0 (1).

Cela posé, dans ce qui suit nous prendrons P_0 *comme origine* O *et la normale en* O *comme axe des* x_1 (2), de telle sorte qu'on a $d = x_1$. Supposons d'abord que S soit plane et u constante ($u = u_0$) : une homothétie de centre O et de rapport d^{-1} transformant S en S″ nous donne

$$\int_{S''} \frac{u_0 \, dS''}{|AM''|^{m-1+\mu}},$$

A étant le point situé sur Ox_1 à la distance *un*. Quand d tend vers zéro, S″ devient le plan tout entier et l'intégrale est alors facile à calculer au moyen de coordonnées polaires de centre O : l étant le rayon vecteur, la valeur de cette intégrale est $k_\mu u_0$, avec

$$k_\mu = \int_0^\infty \frac{\sigma_{m-1} l^{m-2} \, dl}{(1+l^2)^{\frac{m-1+\mu}{2}}},$$

---

(1) Cette remarque est vraie pour toute fonction dont la valeur limite ainsi trouvée (c'est-à-dire en supposant P_0 en p) est continue sur S.

(2) Chaque fois que nous utiliserons ces axes, nous les appellerons *axes* [O] : ils sont associés à la fonction z envisagée plus loin (p. 60).

ce qui est un cas particulier des intégrales

$$\int_0^\infty \frac{l^{m-2}\,dl}{(1+l^2)^{\frac{q}{2}}} = \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m-1}{2}, \frac{q-m+1}{2}\right),$$

B étant la fonction eulérienne (il suffit de poser $1+l^2 = t^{-1}$). Ici nous avons $q = m - 1 + \mu$ et, en remplaçant σ_{m-1} par sa valeur [*cf.* (1_4)] et exprimant B au moyen des fonctions Γ, on trouve la valeur de k_μ annoncée. Notons ici que k_1 est égal à $\frac{\sigma_m}{2}$.

Abordons maintenant le cas général d'une surface S munie d'un champ continu de normales dans le voisinage de O. On peut alors déterminer une région S'_0 du plan tangent T_0 en O, entourant O et telle que tout point M' de S'_0 soit la projection d'un point M de S voisin de O, S'_0 correspondant ainsi point par point à une région S_0 de S : pour fixer les idées nous définirons S'_0 par $OM' < \rho$. La partie de l'intégrale I_μ étendue à $S - S_0$ tend évidemment vers zéro ; il suffit d'étudier ce qui est relatif à S_0. Posons

$$(5_2) \qquad PM = r, \qquad OM' = \rho', \qquad PM' = r' \qquad (r'^2 = \rho'^2 + x_1^2).$$

Les coordonnées de M' étant $x'_2, \ldots, x'_m$, l'équation de S_0 est de la forme $\overline{M'M} = z(x'_2, \ldots, x'_m)$, et les dérivées premières de z sont continues et s'annulent pour $x'_2 = \ldots = x'_m = 0$. Cela étant, on a

$$\frac{|r'-r|}{r} < \frac{|z|}{\rho'} = \varepsilon, \qquad \frac{1}{r} < \frac{1 \pm \varepsilon}{r'},$$

d'où

$$(5'_2) \qquad \frac{1}{r^p} = \frac{1+\varepsilon'}{r'^p}.$$

ε tend vers zéro avec ρ' et ne dépend pas de x_1. Il en est de même pour ε', et la dernière formule est vraie aussi en remplaçant r par la distance de P à un point quelconque du segment M'M (remarque qui sera utilisée plus loin).

D'autre part, $d\mathrm{S}'$ étant la projection de $d\mathrm{S}$ sur T_0 et ψ l'angle de Ox_1 et de la normale en M, on a $d\mathrm{S} = d\mathrm{S}' \cos\psi$. Il résulte de ceci et de la dernière formule ci-dessus que l'intégrale étendue à S_0 s'écrit

$$(5''_2) \qquad \int_{S'_0} \frac{d^\mu(u_0+\eta')\,d\mathrm{S}'}{r'^{m-1+\mu}} \qquad \text{avec } |\eta'| < (\mathrm{K})|\varepsilon'| + (\mathrm{K})\left|u_0 - \frac{u}{\cos\psi}\right|,$$

donc $|\eta'| < \eta$ pour $\rho' < \rho$. Or nous avons vu que $\int_{S'_0} \frac{d^\mu u_0 \, dS'}{r'^{m-1+\mu}}$ tend vers $k_\mu u_0$; le reste de l'intégrale, contenant η', est limité par $k_\mu \eta$. On peut donc choisir ρ et ensuite d assez petits pour que I_μ diffère aussi peu qu'on le veut de $k_\mu u_0$. C. Q. F. D.

Nous pouvons aussi présenter ce résultat sous une autre forme en posant (ν étant *quelconque*)

$$(5_3) \qquad J_\nu(P;\, u) = \int_S \frac{u_M \, dS_M}{|PM|^{m-1+\nu}}$$

et dire que, *quand* P *tend vers* O, le produit $d^\mu J_\nu$, μ étant positif, tend vers zéro pour $\mu > \nu$, vers $k_\mu u_0$ pour $\mu = \nu$, et vers l'infini pour $\mu < \nu$ et $u_0 \neq 0$; quant à J_ν, elle a une limite pour $\nu < 0$, mais devient infinie pour $\nu = 0$ et $u_0 \neq 0$.

B. *Si* $u_0 = 0$, *avec* $|u| < \lambda |OM|^\alpha$, λ *étant une constante et* $\alpha \neq \mu$, *on a, si* P *est sur la normale en* O, $I_\mu = \lambda O(d^\beta)$ et $J_\mu = \lambda O(d^{\beta-\mu})$, β *étant le plus petit des nombres* α *et* μ (¹).

Soit d'abord $\alpha < \mu$, donc $\beta = \alpha$: dans J_μ, $\int_{S-S_0}$ est limitée par $(K)\lambda$ et $\int_{S_0}$, d'après les raisonnements de A et en tenant compte de ce que $\frac{OM}{\rho'}$ est borné, est limitée par

$$(K)\int_{S'_0} \frac{\lambda \rho'^\alpha \, dS'}{r'^{m-1+\mu}} < (K) d^{\alpha-\mu} \int_0^\infty \frac{\lambda l^{m-2+\alpha} \, dl}{(1+l^2)^{\frac{m-1+\mu}{2}}} = \lambda O(d^{\alpha-\mu})$$

(en utilisant l'homothétie ci-dessus). Enfin pour $\alpha > \mu$, donc $\beta = \mu$, J_μ reste finie et limitée par $(K)\lambda$ (dr^{-1} étant borné). D'où le résultat annoncé pour J_μ et par suite pour I_μ.

Avant d'aller plus loin, faisons une remarque : nous allons supposer que, pour P suffisamment voisin de S, les dérivées de la fonction d ont la valeur zéro pour toute direction perpendiculaire à la normale

---

(¹) Suivant la notation de Landau, $y = O(x^\beta)$, β étant un nombre quelconque, signifie que $yx^{-\beta}$ est borné [*notion équivalente à* $|y| < (K)x^\beta$] et $y = o(x^\beta)$ signifie que $yx^{-\beta}$ tend vers zéro avec x. Le cas de $\beta = 0$ correspond respectivement à y borné ou infiniment petit.

issue de P. Évidemment, il conviendrait de bien préciser les conditions que doit pour cela vérifier S. Mais les dérivées premières de I_μ *en un point de* Ox_1 sont alors les mêmes que si l'on envisageait l'intégrale

$$(5_4)\quad I_\mu^*(P\,;\,u)=\int_S \frac{x_1^\mu u_M\, dS_M}{|PM|^{m-1+\mu}} \qquad \left[\overline{PM}^2=(z-x_1)^2+\Sigma_2^m(x_i-x_i')^2\right],$$

$x_1, \ldots, x_m$ étant les coordonnées d'un point de D, et que dans ces dérivées de I_μ^* on fasse $x_1=d$, $x_2=\ldots=x_m=0$, c'est-à-dire qu'on place P sur Ox_1. *Or c'est ce point de vue seulement qui nous importera dans la suite*, car nous nous passerons complètement de la fonction d.

Nous allons même, plus généralement, envisager les dérivées successives de I_μ^* en P, *calculées comme nous venons de le dire en y faisant* $x_2=\ldots=x_m=0$ (les dérivées premières de I_μ^* coïncident avec celles de I_μ). Elles possèdent la propriété qui suit.

C. *On a* $I_\mu^{(n)}=o(d^{-n})$, $I_\mu^{(n)}$ *étant une dérivée quelconque d'ordre n de* I_μ^* *en* P; *en particulier, pour toute direction* Px *issue de* P,

$$\frac{\partial I_\mu^*}{\partial x}=\frac{\partial I_\mu}{\partial x}=o(d^{-1}).$$

$I_\mu^{(n)}$ s'obtient en dérivant (5_4) sous le signe intégral. Désignons par D_n une dérivée d'ordre n de $x_1^\mu r^{1-m-\mu}(r=PM)$ relativement à P : $x_1^n \int_{S-S_0} uD_n\, dS$ tend vers zéro avec x_1 et il suffit d'étudier

$$x_1^n\int_{S_0} u D_n\, dS = x_1^n \int_{S_0'}\left[\left(\frac{u}{\cos\psi}-u_0\right)+u_0\right] D_n\, dS'.$$

Or les dérivées d'ordre p de r^α, en P ou en M, valent $O(r^{\alpha-p})$: on en conclut aisément que $x_1^n D_n$ vaut $x_1^\mu O(r^{1-m-\mu})$ et par suite la partie de l'intégrale qui porte sur $\dfrac{u}{\cos\psi}-u_0$ est limitée par

$$(K)\, I_\mu(P\,;\,\eta_1) < (K)\,\eta_1$$

pour $\rho' < \rho$, η_1 tendant vers zéro avec ρ.

D'autre part, pour $z=0$, D_n devient une dérivée D_n' de $x_1^\mu r'^{1-m-\mu}$: on peut donc écrire $D_n = D_n' + \dfrac{z\,\partial D_n^1}{\partial z}$, D_n^1 s'obtenant en remplaçant, dans D_n, M par un point M_1 du segment MM'($PM_1 = r_1$). Or $\frac{\partial D_n^1}{\partial z}$ vaut $x_1^\mu O(r_1^{1-m-\mu})$, ou encore $x_1^\mu O(r^{1-m-\mu})$ [*cf.* ($5'_2$)]. Il résulte de là que l'intégrale portant sur u_0 se compose : 1° du produit de x_1^n par la dérivée n^e d'une intégrale I_μ relative au cas de S plane et u constante : nous verrons plus loin que cette dérivée a un sens en O; 2° d'une intégrale qui, d'après $\frac{|z|}{r} < \varepsilon_1$ pour $\rho' < \rho$, est limitée par

$$(K)\, I_\mu(P;\varepsilon_1) < (K)\,\varepsilon_1.$$

On peut donc choisir ρ, puis x_1, de manière à avoir un résultat aussi petit qu'on le voudra, ce qui réalise l'énoncé.

D. *Si u est sur* S, *frontière de* D, *une fonction* (H^α) *et si le champ des normales à* S *est höldérien d'exposant h* (1), *l'intégrale* I_μ *est une fonction* (H_β) *dans* D + S *et* $I_\mu^{(n)} = O(d^{\beta-n})$, *β étant le plus petit des nombres* μ, *α et h.*

Nous commencerons par montrer que I_μ vérifie (H_β) entre un point P de D et le pied O de la distance d. Il en résultera que (H_β) aura lieu entre P et un point quelconque P_0 de S car il suffira, pour le voir, d'ajouter la relation (H_β) entre P et O à la relation (H_β) entre O et P_0 et de remarquer que l'on a $d < PP_0$ et $OP_0 < (K)PP_0$.

Cela étant, nous pouvons donc supposer O en P_0; $I_\mu(P)$ diffère alors de sa limite $I_\mu(O)$ d'abord par l'intégrale étendue à $S - S_0$ qui est d'ordre μ en d, puis par l'intégrale (avec les notations de A)

$$u_0 \int_{T_0 - S'_0} \frac{d^\mu\, dS'}{r'^{m-1+\mu}} = u_0 \int_{\frac{\rho}{d}}^{\infty} \frac{\sigma_{m-1}\, l^{m-2}\, dl}{(1+l^2)^{\frac{m-1+\mu}{2}}} = u_0 \int_0^{\frac{d}{\rho}} \frac{\sigma_{m-1}\, t^{\mu-1}\, dt}{(1+t^2)^{\frac{m-1+\mu}{2}}},$$

ce qui est moindre que $(K)u_0 d^\mu$, et enfin par l'intégrale contenant η' lequel η', d'après ce que nous avons vu [*cf.* ($5''_2$)], est limité par

$$(K)\,\varepsilon' + (K)\left| u_0 - \frac{u}{\cos\psi} \right|.$$

---

(1) Nous entendons par là [et nous dirons aussi que *ce champ vérifie* (H_h)] que l'angle des deux normales en P_0 et M est moindre que $(K)\,|P_0M|^h$ ou, ce qui revient au même (comme le montre un calcul facile en plaçant l'origine O en P_0), que la distance $|z|$ de M au plan tangent en P_0 est $< (K)\,|P_0M|^{1+h}$ ou encore vaut $O(\rho'^{1+h})$.

Or ε' est de l'ordre de $\frac{\varepsilon}{\rho'}$, c'est-à-dire vaut $O(\rho'^h)$, $u - u_0$ vaut $O(\rho'^\alpha)$ et $1 - \cos\psi$, de l'ordre de $\sin^2\frac{\psi}{2}$, vaut $O(\rho'^{2h})$. On en conclut aisément, d'après B, que l'intégrale contenant η' vaut $O(d^\beta)$. On a donc bien $|I_\mu(P) - I_\mu(O)| < (K)\,d^\beta$.

Étudions maintenant une dérivée n^e quelconque $I_\mu^{(n)}$ de I_μ^* ou, ce qui revient au même, de $I_\mu(P) - I_\mu(O)$, avec $d = x_1$; $I_\mu^{(n)}$ est la somme des intégrales obtenues en dérivant sous le signe $\int$ les trois intégrales que nous venons de limiter. Or les dérivées de x_1^μ et de $r^{1-m-\mu}$ sont limitées respectivement par $(K)\,x_1^{\mu-n}$ et $(K)\,r^{1-m-\mu-n}$; donc, l'exposant de r ou de x_1 étant ainsi diminué de n, toutes les limitations précédentes devront être divisées par d^n, d'où $|I_\mu^{(n)}| < (K)\,d^{\beta-n}$.

Nous allons maintenant montrer que, pour toute fonction f dont les dérivées f' sont limitées par $(K)\,d^{\beta-1}$ dans D, si (H_β) a lieu entre tout point de S et tout point de $D + S$, (H_β) a lieu aussi entre deux points *quelconques* P et P' de $D + S$. Supposons, en effet, P plus éloigné de S que $P'(d > d')$: 1° Si $h = PP' \leqq \frac{d}{2}$, on a $\left(P_1\right.$ étant un point de PP' dont la distance d_1 à S est nécessairement $\left.> \frac{d}{2} \geqq h\right)$,

$$|f_{P'} - f_P| = |hf'_{P_1}| < (K)\,hd_1^{\beta-1} < (K)\,h^\beta;$$

2° si $h > \frac{d}{2}$, on a $d' < h + d < 3h$: p' étant le pied de d', on écrit alors $(f_P - f_{p'}) + (f_{p'} - f_{P'})$ et ces deux différences sont limitées par $(K)\,h^\beta$, d'après $P'p' < 3h$ et $Pp' < 4h$.

Les propriétés énoncées pour I_μ sont ainsi établies.

E[1]. *Lorsque* S *est plane et que* u *admet dans* S *des dérivées continues jusqu'à l'ordre* n, *si* P *tend vers un point de* S, *les dérivées de* I_μ *d'ordre* $\leqq n$ *ne contenant pas la direction normale ont une limite; les dérivées d'ordre* $\leqq n$ *où figure* q *fois la direction normale* ($q \leqq n$) *ont aussi des valeurs limites si* μ *est* $> q$: *ces valeurs sont nulles pour les valeurs impaires de* q.

Nous supposerons que S est ici un domaine S' du plan des $x_2, \ldots, x_m$ et que P tend vers O situé dans S'. On prévoit immédiatement que les dérivées de I_μ en $x_2, \ldots, x_m$ auront pour limites les dérivées correspondantes de u dans S

---

(1) Les propriétés E, E', E'' et F sont établies en vue de recherches ultérieures : *elles ne serviront pas dans la suite de ce Mémoire.*

(pour celles-ci μ peut donc être un nombre positif quelconque). La vérification est aisée et résulte du fait que $\frac{\partial r'}{\partial x_2} = -\frac{\partial r'}{\partial x'_2}\cdots$, $(x'_2, \ldots, x'_m)$ étant un point courant de S' et $r'^2 = x_1^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \ldots$, ce qui permet de faire dans I_μ une intégration par parties donnant : 1° une intégrale étendue à la frontière de S', nulle en O ainsi que toutes les dérivées en $x_2, \ldots, x_m$; 2° l'intégrale $I_\mu\left(P; \frac{\partial u}{\partial x'_2}\right)$ qui tend vers $k_\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x'_2}\right)_0$. On dérive ensuite cette nouvelle intégrale par le même procédé, et ainsi de suite jusqu'à l'ordre n (en $x_2, \ldots, x_m$).

Envisageons maintenant les dérivées successives de I_μ *par rapport à* x_1, en supposant P sur Ox_1. L'existence des dérivées de u jusqu'à l'ordre n nous permet d'écrire $u = \mathcal{P}_n + \varepsilon'\rho'^n$, $\mathcal{P}_n$ étant un polynome d'ordre n en $x'_2, \ldots, x'_m$ et ε' tendant vers zéro avec ρ'.

Considérons d'abord $I_\mu(P; \varepsilon'\rho'^n)$: en dérivant sous le signe intégral n fois par rapport à x_1 nous obtenons, si μ n'est pas entier, une somme de la forme $\Sigma_\nu c_\nu x_1^\nu J_{\nu+n}(P; \varepsilon'\rho'^n)$, les c_ν étant des coefficients numériques et les $\nu \geqq 0$ pour μ entier et $\geqq \mu - n$ pour μ quelconque : dans ce dernier cas il faut donc supposer $\mu > n$ si l'on veut éviter des termes valant $O(x_1^{\mu-n})$, infinis en O; mais cette hypothèse s'impose aussi pour μ entier et de même parité que n, sinon certains des ν s'annulent et l'on obtient des intégrales $J_n(P; \varepsilon'\rho'^n)$ qui peuvent ne pas avoir de limite pour $x_1 = 0$ si ε' s'annule avec ρ' de façon quelconque. *Nous supposerons donc* $\mu > n$ *pour dériver* n *fois en* x_1 : la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $I_\mu(P; \varepsilon'\rho'^n)$ sera alors, d'après $\rho' < r'$, limitée par $\Sigma_\nu c_\nu I_\nu(P; |\varepsilon'|)$ qui tend vers zéro avec x_1 (ceci a lieu aussi pour μ entier $< n$ et d'autre parité que n).

Reste à étudier $I_\mu(P; \mathcal{P}_n)$. Pour cela nous pouvons supposer S' définie par $\rho' > R$, car l'énoncé est évidemment vérifié pour l'intégrale étendue à la région extérieure à ce dernier domaine, quand P tend vers O. Cela étant, nous remarquerons tout d'abord que toutes les intégrales I_μ formées avec des termes de $\mathcal{P}_n$ où l'un des exposants de $x'_2, \ldots$ est impair sont nulles par raison de symétrie. Nous n'avons donc qu'à envisager les termes en $x'^h_2 x'^k_3, \ldots$, où tous les $h, k, \ldots$, sont *pairs*. Or

$$I_\mu(P; x'^h_2 \ldots) = \frac{-x_1^\mu}{m-3+\mu}\int_{S'}\frac{\partial}{\partial x'_2}\left(\frac{1}{r'^{m-3+\mu}}\right)x'^{h-1}_2 \ldots dS'$$
$$= \frac{x_1^\mu}{m-3+\mu}\left[\int_{s'}\frac{-x'^{h-1}_2}{r'^{m-3+\mu}}\,dx'_3 \ldots dx'_m + \int_{S'}\frac{(h-1)x'^{h-2}_2 \ldots}{r'^{m-3+\mu}}\,dS'\right],$$

s' étant la frontière de S'. Nous poursuivrons ainsi les intégrations par parties jusqu'à ce que nous obtenions : 1° une somme d'intégrales dont les dérivées s'annulent avec x_1 au moins jusqu'à l'ordre n; 2° l'intégrale (à un facteur numérique près)

$$(5_6) \qquad \int_{S'}\frac{x_1^\mu\, dS'}{r'^{m-2p-1+\mu}} = x_1^\mu J_{\mu-2p}(P; 1)$$

avec $2p = h + k + \ldots \leqq n$. Or la dérivée de cette intégrale est (en utilisant toujours la même homothétie que dans A)

$$\frac{d}{dx_1}\int_0^{\frac{\mathrm{R}}{x_1}} \frac{x_1^{2p}\sigma_{m-1} l^{m-2}\, dl}{(1+l^2)^{\frac{m-2p+1+\mu}{2}}} = \frac{-\sigma_{m-1}\mathrm{R}^{m-1}x_1^{\mu-1}}{(\mathrm{R}^2+x^2)^{\frac{m-2p+1+\mu}{2}}} + 2px_1^{\mu-1}\mathrm{J}_{\mu-2p}(\mathrm{P};1).$$

Remarquons d'abord que, pour $p = 0$, le second terme n'existe pas : la formule donne alors la dérivée de $\mathrm{I}_\mu(\mathrm{P};1)$, qui ne contient pas d'intégrale. Pour $p \neq 0$ nous sommes ramenés, pour dériver le second terme, au même calcul avec $\mu - 1$ et $2p - 1$ au lieu de μ et $2p$.

Nous pourrons donc prendre les dérivées successives de (5_6). Celles d'ordre $n' \leqq n$ s'annulent avec x_1 sauf si $n' = 2p$: le dernier terme est alors $(2p)!\, x_1^{\mu-2p}\mathrm{J}_{\mu-2p}$, c'est-à-dire $(2p)!\, \mathrm{I}_{\mu-2p}(\mathrm{P};1)$ et par suite les dérivées suivantes ne contiennent plus d'intégrale et valent $\mathrm{O}(x_1^{\mu-n'})$. Nous voyons ainsi que les dérivées normales de $\mathrm{I}_\mu(\mathrm{P};u)$ admettent des valeurs limites en O au moins jusqu'à l'ordre n : celles-ci sont nulles pour les valeurs impaires de n; pour $n = 2p$ elles ne dépendent que des dérivées de u d'ordre $2p$.

Nous avons supposé P sur la normale en O : si P tend vers O de façon quelconque, l'existence des dérivées normales limites résultera de la continuité des dérivées de u au voisinage de O.

Enfin si x figure q fois dans la dérivation (avec x_2, x_3, ...), on commence par transformer les dérivées en x_2, ..., comme ci-dessus et l'on est ramené à la dérivation en x_1, avec q au lieu de n.

Remarques. — I. Pour $\mu = 2p$, la dérivée normale d'ordre $2p$ de (5_6) contient une intégrale J_0 infinie en O. Au contraire, si μ est *impair* et $< n$, les dérivées normales d'ordre n ont des limites pour $x_1 = 0$. En effet, en prenant les dérivées successives de (5_6) sous le signe intégral, on obtient des termes du type $x_1^{\mu'}\mathrm{J}_\nu(\mathrm{P};1)$, les ν étant toujours impairs et chaque dérivation diminuant de 1 la différence $\mu' - \nu$, égale au début à $2p$: les dérivées d'ordre $< 2p$ s'annulent donc en O et celle d'ordre $2p$ se compose d'intégrales du type I_ν dont les dérivées normales existent indéfiniment en O. Donc, pour μ impair, les n premières dérivées normales de $\mathrm{I}_\mu(\mathrm{P};u)$ ont des limites pour $x_1 = 0$ si, d'après ce que nous avons vu plus haut, $\mathrm{J}_n(\mathrm{P};\varepsilon'\rho'^n)$ en a une, par exemple si n est pair ou bien si $\varepsilon' = \mathrm{O}(\rho'^\beta)$, ceci ayant lieu quand les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de u sont höldériennes.

Il en résulte que, *si μ est un entier impair et u indéfiniment dérivable, toutes les dérivées successives de* I_μ *ont des valeurs limites quand* P *tend vers* S (supposée plane).

II. *Si* P *reste sur la normale en* O, l'existence des dérivées normales limites en O jusqu'à l'ordre n résulte uniquement du fait que $u = \mathfrak{P}_n + \varepsilon'\rho'^n$. Or, sauf pour $n = 1$, ceci ne nécessite nullement l'existence sur S, au point O, des dérivées de u jusqu'à l'ordre n au sens ordinaire [1]. Plus généralement supposons u de la forme $\mathcal{P}_{n+n_1} + \varepsilon' \rho'^{n+n_1}$, les coefficients du polynome $\mathcal{P}_{n+n_1}$ étant nuls jusqu'à l'ordre $n_2 \geqq n_1 - 1$: la fonction $x_1^\mu J_{\mu+n_1}(P; u)$ et ses n premières dérivées normales *admettent alors des valeurs limites en* O *pour* $\mu > n$: en effet celles-ci sont nulles pour ce qui provient de ε'^{n+n_1} et, pour $\mathcal{P}_{n+n_1}$, le procédé aboutissant à (5_6) nous donne ici des termes dérivables en O jusqu'à l'ordre n et l'intégrale $x_1^\mu J_{\mu+n_1-2p}(P; 1)$ avec $n + n_1 \geqq 2p \geqq n_1$, d'où la condition $\mu > 2p - n_1$, *donc* $\mu > n$ (ou bien $\mu + n_1 \neq 2p$ et entier, donc $\mu + n_1$ *impair*). Les valeurs limites de $x_1^\mu J_{n+n_1}(P; u)$ et de ses $n_2 + n$, premières dérivées en x_1 sont nulles si $n_2 \geqq n_1$.

L'existence des dérivées en $x_2, x_3, \ldots$ s'établit en intégrant par parties ce qui contient $\mathcal{P}_{n+n_1}$; les dérivées d'ordre $\leqq n$ de la partie restante sont nulles en O.

E'. *Toutes les propriétés de* E *relatives aux dérivées de* I_μ *sont vraies pour* $I_\mu^*(P; u)$, P *étant sur* Ox_1, *quand* S *est une surface admettant* Ox_1 *comme normale en* O *et représentée dans le voisinage de* O *par l'équation* $x'_1 = z(x'_2, \ldots, x'_m)$, z *admettant des dérivées continues jusqu'à l'ordre* $n+1$ *et* $M(x'_1, \ldots x'_m)$ *étant un point courant de* S.

L'énoncé étant vérifié pour $\int_{S-S_0}$, il suffit de l'établir pour $\int_{S_0}$. Or nous avons

$$(5_7) \qquad \int_{S_0} \frac{x_1^\mu u \, dS}{r^{m-1+\mu}} = \int_{S'_0} \frac{x_1^\mu v \, dS'}{r^{m-1+\mu}} \qquad (r = PM),$$

la fonction $v = \dfrac{u}{\cos\psi}$ admettant des dérivées jusqu'à l'ordre n d'après les hypothèses sur u et z.

Reprenant les notations (5_2) sqq, on a $r^2 = r'^2 + z^2 - 2zx_1$. D'où, les c_p étant les coefficients du développement de $(1+\tau)^{\frac{1-m-\mu}{2}}$,

$$(5_8) \qquad \frac{1}{r^{m-1+\mu}} = \frac{1 + \sum^{\infty} c_p \tau^p}{r'^{m-1+\mu}}, \qquad \tau = \frac{z(z - 2x_1)}{r'^2}.$$

---

[1] Par contre ceci entraîne l'existence en O des dérivées *directes* d'ordre $\leqq n$ (en prenant les accroissements des variables de même ordre : *cf.* 4_3). Pour $n = 1$ la dérivée normale limite $\left(\mathrm{Lim} \dfrac{\partial I_\mu}{\partial x_1}\right)$ existe pour $x_1 = 0$, et par suite aussi la dérivée normale au sens ordinaire $\left[\mathrm{Lim} \dfrac{I_\mu(P) - I_\mu(O)}{OP}\right]$: on sait que l'existence de celle-ci n'entraîne pas l'existence de celle-là.

Nous devons dériver en $P(x_1, \ldots, x_m)$, faire $x_2 = \ldots = x_m = 0$, puis faire tendre x_1 vers o. Envisageons *les termes en* τ *d'ordre* $p \leqq n$. Le premier ($p = 0$) nous donnera dans (5_7) une intégrale du type étudié dans E. Les autres, si nous développons les puissances de τ, nous donnent des intégrales de la forme

$$\int_{S'_0} \frac{x_1^{\mu-2p-n_1} z^{n_1} \varphi\, dS'}{r'^{m-1+2p+\mu}} \qquad (p \leqq n_1 \leqq 2p),$$

c'est-à-dire du type $x_1^\nu J^0_{\nu+n_1}(P\,;\, z^{n_1}\varphi)$ avec $\nu = \mu + 2p - n_1$ (la notation J^0_μ correspondant au fait que *l'intégrale est étendue à* S'_0, avec $I^0_\mu = x_1^\mu J^0_\mu$). Les dérivées premières de z s'annulant en O, on a facilement

$$z^{n_1}\varphi = \mathfrak{P}_{n+2n_1-1} + o(\rho'^{n+2n_1-1}) = \mathfrak{P}_{n+n_1} + o(\rho'^{n+n_1}),$$

les coefficients de $\mathfrak{P}_{n+n_1}$ étant nuls jusqu'à l'ordre $2n_1 - 1 > n_1 - 1$. Or (*Rem.* II ci-dessus) cela entraîne l'existence en O des dérivées de l'intégrale jusqu'à l'ordre n pour $\nu > n$, donc $\mu > n$, ou encore $\mu > q$ si la dérivation se fait q fois seulement en x_1 (pour $\nu = n$ il faudrait que $\nu + n_1$ soit impair, donc μ impair). L'intégrale et ses dérivées des $n_1 - 1$ premiers ordres seront d'ailleurs nulles en O, et par suite le terme en τ^p donnera, d'après $p \leqq n_1$, des dérivées nulles en O jusqu'à l'ordre $p - 1$.

Considérons maintenant *les termes en* τ *d'ordre* $> n$: ils forment la série $r'^{1-m-\mu}\Sigma c_N \tau^N$ (avec $N \geqq n+1$), convergente pour $|\tau| < 1$. Quand P *est sur* Ox_1, on a

$$|\tau| < \left(\frac{z}{\rho'}\right)^2 + \left|\frac{2z}{\rho'}\right|,$$

et comme $|z|$ est $< \lambda\rho'^2$ pour $\rho' < \rho$, nous pouvons supposer ρ tel que $\lambda^2\rho^2 + 2\lambda\rho$ soit < 1. Par suite, étant donné un point quelconque de Ox_1, distinct de O, on pourra toujours déterminer dans l'espace E_m un entourage e_m de ce point tel que $|\tau|$ soit aussi < 1 quand P appartient à e_m : la série est alors absolument et uniformément convergente.

Cela posé, calculons une dérivée d'ordre n de la série : la dérivée du terme général est de la forme $\dfrac{z^N(z - 2x_1)^{N-n}\pi_{2n}}{r'^{m-1+\mu+2N+2n}}$, π_{2n} étant un polynome homogène de degré $2n$ en $(z - 2x_1)$, x_1, $(x'_2 - x_2)$, $\ldots$, $(x'_m - x_m)$ dont les coefficients sont au plus de l'ordre de N^n : donc $|\pi_{2n}| < (K)\, N^n r'^{2n}$. La série ainsi formée est donc limitée par

$$\frac{(K)\,|z|^n}{r'^{m-1+\mu+2n}} \Sigma c_N N^n |\tau|^{N-n} \qquad (N \geqq n+1)$$

qui converge pour $|\tau| < 1$: elle est donc, quel que soit M' dans S'_0, uniformément convergente quand P est dans l'entourage e_m d'un point déterminé de Ox_1, et par suite elle représente la dérivée $n^{\text{ième}}$ envisagée. On pourra ensuite prendre P sur Ox_1 : la série est alors uniformément convergente (O compris) et, d'après $|z| < \lambda\rho'^2$, limitée par $(K)|\tau|r'^{1-m-\mu}$; on peut l'intégrer dans S'_0, après multiplication par $x_1^\mu v$, ce qui donne une intégrale limitée par $(K)I_\mu^0(P;|\tau|)$, quantité aussi petite qu'on le veut pour ρ suffisamment petit. On en déduit que la limite d'une dérivée d'ordre n de I_μ (quand P tend vers O sur Ox_1) sera celle que nous avons obtenue avec les termes en τ^p pour $p \leqq n$.

Cette limite est une expression *linéaire* par rapport aux coefficients de $\mathfrak{T}_{n+n_1}$: ceux-ci ne dépendent (et d'une façon *entière*) que des dérivées de u et de z en O jusqu'aux ordres respectifs n et $n+1$.

E″. *Si μ est un entier impair, u et z étant indéfiniment dérivables, toutes les dérivées de I_μ^* ont des valeurs limites quand P tend vers O sur Ox_1, quel que soit leur ordre.*

Cela résulte de ce que nous avons dit, dans ce qui précède, sur le cas de μ impair.

F. *Pour $\mu > n$ ou sinon impair, si u et z satisfont aux conditions énoncées dans* E *et* E′, *on a $I_\mu^{(n+p)} = o(d^{-p})$, $I_\mu^{(n+p)}$ étant une dérivée quelconque de I_μ^*, d'ordre $n+p$, prise en un point* P *de la normale en* O. *Si, de plus, les dérivées d'ordre n de u sur* S *et les dérivées d'ordre $n+1$ de z satisfont à* (H_α), *les dérivées $I_\mu^{(n)}$ vérifient* (H_β) *entre* O *et* P, *et $I_\mu^{(n+p)} = O(d^{\beta-p})$, α et β étant compris entre* 0 *et* 1.

On peut prendre $\beta = \alpha$ pour μ entier impair, ou β égal au plus petit des nombres $\mu - n$ et α pour μ quelconque $> n$: les propriétés énoncées sont alors vraies pour $\int_{S-S_0}$. Vérifions d'abord la première partie de l'énoncé pour l'intégrale (5_7) en utilisant le développement (5_8). Les hypothèses sur u et z permettent d'écrire

$$(5_9) \qquad v = V_n + o(\rho'^n), \qquad z = Z_{n+1} + o(\rho'^{n+1}),$$

V_n et Z_{n+1} étant des polynomes d'ordres respectifs n et $n+1$, et Z_{n+1} commençant par des termes du second degré. Cela posé, conservons dans l'intégrale (5_7) les termes provenant du développement (5_8) jusqu'à l'ordre $n+p$. Nous pouvons les séparer en deux groupes :

1° ceux qu'on obtient en remplaçant v et z par V_n et Z_{n+1} : d'après ce que nous avons vu, ou bien toutes leurs dérivées sucessives ont des limites en O, ou bien (pour μ quelconque $> n$) les dérivées d'ordre $n+p$ valent $O(d^{\mu-n-p})$, d'où résulte la propriété envisagée;

2° les autres, qui sont des intégrales du type $x_1^\nu J_{\nu+n_1}^0(P;w)$ [$\nu > n$ ou entier] dans lesquelles w est la fonction $z^{n_1}v - Z_{n+1}^{n_1}V_n$, qui vaut $O(\rho'^{n+n_1})$ quel que soit n_1, comme on le voit facilement : les dérivées d'ordre $n+p$ de ces termes seront des intégrales du type $x_1^{\nu'-n-p} J^0_{\nu'+n_1}[P;\, o(\rho'^{n+n_1})]$ $(\nu' > n)$, limitées par $x_1^{-p} I^0_{\nu'-n}[P;\, o(1)] = o(x_1^{-p})$.

Quant aux termes provenant du reste de (5_8) à partir de τ^{n+p+1}, ils constituent une série R_{n+p} dérivable jusqu'à l'ordre $n+p$, d'après ce que nous avons vu dans E' (il suffit de remplacer n par $n+p$ dans le raisonnement sur ce reste).

Au total on a donc bien $I_\mu^{(n+p)}(P;\, u) = o(d^{-p})$, avec $d = x_1$.

Pour obtenir maintenant la seconde partie de l'énoncé (vérifiée évidemment par R_{n+p}), il suffit de remplacer, dans (5_9), $o(\rho'^n)$ et $o(\rho'^{n+1})$ respectivement par $O(\rho'^{n+\alpha})$ et $O(\rho'^{n+1+\alpha})$. En ce qui concerne le premier groupe ci-dessus, ce que nous avons dit, joint au fait que les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ contiennent des intégrales $I^0_\nu(P;\, 1)$ avec ν entier ou $\geqq \mu - n$, montre que les propriétés envisagées ont lieu pour ce groupe. Quant au second, ses dérivées d'ordre $n+p$ sont limitées par des intégrales $x_1^{-p} I^0_{\nu'-n}[P;\, O(\rho'^\alpha)] = O(d^{\beta-p})$, p pouvant ici prendre la valeur zéro.

6. Usage des intégrales J_μ pour les problèmes aux limites envisagés (1). — Nous avons, dans l'espace E_m, une multiplicité bornée S à $m-1$ dimensions constituée soit par un domaine continu ouvert, soit par la frontière d'un domaine continu borné à m dimensions; nous nous proposons de construire des fonctions U vérifiant des conditions données sur S et indéfiniment dérivables dans E_m (S et sa frontière exclues) ou dans D. Les données sont supposées *continues* : il suffira donc de vérifier les conditions aux limites en prenant comme axes *les axes* [O] (*cf.* 5 A, seconde note) et faisant tendre P vers O. *C'est ce que nous supposerons dans ce qui suit.*

Problème I. — U *a une valeur donnée u sur* S. Si S est plane, l'intégrale $k_\mu^{-1} I_\mu(P;\, u)$ répond à la question, mais il n'en est plus ainsi si S est simplement pourvue d'un champ continu de normales, la fonction d n'admettant pas de dérivées d'ordre > 1. Je dis que la fonction

$$U = \frac{J_\mu(P;\, u)}{J_\mu(P;\, 1)} \tag{6_1}$$

résout le problème. Nous pouvons en effet l'écrire, en multipliant les deux intégrales par x_1^μ, $U = I^\star_\mu(P;\, u)[I^\star_\mu(P;\, 1)]^{-1}$, dont la valeur

(1) Seuls les problèmes I et II nous serviront dans ce Mémoire.

limite pour $x_1 = 0$ est $k_\mu u_0 k_\mu^{-1} = u_0$. Cette fonction U est bien indéfiniment dérivable en dehors de S.

Problème II. — *Sur* S, U *et ses dérivées s'annulent jusqu'à l'ordre* $p-1$; *la dérivée normale* (¹) *d'ordre* p *a une valeur donnée* u_p. La solution est $(p\,!\,k_\mu)^{-1}\,d^{\mu+p}\,\mathrm{J}_\mu(\mathrm{P}\,;\,u_p)$ pour S plane; sinon elle est donnée par la formule

$$\mathrm{U} = \frac{k_{\mu+p}\,\mathrm{J}_\mu(\mathrm{P}\,;\,u_p)}{p\,!\,k_\mu\,\mathrm{J}_{\mu+p}(\mathrm{P}\,;\,1)}.$$

En effet, ceci peut s'écrire

$$p\,!\,k_\mu\,\mathrm{U}\,\mathrm{I}^\star_{\mu+p}(\mathrm{P}\,;\,1) = k_{\mu+p}\,x_1^p\,\mathrm{I}^\star_\mu(\mathrm{P}\,;\,u_p).$$

Dérivant n fois cette dernière relation par rapport à x_1, on obtient

$$p\,!\,k_\mu[\mathrm{U}^{(n)}\mathrm{I}^\star_{\mu+p} + \ldots + \mathrm{U}\mathrm{I}^{(n)}_{\mu+p}] = k_{\mu+p}[x_1^p\,\mathrm{I}^{(n)}_\mu + \ldots + p\,!\,\mathrm{I}_\mu].$$

On vérifie bien aisément que : 1° en faisant $n = 1, \ldots, p$ et utilisant la propriété C du n° 5, $\dfrac{\partial^n \mathrm{U}}{\partial x_1^n}$ vaut $\mathrm{O}(x_1^{p-n})$ pour $n < p$ et $\dfrac{\partial^p \mathrm{U}}{\partial x_1^p} = u_p$ pour $x_1 = 0$; d'autre part, toutes les autres dérivées en $(x_1, \ldots, x_n)$ d'ordre $< p$ s'annulent en O; 2° d'après la propriété D, si u_p et le champ des normales à S vérifient (H_α), $\dfrac{\partial^p \mathrm{U}}{\partial x_1^p}$ *vérifie* (H_β)*entre* O *et* P *et* $\dfrac{\partial^n \mathrm{U}}{\partial x_1^n} = \mathrm{O}(d^{\beta+p-n})$ *pour* $n > p$. Il en résulte, d'après le premier et le dernier alinéa de la démonstration D que (H_β) *a lieu pour* U *entre deux points quelconques de* D + S (avec $\beta \leqq \alpha$ et $\leqq \mu$).

Seconde formule. — Lorsque u_p garde un signe constant, le problème II est aussi résolu par la formule $\mathrm{U} = k_p\,[p\,!\,\mathrm{J}_p(\mathrm{P}\,;\,u_p^{-1})]^{-1}$: la vérification est immédiate en écrivant $p\,!\,\mathrm{U}\mathrm{I}^\star_p(\mathrm{P}\,;\,u_p^{-1}) = k_p x_1^p$ et dérivant p fois en x_1. La fonction U jouit, comme la précédente, de la propriété 2° énoncée ci-dessus (²).

Nous avons choisi des axes particuliers; s'ils sont quelconques, les dérivées d'ordre p de U admettant en O des valeurs limites ne dépen-

---

(¹) La normale est supposée prise d'un certain côté de S ou *intérieure à* D, et il s'agit *des dérivées normales limites.*

(²) Si u_p et z étaient dérivables jusqu'aux ordres $n-p$ et $n-p+1$, l'une ou l'autre fonction U admettrait (en utilisant E′) des dérivées en O jusqu'à l'ordre n.

dant que de u_p et des cosinus directeurs (α_i) de la normale : par exemple, pour $p = 1$, $U'_{x_i} = \alpha_i u_1$.

Problème III. — U *et ses n premières dérivées normales prennent sur* S *des valeurs données* $u_0, u_1, \ldots, u_n$. La méthode qui se présente d'abord à l'esprit consiste à opérer de proche en proche. La fonction $V_0 = J_\mu^{-1}(P; 1)\, J_\mu(P; u_0)$ prend la valeur u_0 sur S : soit $\dfrac{\partial V_0}{\partial n}$ sa dérivée normale. La fonction

$$V_1 = V_0 + \frac{k_{\mu+1} J_\mu\left(P;\, u_1 - \dfrac{\partial V_0}{\partial n}\right)}{k_\mu J_{\mu+1}(P; 1)}$$

est égale à u_0 sur S et sa dérivée normale y prend la valeur u_1, et ainsi de suite. La fonction de rang p sera $V_{p-1} + \dfrac{k_{\mu+p} J_\mu\left(P;\, u_p - \dfrac{\partial V_{p-1}}{\partial n}\right)}{k_\mu J_{\mu+p}(P; 1)}$. Pour $p = n$, on a la solution du problème.

On voit que le problème exige que u_p soit dérivable jusqu'à l'ordre $n - p$ et que S vérifie la condition énoncée dans E', c'est-à-dire que, pour chacun de ses points pris comme origine O, la cote z d'un point voisin par rapport au plan tangent en O soit une fonction (des coordonnées cartésiennes prises dans le plan tangent) dérivable jusqu'à l'ordre $n + 1$. De plus on prendra $\mu > n$.

On peut aussi employer un procédé de formation de U qui dispense de calculer dans chaque cas les dérivées $\dfrac{\partial V_0}{\partial n}, \ldots, \dfrac{\partial V_{p-1}}{\partial n}$. Pour cela, cherchons d'abord une solution du problème III en supposant $u_0, u_1, \ldots, u_n$ nuls *sauf* u_p. Si u_p et z sont dérivables jusqu'aux ordres respectifs $n - p$ et $n + 1$ on peut écrire en un point P de Ox_1, par la formule du quotient de deux développements en x_1 limités,

$$\frac{J_\mu(P; u_p)}{J_{\mu+p}(P; 1)} = \frac{x_1^p I_\mu^\star(P; u_p)}{I_{\mu+p}^\star(P; 1)} = \alpha_p^\mu x_1^p u_p(O) + A_{p+1}^\mu x_1^{p+1} + \ldots + A_n^\mu x_1^n + o(x_1^n)$$

avec $\alpha_p^\mu = k_\mu k_{\mu+p}^{-1}$, $A_{p+1}^\mu, \ldots, A_n^\mu$ étant des expressions entières par rapport aux coefficients ($k_{\mu+p}$ *excepté*) des développements de $I_\mu^\star(P; u_p)$ et $I_{\mu+p}^\star(P; 1)$. Ces coefficients sont des dérivées normales à des factorielles près, donc *entières* en $D_1, D_2, \ldots$, valeurs des dérivées successives de u_p et z *en* O (n° 5 E' *in fine*). Chaque quantité A sera donc un polynome entier par rapport aux D, avec des coefficients ne dépendant que de p et μ.

Donnons à μ des valeurs $\mu_1, \mu_2, \ldots$, et envisageons la fonction

$$U_p = \lambda_1 \frac{J_{\mu_1}(P; u_p)}{J_{\mu_1+p}(P; 1)} + \lambda_2 \frac{J_{\mu_2}(P; u_p)}{J_{\mu_2+p}(P; 1)} + \ldots;$$

il est manifeste qu'on pourra prendre assez de termes et choisir les λ de façon qu'on ait, *quels que soient les* D,

$$\lambda_1 \alpha_p^{\mu_1} + \lambda_2 \alpha_p^{\mu_2} + \ldots = p!^{-1},$$
$$\lambda_1 A_{p+1}^{\mu_1} + \lambda_2 A_{p+1}^{\mu_2} + \ldots \equiv \lambda_1 A_{p+2}^{\mu_1} + \ldots \equiv \ldots \equiv 0.$$

Les D_i étant, en effet, en nombre limité, les identifications nous donneront des équations linéaires par rapport aux λ, lesquels on pourra prendre en nombre suffisant; le calcul sera d'autant plus simple que n sera moins grand.

La fonction U_p admet des dérivées normales en O jusqu'à l'ordre n, d'après la note finale du problème II, et comme son développement limité est de la forme $\frac{x_1^p}{p!} u_p(O) + o(x_1^n)$, elle vérifie bien les conditions imposées. Pour résoudre le problème III lui même, il suffit alors de poser

$$U = U_0 + U_1 + \ldots + U_n,$$

U_0 étant la fonction V_0 introduite plus haut.

Bien entendu, le calcul se simplifie si S est plane (dans les plans des $x_2, \ldots x_m$) : il suffit alors d'envisager le développement de $x_1^{\mu+p} J_\mu(P; u_p)$, et non plus celui d'un quotient.

Remarque. — D'après l'expression de U_p et la propriété F, si les dérivées d'ordre $n-p$ des fonctions u_p et les dérivées d'ordre $n+1$ de z vérifient (H_α), on a $U^{(n+1)} = O(d^{\beta-1})$, $U^{(n)}$ étant une dérivée $n^{\text{ième}}$ quelconque de U, et $U^{(n)}$ vérifie (H_β) entre un point de S et un point P de la normale correspondante (ici μ est $> n$ ou impair et β est le nombre défini au n° 5 F). Les valeurs limites de $U^{(n)}$ sur S vérifient aussi (H_β), puisqu'elles sont linéaires par rapport aux dérivées des fonctions $\frac{z^{n_1} u_p}{\cos\psi}$ [vérifiant elles-mêmes (H_β)]. Par suite de ces deux propriétés, (H_β) a lieu entre deux points quelconques de D + S : cela résulte à nouveau de la démonstration D.

III. — Le problème de Dirichlet résolu par une quasi-fonction de Green et une équation intégrale.

Nous envisageons tout d'abord le cas de l'équation linéaire (E) du n° 1.

7. **La fonction de frontière. Choix de la quasi-fonction de Green.** — D'après ce que nous avons dit au début du n° 5, ce choix se ramène à celui de la fonction W_P^{II}. Or il est un cas où cela est fort simple, c'est celui où la frontière est *un plan indéfini* et où u est une fonction

harmonique : si P_1 est le symétrique de P par rapport à ce plan, la fonction de Green elle-même du problème de Dirichlet est $|P\Pi|^{2-m} - |P_1\Pi|^{2-m}$. Ici donc W est $|P_1\Pi|^{2-m}$, ce qui peut s'écrire $(r^2+4d\delta)^{1-\frac{m}{2}}$, d et δ étant les distances de P et Π au plan, avec $r = P\Pi$ (car $|P_1\Pi|^2 - r^2$ vaut $4d\delta$ dans le triangle $P\Pi P_1$).

Nous inspirant de cette forme nous allons, dans le cas d'une frontière S quelconque, chercher à déterminer une *fonction de frontière* $s(P)$ [généralisant la fonction d], nulle sur S et positive dans D, telle que, en posant [*cf.* (3_1)]

$$s = s(P), \qquad \sigma = s(\Pi), \qquad \mathfrak{I} = \mathfrak{I}_\Pi(P, \Pi), \qquad \mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I} + 4s\sigma,$$

la fonction $W_P^\Pi = \mathfrak{I}_2^{1-\frac{m}{2}}$ satisfasse à notre objet. Nous aurons alors comme *quasi-fonction de Green*, nulle quand P est sur S,

$$(7_1) \qquad V_P^\Pi = \mathfrak{I}^{1-\frac{m}{2}} - \mathfrak{I}_2^{1-\frac{m}{2}}.$$

Remarquons dès maintenant que la formule des accroissements finis nous donne aisément

$$(7_2) \quad \mathfrak{I}^{-p} - \mathfrak{I}_2^{-p} < 4ps\sigma\mathfrak{I}_2^{-1}\mathfrak{I}^{-p}, \qquad \text{donc} \qquad V_P^\Pi < (2m-4)s\sigma\mathfrak{I}_2^{-1}\mathfrak{I}^{1-\frac{m}{2}}.$$

Calculons les dérivées premières et secondes de V *en employant la notation de Lagrange :*

$$V'_{x_i} = \left(1 - \frac{m}{2}\right)\left[\mathfrak{I}^{-\frac{m}{2}}\mathfrak{I}'_{x_i} - \mathfrak{I}_2^{-\frac{m}{2}}(\mathfrak{I}'_{x_i} + 4\sigma s'_{x_i})\right],$$

$$V''_{x_ix_j} = \frac{m(m-2)}{4}\left[\mathfrak{I}^{-1-\frac{m}{2}}\mathfrak{I}'_{x_i}\mathfrak{I}'_{x_j} - \mathfrak{I}_2^{-1-\frac{m}{2}}(\mathfrak{I}'_{x_i} + 4\sigma s'_{x_i})(\mathfrak{I}'_{x_j} + 4\sigma s'_{x_j})\right]$$
$$- \frac{m-2}{2}\left[\mathfrak{I}^{-\frac{m}{2}}\mathfrak{I}''_{x_ix_j} - \mathfrak{I}_2^{-\frac{m}{2}}(\mathfrak{I}''_{x_ix_j} + 4\sigma s''_{x_ix_j})\right];$$

le dernier crochet peut s'écrire

$$\mathfrak{I}^{-\frac{m}{2}}\mathfrak{I}''_{x_ix_j} - \mathfrak{I}_2^{-1-\frac{m}{2}}(\mathfrak{I} + 4s\sigma)\mathfrak{I}''_{x_ix_j} - 4\sigma\mathfrak{I}_2^{-\frac{m}{2}}s''_{x_ix_j}$$

avec

$$\mathfrak{I}'_{x_i} = 2\Sigma_k A_{ik}(\Pi)(x_k - \xi_k) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{I}''_{x_ix_j} = 2A_{ij}(\Pi).$$

Formons alors $\mathcal{D}_P V$, en posant $\Delta a_{ij} = a_{ij}(\Pi) - a_{ij}(P)$ et remplaçant

$a_{ij}(\mathrm{P})$ par $a_{ij}(\Pi) - \Delta a_{ij}$ chaque fois que ce coefficient est en facteur de $\mathrm{A}_{ik}(\Pi)$, afin d'utiliser le fait que $\Sigma_i(a_{ij}\mathrm{A}_{ik})_\Pi = 1$ pour $j = k$, et 0 pour $j \neq k$. Il vient aisément [avec $a_{ij}^{\mathrm{P}} = a_{ij}(\mathrm{P})$ et $\mathrm{A}_{ij}^{\Pi} = \mathrm{A}_{ij}(\Pi)$]

$$\varpi_{\mathrm{P}}\mathrm{V} = \frac{2(m-2)\sigma}{\mathfrak{S}_2^{\frac{m}{2}}}\left[\varpi s + \frac{2m}{\mathfrak{S}_2}[s - \Sigma(x_i - \xi_i)s'_{x_i} - \sigma\Sigma a_{ij}^{\mathrm{P}} s'_{x_i}s'_{x_j})\right]$$
$$+ \frac{m-2}{4}\Sigma\Delta a_{ij}\left[4\mathrm{A}_{ij}^{\Pi}\left(\mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}} - \mathfrak{S}_2^{-\frac{m}{2}}\right) - m\left(\mathfrak{S}^{-1-\frac{m}{2}} - \mathfrak{S}_2^{-1-\frac{m}{2}}\right)\mathfrak{S}'_{x_i}\mathfrak{S}'_{x_j} + \frac{8m\sigma\mathfrak{S}'_{x_i}s'_{x_j}}{\mathfrak{S}_2^{1+\frac{m}{2}}}\right].$$

Nous allons supposer que la fonction s satisfait aux conditions suivantes : 1° ses dérivées premières vérifient (H_β) dans $\mathrm{D} + \mathrm{S}$ et la relation $\Sigma a_{ij}s'_{x_i}s'_{x_j} = 1$ sur S, qui s'écrit aussi $s_n'^2\Sigma a_{ij}\alpha_i\alpha_j = 1$ (d'après $s'_{x_i} = \alpha_i s'_n$), d'où

$$s'_n = \frac{\partial s}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{\Psi}} \qquad \text{avec} \quad \Psi = \Sigma a_{ij}\alpha_i\alpha_j \quad (^1);$$

2° s a dans D des dérivées secondes valant $\mathrm{O}(d^{\beta-1})$: elles valent aussi $\mathrm{O}(s^{\beta-1})$, car $s'_n \neq 0$ *entraîne que* $\frac{s}{d}$ *reste fini et différent de zéro.* Nous utiliserons souvent cette dernière remarque, qui nous permettra *d'employer indifféremment* s ou d dans les limitations.

D'après ce qui précède (n° 6, problème II, seconde formule avec $p = 1$), la fonction

$$s = k_1[\mathrm{J}_1(\mathrm{P}; \sqrt{\Psi})]^{-1} = k_1\left[\int_{\mathrm{S}} |\mathrm{PM}|^{-m}\sqrt{\Psi_{\mathrm{M}}}\, d\mathrm{S}_{\mathrm{M}}\right]^{-1} \qquad \text{avec } k_1 = \frac{\sigma_m}{2}$$

satisfera à notre objet *si les* a_{ij} *et le champ des normales vérifient* (H_β).

Voyons les conséquences des propriétés de s.

La formule des accroissements finis $s - \sigma = \Sigma(x_i - \xi_i)s'_{y_i}$, le point (y_i) étant entre P et Π, entraîne $|s - \sigma| < (\mathrm{K})r < \nu\sqrt{\mathfrak{S}}$, avec $r = \mathrm{P}\Pi$, ν étant un coefficient qu'on peut toujours supposer > 1. D'où

$$\frac{s}{\sqrt{\mathfrak{S} + 4s\sigma}} < \frac{\nu s}{\sqrt{(s-\sigma)^2 + 4s\sigma}} < \frac{\nu s}{s + \sigma} < \nu :$$

donc $s\mathfrak{S}_2^{-\frac{1}{2}}$ et, pour la même raison, $\sigma\mathfrak{S}_2^{-\frac{1}{2}}$ *sont bornés.*

(1) Pour toute fonction φ constante sur S, on a $\varphi'_{x_i} = \alpha_i\varphi'_n$, donc [n° 1, note (2)] $\varphi'_{\mathrm{N}} = \Psi\varphi'_n$.

D'autre part, le coefficient de $\frac{2m}{\mathfrak{S}_2}$, dans le premier crochet de $\mathcal{D}_P V$, peut s'écrire

$$\Sigma(x_i - \xi_i)(s'_{y_i} - s'_{x_i}) - \sigma(\Sigma a_{ij} s'_{x_i} s'_{x_j} - 1).$$

D'après les hypothèses faites sur s et les a_{ij}, on a

$$|s'_{y_i} - s'_{x_i}| < (K) r^\beta < (K) \mathfrak{S}^{\frac{\beta}{2}} \qquad \text{et} \qquad |\Sigma a_{ij} s'_{x_i} s'_{x_j} - 1| < (K) s^\beta.$$

Le coefficient étudié est donc limité par $(K)\,\mathfrak{S}^{\frac{1+\beta}{2}} + (K)\, s^\beta \sigma$.

Remarquons enfin que $\mathfrak{S}^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{S}'_{x_i}$ et $\mathfrak{S}_2^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{S}'_{x_i}$ sont bornés et qu'on a d'après (7_2)

$$\mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}} - \mathfrak{S}_2^{-\frac{m}{2}} < 2 m s \sigma \mathfrak{S}_2^{-1} \mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}}, \qquad \mathfrak{S}^{-1-\frac{m}{2}} - \mathfrak{S}_2^{-1-\frac{m}{2}} < (2m+4) s \sigma \mathfrak{S}_2^{-1} \mathfrak{S}^{-1-\frac{m}{2}}.$$

Réunissant tous ces résultats, le lecteur en conclura sans peine la limitation du noyau $q F_P V_P^\Pi$ introduit dans le n° 1 [*cf.* (1_4)]. *Pour simplifier l'écriture nous poserons* $q V_P^\Pi = \mathcal{V}_P^\Pi$. La limitation trouvée nous permet alors d'écrire

$$(7_3) \qquad F_P \mathcal{V}_P^\Pi = \sigma\left[\mathcal{K}_1 s^{\beta-1} \mathfrak{S}_2^{-\frac{m}{2}} + \mathcal{K}_2 \mathfrak{S}_2^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{S}^{\frac{\beta-m}{2}}\right],$$

en désignant systématiquement par la notation $\mathcal{K}$ *des fonctions de* P *et de* Π *continues dans* D (sauf peut-être pour $r = 0$) *et bornées dans* D + S. On ramènerait aisément par des itérations ce noyau à la forme $\sigma s^{-1} K_P^\Pi$(K borné) qui conserve un sens à toutes les intégrales des déterminants de Fredholm. Mais nous emploierons un autre procédé plus loin [formules (8_3) et suiv.].

La solution du problème de Dirichlet, pour l'équation (E) du n° 1, est fournie par les formules (1_5) et (1_6) :

$$(7_4) \qquad u_P = \int_D \mathcal{V}_P^Q \varphi_Q \, d\omega_Q + \chi_P,$$

$$(7_5) \qquad \varphi_P - \lambda \int_D F_P \mathcal{V}_P^Q \varphi_Q \, d\omega_Q = F_P \chi - f_P = g_P \qquad \text{avec } \lambda = 1,$$

χ étant une fonction de P prenant sur S les valeurs données; ainsi que nous l'avons dit au n° 1, nous allons vérifier qu'on peut poser

$$\chi_P = \int_S \frac{\partial \mathcal{V}_P^\Pi}{\partial N_\Pi} u_\Pi \, ds_\Pi,$$

en prenant ici Π comme point d'intégration sur S. Or on a, en tenant compte de $\sigma = 0$ (et de $\sigma_m = 2k_1$),

$$\frac{\partial v_{\mathrm{P}}^{\Pi}}{\partial \mathrm{N}_{\Pi}} = \frac{s}{k_1}\frac{\partial \sigma}{\partial \mathrm{N}}\mathfrak{I}^{-\frac{m}{2}}, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial \mathrm{N}} = \Sigma_{ij} a_{ij}\alpha_i \frac{\partial \sigma}{\partial \xi_j} = \Psi \frac{\partial \sigma}{\partial n} = \sqrt{\Psi_{\Pi}}.$$

Il nous faut donc montrer que l'intégrale

$$\frac{s}{k_1}\int_{\mathrm{S}} \mathfrak{I}_{\Pi}^{-\frac{m}{2}} (u\sqrt{\Psi}\, d\mathrm{S})_{\Pi}$$

tend vers u_0 quand P tend vers un point O de S, que nous choisirons comme origine : u étant supposée continue sur S, nous pourrons prendre P sur la normale en O [*cf.* 5 A, note (1)].

Faisons, *au point* O, le changement de variables (T) du n° 3, qui transforme $\mathfrak{I}_0(\mathrm{P},\Pi)$ en $\overline{\mathrm{P}'\Pi'}^2$ (les lettres accentuées et non accentuées se correspondant). Deux éléments de domaines homologues, ayant leurs bases dS et dS$'$ respectivement sur S et S$'$ et pour hauteurs dn et dn', sont égaux : $d\mathrm{S}\, dn = d\mathrm{S}'\, dn'$. D'autre part, σ devient, dans D$'$, une fonction dont la dérivée normale est égale à *un* en O, d'où $dn' = d\sigma(1+\eta)$, η étant nul en O, donc

$$d\mathrm{S} = \frac{\partial \sigma}{\partial n}(1+\eta)\, d\mathrm{S}' = \frac{d\mathrm{S}'(1+\eta)}{\sqrt{\Psi}},$$

et par suite $\sqrt{\Psi}\, d\mathrm{S} = d\mathrm{S}'(1+\eta)$.

D'autre part, la formule $\frac{\partial s}{\partial n'} = 1$ en O permet d'écrire $s = d'(1+\varepsilon)$, d' étant la distance de P$'$ à S$'$ et ε tendant vers zéro avec OP$'$, Enfin, une formule analogue à (3_6) nous donne $\mathfrak{I}_{\Pi'}^{\frac{m}{2}} = |\mathrm{P}'\Pi'|^{-m}(1+\eta')$, η' s'annulant avec OΠ', et ceci en supposant *simplement les a_{ij} continus*. Notre intégrale s'écrit alors $k_1^{-1}(1+\varepsilon)\mathrm{I}_1[\mathrm{P}';\ u(1+\eta)(1+\eta')]$, qui tend bien vers u_0 quand P$'$ tend vers O (1).

8. **Résolution de l'équation intégrale du problème.** — Cette équation est (7_5), mais rappelons d'abord les hypothèses sur les coefficients

---

(1) Bien entendu, comme nous l'avons dit à la fin du n° 1, il peut se faire que χ soit une fonction obtenue sans quadrature.

de l'équation aux dérivées partielles. Nous pouvons prendre son premier membre sous la forme (4_7), c'est-à-dire envisager l'équation

$$(8_1) \qquad \mathcal{F}u \equiv \mathcal{E}u + \Sigma b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f,$$

$\mathcal{E}$ désignant l'un des symboles (4_1), (4_3) ou (4_6). D'après ce que nous avons vu à la fin du n° 4 [formules (4_8) et suivantes], la solution du problème de Dirichlet sera donnée par (7_4) et (7_5) si φ est continue et si $\int_D \mathcal{O}_P w_Q(P,Q)\,\varphi_Q\,d\omega_Q$ a un sens, ce qui aura lieu si les a_{ij} vérifient (H_β), les b_i, c, f étant seulement supposés continus, de façon que le second membre de (7_5) soit continu dans D; mais il nous faut examiner comment celui-ci se comporte au voisinage de S, donc étudier

$$(8'_1) \qquad F_P\chi = \mathcal{F}_P|\chi = \int_S F_P \mathcal{V}'_N u_\Pi \, dS_\Pi,$$

en posant pour abréger

$$\frac{\partial \mathcal{V}_P^\Pi}{\partial N_\Pi} = \mathcal{V}'_N.$$

Or $\mathcal{V}'_N$ est identique au résultat obtenu en dérivant $\mathcal{V}$ par rapport à N_Π *comme si les* A_{ij} (II) *étaient constants*, puis faisant $\sigma = 0$. Tenant compte de cette remarque pour calculer $\mathcal{O}_P \mathcal{V}'_N$, égal à $q\dfrac{\partial \mathcal{O}_P V}{\partial N_\Pi}$, on trouve en se reportant à l'expression de $\mathcal{O}_P V$ (p. 75)

$$\frac{\partial \mathcal{O}_P V}{\partial N_\Pi} = m(m-2)\Psi_\Pi^{\frac{1}{2}}\, \mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}}\Bigg[\frac{2\mathcal{O}s}{m} + 4\frac{s - \Sigma(x_i - \xi_i)s'_{x_i}}{\mathfrak{S}} + \Sigma\,\Delta a_{ij}\left(2\frac{A_{ij}^\Pi s + \mathfrak{S}'_{x_i}s'_{x_j}}{\mathfrak{S}} - (m+2)\frac{s\mathfrak{S}'_{x_i}\mathfrak{S}'_{x_j}}{2\mathfrak{S}^2}\right)\Bigg].$$

Le premier terme du crochet vaut $O(s^{\beta-1})$ et les autres, d'après ce que nous avons déjà vu, $O\left[\mathfrak{S}^{\frac{\beta-1}{2}}\right]$. D'autre part, $\dfrac{\partial \mathcal{V}'_N}{\partial x_i}$ et $\mathcal{V}'_N$ valent respectivement $O\left(\mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}}\right)$ et $O\left[\mathfrak{S}^{\frac{1-m}{2}}\right]$. D'où ($\mathcal{K}'_1$ et $\mathcal{K}'_2$ étant analogues à $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$)

$$\mathcal{F}_P \mathcal{V}'_N = \mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}}\left(\mathcal{K}'_1 s^{\beta-1} + \mathcal{K}'_2 \mathfrak{S}^{\frac{\beta-1}{2}}\right).$$

Tenant compte du fait que $s\,\mathfrak{S}^{-\frac{1}{2}}$ est, comme dr^{-1}, borné quand Π est sur S, on déduit de là et de $(8'_1)$, $\mathfrak{M}$ étant le maximum de $|u|$ sur S,

$$(8_2) \qquad \mathcal{F}_P \chi < (K)\,\mathfrak{M} s^{\beta-2} \int_S s\,\mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}}\, dS < (K)\,\mathfrak{M} s^{\beta-2}.$$

Le second membre g de (7_5) s'écrit donc $s^{\beta-2}\bar{g}$, la fonction $\bar{g}$ étant continue dans D et bornée dans D + S.

Pour avoir une notation en harmonie avec la lettre σ, remplaçons dans (7_5) Q par Π, *qui est donc ici le point courant de* D. En posant $\varphi = s^{-1}\bar{\varphi}$, l'équation devient

$$(8_3) \qquad \bar{\varphi}_P - \lambda \int_D \frac{s}{\sigma} F_P \mathcal{V}_P^\Pi \bar{\varphi}_\Pi \, d\omega_\Pi = s g_P = s^{\beta-1} \bar{g}_P.$$

Or, d'après (7_3),

$$(8_4) \qquad \frac{s}{\sigma} F_P \mathcal{V}_P^\Pi = \mathcal{K}_1 s^\beta \mathfrak{S}_2^{-\frac{m}{2}} + \mathcal{K}_2 s \mathfrak{S}_2^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{S}^{\frac{\beta-m}{2}} = r^{\beta-m} \mathcal{K}_P^\Pi \quad (^1)$$

$(r = P\Pi)$. Nous avons donc à résoudre, pour $\lambda = 1$, l'équation de Fredholm

$$(8_5) \qquad \bar{\varphi}_P - \lambda \int_D r^{\beta-m} \mathcal{K}_P^\Pi \bar{\varphi}_\Pi \, d\omega_\Pi = s^{\beta-1} \bar{g}_P,$$

dont le noyau est classique et *admet une résolvante de la forme* $r^{\beta-m}\overline{\mathcal{K}}_P^\Pi$ pour toute valeur non singulière de λ.

On peut d'ailleurs présenter la chose autrement en partant de la relation fonctionnelle [déjà rencontrée : *cf.* (1_4)] entre le noyau $F_P \mathcal{V}_P^\Pi (= q F_P V_P^\Pi)$ et sa résolvante Φ_P^Π. En posant $\Phi = s^{-1}\sigma\bar{\Phi}$, cette relation devient

$$\bar{\Phi}_P^\Pi = \lambda \int_D \frac{s_P}{s_Q} F_P \mathcal{V}_P^Q . \bar{\Phi}_Q^\Pi \, d\omega_Q + \frac{s}{\sigma} F_P \mathcal{V}_P^\Pi.$$

$\bar{\Phi}$ est donc la résolvante de $\frac{s}{\sigma} F_P \mathcal{V}_P^\Pi$, donné par (8_4), et celle-ci est, comme nous l'avons dit, de la forme $r^{\beta-m}\overline{\mathcal{K}}_P^\Pi$: donc $\Phi = s^{-1}\sigma r^{\beta-m}\overline{\mathcal{K}}_P^\Pi$.

---

(1) Plus généralement on constate sans peine que $F_P V = \left(\frac{\sigma}{s}\right)^\gamma r^{\beta-m}\mathcal{K}$ avec $1 - \beta \leqq \gamma \leqq 1$.

D'où l'expression de φ (qu'on peut aussi déduire de 8_5)

$$(8_6)\qquad \varphi_P = g_P + \int_D \Phi_P^\Pi g_\Pi \, d\omega_\Pi = s^{\beta-2}\left[\bar{g}_P + s^{1-\beta}\int_D \sigma^{\beta-1} r^{\beta-m}\bar{\mathcal{K}}_P^\Pi \bar{g}_\Pi \, d\omega_\Pi\right],$$

en faisant $\lambda = 1$ et supposant que cette valeur *ne soit pas singulière.*

Étudions l'intégrale du dernier membre : elle conserve la même forme si l'on remplace s et σ par d et δ, distances de P et Π à S. Soit alors plus généralement l'intégrale

$$(8_7)\qquad \int_D \delta^{-\beta'} r^{\beta-m} \, d\omega \qquad (0 < \beta' < 1).$$

Il suffit d'envisager un petit domaine d'intégration D' commun à D et à une sphère de centre O, pied de d, et de rayon ρ', en supposant P intérieur à D'. Supposons d'abord que la portion S' de S intérieure à la sphère soit plane et décomposons D' en deux parties au moyen de la sphère Σ' de centre O et de rayon $2d$. L'intégrale relative au domaine intérieur à Σ' se transforme, par une homothétie de centre O et de rapport d^{-1}, en $d^{\beta-\beta'}$ multiplié par une intégrale finie. D'autre part, dans $D' - \Sigma'$ on a $O\Pi < 2r$, d'où une intégrale limitée par

$$(K)\int_{D'-\Sigma'} \delta^{-\beta'} \, |O\Pi|^{\beta-m} \, d\omega,$$

que nous évaluerons en utilisant des coordonnées polaires de pôle O : à savoir $O\Pi = \rho$ et les coordonnées du point où $O\Pi$ perce la sphère unitaire σ_0 de centre O. Nous obtenons ainsi le produit de $\int_{2d}^{\rho'} \rho^{\beta-\beta'-1} d\rho$ par une intégrale finie étendue à une portion d'aire de σ_0. Il en résulte que l'intégrale (8_7) *est finie pour* $\beta > \beta'$ (et tend vers zéro avec ρ' pour $D \equiv D'$); *elle vaut* $O(\mathcal{L}d)$ *pour* $\beta = \beta'$ *et* $O(d^{\beta-\beta'})$ *pour* $\beta < \beta'$.

S' a été supposée plane, mais on ramène aisément le cas général à ce dernier en utilisant les axes $[O]$: Ox_1 normale et $\xi_1 = z(\xi_2, \ldots, \xi_m)$ équation de S' [*cf.* 5 A, note (2)]. Remarquant que $|\xi_1 - z|$ est $< (K)\delta$ et prenant comme variables $\xi_1 - z, \xi_2, \ldots, \xi_m$, on voit facilement que, si r' correspond à r, on a $r' < (K)r$ et l'on est ramené au cas précédent.

Le produit de (8_7) *par* d^γ *tend donc vers zéro pour* γ *positif* $> \beta' - \beta$. Ceci se présente dans le crochet de (8_6); on a donc $\varphi = s^{\beta-2}\psi$, ψ étant, comme $\overline{g}$, bornée dans $D + S$ et continue dans D. D'après (7_4) et (7_5), et aussi (7_2), nous avons alors

$$(8_8)\quad u_P = \int_D \mathcal{V}_P^\Pi \sigma^{\beta-2} \psi_\Pi \, d\omega_\Pi + \chi_P \qquad \text{avec } \mathcal{V}_P^\Pi \sigma^{\beta-2} < (K) s\sigma^{\beta-1} \mathfrak{S}_2^{-1} \mathfrak{S}^{1-\frac{m}{2}};$$

ceci est $< (K)\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{1-\beta} r^{\beta-m}$, en utilisant à nouveau le fait que $\frac{s}{\sqrt{\mathfrak{S}_2}}$ et $\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_2}$ sont bornés. L'intégrale de (8_8) rentre donc dans le cas que nous venons d'étudier avec $\gamma = \beta' = 1 - \beta$. Elle s'annule $(\gamma > \beta' - \beta)$ quand P vient sur S : *donc* u_P *prend bien les valeurs données sur* S.

Le problème de Dirichlet est ainsi résolu pour l'équation (8_1) dans les cas non singuliers : nous étudierons plus loin, à propos des systèmes d'équations, les cas d'exception ainsi que *la question d'unicité*. Notre méthode ne nous renseigne pas sur ce dernier point, c'est-à-dire que nous ne savons pas *a priori* si la solution u est nécessairement de la forme (7_4) (¹).

Remarque. — D'après les formules (7_2) et suivantes, on a

$$\mathcal{V} < (K) s\sigma \mathfrak{S}_2^{-1} \mathfrak{S}^{1-\frac{m}{2}}$$

et

$$(8_9)\qquad |\mathcal{V}'_{x_i}| < (K) s\sigma \mathfrak{S}_2^{-1} |\mathfrak{S}'_{x_i}| \mathfrak{S}^{-\frac{m}{2}} + (K)\sigma \mathfrak{S}_2^{-\frac{m}{2}}.$$

Si $b_i = O(s^{\beta-1})$ et c, $f = O(s^{\beta-2})$, les termes de $F_P \mathcal{V}_P^\Pi$ qui contiennent b_i et c sont limités par $(K)\frac{\sigma}{s} r^{\beta-m}$ (cela résulte, une fois de plus, de $\frac{s}{\sqrt{\mathfrak{S}_2}}$ et $\frac{\mathfrak{S}'_{x_i}}{\sqrt{\mathfrak{S}}}$ bornés) et le second membre de (8_3) s'écrit encore $s^{\beta-1}\overline{g}$.

(¹) La limitation de φ peut être utile. Or $|\overline{g}|$ est $< (K)\mathfrak{M} + (K)F$, avec $|f| < F$; d'où, d'après (8_6) et suivantes, $|\varphi| < s^{\beta-2}[(K)\mathfrak{M} + (K)F]$, les (K) ne dépendant ici que des coefficients du premier membre de (8_1).

On peut aussi remarquer que le second membre de (7_5) se compose de deux parties, la première obtenue en supposant $f = 0$, la seconde en supposant $\chi = 0$, c'est-à-dire les données nulles sur S. Soient φ_1 et u_1, φ_2 et u_2 les fonctions données par (7_4) et (7_5) et correspondant respectivement à ces deux cas : u_1 est la solution de $\mathcal{F} = 0$ prenant sur S les valeurs données et u_2 la solution de $\mathcal{F} = f$ s'annulant sur S, avec $u = u_1 + u_2$. On a $|\varphi_1| < (K)\mathfrak{M}$, d'après ce qui précède; en posant $\varphi_2 = s^{\beta-1}\overline{\varphi}_2$ on obtient une équation en $\overline{\varphi}_2$ dont le noyau est $\left(\frac{\sigma}{s}\right)^{1-\beta} F\mathcal{V}$ et se comporte comme $r^{\beta-m}$: d'où $|\overline{\varphi}_1| < (K)F$ et, par suite, $|\varphi| < (K)s^{\beta-2}\mathfrak{M} + (K)s^{\beta-1}F$, limitation plus précise que la précédente.

Par suite, le noyau $\frac{s}{\sigma}\,\mathrm{F_P}\mathcal{V}_{\mathrm{P}}^{\Pi}$ de (8_3) aura la même forme que précédemment et nous aboutirons de nouveau à l'équation (8_4). *Le problème de Dirichlet est donc résoluble dans le cas où les b_i et les c, f sont continus dans* D *et valent respectivement* $\mathrm{O}(d^{\beta-1})$ *et* $\mathrm{O}(d^{\beta-2})$.

9. **Le problème de Dirichlet pour les systèmes linéaires.** — Nous envisagerons le système (2_5) de n équations à n fonctions inconnues $u_1, \ldots, u_n$, *données sur* S, en généralisant l'ensemble des termes du second ordre de chaque équation au moyen de l'opération $\mathcal{E}^k u_k$ définie avec les a_{ij}^k comme $\mathcal{E}$ l'a été au nº 4 avec les a_{ij}. Nous avons donc le système

$$(9_1)\qquad \mathcal{E}^k u_k + \Sigma_{hi} b_{hi}^k \frac{\partial u_h}{\partial x_i} + \Sigma_h c_h^k u_h = f^k,$$

avec $i, j = 1, \ldots, m$ et $h, k = 1, \ldots, n$, et nous supposerons dans $\mathrm{D} + \mathrm{S}$ les a_{ij}^k vérifiant (H_β) et les autres coefficients continus. De plus, pour chaque valeur de k, la forme $\Sigma a_{ij}^k \mathrm{X}_i \mathrm{X}_j$ est définie positive et de discriminant égal à *un*.

A chaque équation (9_1) correspond alors une quasi-fonction de Green $(\mathrm{V}^k)_{\mathrm{P}}^{\Pi}$ formée avec les a_{ij}^k exactement comme dans le cas d'une seule équation [*cf.* (7_1)] : en particulier chaque fonction s_k se déduira de l'expression de s en remplaçant Ψ par $\Psi^k = \Sigma a_{ij}^k \alpha_i \alpha_j$. De même on mettra u_k sous la forme de la somme d'une intégrale nulle sur S et d'une fonction χ_k prenant les valeurs données de u_k sur S : on posera donc, avec $\mathcal{V}_k(\mathrm{P}, \Pi) = q(\mathrm{V}^k)_{\mathrm{P}}^{\Pi}$,

$$(9_2)\qquad u_k(\mathrm{P}) = \int_{\mathrm{D}} \mathcal{V}_k(\mathrm{P}, \Pi)\,\varphi_k(\Pi)\,d\omega_\Pi + \chi_k(\mathrm{P}), \qquad \chi_k = \int_{\mathrm{S}} \frac{\partial \mathcal{V}_k}{\partial \mathrm{N}_\Pi}\,u_k(\Pi)\,d\mathrm{S}_\Pi,$$

En écrivant que les u_k vérifient le système (9_1), on trouve immédiatement que *les φ_k sont solutions du système d'équations de Fredholm*

$$(9_3)\qquad \varphi_k(\mathrm{P}) - \int_{\mathrm{D}} \Sigma_h \mathrm{F}_h^k \mathcal{V}_h(\mathrm{P}, \Pi)\,\varphi_h(\Pi)\,d\omega_\Pi = \Sigma_h \mathrm{F}_h^k \chi_h - f^k = g_k(\mathrm{P}),$$

en désignant par $\mathrm{F}_h^k u_h$ l'ensemble des termes de la $k^{\text{ième}}$ équation contenant u_h et ses dérivées ($\mathcal{E}$ pouvant ici être remplacé par $\mathcal{D}$). $\mathrm{F}_h^k \mathcal{V}_h$ ne contiendra donc les dérivées du second ordre, c'est-à-dire $\Sigma_{ij} a_{ij}^k \dfrac{\partial^2 \mathcal{V}_k}{\partial x_i \partial x_j}$, que pour $h = k$ seulement.

Or il est facile de ramener le système *à une seule équation intégrale*. Imaginons, en effet, un domaine ΣD constitué par n domaines $D_1, \ldots, D_n$ identiques à D, et désignons par P_k et Π_k les points coïncidant avec P et Π dans D_k. Nous poserons

$$s_{P_k} = s_k(P), \qquad \varphi_{P_k} = \varphi_k(P), \qquad g_{P_k} = g_k(P), \qquad \mathcal{N}_{P_k}^{\Pi_h} = F_h^k \mathfrak{V}_h(P, \Pi).$$

La fonction φ, *qui admet une détermination dans chaque domaine* D_k, *est alors solution de l'équation de Fredholm*

$$(9_4) \qquad \varphi_P - \lambda \int_{\Sigma D} \mathcal{N}_P^\Pi \varphi_\Pi \, d\omega_\Pi = g_P \qquad \text{avec } \lambda = 1.$$

Le noyau $\mathcal{N}$ admet n^2 déterminations de la forme (7_3), et ces déterminations multiples constituent la seule différence que (9_4) présente avec (7_5). Nous avons donc pour $\lambda = 1$ une solution φ analogue à (8_6)

$$(9_5) \qquad \varphi_P = g_P + \int_{\Sigma D} \Phi_P^\Pi g_\Pi \, d\omega_\Pi,$$

Φ étant de la forme $s^{-1} \sigma r^{\beta - m} \overline{\mathcal{K}_P^\Pi}$ et $\lambda = 1$ étant supposée valeur non singulière. Φ admet aussi n^2 déterminations.

Remarques sur divers cas particuliers. — Lorsque les a_{ij} sont lipschitziens dans $D + S$ et ont des dérivées premières continues sur S, et que z a des dérivées secondes continues, la fonction $\mathcal{K}_1$ est nulle dans le noyau (7_3) et $\beta = 1$. D'autre part, si les a_{ij} sont pourvus des dérivées secondes figurant dans $\mathcal{O}$, on pourra poser $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_P(P, \Pi)$, et alors dans $\mathcal{O}_P V$ (p. 75) la seconde ligne disparaît.

Si, en plus de cette dernière condition, le domaine D est représenté par $\psi_P > 0$ et S par $\psi_P = 0$, ψ étant une fonction pourvue de dérivées premières et secondes, et aussi de dérivées troisièmes valant $O(\psi^{\beta-1})$, on pourra poser $s = \psi_P [\Sigma a_{ij}(P) \psi'_{x_i} \psi'_{x_j} + \nu \psi_P]^{-\frac{1}{2}}$, ν étant choisi de telle sorte que le crochet reste positif dans D.

Au sujet de s, nous observerons également qu'on peut la définir comme fonction de P *et de* Π, en supposant $\Sigma a_{ij}(\Pi) s'_{x_i} s'_{x_j} = 1$ quand P est sur S. Il faudra alors, dans l'expression de $\mathcal{O}_P V$, prendre les a_{ij} en Π dans la première ligne et ajouter à la seconde des termes en $\Delta a_{ij} s'_{x_i} s'_{x_j}$, ce qui ne modifiera pas la forme (7_3). La fonction s sera donnée par la même intégrale, sauf que Ψ_{M} sera remplacé par $\Sigma a_{ij}(\Pi)(\alpha_i \alpha_j)_{\mathrm{M}}$, et la fonction χ correspondante prendra encore la valeur u sur S (même démonstration).

Cet autre choix de s permet, dans le cas où l'on donne la fonction ψ envisagée plus haut, de remplacer $a_{ij}(\mathrm{P})$ par $a_{ij}(\Pi)$ dans l'expression ci-dessus de s, les a_{ij} étant alors supposés seulement höldériens.

Notons enfin qu'il y a d'autres cas où l'on peut écrire sans quadrature la quasi-fonction de Green : par exemple si les a_{ij} forment une matrice unité et que S soit une sphère, on prendra comme fonction V la fonction de Green classique de la sphère.

Coefficients infinis à la frontière. — De même que dans le cas d'une seule équation, la forme de $\mathfrak{N}$ et g dans (9_3) n'est pas modifiée si les $b^k_{h_i}$ et les c^k_h, f^k valent respectivement $\mathrm{O}(d^{\beta-1})$ et $\mathrm{O}(d^{\beta-2})$. Notre méthode s'applique donc au problème de Dirichlet dans ce cas.

IV. — Les problèmes mixtes linéaires.

Commençons par le problème de Neumann pour l'équation (8_1).

10. **La quasi-fonction de Neumann et le point-image.** — Quand S est plane et u harmonique, la fonction de Neumann est $r^{2-m} + r_1^{2-m}$, avec $\mathrm{P}\Pi = r$ et $\mathrm{P}_1\Pi = r_1$, P_1 étant le symétrique de P par rapport au plan : elle est la somme de deux fonctions dont les dérivées normales se détruisent.

Dans le cas général où S est frontière de D et u solution de (8_1), nous appellerons *point-image* d'un point P de D un point P_1 extérieur à D, coïncidant avec P quand P vient sur S et tel que, *si* P *subit à partir de* S *un déplacement infinitésimal* $d\mathrm{P}$ *suivant la conormale, on ait vectoriellement* $d\mathrm{P}_1 = -\, d\mathrm{P}$. Par suite, si $f(\mathrm{P})$ est une fonction de P et qu'on pose $f_1(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P}_1)$, les dérivées conormales de f et f_1 en un point de S sont équiopposées : ceci a lieu en particulier pour $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}_1$, en posant

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_\Pi(\mathrm{P}, \Pi) \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_\Pi(\mathrm{P}_1, \Pi).$$

Les coordonnées de P_1 seront de la forme $x_k^1 = x_k + y_k$, avec $x_k^1 = x_k$ et $\frac{\partial x_k^1}{\partial N} = -\frac{\partial x_k}{\partial N}$ sur S, donc $y_k = 0$ et $\frac{\partial y_k}{\partial N} = -\frac{2\partial x_k}{\partial N}$ sur S. Tout point dont les coordonnées diffèrent de celles de P_1 de quantités infiniment petites par rapport à d est aussi point-image.

Montrons maintenant que $\frac{d}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}$ et $\frac{r}{\sqrt{\mathfrak{S}_1}}$ ou, ce qui revient au même, $\frac{d}{r_1}$ *et* $\frac{r}{r_1}$ *sont bornés* ($r = P\Pi$, $r_1 = P_1\Pi$). Il suffit évidemment de l'établir pour P et Π voisins du pied O de d et pour le point-image particulier P_1 qu'on obtient en remplaçant y_k par $\left(\frac{\partial y_k}{\partial n}\right)_0 d$, premier terme du développement de y_k sur OP : alors P_1 est l'image de P par rapport au plan tangent T en O, c'est-à-dire que PP_1 est parallèle à la conormale en O et le milieu de PP_1 est dans T.

Cela étant, nous remarquerons qu'on a $P\Pi < PP_1 + P_1\Pi$, c'est-à-dire $r < \frac{2d}{\sin\theta} + r_1$, θ étant l'angle de N et de T : donc $d = O(r_1)$ entraîne $r = O(r_1)$. Or si P et Π sont d'un même côté de T, d est $< r_1$; sinon, d'après $d = OP_1 \sin\omega$ (ω angle de OP_1 et de T), il suffit de montrer que $\frac{OP_1}{P_1\Pi}$ est borné : or ceci est égal à $\frac{\sin O\Pi P_1}{\sin P_1 O\Pi}$, et $\sin P_1 O\Pi$ a une limite inférieure voisine de $\sin\omega$. D'où $d = O(r_1)$.

Les propriétés imposées au point-image doivent être complétées par la suivante : $\varpi_P \mathfrak{S}_1^{1-\frac{m}{2}}$, qui est fini quel que soit Π pour tout point P intérieur à D, doit présenter, quand P et Π viennent se confondre en un point de S, *une singularité d'ordre* $< m$. D'une façon plus précise, quand les a_{ij} et le champ des normales sont höldériens d'exposant β, on a

$$(10_1) \qquad \varpi_P \mathfrak{S}_1^{1-\frac{m}{2}} = O(r_1^{\beta-m}) + O(d^{\beta-1} r_1^{1-m}).$$

Pour le voir, évaluons d'abord $\frac{\partial y_k}{\partial N}$: sa valeur est $-\frac{2\partial x_k}{\partial N}$, ce qui, d'après l'expression de $\frac{\partial u}{\partial N}$ [n° 1, note (²)], est égal à $-\Psi'_{\alpha_k}$. Par suite (note du n° 7), $\frac{\partial y_k}{\partial n} = -\Psi^{-1}\Psi'_{\alpha_k}$.

Les coordonnées du point-image P_1 *sont donc*

$$x_k^1 = x_k + y_k \qquad \left(y_k = 0 \text{ et } \frac{\partial y_k}{\partial n} = -\frac{\Psi'_{\alpha_k}}{\Psi} \text{ sur S}\right).$$

Nous supposerons de plus que les dérivées secondes de y_k valent $O(d^{\beta-1})$ dans D et que les dérivées premières vérifient (H_β) dans D + S. Les formules du n° 6 (problème II) permettent de réaliser toutes ces conditions : nous prendrons par exemple

$$y_k = -\frac{k_2 J_1(P; \Psi^{-1}\Psi'_{\alpha_k})}{k_1 J_2(P; 1)}.$$

Cela posé, calculons les dérivées secondes en (x_i) d'une fonction $u(P_1)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^1 \partial x_l^1} \frac{\partial x_k^1}{\partial x_i} \frac{\partial x_l^1}{\partial x_j} + \sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Pour $u = \mathfrak{S}_1^{1-\frac{m}{2}}$, le second groupe est composé de fonctions $O(d^{1-\beta} r_1^{1-m})$. Quant au premier, si nous formons $\mathcal{D}_P u$, il nous donnera, comme coefficient de $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^1 \partial x_l^1}$, $\Sigma_{ij} a_{ij} \frac{\partial x_k^1}{\partial x_i} \frac{\partial x_l^1}{\partial x_j}$. Calculons la valeur de ce coefficient en O, pied de d, en remarquant dès maintenant qu'on obtiendra sa valeur en P en ajoutant une fonction $O(d^\beta)$ [d'après ce qui précède] ce qui, pour $u = \mathfrak{S}_1^{1-\frac{m}{2}}$, donnera dans $\mathcal{D}_P$ des termes limités par $(K) d^\beta r_1^{-m}$, donc $(K) r_1^{\beta-m}$. Or, en O,

$$\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \alpha_i \frac{\partial y_k}{\partial n},$$

d'où

$$\frac{\partial x_k^1}{\partial x_k} = 1 - \frac{\alpha_k \Psi'_{\alpha_k}}{\Psi} \quad \text{et} \quad \frac{\partial x_k^1}{\partial x_i} = -\frac{\alpha_i \Psi'_{\alpha_k}}{\Psi} \quad \text{pour } i \neq k$$

et des formules analogues pour x_l^1. Le calcul du coefficient en question au point O nous donne alors immédiatement

$$\frac{\Psi'_{\alpha_k}\Psi'_{\alpha_l}}{\Psi^2} \Sigma_{ij} a_{ij} \alpha_i \alpha_j - \frac{\Psi'_{\alpha_k}}{\Psi} \Sigma_i a_{il} \alpha_i - \frac{\Psi'_{\alpha_l}}{\Psi} \Sigma_j a_{kj} \alpha_j + a_{kl}(O) = a_{kl}(O),$$

puisque

$$\Sigma a_{ij} \alpha_i \alpha_j = \Psi \quad \text{et} \quad \Sigma_i a_{il} \alpha_i = \frac{\Psi'_{\alpha_l}}{2}.$$

Donc, en remarquant que $\Sigma a_{kl}(\Pi) \frac{\partial^2 \mathfrak{S}_1^{1-\frac{m}{2}}}{\partial x_k^1 \partial x_l^1}$ est nul,

$$\mathcal{D}_P \mathfrak{S}_1^{1-\frac{m}{2}} = \Sigma [a_{kl}(O) - a_{kl}(\Pi)] \frac{\partial^2 \mathfrak{S}_1^{1-\frac{m}{2}}}{\partial x_k^1 \partial x_l^1} + O(r_1^{\beta-m}) + O(d^{\beta-1} r_1^{1-m}).$$

Or le premier terme du second membre vaut $O(r_1^{\beta-m})$, et il nous reste la formule (10_1) [dans laquelle r_1 peut être remplacé par r].

Dès lors, *la quasi-fonction de Neumann est*

$$V_P^{II} = \vartheta^{1-\frac{m}{2}} + \vartheta_1^{1-\frac{m}{2}}, \tag{10_2}$$

dont la dérivée conormale est nulle quand P est sur S (¹). Nous poserons à nouveau $\mathcal{V}_P^{II} = q V_P^{II}$ et nous aurons (s pouvant d'ailleurs être remplacé par d)

$$F_P \mathcal{V}_P^{II} = \mathcal{K}_1 s^{\beta-1} r^{1-m} + \mathcal{K}_2 r^{\beta-m}. \tag{10_3}$$

La fonction ϑ_1 est supposée *positive :* elle l'est certainement quand P est voisin de S, P_1 étant alors extérieur à D. Si elle s'annulait ailleurs, il suffirait de la modifier en lui ajoutant une puissance de s supérieure à 2 de façon que la formule (10_3) subsiste, par exemple λs^3, le nombre λ étant choisi de sorte que la nouvelle fonction ϑ_1 reste positive.

Il nous reste à montrer, d'après ce que nous avons dit au n° 2 (form. 2_3), que l'intégrale

$$\chi_P = -\int_S \mathcal{V}_P^{II} \varphi_{II}\, dS_{II} = -q\int_S \left(\vartheta^{1-\frac{m}{2}} + \vartheta_1^{1-\frac{m}{2}}\right) \varphi\, dS \tag{10_4}$$

admet comme dérivée conormale φ_0 en un point O de S. Pour cela prenons P *sur la conormale* N *en* O et cherchons, quand P tend vers O, la limite de la dérivée de χ suivant la direction N. Soit $P_1^\star$ $(x_k + y_k^\star)$ le symétrique de P par rapport à O. Si υ est l'abscisse de P sur N, $y_k^\star$ est égale à $\upsilon \left(\frac{\partial y_k}{\partial \upsilon}\right)_0$, d'où $y_k = y_k^\star + O(d^{1+\beta})$ et $\frac{\partial y_k}{\partial N} = \frac{\partial y_k^\star}{\partial N} + O(d^\beta)$.

(¹) *Remarques.* — 1° Si nous explicitons $\Sigma A_{ij}(\Pi)(x_i^1 - \xi_i)(x_j^1 - \xi_j)$, nous avons un terme $\Sigma A_{ij} y_i y_j$ qui s'annule sur S ainsi que ses dérivées premières, la dérivée normale seconde étant $\Psi^{-2}\Sigma A_{ij}\Psi'_{\alpha_i}\Psi'_{\alpha_j}$: on pourra donc remplacer ce terme par (*voir* p. 71)

$$k_3 J_1[P;\ \Psi^{-2}\Sigma A_{ij}(\Pi)\Psi'_{\alpha_i}\Psi'_{\alpha_j}][2k_1 J_3(P;\ 1)]^{-1},$$

sans que la formule (10_3) soit modifiée;

2° Si l'adjointe existe ainsi que la fonction ψ (*voir* n° 9, *Remarques*), on prendra

$$y_k = -2\psi\Sigma_i a_{ik}\psi'_{x_i}[\Sigma a_{ij}\psi'_{x_i}\psi'_{x_j} + \nu\psi]^{-1};$$

3° La fonction $\vartheta^{1-\frac{m}{2}} - \vartheta_1^{1-\frac{m}{2}}$ est quasi-fonction de Green pour le problème de Dirichlet.

On en déduit facilement que $\vartheta_1 = \vartheta_\Pi(P_1^\star, \Pi) + \tau$, avec $\tau = O(d^{1+\beta} r_1)$ et $\frac{\partial \tau}{\partial N} = O(d^\beta r_1)$. De là, d'une formule analogue à (7_2) et enfin de (3_6) on conclut sans peine $\left(\text{les } \alpha_i \text{ ayant leurs valeurs en O dans } \frac{\partial}{\partial N}\right)$

$$\frac{\partial\left[\vartheta^{1-\frac{m}{2}} + \vartheta_1^{1-\frac{m}{2}}\right]}{\partial N} = \frac{\partial\left[\vartheta_0^{1-\frac{m}{2}}(P, \Pi) + \vartheta_0^{1-\frac{m}{2}}(P_1^\star, \Pi)\right]}{\partial N} + O(d^\beta r^{1-m}).$$

La partie de l'intégrale $\frac{\partial \chi}{\partial N}$ contenant $O(d^\beta r^{1-m})$ est comparable à une intégrable $d^\beta J_0$ et par suite tend vers zéro avec d. Faisons, dans le reste, la transformation (T) relative à O (p. 47) : S devient S' et N la normale intérieure n' en O à S'. Sur N et n', χ est une fonction de s et

$$\frac{\partial \chi}{\partial N} = \frac{\partial \chi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial N}, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial n'} = \frac{\partial \chi}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial n'} \qquad \text{avec} \quad \frac{\partial s}{\partial n'} = 1, \quad \frac{\partial s}{\partial N} = \sqrt{\Psi} \quad \text{en O.}$$

D'où, quand P vient en O,

$$\frac{\partial \chi}{\partial N} = \sqrt{\Psi}\,\frac{\partial \chi}{\partial n'}.$$

D'autre part $dS = \frac{1+\eta}{\sqrt{\Psi}}\,dS'$ (*cf.* n° 7 *in fine*). Enfin $\vartheta_0(P, \Pi)$ et $\vartheta_0(P_1^\star, \Pi)$ deviennent $|P'\Pi'|^2$ et $|P_1'\Pi'|^2$, P' et P_1' étant symétriques par rapport à O sur la normale, de sorte que $dn' = -dn_1'$, dn' et dn_1' étant les valeurs algébriques de leurs déplacements correspondants sur n'.

Nous sommes ainsi ramenés à chercher la limite de

$$q\int_{S'}\left[\frac{\partial |P_1'\Pi'|^{2-m}}{\partial n_1'} - \frac{\partial |P'\Pi'|^{2-m}}{\partial n'}\right](1+\eta)\,\varphi\,dS'$$

quand P' tend vers O : or ceci est la discontinuité de l'intégrale

$$\int_{S'}\frac{\partial |P'\Pi'|^{2-m}}{\partial n'}\,q(1+\eta)\,\varphi\,dS',$$

c'est-à-dire de la dérivée normale (intérieure) d'un potentiel de simple couche de densité $q(1+\eta)\varphi$, et cela quand P' traverse S' de l'intérieur vers l'extérieur. On sait que cette discontinuité a pour valeur $(m-2)\sigma_m q \varphi_0$. D'où $\left(\frac{\partial \chi}{\partial N}\right)_0 = \varphi_0$. Q. E. D.

11. Résolution des problèmes mixtes simples par une équation

intégrale. — Voyons d'abord la solution du problème de Neumann pour l'équation (8_1) : elle est donnée (χ étant l'intégrale 10_4 et φ la dérivée conormale donnée sur S) par les équations [*cf.* (7_4) et (7_5)]

$$(11_1)\quad \left\{\begin{aligned} & u_P = \int_D \mathcal{V}_P^\Pi \varphi_\Pi \, d\omega_\Pi + \chi_P, \qquad \varphi_P - \lambda \int_D F_P \mathcal{V}_P^\Pi \varphi_\Pi \, d\omega_\Pi = \mathcal{F}_P \chi - f_P \\ & \text{avec} \\ & \qquad \mathcal{F}_P \chi = -\int_S F_P \mathcal{V}_P^M \varphi_M \, dS_M \qquad \text{et} \qquad \lambda = 1 ; \end{aligned}\right.$$

et, d'après (10_3), $\mathcal{F}\chi$ est limité par une somme du type $J_{1-\beta} + d^{\beta-1} J_0$.

D'autre part, l'expression (10_3) du noyau $F_P \mathcal{V}_P^\Pi$ nous montre que les noyaux itérés rentrent dans le type $s^{\beta-1} \mathcal{J}_P^Q$, avec

$$(11_2)\qquad \mathcal{J}_P^Q = \int_S \delta^{-\beta'} |P\Pi|^{\mu-m} |\Pi Q|^{\mu'-m} \mathcal{K}_P^\Pi \mathcal{K}_\Pi^Q \, d\omega_\Pi$$

($\beta' < 1$, μ et $\mu' > \beta'$). $\mathcal{J}$ conserve un sens quand P et Q sont *distincts*, même s'ils sont sur S : cela résulte de ce que nous avons dit de l'intégrale (8_7) [cas où β est $> \beta'$]. D'autre part, le cas où P et Q deviennent infiniment voisins en restant éloignés de S est celui des noyaux itérés classiques [$|\mathcal{J}| < (K)\,|PQ|^{\mu+\mu'-m}$ pour d_P et $d_Q > l$]. Il n'y a donc lieu d'envisager la limitation de $\mathcal{J}$ que lorsque d_P, d_Q et R (en posant $R = PQ$) *sont suffisamment petits.*

Pour cela considérons la sphère Σ de centre P et de rayon 2R : l'intégrale $\mathcal{J}_1$ relative au domaine Σ_1 commun à D et à Σ se transforme, par une homothétie de centre P et de rapport R^{-1}, en

$$R^{\mu+\mu'-\beta'-m} \int_{\Sigma'_1} \delta'^{-\beta'} |P\Pi'|^{\mu-m} |\Pi' Q'|^{\mu'-m} \mathcal{K}_P^{\Pi'} \mathcal{K}_{\Pi'}^{Q'} \, d\omega_{\Pi'},$$

les lettres Σ, Π, Q, ... accentuées et non accentuées se correspondant dans l'homothétie, donc $PQ' = 1$. Or, d'après ce que nous avons dit plus haut, l'intégrale de cette formule est bornée quelle que soit la position relative de S' et de Σ' (remarquer que, R étant borné, S' possède un champ de normales höldérien comme S). D'où $\mathcal{J}_1 = O(R^{\mu+\mu'-\beta'-m})$.

Passons au domaine $D - \Sigma_1$, pour lequel on a $P\Pi > 2R$ et aussi $\dfrac{P\Pi}{\Pi Q} < 2$. Si γ est un nombre fixe < 1, on peut déterminer un nombre λ_1 tel que, S^* étant la surface $s = \lambda_1 R$, on ait $\delta \leqq 2(1-\gamma)R$

pour tous les points Π situés entre S et S*, et $\delta > (K)R$ dans la région restante de $D - \Sigma_1$; dans cette région l'intégrale $\mathcal{J}$ correspondante, que nous appellerons $\mathcal{J}_2$, est donc limitée par

$$(K) R^{-\beta'} \int_{D-\Sigma_1} |P\Pi|^{\mu+\mu'-2m} d\omega_\Pi < (K) R^{\mu+\mu'-\beta'-m}.$$

Supposons maintenant Π entre S et S* : si M est le pied de δ, on a

$$PM < P\Pi + \delta < P\Pi\left(1 + \frac{\delta}{2R}\right) \leqq P\Pi(2-\gamma)$$

et

$$PM > P\Pi - \delta > 2\gamma R;$$

l'intégrale $\mathcal{J}_3$ correspondante est donc limitée par

$$(K) \int \delta^{-\beta'} |PM|^{\mu+\mu'-2m} d\omega_\Pi$$

et cette dernière intégrale, étendue au domaine compris entre S et S*, est elle-même moindre que

$$(K) R^{1-\beta'} \int_{S-S_1} |PM|^{\mu+\mu'-2m} dS_M,$$

$R^{1-\beta'}$ provenant de l'intégration de $\delta^{-\beta'}$ (¹) et S_1 étant la région de S pour laquelle on a $PM < 2\gamma R$ (région exclue, d'après $PM > 2\gamma R$).

Dès lors, pour $d \geqq \gamma R$, on a

$$\int_{S-S_1} \frac{dS_M}{|PM|^{2m-\mu-\mu'}} = J_\nu(P; 1) = O(d^{-\nu}) = O(R^{-\nu})$$

avec $\nu = m + 1 - \mu - \mu'$. Pour $d < \gamma R$, nous appellerons S_2 la région de S où $OM < \gamma R$: on a alors $PM < PO + OM < 2\gamma R$ (avec $PO = d$). S_2 appartient donc certainement à S_1 et, comme $\frac{OM}{PM}$ est borné, on peut écrire, OM étant $> \gamma R$ dans $S - S_2$,

$$\int_{S-S_1} \frac{dS_M}{|PM|^{2m-\mu-\mu'}} < (K) \int_{S-S_2} \frac{dS_M}{|OM|^{m-1+\nu}} = O(R^{-\nu}).$$

(¹) Ceci est à peu près évident. On peut, pour s'en convaincre, décomposer le domaine en domaines partiels pour chacun desquels un système d'axes [O] peut être utilisé comme pour (8_7), ce qui donnera la limitation indiquée.

Au total $\mathcal{I}_3 = \mathrm{R}^{1-\beta'}\mathrm{O}(\mathrm{R}^{-\nu}) = \mathrm{O}(\mathrm{R}^{\mu+\mu'-\beta'-m})$ et ceci est vérifié aussi par $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$, d'où

$$\mathcal{I}^{\mathrm{Q}}_{\mathrm{P}} = |\mathrm{PQ}|^{\mu+\mu'-\beta'-m}\mathcal{K}^{\mathrm{Q}}_{\mathrm{P}}. \tag{11$_3$}$$

Appliquant ce résultat à l'itération du noyau (10_3), on voit qu'il faudra composer avec $\mathcal{F}_\Pi \mathcal{V}^{\mathrm{Q}}_\Pi$ d'abord $\mathcal{K}_1 s^{\beta-1} r^{1-m}$, puis $\mathcal{K}_2 r^{\beta-m}$. Ces deux opérations nous donneront deux noyaux des types respectifs $s^{\beta-1}\mathcal{I}^{\mathrm{Q}}_{\mathrm{P}}$ et $\mathcal{I}^{\mathrm{Q}}_{\mathrm{P}}$, pour lesquels $\mu + \mu' - \beta'$ aura la valeur $1 + \beta$ dans la première opération et 2β dans la seconde, ce qui, au total, nous donnera le type $\mathcal{K}_1 s^{\beta-1} r^{1+\beta-m} + \mathcal{K}_2 r^{2\beta-m}$ (en rétablissant Π comme second point). L'exposant de r a donc augmenté de β et, au bout d'un certain nombre p d'itérations, on arrive à un noyau $\mathrm{N}^{(p)}$ de la forme $s^{\beta-1}\mathcal{K}^{\Pi}_{\mathrm{P}}$. Il se prête aux formules de Fredholm et admet une résolvante $\Gamma_p(\mathrm{P}, \Pi; \lambda)$ de la forme $s^{\beta-1}\dfrac{\mathrm{D}_p(\mathrm{P}, \Pi; \lambda)}{\mathrm{D}_p(\lambda)}$, avec ici $\lambda = 1$, Γ_p et D_p étant des fonctions entières absolument analogues aux fonctions de Fredholm relatives aux noyaux bornés (*cf.* Goursat, *Analyse*, t. III, et, pour une étude générale de noyaux non bornés, G. Giraud, *Bulletin Soc. math.*, 1933, p. 2 à 17).

Il résulte de là, suivant les raisonnements habituels à la théorie des équations de Fredholm, que la solution de notre équation intégrale sera donnée par

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi_{\mathrm{P}} = h_{\mathrm{P}} + \int_{\mathrm{D}} \Gamma_p(\mathrm{P}, \Pi; 1)\, h_\Pi\, d\omega_\Pi \\ &\text{avec} \\ &h_{\mathrm{P}} = (\mathcal{F}\chi - f)_{\mathrm{P}} + \int_{\mathrm{D}} [\mathrm{N}^{(1)} + \ldots + \mathrm{N}^{(p-1)}]^{\Pi}_{\mathrm{P}} (\mathcal{F}\chi - f)_\Pi\, d\omega_\Pi, \end{aligned}\right. \tag{11$_4$}$$

$\mathcal{F}\chi$ étant donné par (11_1) et valant $o(d^{\beta_1-1})$ avec $\beta_1 < \beta$. Or la somme $\mathrm{N}^{(1)} + \ldots + \mathrm{N}^{(p)}$ admettant la même forme (10_3) que $\mathrm{F}_{\mathrm{P}}\mathcal{V}$, l'intégrale figurant dans h_{P} se compose de deux termes se limitant comme (8_7) et dont l'ensemble vaut $\mathrm{O}(d^{\beta-1})$, donc $o(d^{\beta_1-1})$ [une limitation plus précise nous donnerait $\mathrm{J}_{1-2\beta} + d^{\beta-1}\mathrm{J}_{-\beta}$].

Par suite, d'après (11_4), h_{P} et φ_{P} valent $o(d^{\beta_1-1})$, et il nous faut vérifier que $\int_{\mathrm{D}} \mathcal{V}^{\Pi}_{\mathrm{P}} \varphi_\Pi\, d\omega_\Pi$ admet *une dérivée conormale nulle* sur S, ou encore que $\int_{\mathrm{D}} \dfrac{\partial \mathcal{V}^{\Pi}_{\mathrm{P}}}{\partial \mathrm{N}} \varphi_\Pi\, d\omega_\Pi$ tend vers zéro quand P tend vers O, P étant sur la conormale N en O. Or il résulte de la théorie du point-image $P_1(x_i^1)$ que, les dérivées premières des x_i^1 étant bornées dans $D+S$, celles de $\mathcal{V}_P^\Pi$ relativement à P valent $O(r^{1-m})+O(r_1^{1-m})$, donc $O(r^{1-m})$. Notre intégrale est donc limitée par $(K)\int_D \delta^{\beta_1-1} r^{1-m}\,d\omega$, ce qui entraîne sa convergence uniforme [cas (8_7) avec $\beta-\beta'=\beta_1>0$]. D'autre part, son élément différentiel étant nul pour P en O et Π dans D, la limite cherchée est bien zéro.

Le problème de Neumann est donc résolu pour (8_1). Nous avons vu que le problème mixte (2_1) se ramène à celui-ci par les formules (2_4), H étant $\neq 0$ et H, K, L continus; mais il nous faut examiner l'allure des coefficients de l'équation (8_1) après cette transformation.

Tout d'abord le lecteur vérifiera sans peine que si, dans le symbole définissant $\mathcal{E}u$, par exemple (4_6), on remplace u par vw, w étant une fonction pourvue de dérivées premières et secondes, $\mathcal{E}(vw)$ se compose d'abord de $w\mathcal{E}v$, puis des termes qui figurent dans $\mathcal{D}(vw)$ et ne contiennent pas les dérivées secondes de v. Ici $w=e^z$ et les dérivées premières (sauf la dérivée conormale) et secondes de w valent respectivement $O(\mathcal{L}d)$ et $O(d^{\beta-1})$. Après la transformation (2_4), nous obtiendrons donc une équation en v, commençant par $\mathcal{E}v$, dans laquelle les coefficients des $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ vaudront $O(\mathcal{L}d)$ et le coefficient de v sera $e^{-z}Fe^z=O(d^{\beta-1})$. Or ceci ne modifiera la forme du noyau de l'équation de Fredholm : il sera toujours du type (10_3).

Ces conclusions sont encore valables si les b_i, c, f, au lieu d'être continus dans $D+S$, *sont continus dans* D *et valent* $O(d^{\beta'-1})$: la résolution du problème de Neumann et du problème mixte est donc valable dans ce cas [on prendra $\beta<\beta'$ à cause des termes valant $O(d^{\beta'-1}\mathcal{L}d)$ dans Fe^z].

L'étude précédente nous permet de passer immédiatement au cas du *problème mixte* SIMPLE *pour les systèmes :* nous entendons par là que chaque fonction u_k doit vérifier sur S la condition $\dfrac{H_k\,\partial u_k}{\partial N}+K_k u_k=L_k$ (1)

(1) Pour ne pas allonger cet exposé, nous excluons ici le cas où les H_k peuvent s'annuler en certains points ou domaines de S, bien que notre méthode puisse alors s'appliquer moyennant certaines hypothèses.

ou la condition de Neumann; on est ramené à ce dernier cas comme précédemment. On opère alors de la même façon qu'au n° 9 en posant

$$(11_5)\qquad u_k(\mathrm{P}) = \int_{\mathrm{D}} \mathcal{V}_k(\mathrm{P}, \Pi)\, \varphi_k(\Pi)\, d\omega_\Pi + \chi_k(\mathrm{P}),$$

les $\mathcal{V}_k$ étant ici des quasi-fonctions de Neumann et les χ_k du type (10_4). Le système d'équations de Fredholm qu'on obtient ainsi *se ramène encore à une seule*, s'écrivant comme (9_4), analogue à celle que nous venons d'étudier, et dont la solution est du type (9_5), le noyau $\mathfrak{N}$ étant ici de la forme (10_3), avec n^2 déterminations, et g valant $o(d^{\beta_1 - 1})$.

12. Problèmes mixtes plus généraux. — A. Soit d'abord le cas d'un *problème de Dirichlet pour p des fonctions* u_k *et d'un problème mixte simple pour les autres :* ceci revient à se donner sur S *les valeurs de* $u_1, \ldots, u_p$ *et les dérivées conormales de* $u_{p+1}, \ldots, u_n$. Nous mettons u_k sous la forme (11_5), les $\mathcal{V}_k$ et les χ_k étant les fonctions utilisées dans le problème de Dirichlet pour $k \leqq p$ et dans le problème de Neumann pour $k > p$. Nous obtenons ainsi un système d'équations intégrales (9_3) où les noyaux sont des types (7_3) pour $k \leqq p$ et (10_3) pour $k > p$, et nous posons $\varphi_k = s^{-1}\bar{\varphi}_k$ pour $k \leqq p$. Ceci nous donne un nouveau système où les noyaux sont tous de la forme (10_3), les $\mathcal{K}_1$ étant nuls dans les p premières équations, d'après ce que nous avons vu au n° 8 [*cf.* (8_3) et suiv.].

Toutefois une difficulté se présente pour les seconds membres des équations intégrales : ils valent $\mathrm{O}(d^{\beta-1})$ pour $k \leqq p$, d'après (8_3), mais dans les p dernières équations tous les termes $\dfrac{b_{h_i}^k \partial\chi_h}{\partial x_i}$ pour lesquels h est $\leqq p$ (c'est-à-dire ceux qui contiennent les χ_h du type des problèmes de Dirichlet) valent $o(d^{-1})$. Cela résulte du n° 5 C et de la transformation (T) en O, pied de d, qui permet de ramener l'étude de ces coefficients à celle des dérivées des intégrales I_μ. Les seconds membres valent donc $o(d^{-1})$ et, pour pouvoir utiliser notre méthode, une hypothèse complémentaire est ici nécessaire : nous supposerons que les $b_{h_i}^k$ vérifient $(\mathrm{H}_{\beta'})$ *pour* $h \leqq p$ et $k > p$, *mais seulement entre un point de* S *et un point* P *de* D + S.

Soit, pour $h \leqq p$ et $k > p$, B_{hi}^k une fonction formée par les méthodes du n° 6 (problème I) et égale à b^k_{hi} sur S : nous écrirons

$$b^k_{hi} = (b^k_{hi} - B^k_{hi}) + B^k_{hi}.$$

Le premier terme vaut $O(d^{\beta'})$, car il s'annule sur S et vérifie $(H_{\beta'})$ entre P et le pied de d : ceci donne, dans les seconds membres des équations intégrales, des termes valant $O(d^{\beta'-1})$, donc là aucune difficulté.

Quant à B^k_{hi}, indéfiniment dérivable dans D, ses dérivées premières valent $O(d^{\beta'-1})$, et il faut étudier les termes de la forme $B^k_{hi}\dfrac{\partial\chi_h}{\partial x_i}$. Posons ($h$ variant de 1 à p)

$$\varphi_k = \overline{\varphi}_k + \Sigma_{hi} B^k_{hi}\frac{\partial\chi_h}{\partial x_i} \qquad (k = p+1, \ldots, p).$$

Dans l'équation de rang $k > p$, les termes connus contenant les $\dfrac{\partial\chi_h}{\partial x_i}$ (pour $h \leqq p$) deviennent [*cf.* (9_3) pour la notation]

$$\int_D \Sigma_{k'} F^k_{k'} \mathcal{V}_{k'} \Sigma_{hi} B^{k'}_{hi} \frac{\partial\chi_h}{\partial\xi_i} d\omega_\Pi \qquad (k' = p+1, \ldots, p),$$

$\mathcal{V}_{k'}$ étant ici la quasi-fonction de Neumann pour l'équation de rang k'. Chacun de ces termes est de la forme $\displaystyle\int_D F_P \mathcal{V}(P, \Pi) B(\Pi)\frac{\partial\chi}{\partial\xi} d\omega_\Pi$, en supprimant les indices pour simplifier l'écriture. Nous allons montrer que cette intégrale a un sens en considérant l'intégrale étendue au domaine D', de frontière S' représentée par $s = \varepsilon$, et faisant tendre ε vers zéro.

Faisons une décomposition de D' au moyen de la sphère σ de centre P et de rayon $\dfrac{d}{2}$: le noyau $F_P\mathcal{V}$ ayant la forme (10_3) et $\dfrac{\partial\chi}{\partial\xi}$ valant $o(\delta^{-1})$, l'intégrale étendue au volume de σ vaut

$$o(d^{-1})[d^{\beta-1} O(d) + O(d^\beta)] = o(d^{\beta-1})].$$

Quant au reste, nous intégrerons par parties, puis nous ferons tendre ε vers zéro. Ceci nous donne tout d'abord $\displaystyle\int_{S+\sigma} F_P \mathcal{V} B\chi\, dS$: l'intégrale relative à S est du type $d^{\beta-1} J_0 + J_{1-\beta}$ et vaut $O(d^{\beta-1}\mathcal{L}\, d)$, celle qui est étendue à l'aire de σ vaut $O(d^{\beta-1})$.

Il ne reste plus que $\int \chi \frac{\partial F_P \mathcal{V} B}{\partial \xi} d\omega_\Pi$ étendue au domaine extérieur à σ. On voit aisément, par une analyse analogue à celle qui nous a conduit à (10_3), que

$$\frac{\partial F_P \mathcal{V}_P^\Pi}{\partial \xi} = O(d^{\beta-1} r^{-m}) + O(r^{\beta-m-1});$$

l'intégration nous donnera donc $O(d^{\beta-1} \mathcal{L} d) + O(d^{\beta-1})$ pour la partie contenant $\frac{\partial F_P \mathcal{V}}{\partial \xi}$. D'autre part le terme en $\frac{\partial B}{\partial \xi}$ [ceci valant $O(\delta^{\beta'-1})$] se limite, d'après (10_3), au moyen d'intégrales (8_7), ce qui donne $O(d^{\beta-1})$.

Au total on voit que l'intégrale étudiée vaut $o(d^{\beta_1-1})$ avec $\beta_1 < \beta$; on remplacera donc β par un nombre plus petit, ou bien on fera pour $\bar{\varphi}_k$ un nouveau changement d'inconnue analogue au précédent et qui nous donnera cette fois dans le second membre un terme fini.

Nous obtenons en définitive un système d'équations de Fredholm en $\bar{\varphi}_k$ ($k = 1, \ldots, n$), avec des seconds membres valant $O(d^{\beta-1})$, qui se traitera comme dans le cas du problème de Neumann : la seule différence sera que certaines déterminations du noyau seront privées du terme en $\mathcal{K}_1$. Les fonctions φ_k déduites des $\bar{\varphi}_k$ seront de la forme $s_k^{\beta-2}\psi_k$ pour $k \leqq p$ et $s_k^{\beta-1}\psi_k + X_k$ pour $k > p$, les ψ_k étant continues dans D et bornées dans D + S et X_k étant la somme $\Sigma_{hi} B_{hi}^k \frac{\partial \chi_h}{\partial \xi_i}$ envisagée plus haut.

Les u_k se composent donc de termes des deux types étudiés dans les problèmes de Dirichlet et de Neumann, sauf ceux qui contiennent les X_k et qui sont de la forme $\int_D \mathcal{V} B \frac{\partial \chi}{\partial \xi} d\omega$, $\mathcal{V}$ étant ici une quasi-fonction de Neumann. Une intégration par parties montre immédiatement que cette intégrale a un sens et l'on prouve de même que, P étant sur la normale N en O, $\int_D \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial N} B \frac{\partial \chi}{\partial \xi} d\omega$ a un sens et tend vers zéro quand P tend vers O [1]. Tous les u_k satisfont donc à la question.

---

(1) Indiquons brièvement la méthode. Isolons de D le domaine sphérique σ de centre P et de rayon $\frac{d}{2}$: l'intégrale correspondante, d'après $\frac{\partial \chi}{\partial \xi} = o(\delta^{-1})$, vaut $o(d^{-1})d$ et par suite tend vers zéro avec D. D'autre part, nous pouvons supposer σ intérieure au

B. *Conditions linéaires mixtes les plus générales : on donne sur* S *n relations linéaires entre les* u_k *et leurs dérivées conormales.* — Supposons que le déterminant des $\frac{\partial u_k}{\partial N}$ soit $\neq 0$: nous pourrons écrire, les K et les L étant fonctions continues du point M de S,

$$\frac{\partial u_k}{\partial N} = K_{k1} u_1 + \ldots + K_{kn} u_n + L_k = R_k(M). \tag{12_1}$$

Mettons u_k sous la forme (11_5) en posant [avec $R_k(M)$ inconnu]

$$\chi_k(P) = -\int_D \mathfrak{V}_k(P, M) R_k(M)\, dS_M,$$

$\mathfrak{V}_k$ étant une quasi-fonction de Neumann, puis utilisons le procédé du n° 9 : il consiste à considérer toutes les fonctions désignées par une même lettre et affectées de l'indice k, variant de 1 à n, comme les n déterminations d'une même fonction dans D ou sur S ou, ce qui revient

---

domaine σ_0 commun à D et à une petite sphère de centre O. Intégrons maintenant par parties dans $D - \sigma$ en considérant $\frac{\partial \chi}{\partial \xi}$ comme la dérivée de $\chi - \chi_0$ et soit μ le maximum de $|\chi - \chi_0|$ dans σ_0 : nous obtenons $\int_S \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N} B(\chi - \chi_0) \alpha\, dS$ (α cosinus directeur de la normale), qui tend vers zéro quand P tend vers O, et une intégrale analogue étendue à l'aire de σ et qui est limitée par $(K)\mu$.

Il reste l'intégrale $\int_{D-\sigma} (\chi - \chi_0) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(B \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial N}\right) d\omega$, dont la partie relative à $D - \sigma_0$ tend vers zéro : nous n'avons donc plus à étudier que l'intégrale étendue à $\sigma_0 - \sigma$, la partie la plus délicate étant $\int_{\sigma_0 - \sigma} \frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial N\, \partial \xi} B(\chi - \chi_0)\, d\omega$. Envisageons alors la portion σ' de $\sigma_0 - \sigma$ intérieure à la sphère de centre P et de rayon $2d$: comme $\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial N\, \partial \xi}$ vaut $O(r^{-m})$ et que r est compris entre $\frac{d}{2}$ et $2d$, l'intégrale correspondante est limitée par $(K)\mu\, \mathcal{L}4$. Dans la portion restante $\sigma_0 - \sigma - \sigma'$, $\frac{\partial^2 \mathfrak{V}}{\partial N\, \partial \xi}$ est une fonction de P et Π s'annulant pour $d = 0$, à laquelle on peut appliquer la formule des accroissements finis entre O et P : ceci donne la limitation $(K)\mu\, d r^{-m-1}$, dont l'intégration donnera $\frac{(K)\mu\, d}{r}$, qui est $< 2(K)\mu$, puisque $r > \frac{d}{2}$. Or μ tend vers zéro avec le rayon de σ_0 : on peut donc prendre celui-ci, puis d, assez petits pour que l'intégrale étudiée soit aussi petite qu'on le veut. La propriété est donc démontrée.

au même, à envisager n domaines D_k ou S_k identiques à D ou S et dont chaque point P_k, Π_k ou M_k coïncide avec un même point P, Π ou M de D ou de S. Donc

$$(12_2) \qquad u_k(P) = u_{P_k} = \int_{D_k} \mathcal{V}_{P_k}^{\Pi_k} \varphi_{\Pi_k} \, d\omega_{\Pi_k} - \int_{S_k} \mathcal{V}_{P_k}^{M_k} R_{M_k} \, dS_{M_k}$$

(on peut d'ailleurs sans inconvénient supprimer l'indice de D et de S). φ_{P_k} est la détermination en P_k de la fonction φ donnée par une équation du type (9_4), avec

$$g_{P_k} = -\int_S \Sigma_h (F_h^k)_{P_k} \mathcal{V}_{P_k}^{M_h} R_{M_h} \, dS_{M_h}.$$

D'où, en remplaçant dans (9_5) P et Π par Π_k et Q_l et explicitant le domaine d'intégration ΣD (tous les indices variant de 1 à n),

$$(12_3) \qquad \begin{aligned} \varphi_{\Pi_k} = &-\int_S \Sigma_h (F_h^k)_{\Pi_k} \mathcal{V}_{\Pi_k}^{M_h} R_{M_h} \, dS_{M_h} \\ &-\int_D \Sigma_l \Phi_{\Pi_k}^{Q_l} \, d\omega_{Q_l} \int_S \Sigma_h (F_h^l)_{Q_l} \mathcal{V}_{Q_l}^{M_h} R_{M_h} \, dS_{M_h}. \end{aligned}$$

Portant cette valeur de φ_{Π_k} dans (12_2) *et plaçant* P_k *sur* S, il vient

$$\begin{aligned} u_{P_k} = &-\int_S \mathcal{V}_{P_k}^{M_k} R_{M_k} \, dS_{M_k} - \int_D \mathcal{V}_{P_k}^{\Pi_k} \, d\omega_{\Pi_k} \int_S \Sigma_h (F_h^k)_{\Pi_k} \mathcal{V}_{\Pi_k}^{M_h} R_{M_h} \, dS_{M_h} \\ &-\int_D \mathcal{V}_{P_k}^{\Pi_k} \, d\omega_{\Pi_k} \int_D \Sigma_l \Phi_{\Pi_k}^{Q_l} \, d\omega_{Q_l} \int_S \Sigma_h (F_h^l)_{Q_l} \mathcal{V}_{Q_l}^{M_h} R_{M_h} \, dS_{M_h} \\ = &-\int_S \mathcal{V}_{P_k}^{M_k} R_{M_k} \, dS_{M_k} - \int_S \Sigma_h \mathcal{L}_{P_k}^{M_h} R_{M_h} \, dS_{M_h}, \end{aligned}$$

en posant

$$(12_4) \qquad \mathcal{L}_{P_k}^{M_h} = \int_D \mathcal{V}_{P_k}^{\Pi_k} (F_h^k)_{\Pi_k} \mathcal{V}_{\Pi_k}^{M_h} \, d\omega_{\Pi_k} + \int_D \mathcal{V}_{P_k}^{\Pi_k} \, d\omega_{\Pi_k} \int \Sigma_l \Phi_{\Pi_k}^{Q_l} (F_h^l)_{Q_l} \mathcal{V}_{Q_l}^{M_h} \, d\omega_{Q_l}.$$

Explicitant les R on a donc (en supprimant les indices des lettres M, devenus inutiles)

$$\begin{aligned} u_{P_k} = &-\int_S (\mathcal{V}_{P_k}^{M} L_k + \Sigma_h \mathcal{L}_{P_k}^{M} L_h)_M \, dS_M - \int_S \mathcal{V}_{P_k}^{M} (K_{k1} u_1 + \ldots + K_{kn} u_n)_M \, dS_M \\ &-\int_S \Sigma_h \mathcal{L}_{P_k}^{M} (K_{h1} u_1 + \ldots + K_{hn} u_n)_M \, dS_M. \end{aligned}$$

Posons

$$r_{P_k} = -\int_S (\mathcal{V}^{M}_{P_k} L_k + \Sigma_h \mathcal{L}^{M}_{P_k} L_h)\, dS_M \qquad \text{et} \qquad \mathcal{M}^{M_l}_{P_k} = \mathcal{V}^{M_l}_{P_k} K_{kl} + \Sigma_h \mathcal{L}^{M_h}_{P_k} K_{hl}$$

(les L étant pris en M et les K en M_l). Notre équation s'écrit alors

$$(12_5) \qquad u_{P_k} + \int_S \Sigma_l \mathcal{M}^{M_l}_{P_k} u_{M_l}\, dS_{M_l} = r_{P_k}.$$

Les valeurs des u_k sur S sont donc solutions d'un *système d'équations de Fredholm* (le domaine d'intégration étant S); ici encore nous pouvons *le ramener à une seule* en envisageant le domaine ΣS formé de n domaines identiques à S (P *étant sur* S) :

$$(12_6) \qquad u_P - \mu \int_{\Sigma S} \mathcal{M}^{M}_{P} u_M\, dS_M = r_P \qquad \text{avec } \mu = -1.$$

Quelle est la forme du noyau $\mathcal{M}$? Son expression montre qu'il contient d'abord des fonctions $\mathcal{V}$ valant $O(r^{2-m})$ et des fonctions $\mathcal{L}$ définies par (12_4) : dans cette expression le premier terme est du même type $\int_D \mathcal{V}^{\Pi}_{P} F_{\Pi} \mathcal{V}^{M}_{\Pi}\, d\omega_{\Pi}$ que s'il s'agissait d'une seule équation $Fu = 0$. Ceci est limité par

$$(K)\int_D |P\Pi|^{2-m}[\delta^{\beta-1}|\Pi M|^{1-m} + |\Pi M|^{\beta-m}]\, d\omega_{\Pi},$$

c'est-à-dire d'abord une composition du type $\mathcal{J}^{M}_{P}$ [*cf.* (11_3)] donnant $|PM|^{2+\beta-m}$, puis une composition de deux noyaux classiques donnant également $|PM|^{2+\beta-m}$.

Le dernier terme de (12_4) est du type

$$\int_D F_Q \mathcal{V}^{M}_{Q}\, d\omega_Q \int_D \mathcal{V}^{\Pi}_{P} \Phi^{Q}_{\Pi}\, d\omega_{\Pi}$$

(en changeant l'ordre d'intégration), et ceci admet comme limitation

$$(K)\int_D (d^{\beta-1}_{Q}|MQ|^{1-m} + |MQ|^{\beta-m})\, d\omega_Q$$
$$\times \int_R |P\Pi|^{2-m}[\delta^{\beta-1}|\Pi Q|^{1-m} + |\Pi Q|^{\beta-m}]\, d\omega_{\Pi},$$

car Φ_P^{II} a la même expression (10_3) que $F_P \mathcal{V}_P^{II}$. La seconde intégrale donne $|PQ|^{2+\beta-m}$, comme nous venons de le voir et, en composant avec le premier élément différentiel, l'intégration donnera $|PM|^{2+2\beta-m}$.

Au total $\mathfrak{M}_P^M = |PM|^{2-m}\mathcal{K}_P^M$, cas classique pour le domaine S à $m-1$ dimensions. Si donc $\mu = -1$ n'est pas valeur caractéristique pour ce noyau, l'équation (12_6) nous donnera les valeurs de u_k sur S et nous sommes ramenés à un problème de Dirichlet ou, mieux encore (ce qui nous dispensera de calculer une nouvelle résolvante), les R étant connus, *les u_k sont donnés par* (12_2), où les φ ont les valeurs (12_3), P *étant cette fois dans* D.

Mais nous avons supposé que, dans l'équation du type (9_4), $\lambda = 1$ n'était pas valeur caractéristique. On peut toujours ramener le problème à ce cas en écrivant une des conditions (12_1), la première par exemple, sous la forme

$$\frac{\partial u_1}{\partial N} + \varkappa u_1 = (K_{11} + \varkappa)u_1 + K_{12}u_2 + \ldots + K_{1n}u_n + L_1$$

et poser $u_1 = v_1 z$ avec $\frac{\partial z}{\partial N} + \varkappa = 0$ sur S [*cf.* (2_4)], ce qui nous donne des conditions de la forme (12_1) pour $v_1, u_2, \ldots, u_n$, mais avec une modification dans les coefficients des équations aux dérivées partielles. On pourra toujours choisir le paramètre $\varkappa$ de telle sorte que la valeur $\lambda = 1$ ne soit pas caractéristique pour le noyau de la nouvelle équation en φ.

Cas particuliers. — C. *On donne sur* S *les valeurs de* $u_1, \ldots, u_p$ *et* $n-p$ *relations linéaires entre* $\frac{\partial u_{p+1}}{\partial N}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial N}, u_{p+1}, \ldots, u_n$. Ce cas se déduit du précédent en supposant que, pour h et $k \leqq p$, les $\mathcal{V}_k$ sont des quasi-fonctions de Green, comme au n° 9, et les K_{kh} sont nuls [et en remplaçant $-R_{M_k}$ par u_k et $\mathcal{V}$ par sa dérivée conormale dans (12_2) pour $k \leqq p$] : la méthode est donc semblable, sauf qu'on a $k > p$ dans (12_5).

D. *On donne, sur* S, $u_1, \ldots, u_p$ *et* $n-p$ *relations linéaires entre* $u_{p+1}, \ldots, u_n$ *et les dérivées conormales de tous les* u_k. Supposons ces relations résolues en $\frac{\partial u_k}{\partial N}$ pour $k > p$:

$$(12_7) \qquad \frac{\partial u_k}{\partial N} = K'_{k1}\frac{\partial u_1}{\partial N} + \ldots + K'_{kp}\frac{\partial u_p}{\partial N} + K_{k,p+1}u_p + \ldots + K_{kn}u_n.$$

Nous opérons comme pour C avec les différences suivantes : pour $k \leqq p$, les u_k sont de la forme (9_2), mais avec des χ_k analogues à la fonction (6_1) et en supposant les valeurs données des u_k sur S *pourvues de dérivées premières continues*, de façon que les $\frac{\partial \chi_k}{\partial \mathrm{N}}$ existent sur S et soient continues. On pourra alors dériver les équations (9_2) suivant la direction N, P étant sur S, ce qui donne p équations auxquelles on adjoint les équations (12_2) pour $k > p$, dans lesquelles les R désignent les seconds membres de (12_7). On a ainsi n équations qui, en remplaçant les φ par leurs valeurs analogues à (12_3), constituent un système de n équations de Fredholm, se ramenant à une seule toujours par le même procédé et donnant, P étant sur S, les valeurs de $\frac{\partial u_1}{\partial \mathrm{N}}, \ldots, \frac{\partial u_p}{\partial \mathrm{N}}$, $u_{p+1}, \ldots, u_n$ (sauf dans les cas singuliers). Le calcul des u_k dans D s'achève par les formules (9_2), (12_2), (12_3).

Remarque. — Nous avons supposé dans le cas A, ainsi que dans C, que les b_{hi}^k, pour $h \leqq p$ et $k > p$, vérifient $(\mathrm{H}_{\beta'})$ entre un point de S et un point de D. Cependant *la continuité des* b_{hi}^k *suffit* si les valeurs données des u_k sur S, pour $k \leqq p$, *vérifient* $(\mathrm{H}_{\beta'})$. On peut alors, en effet, remplacer les χ_k correspondants par des fonctions du type (6_1), dont les dérivées premières et secondes valent respectivement $\mathrm{O}(d^{\beta'-1})$ et $\mathrm{O}(d^{\beta'-2})$, et le calcul des φ_k se fait alors sans difficulté. La continuité des b_{hi}^k suffit en particulier dans le cas des *données nulles* ($\chi_k \equiv 0$ pour $k \leqq p$).

V. — Questions d'unicité. Cas non linéaires.

13. Démonstration de l'unicité par un autre procédé de résolution. — Nous envisagerons, dans ce qui suit, des solutions continues ainsi que leurs dérivées premières figurant dans les équations données.

La solution du problème de Dirichlet est *unique* pour l'équation (8_1) *lorsque c est négatif*. Cela résulte de ce qu'une solution u de l'équation sans second membre s'annulant sur S est nulle dans D : en effet, si u admettait en P un maximum positif, on voit, en prenant $\mathcal{E}u$ sous la forme (4_6), que $\mathcal{E}_{\mathrm{P}} u$ serait $\leqq 0$, avec $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ et $cu < 0$, d'où $\mathcal{F} u < 0$, ce qui est impossible; même conclusion pour un minimum négatif en changeant u en $-u$. D'où $u = 0$ dans D, et ce résultat s'étend au cas de $c \leqq 0$ par l'artifice classique qui consiste à poser $u = zu_1$, en choisissant $z > 0$ et $Fz < 0$ dans $D + S$.

La solution de (8_1) étant unique pour $c \leqq 0$, elle admettra *nécessairement* la forme (7_4) et $\lambda = 1$ ne sera pas valeur singulière pour (7_5), sans quoi l'équation (7_5) sans second membre admettrait une solution non nulle qui nous donnerait une solution de $\mathcal{F} = 0$ nulle sur S, ce qui est impossible $\left(\text{noter que } \int_D \mathcal{V}_P^\Pi \varphi_\Pi \, d\omega_\Pi \equiv 0 \text{ exigerait } \varphi \equiv 0,\right.$ $\left.\mathcal{V} \text{ étant positif}\right)$. Nous pouvons donc écrire

$$\varphi_P = g_P + \int_D \Phi_P^\Pi g_\Pi \, d\omega_\Pi \quad \text{avec} \quad g = \mathcal{F}\chi - f,$$

Φ_P^Π étant la résolvante de $F_P \mathcal{V}_P^\Pi$ pour $\lambda = 1$. En substituant dans (7_4) on en déduit aisément

$$(13_1) \quad u_P = \int_D \Gamma_P^\Pi (\mathcal{F}\chi - f)_\Pi \, d\omega_\Pi + \chi_P \quad \text{avec} \quad \Gamma_P^\Pi = \mathcal{V}_P^\Pi + \int_D \mathcal{V}_P^Q \Phi_Q^\Pi \, d\omega_Q$$

[d'après (1_3) et (1_4), Γ est la fonction de Green de (E), au facteur q près]. Pour le calcul de Γ et de u, il suffit que les a_{ij} soient *höldériens* dans $D + S$, les b_i et c *continus* dans D et pouvant valoir $O(d^{\beta-1})$ et $O(d^{\beta-2})$; quant à f, il suffit qu'il soit continu dans D et que $\int_D \Gamma_P^\Pi f_\Pi \, d\omega_\Pi$ *ait un sens.*

Envisageons alors le *problème de Dirichlet* pour le système d'équations (9_1) et soit $(\Gamma^k)_P^\Pi$ la fonction Γ relative à $\mathcal{E}^k u = 0$ (cas non singulier, car ici $c = 0$). En faisant passer dans le second membre tous les termes autres que $\mathcal{E}^k u_k$ et appliquant (13_1), on obtient (λ ayant la valeur 1)

$$(13_2) \quad u_k(P) = \lambda \int (\Gamma^k)_P^\Pi \left(\Sigma_{hi} b_{hi}^k \frac{\partial u_h}{\partial x_i} + \Sigma_h c_h^k u_h\right)_\Pi d\omega_\Pi + u_k^*(P)$$

en posant

$$u_k^*(P) = \int_D (\Gamma^k)_P^\Pi (\mathcal{E}_\Pi^k \chi_k - f_\Pi^k) \, d\omega_\Pi + \chi_k(P);$$

u_k^* n'est autre que la solution de $\mathcal{E}^k u = f^k$ égale à u_k sur S [*cf.* (13_1)].

Posant $\Sigma_{hi} b^k_{hi} \dfrac{\partial u_h}{\partial x_i} + \Sigma_h c^k_h u_h = \dfrac{v_k}{s_k}$ et dérivant les n équations analogues par rapport aux x_i, nous obtenons par des combinaisons linéaires évidentes

$$(13_3) \qquad v_k(\mathrm{P}) = \lambda \int_{\mathrm{D}} \frac{s_k}{\sigma_k} \left(\Sigma_{hi} b^k_{hi} \frac{\partial \Gamma^h}{\partial x_i} + \Sigma_h c^k_h \Gamma^h \right) v_h \, d\omega_\Pi + v^*_k(\mathrm{P}),$$

Γ^h étant fonction de P et Π, b^k_{hi}, c^k_h, v_h fonctions de Π et v^*_k défini avec les u^*_h par la même formule que v_k avec les u_h.

Nous trouvons donc un système d'équations de Fredholm se ramenant à une seule par le procédé déjà suivi :

$$(13_4) \qquad v_\mathrm{P} - \lambda \int_{\Sigma\mathrm{D}} \mathcal{Q}^\Pi_\mathrm{P} v_\Pi \, d\omega_\Pi = v^*_\mathrm{P},$$

le noyau $\mathcal{Q}$ étant défini à l'aide de celui de (13_3) comme $\mathcal{N}$, dans (9_4), a été défini à l'aide de (9_3). La limitation de $\mathcal{Q}$ est du même type que celle de $\dfrac{d}{\delta} \dfrac{\partial \Gamma}{\partial x_i}$, égal d'après (13_1) à

$$\frac{d}{\delta} \frac{\partial \mathcal{V}^\Pi_\mathrm{P}}{\partial x_i} + \frac{d}{\delta} \int_{\mathrm{D}} \frac{\partial \mathcal{V}^\mathrm{Q}_\mathrm{P}}{\partial x_i} \Phi^\Pi_\mathrm{Q} \, d\omega_\mathrm{Q},$$

la fonction Φ^Π_P ayant ici la même forme $d^{-1} \delta r^{\beta - m} \mathcal{K}$ que celle qui figure dans (9_5). Or (8_9) nous montre sans peine que $\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_i}$ vaut $d^{-1} \delta \mathrm{O}(r^{1-m})$; donc $\mathcal{Q}^\Pi_\mathrm{P}$ vaut

$$\mathrm{O}(r^{1-m}) + \int_{\mathrm{D}} \mathrm{O}(\mathrm{PQ}^{1-m})\, \mathrm{O}(\mathrm{Q}\Pi^{\beta - m}) \, d\omega_\mathrm{Q},$$

c'est-à-dire $\mathrm{O}(r^{1-m})$ car l'intégrale vaut $\mathrm{O}(r^{1+\beta-m})$.

Lorsque tous les f^k sont nuls et les u_k nuls sur S, les u^*_k et les v^*_k sont nuls aussi et $v^* \equiv 0$. Si $\lambda = 1$ *n'est pas valeur singulière*, l'équation (13_4) sans second membre n'admet alors que la solution $v = 0$ et tous les u_k sont nuls d'après (13_2). Donc la solution du problème de Dirichlet est *en général* unique, puisque toutes les équations que nous avons écrites sont vérifiées *nécessairement* par les u_k. La méthode des n^os^ 8 et 9 ne nous renseignait pas sur l'unicité, car nous avions pris *a priori* les u_k sous la forme (9_2); nous savons maintenant dans les cas non singuliers qu'ils *doivent* avoir cette forme.

Nous venons d'obtenir, en somme, une *seconde méthode* de résolution du problème de Dirichlet, mais cette fois *en deux étapes* : calcul des Γ^k à l'aide de résolvantes de Fredholm, puis résolution de (13_4) et calcul des u_k par (13_2). La fonction $v^\star$ est d'ailleurs bornée : il suffit, pour le voir, d'examiner les $v_k^\star$, qui se composent de termes tendant vers zéro avec d, sauf les produits $s_k \frac{\partial u_k^\star}{\partial x_i}$. Or $u_k^\star$, comme nous l'avons dit, est la solution (que nous savons *unique*) de $\mathcal{E}^k u = f$ prenant sur S la même valeur que u_k, et elle admet donc l'expression (9_2) : les dérivées premières du premier terme sont bornées dans $D + S$ et celles du second valent $O(d^{-1})$, comme on l'a déjà vu ; leur produit par d (ou s_k) est borné. Donc $v^\star$ est borné et l'équation (13_4) est d'un type classique. Nous montrerons dans le n° 14 *l'équivalence complète* des deux méthodes dans tous les cas, *singuliers ou non*.

Abordons maintenant la question d'unicité pour le problème de Neumann ou le *problème mixte* relatif à l'équation (8_1). Lorsque $f = 0$ et $c < 0$, la condition aux limites homogène $H\frac{\partial u}{\partial N} + Ku = 0$ *entraîne* $u = 0$ *dans* D *si* $\frac{K}{H} < 0$: en effet, nous avons vu que u^2 ne peut atteindre son maximum qu'en un point de S, où l'on a par suite $\frac{u\,\partial u}{\partial N} < 0$, ce qui est incompatible avec la condition donnée. D'où l'*unicité* pour $f \neq 0$ et une condition non homogène.

Cette propriété s'étend au problème de Neumann. Soit $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$ avec $f = 0$: posons $u = (z + k)v$, d'où $(z + k)\frac{\partial v}{\partial N} + v\frac{\partial z}{\partial N} = 0$, et choisissons la fonction z et la constante k de manière à avoir $\frac{\partial z}{\partial N} < 0$ sur S et $z + k > 0$, $Fz + ck < 0$ dans D [1] : alors l'équation en v rentrera

[1] Le choix de z peut se faire d'une infinité de façons. Par exemple on peut déterminer, au moyen d'une quadrature (probl. II, n° 6), une fonction z dont la dérivée normale soit négative, avec $z = 0$, sur une surface S′ très voisine de S et extérieure à D, de manière que $\frac{\partial z}{\partial N}$ soit < 0 sur S ; puis on choisit k tel que $z + k$ soit > 0 et $Fz + ck < 0$ dans D. On peut aussi déterminer z comme solution d'un problème de Neumann à donnée négative sur S et relatif à l'équation $Fz = c'z$, c' étant tel qu'on ne soit pas dans un cas singulier ; on prend ensuite k de façon qu'on ait $z + k > 0$ et $Fz + ck = c'z + ck < 0$.

L'unicité de la solution s'étend au cas où l'on a $c \leqq 0$ et $\frac{K}{H} \leqq 0$ mais non identiquement dans le cas précédent et l'on aura $v = 0$ et $u = 0$ dans D, d'où l'*unicité de la solution du problème de Neumann quand c est négatif.*

Les raisonnements que nous avons faits dans le cas des systèmes pour le problème de Dirichlet sont donc également valables pour celui de Neumann (et par suite pour les problèmes mixtes simples) en mettant les premiers membres sous la forme $\mathcal{E}^k u_k - \gamma u_k$ avec $\gamma > 0$. Ici il suffira d'ailleurs d'introduire comme inconnues v_k au lieu de $\frac{v_k}{s_k}$, et l'on aboutira à une équation (13_4) où $\mathfrak{Q}$ aura une limitation analogue à celle de $\frac{\partial G}{\partial x_i}$, G étant cette fois la fonction de Neumann, qui est du type (1_3) avec $\frac{\partial V}{\partial x_i} = O(r^{1-m})$ et $\Phi_P^{II} = d^{\beta-1} O(r^{1-m}) + O(r^{\beta-m})$. On en conclut immédiatement que $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ vaut $O(r^{1-m})$ [car l'intégrale de (1_3), en utilisant (11_3), vaut $O(r^{1+\beta-m})$]. La nouvelle équation (13_4) admet donc la même forme de noyau que la précédente, d'*où les mêmes conclusions d'unicité* si $\lambda = 1$ n'est pas valeur singulière.

Nous n'insisterons pas sur les problèmes du n° 12 : l'unicité, pour le problème A, se traitera comme dans ce qui précède, en introduisant les conditions de Hölder supplémentaires pour les b_{hi}^k ($h \leq p$, $k > p$). Quant aux problèmes B, C, D, la démonstration de l'unicité ne nécessite pas d'autre méthode que celle du n° 12, car nous savons maintenant que, d'après le dernier alinéa de B, les u_k ont *nécessairement* la forme (12_2) dans B (ou une forme analogue dans C et D). L'unicité a donc lieu si $\mu = -1$ n'est pas valeur singulière pour (12_6).

14. **Cas singuliers.** — Ce sont ceux où $\lambda = 1$ *est valeur singulière d'ordre p* dans l'équation du type (9_4) (en supposant donnés sur S les u_k ou leurs dérivées conormales). Alors les équations homogènes associées

$$(14_1) \qquad Z_P - \int_D \mathcal{N}_P^{II} Z_{II}\, d\omega_{II} = 0, \qquad z_P - \int_D \mathcal{N}_{II}^{P} z_{II}\, d\omega_{II} = 0$$

---

nuls tous deux (*Journal de Math.*, 1930, p. 74. Je signale quelques *errata* : au commencement des lignes 3 et 21, il faut lire respectivement : $v_1 F(z)$, et $F(z) < 0$; p. 75, ligne 18, lire : $u +$ const., et ligne 9, après *Neumann*, ajouter : *à donnée nulle*).

admettent respectivement p solutions linéairement indépendantes Z^i et z^i $(i=1, \ldots, p)$ ayant chacune n déterminations Z^i_k et z^i_k $(k=1, \ldots, n)$.

Les fonctions

$$U^i_k(P) = \int_D (\mathfrak{V}_k)^Q_P Z^i_k(Q)\, d\omega_Q \tag{14_2}$$

constituent alors, pour chaque valeur de i, un système de solutions des équations (9_1) sans seconds membres $(f^k=0)$ correspondant à des *données nulles sur* S. Les p fonctions U^i_k correspondant à chaque valeur de k sont d'ailleurs linéairement distinctes, car si l'on avait $\Sigma_i \mu_i U^i_k = 0$, en remplaçant Z^i_k par $\Sigma_i \mu_i Z^i_k$ dans l'intégrale de (14_2), on trouverait zéro et ceci exigerait $\Sigma_i \mu_i Z^i_k \equiv 0$ (d'aprè $\mathfrak{V}^k > 0$), ce qui est impossible puisque les Z^i sont linéairement indépendantes dans D.

Supposons maintenant les données, par exemple les u_k, *non nulles :* l'équation (9_4) n'admettra de solution que si le second membre est orthogonal aux p fonctions z^i dans le domaine ΣD, *ce qui donne les p conditions* $(i=1, \ldots, p)$

$$\int_D \Sigma_k (z^i_k g_k)_P\, d\omega_P = 0$$

avec [*cf.* (9_3)]

$$g_k = \int_S \Sigma_h (F^k_h)_P \frac{\partial (\mathfrak{V}_k)^M_P}{\partial N_M} u_k(M)\, dS_M - f^k.$$

Ces conditions imposées aux u_k sur S peuvent s'écrire aussi

$$\int_S \Sigma_k (Y^i_k u_k)_M\, dS_M = \int_D \Sigma_k (z^i_k f^k)_P\, d\omega_P$$

en posant

$$(Y^i_k)_M = \int_D \Sigma_h (F^k_h)_P \frac{\partial (\mathfrak{V}_k)^M_P}{\partial N_M} z^i_k(P)\, d\omega_P$$

et *la solution sera de la forme* $u + \Sigma C_i U^i$, les C_i étant p constantes.

On obtient *des conditions analogues pour le problème de Neumann :* il suffit, dans g_k, de remplacer $\frac{\partial (\mathfrak{V}_k)^M_P}{\partial N_M} u_k$ par $-(\mathfrak{V}_k)^M_P \frac{\partial u_k}{\partial N}$, $\mathfrak{V}_k$ étant la quasi-fonction de Neumann. Enfin dans le problème A du n° 12, on aura les deux formes de g_k.

Nous venons d'examiner les cas singuliers rencontrés dans la méthode des Chapitres III et IV. Si pour résoudre les problèmes que nous avons envisagés dans le présent numéro, nous employons la *seconde* méthode (celle du n° 13), conduisant à une équation telle que (13_4), et si $\lambda = 1$ est valeur singulière dans cette équation, nous obtenons à nouveau des systèmes de solutions pour les problèmes à données nulles et des conditions d'orthogonalité pour des données non nulles. Mais ici nous savons que le problème est *complètement* résolu en vertu du caractère nécessaire des formules obtenues. Pour être sûr que la première méthode, qui est plus simple, nous donnera la solution complète, même dans les cas singuliers, il faut montrer *l'équivalence des deux méthodes*.

Appelons (F_1) et (F_2) les équations de Fredholm correspondantes et supposons que $\lambda = 1$ soit valeur singulière pour celles-ci, les ordres respectifs étant p_1 et p_2 et les cas non singuliers correspondant à p_1 ou p_2 *nuls*. D'après (F_2), il y a p_2 (et p_2 seulement) systèmes de solutions linéairement distincts correspondant aux données nulles, et les données non nulles devront vérifier p_2 conditions d'orthogonalité. Or (F_1) fournit p_1 systèmes distincts de solutions à données nulles : on a donc certainement $p_1 \leqq p_2$. D'autre part (F_1) donne une certaine forme de solution pour des données non nulles, avec p_1 conditions : ce nombre p_1 ne peut être inférieur au nombre p_2 de conditions nécessaires trouvées avec (E_2), donc $p_1 \geqq p_2$. D'où $p_1 = p_2$. Par suite *la première méthode ne laisse échapper aucune solution.*

Quant aux problèmes B, C, D du n° 12, ils conduisent à une équation telle que (12_6) donnant les valeurs des u_k (ou de leurs dérivées conormales) sur S. Si $\mu = -1$ est valeur singulière d'ordre q, il y a q systèmes distincts de solutions correspondant à des conditions aux limites *homogènes* [par exemple tous les L_k nuls dans (12_1)]. Si les conditions ne sont pas toutes homogènes, il y a q conditions d'orthogonalité comme précédemment.

15. **Cas non linéaires.** — Nous serons brefs sur ce point : l'instrument analytique le plus fécond dans ce cas est la méthode des approximations successives, dont la technique est classique depuis les mémorables travaux de M. Picard.

Supposons d'abord *les conditions aux limites non linéaires*, par exemple

$$(15_1) \qquad \frac{\partial u_k}{\partial N} = R_k(M;\, u_1, \ldots, u_n) \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

M étant sur S. Nous opérerons comme au n° 12 B, ce qui nous conduira aux équations, P étant aussi sur S et les R étant pris en M,

$$(15_2) \qquad u_k(\mathrm{P}) = -\int_{\mathrm{S}} [\mathcal{V}_k(\mathrm{P},\mathrm{M})\mathrm{R}_k + \Sigma'_h \mathcal{L}_{kh}(\mathrm{P},\mathrm{M})\mathrm{R}_h]\, d\mathrm{S}_{\mathrm{M}},$$

en posant $\mathcal{V}^{\mathrm{M}_k}_{\mathrm{P}_k} = \mathcal{V}_k(\mathrm{P},\mathrm{M})$ et $\mathcal{L}^{\mathrm{M}_h}_{\mathrm{P}_k} = \mathcal{L}_{kh}(\mathrm{P},\mathrm{M})$ [*cf.* (12_4)], ces deux fonctions valant d'ailleurs $\mathrm{O}(\mathrm{PM}^{2-m})$.

Les équations (15_2) constituent un système de n équations intégrales en $u_1, \ldots, u_n$, qu'on résoudra par approximations successives en supposant $|\mathrm{R}_k| < \mathrm{R}$ et les R_k lipschitziens par rapport aux u ($|\Delta \mathrm{R}_k| < \mathrm{K}\Sigma_h |\Delta u_h|$) pour $|u_k| < \mathrm{M}$. Désignons par $\mathrm{A}|\mathrm{PM}|^{2-m}$ la limitation des $\mathcal{V}$ et des $\mathcal{L}$, par l le maximum de $\mathrm{A}\int_{\mathrm{S}} |\mathrm{PM}|^{2-m} d\mathrm{S}_{\mathrm{M}}$, par $u_{k,p}$, $\mathrm{R}_{h,p}$, ... la $p^{\text{ième}}$ approximation de u_k, R_h, ..., et posons

$$\delta_p u_k = u_{k,p+1} - u_{k,p}, \qquad \delta_p \mathrm{R}_h = \mathrm{R}_{h,p+1} - \mathrm{R}_{h,p};$$

soient enfin M_p le maximum des $|u_{k,p}|$ et Δ_p celui des $|\delta_p u_k|$.

On aura des équations analogues à (15_2) où u_k et les R_h seront remplacés dans les premiers et seconds membres respectivement par $u_{k,p}$ et $\mathrm{R}_{h,p-1}$, puis par $\delta_p u_k$ et $\delta_{p-1}\mathrm{R}_h$. On pourra donc écrire

$$\mathrm{M}_p < (n+1)l\mathrm{R}, \qquad \Delta_p < n(n+1)l\mathrm{K}\,\Delta_{p-1}.$$

D'où les conditions $(n+1)l\mathrm{R} < \mathrm{M}$ et $n(n+1)l\mathrm{K} < 1$ qui assureront, avec $|u_k| < \mathrm{M}$, *la convergence des* u_k : ces conditions assurent aussi *l'unicité* de la solution des équations intégrales, comme dans ce genre de questions. Une fois les u_k déterminés sur S, on connaît les R_k, d'où les u_k par (15_2), P *étant cette fois dans* D.

Dans le cas du problème C du n° 12, on aurait $n-p$ équations intégrales au lieu de n. Enfin, pour le problème D, on met en équation comme au n° 12 et l'on achève par approximations successives.

Quant aux problèmes relatifs aux systèmes qui sont *linéaires seulement par rapport aux dérivées secondes*

$$(15_3) \qquad \Sigma_{ij} a^k_{ij} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} = f^k\left(\frac{\partial u_h}{\partial x_i}, u_h, x_i\right) \qquad (h, k = 1, \ldots, n),$$

les a^k_{ij} dépendant seulement des x_i ou plus généralement des x_i, dès u_h

et de leurs dérivées premières, la méthode de résolution par approximations successives n'est pas essentiellement distincte de celle qui est relative à une seule équation. Les procédés du n° 6 nous permettent, pour les problèmes de Dirichlet et de Neumann (ou s'y ramenant), de prendre comme première approximation (et même ensuite comme fonctions χ) une fonction satisfaisant aux conditions aux limites données. Il faudra supposer les valeurs des u_k sur S dérivables si les a_{ij}^k ne dépendent que des x_i; dans le cas général, les dérivées des u_k sur S ou bien les données du problème de Neumann devront être höldériennes. Les a_{ij}^k, f^k seront des fonctions lipschitziennes des u et de leurs dérivées premières.

Le cas des conditions aux limites non linéaires comporterait ici un double jeu d'approximations successives : par exemple les $u_{k,p+1}$ satisferaient aux équations obtenues en remplaçant dans (15_1) et (15_3) les u_k par $u_{k,p+1}$ dans les premiers membres et les u_h par $u_{h,p}$ dans les seconds et dans les a_{ij}^k. Cette méthode pourrait s'appliquer aussi aux conditions linéaires (12_1) et (12_7) relatives aux équations (15_3).