

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

DE SÉGUIER

**Les substitutions d'ordre 2 des groupes linéaires, hermitiens  
gauches et quadriques dans un champ de Galois**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 51 (1934), p. 79-140

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1934\\_3\\_51\\_\\_79\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1934_3_51__79_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LES  
**SUBSTITUTIONS D'ORDRE 2**

DES  
 GROUPES LINÉAIRE, HERMITIEN, GAUCHE ET QUADRATIQUE  
 DANS UN CHAMP DE GALOIS

PAR M. DE SÉGUIER (1)



CHAPITRE III.

GROUPE QUADRATIQUE.

38. Prenons l'invariante  $a$  sous la forme

$$a = \sum_1^{\nu} x_i y_i + \psi \quad (\psi = bxy + cx^2 + c'y^2),$$

$b, c, c'$  étant dans  $\mathcal{C}$ , et  $b^2 - 4cc' = \delta$  étant supposé  $\neq 0$ , à moins que  $b = cc' = 0$ . Je désignerai par  $\theta$  le caractère quadratique de  $\delta$  ( $\theta = 1$ , si  $\delta = 0$ ). Si  $\psi$  est irréductible ( $\theta = -1$ ), on peut (I, 24) par un changement de variables à coefficients dans  $\mathcal{C}'$ , mettre  $\psi$  sous la forme  $x_{\nu} y_{\nu} = x_{\nu} x'_{\nu}$ , [ $\nu' = \nu + 1$ ;  $x_{\nu} = x(x - \nu y)$ ,  $x x' = c$ ,  $\psi(\nu, 1) = 0$ ]. La substitution réelle  $\gamma$  qui multiplie  $x_1, \dots, x_{\nu}$  par  $\iota$  et  $x_{\nu}$  par une racine  $\xi$  de  $\xi^{\pi+1} = \iota$  (donc  $y_{\nu} = x_{\nu}$  par  $\xi^{\pi}$ ) sans altérer les autres variables multiplie  $a$  par  $\iota$ . Je désignerai par  $\varphi$  la substitution  $\gamma^{\frac{\pi-1}{2}} m_{\nu}$ ,  $-\xi^{\frac{1-\pi}{2}}$ . Cette substitution multiplie  $x_1, \dots, x_{\nu}$  par  $-1$  sans altérer les  $y$  correspondants. Elle multiplie  $x_{\nu}$  par  $-1$ , et  $y_{\nu}$  par

$$-\xi^{(\pi+1)\frac{\pi-1}{2}} = -\iota^{\frac{\pi-1}{2}} = 1,$$

---

(1) Ce Mémoire fait suite à celui qui a été publié dans ces *Annales* (juillet et août 1933).

qui n'est pas conjugué de  $-1$ . Donc  $\varphi$  est dans  $A'(n, \pi^2)$  hors de  $A(n, \pi)$ . Si  $\psi$  est réductible ( $\theta = 1$ ), on peut encore par un changement de variables à coefficients réels mettre  $\psi$  sous la forme  $x_\nu y_\nu$ ,  $x_\nu$  et  $y_\nu$  étant réels. On prendra alors  $\varphi = \gamma^{\frac{\pi-1}{2}}$ ,  $\gamma$  étant la substitution réelle qui multiplie  $x_1, \dots, x_\nu$  par  $\iota$ , sans altérer les  $y$ .

§ I.  $n \leq 3$ .

39. Si  $n = 1$ , et si  $a = x^2$ ,  $A = \{d\}$ ,  $A' = I$ , n'ont d'autre  $s_2$  que  $d$ . Les groupes  $A^0$ ,  $B$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}^0$ ,  $\mathcal{B}$  se réduisent à  $1$ .

40. Soit  $n = 2$ . Alors (I, 25) on a  $A = \{m_{1\sigma}, t_1\}$ , où  $\sigma$  est d'ordre  $\pi - \theta$  dans  $\mathcal{C}'$ , et  $t_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{vmatrix}$ ,  $A^0 = \{m_{1\sigma}\}$  (I, 34),  $B = \{m_{1\sigma}\}$  (I, 39).

$B$ , étant d'ordre  $\frac{\pi-\theta}{2}$ , n'a pas de  $s_2$  si  $\pi - \theta \not\equiv 2 \pmod{4}$ , et n'a pas d'autre  $s_2$  que  $d$  si  $\pi - \theta \equiv 0 \pmod{4}$ .

$A^0$ , étant d'ordre  $\pi - \theta$ , n'a qu'une  $s_2$ , qui est  $d$ .

$A$ , étant diédral d'ordre  $2(\pi - \theta)$ , a trois classes de  $s_2$  représentées par  $d$ ,  $t_1$ ,  $t_1 m_{1\sigma}$  (E, 20), le nombre des éléments de chacune des deux dernières classes étant  $\frac{\pi-\theta}{2}$ .

Les substitutions de  $A'$  sont (I, 25) de la forme  $\gamma^\rho t_1^\varepsilon m_{1\sigma}^\beta$ , ou, si  $\psi$  est irréductible, de la forme  $\gamma^\rho t_1^\varepsilon$ . Elles sont hors de  $A$  pour  $\rho \not\equiv 0 \pmod{\pi - 1}$ .  $A'$  est donc d'ordre  $2(\pi - 1)(\pi - \theta)$ . En faisant les deux hypothèses  $\varepsilon = 0, 1$ , on voit directement qu'une  $s_2$  hors de  $A$  ne peut exister que si  $\psi$  est réductible, et qu'elle a alors une des deux déterminations  $\varphi$ ,  $d\varphi$ , que  $t_1$  transforme l'une dans l'autre.

Ainsi  $A'$  n'a de  $s_2$  hors de  $A$  que si  $\psi$  est réductible; et alors ces  $s_2$  sont  $\varphi$  et  $d\varphi$ , qui sont conjuguées. De plus, quel que soit  $\psi$ , les deux classes de  $s_2$  non normales de  $A$  se réunissent, dans  $A'$ , en une seule classe, car  $\gamma^{-1} t_1 \gamma = t_1 m_{1\sigma_0}$  ( $\sigma_0 = \iota$ , si  $\psi$  est réductible,  $\sigma_0 = \xi^{1-\pi}$ , si  $\psi$  est irréductible;  $\sigma_0$  est toujours d'ordre  $\pi - \theta$ ).

41. Soient  $N, N', N^0, P$  les normalisants respectifs, dans  $A, A', A^0, B$ , d'une  $s_2$   $s \neq d$ .

Pour déterminer  $N, N^0, P$  dans les cas  $s = t_1$  ou  $s = t_1 m_{1\sigma}$ , il suffit de rappeler que, dans un  $g_{2m}$  diédral défini par  $a^m = b^2 = 1, ba.b = a^{-1}$ ,

le normalisant d'une  $s_2 s$  de ce diédral est le  $g_2 \{s\}$  si  $m$  est impair, et le  $g_4 \{s, a^2\}$  si  $m$  pair  $= 2\mu$ . Ici, pour A,  $m = \pi - \theta$  est pair.

Pour déterminer  $N'$ , on peut supposer  $s = t_1$  ou  $\varphi$ .

Si  $s = t_1$ , on a  $N' = \{t_1, I\}$ . En effet, ce groupe contient normalement  $t_1$  et son ordre est bien  $2(\pi - 1)$ , quotient de l'ordre  $2(\pi - 1)(\pi - \theta)$  par le nombre  $\pi - \theta$  des conjugués de  $t_1$  dans  $A'$ .

Si  $s = \varphi$  ( $\psi$  est alors réductible).  $N'$  contient évidemment le produit direct  $\{m_{t_1}\} \{ \gamma \}$ . Donc,  $\varphi$  n'ayant que deux conjuguées,  $N'$  est d'indice 2 dans  $A'$  et coïncide avec ce produit direct.  $N'$  étant ici dans A, on a  $N = N'$ . On voit ensuite que  $N^0 = A^0$  et que  $P = B$ .

42. Posons maintenant  $\frac{x_1}{y_1} = z$ ,  $x_1$  et  $y_1$  étant les variables, réelles ou non, telles que  $\psi = x_1 y_1$ .

Alors  $\mathcal{A}^0 = \{(\sigma^2 z)\}$  est d'ordre  $\frac{\pi - \theta}{2}$ , n'a de  $s_2$  que si  $\pi - \theta \equiv 0 \pmod{4}$ ; et alors, il n'en a qu'une, qui est  $(-z)$ .

$\mathcal{B} = \{(\sigma^4 z)\}$  se confond avec  $\mathcal{A}^0$  si  $\pi - \theta \equiv 2 \pmod{4}$ . Si  $\pi - \theta \equiv 0 \pmod{4}$ , il est d'ordre  $\frac{\pi - \theta}{4}$ , et contient  $(-z)$  toujours et seulement si  $\pi - \theta \equiv 0 \pmod{8}$ .

$\mathcal{A} = \{(\sigma^2 z), (z^{-1})\} = \{\mathcal{A}^0, (z^{-1})\}$  est diédral d'ordre  $\pi - \theta$ , n'a hors de  $\mathcal{A}^0$ , qu'une ou deux classes de  $s_2$ ; si  $\frac{\pi - \theta}{2}$  est pair; il en a deux, représentées par  $(z^{-1}) = (t_1)$  et  $(\sigma^2 z^{-1}) = (t_1 m_{1\sigma})$ ; si  $\frac{\pi - \theta}{2}$  est impair, il n'en a qu'une, représentée par  $(z^{-1}) = (t_1)$ .

$\mathcal{A}' = \{\mathcal{A}, (\sigma z)\} [(\gamma) = (\sigma z) \text{ quel que soit } \psi] = \{(\sigma z), (z^{-1})\}$ , diédral d'ordre  $2(\pi - \theta)$  a trois classes de  $s_2$  représentées par  $(z^{-1}) = (t_1)$ ,  $(\sigma z^{-1}) = (t, \gamma)$  et  $(-z) = \left(\gamma^{\frac{\pi - \theta}{2}}\right)$ . (La substitution réelle  $\gamma^{\frac{\pi - \theta}{2}}$  coïncide avec  $\varphi$  si  $\psi$  est réductible, avec  $\left[-\xi^{\frac{\pi + 1}{2}}\right] \varphi$  si  $\psi$  est irréductible.) La première est toujours dans  $\mathcal{A}$  hors de  $\mathcal{A}^0$ . La seconde est toujours hors de  $\mathcal{A}$  [c'est le produit de  $(z^{-1})$ , qui est dans  $\mathcal{A}$ , par  $(\sigma z)$ , qui est hors de  $\mathcal{A}$ ]. La troisième est dans  $\mathcal{A}$  toujours et seulement si  $-z$  est de la forme  $\sigma^{2r} z$ , c'est-à-dire si  $\frac{\pi - \theta}{2}$  est pair; et elle est alors dans  $\mathcal{A}^0$ .

Les groupes  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A}'$ ,  $\mathfrak{A}^0$ ,  $\mathfrak{B}$  étant diédraux ou cycliques, les normalisants des  $s_2$  obtenues se déterminent d'après les principes généraux rappelés au n° 41.

43. Soit  $n = 3$ . Alors  $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{U}(2, \pi)$  (I, 40). Or on a vu (12) que  $\mathfrak{U}(2, \pi)$  n'a qu'une classe de  $s_2$ . On peut la représenter par une  $s_2$  quelconque de  $\mathfrak{B}$ , par exemple par  $s_1 = t_{01}m_{1k}$ , —  $ck$  étant un carré<sup>(1)</sup>.

$\mathfrak{A}^0 \equiv \mathfrak{L}(2, \pi)$  (I, 40)  $\equiv \mathfrak{H}(2, \pi)$  (I, 5) a deux classes de  $s_2$  (12), dont une peut être représentée par  $s_1 = t_{01}m_{1k}$  ( $-kc$  étant carré) et l'autre par  $s_2 = s_1m_{1N}$ , qui est hors de  $\mathfrak{B}$ , donc non conjuguée de  $s_1$ , ou, ce qui revient au même, par  $t_{01}$  et  $t_{01}m_{1N}$ .

Toute  $s_2$  de  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^0 \mathfrak{D}$  hors de  $\mathfrak{A}^0$  a la forme  $ds$ ,  $s$  étant une  $s_2$  de  $\mathfrak{A}^0$ ; et deux  $s_2$   $ds$  et  $ds'$  sont conjuguées dans  $\mathfrak{A}$  toujours et seulement si  $s$  et  $s'$  le sont dans  $\mathfrak{A}^0$ . De même  $s$  et  $s'$  sont conjuguées dans  $\mathfrak{A}$  toujours et seulement si elles le sont dans  $\mathfrak{A}^0$ . Donc les classes de  $s_2$  de  $\mathfrak{A}$  sont représentées par  $s_1, s_2, d, ds_1, ds_2$ .

En changeant  $k$  en  $-k$ , ce qui revient à remplacer  $s_1$  par  $s'_1 = d_1s_1$  et  $s_2$  par  $s'_2 = d_1s_2$ , on peut représenter les deux dernières classes de  $\mathfrak{A}$  par  $ds'_1 = t_0s_1$ ,  $ds'_2 = t_0s_2$ . Donc les classes de  $s_2$  de  $\mathfrak{A}$  peuvent être représentées par

$$s_1 = t_{01}m_{1k}, \quad s_1m_{1N}, \quad t_0s_1, \quad t_0s_1m_{1N}, \quad d.$$

On peut encore remplacer  $s_1$  et  $s_2$  par  $t_{01}d_1$  et  $t_{01}m_{1,-N}$ . Les classes de  $\mathfrak{A}$  hors de  $\mathfrak{A}^0$  sont alors représentées par  $t_1$  et  $t_1m_{1N}$ <sup>(2)</sup>.

(1) On a (I, 32),

$$t_{01}m_{1,-ck} = U_{01\lambda}V_{0,1,ck}^{-1}U_{0,1\lambda},$$

où (I, 28),

$$V_{0,1,\lambda} = \begin{vmatrix} x & x + \lambda x_1 \\ x_1 & x_1 \\ y_1 & y_1 - 2c\lambda x - c\lambda^2 x_1 \end{vmatrix},$$

$$U_{0,1,\lambda} = t_1V_{01\lambda}t_1, \quad t_{01} = t_0t_1, \quad t_0 = |x, -x|.$$

(2) Les substitutions  $dt_{01} = t_1m_{1,-1}$  et  $dt_{01}m_{1N} = t_1m_{1,-N}$  sont, dans le diédral  $\{t_1, m_{1,t}\}$ , conjuguées l'une de  $t_1$ , l'autre de  $t_1m_{1t}$ . Donc  $t_0$  est conjugué de  $t_1$  ou de  $t_1m_{1t}$ . Or, pour que  $t_0$  soit conjugué de  $t_1m_{1h}$ , il faut, d'après la correspondance indiquée (I, 40) entre  $\mathfrak{A}^0 \equiv \mathfrak{A} | \mathfrak{D}$  et  $\mathfrak{L}(2, \pi)$  que  $-\frac{ch}{z}$  qui répond à  $(t_1m_{1h})$ , soit conjugué de  $-z$  qui répond à  $t_0$ , donc que  $-\frac{ch}{z}$  et  $-z$  soient toutes deux dans  $\mathfrak{U}(2, \pi)$  ou toutes deux hors de  $\mathfrak{U}(2, \pi)$ , donc, que leurs déterminants,  $ch$  et  $-1$ , aient le même caractère quadratique, donc que  $h$  ait la forme  $-c\lambda^2$ . Cette condition suffit; car, si elle est remplie,

Enfin  $A' = AI = A^0 I$  (I, 24),  $A^0$  étant premier à I. Donc toute substitution de  $A'$  hors de A a la forme  $[t^h] \alpha = \alpha'$ ,  $\alpha$  étant dans  $A_0$  et  $[t^h]$  hors de D, donc  $t^{2h} \neq 1$ . Pour que  $\alpha'^2 = 1$ , il faut donc que  $\alpha^2 = [t^{-h}]^2$ ; d'où  $A^0$  étant premier à I,  $t^{2h} = 1$  contre l'hypothèse. Donc  $A'$  n'a pas de  $s_2$  hors de A. Il est clair d'ailleurs que deux substitutions de A, conjuguées dans  $A'$ , le sont dans A. Donc les classes de  $s_2$  de A sont aussi les classes de  $s_2$  de  $A'$ .

On a  $\mathcal{B} \equiv B$ , et (I, 24, 39),  $\mathcal{C}' = \mathcal{C} = \mathcal{C}^0 \equiv A^0$ . Donc  $\mathcal{B}$  n'a qu'une classe de  $s_2$  représentée par  $(s_1) = (t_{01} m_{1h})$ , et  $\mathcal{C}' = \mathcal{C} = \mathcal{C}^0$  a, hors de  $\mathcal{B}$  une seule classe de  $s_2$  représentée par  $(t_{01} m_{1hN})$ .

$t_0$  est conjuguée de celle des deux substitutions  $t^{\varepsilon} t_1 m_{1h}$  ( $\varepsilon = 0, 1$ ) qui a pour déterminant  $-1$ , c'est-à-dire de  $t_1 m_{1h}$ .

On peut d'ailleurs trouver directement ce résultat en cherchant une substitution  $\alpha$  de  $\Lambda$  telle que  $t_0 \alpha = \alpha t_1 m_{1h}$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \alpha_{11} x_1 + \alpha'_{11} y_1 - \alpha_{10} x &= h(\beta_{11} x_1 + \beta'_{11} y_1 + \beta_{10} x), \\ \beta_{11} x_1 + \beta'_{11} y_1 - \beta_{10} x &= h^{-1}(\alpha_{11} x_1 + \alpha'_{11} y_1 + \alpha_{10} x), \\ \alpha_{01} x_1 + \alpha'_{01} y_1 - \alpha_{00} x &= \alpha_{01} x_1 + \alpha'_{01} y_1 + \alpha_{00} x. \end{aligned}$$

D'où

$$\beta_{11} = h^{-1} \alpha_{11}, \quad \beta'_{11} = h^{-1} \alpha'_{11}, \quad \beta_{10} = -h^{-1} \alpha_{10}, \quad \alpha_{00} = 0.$$

Donc

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha'_{11} & \alpha_{10} \\ \frac{\alpha_{11}}{h} & \frac{\alpha'_{11}}{h} & -\frac{\alpha_{10}}{h} \\ \alpha_{01} & \alpha'_{01} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour que  $\alpha$  soit dans  $\Lambda$  il faut et suffit que l'on ait (cf. I, 26)

$$\frac{\alpha_{11}^2}{h} + c \alpha_{01}^2 = 0, \quad \frac{\alpha'_{11}^2}{h} + c \alpha'_{01}^2 = 0, \quad -\frac{\alpha_{10}^2}{h} = c, \quad \frac{2}{h} \alpha_{11} \alpha'_{11} + 2c \alpha_{01} \alpha'_{01} = 1.$$

Les trois premières donnent

$$ch = -\alpha_{10}^2, \quad \alpha_{11} = \varepsilon \alpha_{10} \alpha_{01}, \quad \alpha'_{11} = \varepsilon' \alpha_{10} \alpha'_{01}, \quad \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1.$$

La dernière donne alors, en éliminant  $h$ ,

$$2 \alpha_{01} \alpha'_{01} (1 - \varepsilon \varepsilon') = \frac{1}{c}.$$

Donc en prenant  $\varepsilon \varepsilon' = -1$ , on peut construire  $\alpha$  dès que  $-ch$  est carré.

Ainsi  $t_0$  est conjuguée de  $t_1 m_{1h}$  toujours et seulement si  $-ch$  est carré. En particulier  $t_0$  est toujours conjugué de  $t_1 m_{1,-c}$ .

Si d'ailleurs  $t_0 \alpha = \alpha t_1 m_{1h}$ , en posant (I, 34, 39)  $\alpha = t_1^{\varepsilon} m_{1h} \beta$ ,  $\beta$  étant dans B, ou a  $t_0 \beta = \beta t_1 m_{1h}$ , c'est-à-dire que  $t_0$  peut être transformé en  $t_1 m_{1h}$  par une substitution de B.

Le normalisant d'une  $s_2$  quelconque de  $A'$  ou de  $\mathcal{A}'$  dans un des groupes considérés pour  $n = 3$  résulte de l'étude faite de  $\mathcal{L}$  et de  $\mathcal{U}$ , et de la notion de produit direct ( $A'$  et  $A$  sont les produits directs de  $A^0$  par  $I$  et  $D$  respectivement).

§ II.  $n = 4$ .

44. Soit  $n = 4$ , et supposons  $\psi \neq 0$ , il est avantageux ici de commencer par les groupes  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{A}^0$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}'$ .

Soit d'abord  $\psi$  irréductible [ $d$  est ici dans  $A_0$ , hors de  $B$  (I, 39)]. Alors  $\mathcal{B} = \mathcal{A}^0 \equiv \mathcal{U}(2, \pi^2)$  (I, 40) n'a qu'une classe de  $s_2$ , qu'on peut représenter par  $(t_{1,2})$ .

Considérons  $[\mathcal{A}] = \{ \mathcal{U}(2, \pi^2), \dot{z} \} \equiv \mathcal{A}$  (I, 40),  $z$  étant la variable de  $\mathcal{U}(2, \pi^2)$ . Soit  $\dot{z}\alpha_z$  une  $s_2$  de  $[\mathcal{A}]$  hors de  $\mathcal{U}(2, \pi^2)$ ,  $\alpha_z = \frac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}$ . Je supposerai  $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$ . La condition  $\dot{z}\alpha_z = (\dot{z}\alpha_z)^{-1}$  donne, en désignant par  $\tau$  un facteur de proportionnalité,

$$(1) \quad \alpha = \tau\beta', \quad \alpha' = -\tau\alpha', \quad \beta = -\tau\beta, \quad \beta' = \tau\alpha,$$

ces relations sont compatibles avec  $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$  toujours et seulement si  $\tau^2 = 1$ .  $\tau$  sera dit le *caractère* de la  $s_2 \dot{z}\alpha_z$

45. Je dis que, dans  $[\mathcal{A}]$ ,  $\dot{z}\alpha_z$  est conjuguée de  $-\dot{z}^{-1}$  ou de  $\dot{z}$  suivant que  $\tau = -1$ , ou  $\tau = 1$  [d'après la correspondance établie (I, 40) entre  $\mathcal{A}$  et  $[\mathcal{A}]$ ,  $-\dot{z}^{-1}$  répond à  $t_1$ ; d'après la correspondance entre  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{U}(2, \pi^2)$ ,  $-\dot{z}^{-1}$  répond à  $dt_{1,2}$ ; donc  $(-\dot{z}^{-1})(-\dot{z}^{-1}) = \dot{z}$  de  $[\mathcal{A}]$  répond à  $t_1$ ,  $dt_{1,2} = dt_2 = dm_{2,q}t_0$  de  $\{B, t_1\} \equiv \mathcal{A}$ ] et que  $-\dot{z}^{-1}$  et  $\dot{z}$  ne sont pas conjuguées. On verra, en même temps, que deux  $s_2$  conjuguées peuvent toujours être transformées l'une dans l'autre par une substitution de  $\mathcal{U}(2, \pi^2)$ .

Soit  $\dot{z}\lambda_z$  une substitution de  $\mathcal{A}$ ,  $\lambda_z = \frac{\lambda z + \lambda'}{\mu z + \mu'}$  ( $\lambda\mu' - \mu\lambda' = 1$ ) étant dans  $\mathcal{U}(2, \pi^2)$ .

Pour qu'elle transforme  $\dot{z}\alpha_z$  soit en  $\dot{z}$ , soit en  $-\dot{z}^{-1}$ , il faut et suffit,  $\dot{z}$  étant permutable à chacune de ces deux substitutions, que  $\lambda_z$  opère la même transformation.

Si  $\lambda_z \dot{z}\alpha_z = (-\dot{z}^{-1})\lambda_z$ , on a,  $f$  désignant un facteur de proportion-

nalité,

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha\dot{\lambda} + \alpha'\dot{\mu} = f\dot{\lambda}', & \beta\dot{\lambda} + \beta'\dot{\mu} = f\dot{\mu}', \\ \alpha\dot{\lambda}' + \alpha'\dot{\mu}' = -f\dot{\lambda}, & \beta\dot{\lambda}' + \beta'\dot{\mu}' = -f\dot{\mu}. \end{cases}$$

joint à

$$(3) \quad \lambda\dot{\mu}' - \mu\dot{\lambda}' = 1.$$

En tirant  $\dot{\lambda}'$  et  $\dot{\mu}'$  des deux premières et en les portant dans les deux dernières de (2), on obtient d'après (1),  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\mu}$  n'étant pas simultanément nuls,

$$(4) \quad \tau + f\dot{f} = 0.$$

En les portant dans (3), on obtient

$$(5) \quad \beta\dot{\lambda}\dot{\lambda} + \beta'\dot{\lambda}\dot{\mu} - \alpha\dot{\mu}\dot{\lambda} - \alpha'\dot{\mu}\dot{\mu} = f.$$

Si les conditions (4) et (5) sont remplies, les équations (2) et (3) détermineront complètement  $\dot{\lambda}'$  et  $\dot{\mu}'$ .

Si  $\tau = 1$ , (1) et (5) donne  $\dot{f} = -f$ , d'où, d'après (4),  $f^2 = 1$ , ce qui est contradictoire.

Si  $\tau = -1$ , (1) montre que  $\alpha'$  et  $\beta$  sont réels, et que  $\beta' = -\alpha$ . Le premier membre de (5) est alors une forme hermitienne; on a ici  $\dot{f} = f$ , d'où, d'après (4),  $f^2 = 1$ . Alors (5) a des solutions en  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{\mu}$  comme le montrent, par exemple, les formes canoniques rappelées au n° 16. Donc  $\dot{z}\alpha_z$  est conjuguée de  $-\dot{z}^{-1}$  toujours et seulement si  $\tau = -1$ . Donc  $\dot{z}$  n'est pas conjuguée de  $-\dot{z}^{-1}$ .

46. Si  $\dot{\lambda}_z\dot{z}\alpha_z = \dot{z}\dot{\lambda}_z$ , on a,  $f$  désignant un facteur de proportionnalité,

$$(6) \quad \begin{cases} \alpha\dot{\lambda} + \alpha'\dot{\mu} = f\dot{\lambda}, & \beta\dot{\lambda} + \beta'\dot{\mu} = f\dot{\mu}, \\ \alpha\dot{\lambda}' + \alpha'\dot{\mu}' = f\dot{\lambda}', & \beta\dot{\lambda}' + \beta'\dot{\mu}' = f\dot{\mu}'. \end{cases}$$

joint à

$$(7) \quad \lambda\dot{\mu}' - \mu\dot{\lambda}' = 1.$$

En éliminant  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{\mu}$ ,  $\dot{\lambda}'$ ,  $\dot{\mu}'$  entre (6) et les équations conjuguées, on obtient, d'après (1),  $\dot{\lambda}$ ,  $\dot{\mu}$ ,  $\dot{\lambda}'$ ,  $\dot{\mu}'$  n'étant pas simultanément nuls,

$$(8) \quad \tau - f\dot{f} = 0.$$



D'ailleurs (6) donne, en tenant compte de  $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$

$$(9) \quad (\lambda\mu' - \mu\lambda')f^2 = (\dot{\lambda}\dot{\mu}' - \dot{\mu}\dot{\lambda}').$$

Donc, d'après (7) et (8),

$$(10) \quad f^2 = 1, \quad \tau = 1.$$

Si (10) est vérifiée, il résulte de (6) que  $\lambda\mu' - \mu\lambda'$  est réel.

Prenons alors, comme élément définissant de  $\mathcal{C}$ ,  $\omega = \upsilon - \dot{\upsilon}$ , au lieu de  $\upsilon = -\frac{b}{2c} + \frac{\omega}{2}$  on aura

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_0 + \omega\lambda_1, & \lambda' &= \lambda'_0 + \omega\lambda'_1, & \alpha &= \alpha_0 + \omega\alpha_1, & \alpha' &= \alpha'_0 + \omega\alpha'_1, \\ \mu &= \mu_0 + \omega\mu_1, & \mu' &= \mu'_0 + \omega\mu'_1, & \beta &= \beta_0 + \omega\beta_1, & \beta' &= \beta'_0 + \omega\beta'_1, \end{aligned}$$

$\lambda_i, \lambda'_i, \mu_i, \mu'_i, \alpha_i, \alpha'_i, \beta_i, \beta'_i$  ( $i = 0, 1$ ) étant tous réels, et  $\omega^2 = \frac{\delta}{c^2}$  étant un non carré de  $\mathcal{C}$ . Faisons de plus  $f = 1$ . Alors (1) donne

$$(11) \quad \alpha'_0 = \beta_0 = 0, \quad \beta'_0 = \alpha_0, \quad \beta'_1 = -\alpha_1,$$

et  $\alpha\beta' - \beta\alpha'$  devient

$$(12) \quad \alpha_0^2 - \omega^2(\alpha_1^2 + \alpha'_1\beta_1) = 1.$$

Les deux premières équations (6) donnent, en termes réels,

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_0 - 1)\lambda_0 - \omega^2\alpha_1\lambda_1 - \omega^2\alpha'_1\mu_1 = 0, \\ \alpha_1\lambda_0 - (\alpha_0 + 1)\lambda_1 + \alpha'_1\mu_0 = 0, \\ -\omega^2\beta_1\lambda_1 + (\alpha_0 - 1)\mu_0 + \omega^2\alpha_1\mu_1 = 0, \\ \beta_1\lambda_0 - \alpha_1\mu_0 - (\alpha_0 + 1)\mu_1 = 0, \end{array} \right.$$

$\lambda'_0, \lambda'_1, \mu'_0, \mu'_1$  vérifient les mêmes équations.

Les équations (13) se réduisent à deux. On peut le voir en vérifiant que tous les mineurs à 9 éléments du déterminant sont nuls, ou, plus simplement, comme suit.

Si  $\alpha'_1 = \beta_1 = 0$ , les deux premières équations se réduisent à une, et, de même les deux dernières.

Si l'un des coefficients  $\beta_1, \alpha'_1$  est  $\neq 1$ , on peut résoudre deux des équations (13) par rapport à l'un des couples  $\lambda_0, \lambda_1$  ou  $\mu_0, \mu_1$ . Les deux autres s'évanouissent en vertu de (12) quand on y substitue les valeurs trouvées.

Ainsi on peut exprimer  $\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1$ , à l'aide de deux solutions particulières  $(g_0, g_1, h_0, h_1)$  et  $(g'_0, g'_1, h'_0, h'_1)$  du système (13) et de deux paramètres réels  $x, y$ , ce qui, en posant

$$g_0 + \nu g_1 = g, \quad h_0 + \nu h_1 = h, \quad g'_0 + \nu g'_1 = g', \quad h'_0 + \nu h'_1 = h,$$

peut s'écrire

$$\lambda = gx + g'y, \quad \mu = hx + h'y.$$

On aura de même,  $x', y'$  étant d'autres paramètres réels,

$$\lambda' = gx' + g'y', \quad \mu' = hx' + h'y'.$$

La condition (7) s'écrit alors

$$(gh' - hg')(xy' - yx') = 1,$$

et il suffit de déterminer les paramètres réels  $x, y, x', y'$  de manière à vérifier cette équation. Comme  $f = 1$ ,  $\lambda\mu' - \mu\lambda'$  est réel en vertu de (9), qui résulte de (6). Il en est donc de même de  $gh' - hg'$ .

Ainsi  $\mathcal{A}$  a trois classes de  $s_2$  représentées par  $(t_{0,1})$  (44) qui est dans  $\mathcal{A}^0 = \mathcal{B}$ , et par  $(t_1)$  et  $(t_2)$  qui sont hors de  $\mathcal{A}^0$ .

47. Le groupe  $\mathcal{A}' = A'/I$  est isomorphe au groupe  $[\mathcal{A}'] = [\mathcal{A}] + \mathcal{G}[\mathcal{A}]$ , où  $\mathfrak{g} = (\xi z)$ ,  $\xi^{\pi+1} = 1$ , en sorte que  $[\mathcal{A}'] = \{ \mathcal{L}(2, \pi^2), \xi \}$ . En effet  $\mathfrak{g}$  transforme les éléments de  $[\mathcal{A}]$  comme  $\gamma$  transforme ceux de  $\mathcal{A}$ . On le voit en prenant comme générateurs de  $\mathcal{A} = AI/I$  les complexes  $IP_{1,\rho}$ ,  $IO_{1,-\rho}$  ( $\rho$  parcourant  $\mathcal{C}'$ ) et  $It_1$ , et, comme générateurs de  $[\mathcal{A}]$ , les substitutions correspondantes (I, 40)  $z + \rho, \frac{z}{1-\rho z}, -z^{-1}$ , et en observant que  $g^2$ , qui est dans  $\mathcal{U}(2, \pi^2)$  correspond de même à  $I\gamma^2$  de  $BI/I$ .

Toute substitution  $\sigma$  de  $[\mathcal{A}']$  hors de  $[\mathcal{A}]$  a la forme

$$\sigma = (\xi z) (z)^\varepsilon \left( \frac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'} \right) \quad (\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1).$$

Si  $\varepsilon = 1$ , les conditions pour que  $\sigma = \sigma^{-1}$  sont, en désignant par  $\rho$  un facteur de proportionnalité,

$$\begin{aligned} \alpha\xi &= \rho\beta', & \alpha' &= -\rho\alpha', \\ \beta\xi &= -\rho\beta\xi, & \beta' &= \rho\alpha\xi. \end{aligned}$$

En égalant le déterminant des premiers membres à celui des seconds, on a  $\xi = \rho^2 \zeta$  ou  $\xi^{1-\pi} = \rho^2$ . D'ailleurs, la deuxième équation donne

$$-\rho = \alpha'^{1-\pi}, \quad \text{d'où } \alpha'^{2(1-\pi)} = \zeta^{1-\pi+\lambda(1-\pi^2)}, \quad \text{d'où } \alpha'^2 = \zeta^{1+\lambda(\pi+1)},$$

ce qui est impossible, le second membre n'étant pas carré.

Donc  $\varepsilon = 0$  et toute  $s_2$   $\sigma$  est dans  $\mathcal{L}(2, \pi^2)$ . Or on sait (42), que ce groupe n'a hors de  $\mathcal{U}(2, \pi^2)$  qu'une classe de  $s_2$ . Cette classe contient (45)  $\left(-\frac{\dot{z}}{z}\right) = \left(-\frac{1}{z}\right)(\xi z)$  qui correspond à  $(t_{12}\gamma)$ . Cette substitution représente donc l'unique classe de  $s_2$  de  $\mathcal{U}$  hors de  $\mathcal{A}$ . Elle est d'ailleurs de seconde espèce, car  $(t_{12}\gamma)^2 = [1]$ .

Les deux classes de  $s_2$  de  $\mathcal{A}$ , dont les représentants indiqués  $(t_1)$  et  $(t_2)$  correspondent à  $(-\dot{z}^{-1})$  et  $(\dot{z})$  se réunissent en une dans  $\mathcal{A}$ , car  $\gamma^{-1}(\dot{z})\gamma = (\dot{z})(\xi^{\pi-1}z)$  a le caractère  $-1$ , donc (45) est conjuguée de  $(-\dot{z}^{-1})$ . Ces substitutions sont évidemment de première espèce.

La troisième classe de  $s_2$  de  $\mathcal{A}$  est l'unique classe de  $s_2$  de  $\mathcal{A}^0$ , représentée par  $(t_{01})$  (45), correspondant à l'unique classe de  $s_2$  de  $\mathcal{U}(2, \pi^2)$  représentée par  $(-z^{-1})$  (42). Cette substitution est évidemment de première espèce.

48. Supposons maintenant  $\psi$  réductible (1). On a (I, 40)  $\mathcal{B} \equiv \mathcal{U}_z \mathcal{U}_u$   $\left(z = \frac{x_1}{x_2}, u = \frac{y_1}{y_2}\right)$ , et toute  $s_2$   $\sigma$  de  $\mathcal{U}_z \mathcal{U}_u$  est de la forme  $\alpha_z \beta_u$ ,  $\alpha_z$  étant dans  $\mathcal{U}_z$  et  $\beta_u$  dans  $\mathcal{U}_u$ ; de plus  $\alpha_z^2 = \beta_u^2 = 1$ , l'une au moins des substitutions  $\alpha_z, \beta_u$  étant d'ordre 2. Comme  $\mathcal{U}_z$  n'a qu'une classe de  $s_2$ ,  $\sigma$  est nécessairement conjuguée de l'une des trois substitutions  $\left(-\frac{1}{z}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{u}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{u}\right)$ , auxquelles répondent respectivement dans  $\mathcal{B}$ ,  $(R_{121}) = (d_1 T_{12})$ ,  $(S_{12,-1}) = (d_1 T_{12} t_{12})$ ,  $(R_{121} S_{1,2,-1}) = (t_{12})$  (I, 28, 29) (2).

(1) On peut supposer (I, 24), ou bien que  $\nu' = \nu = 2$  et que  $\psi = 0$ , ou bien que  $\nu = 1$ ,  $\nu' = 2$ , et que  $\psi$  est  $\neq 0$ . Dans (I, 40), on a pris la première hypothèse; on adopte ici la seconde; les résultats sont identiques.

(2) On a vu (44) que, si  $\psi$  est irréductible,  $\overline{\mathcal{B}}(4, \pi)$  n'a qu'une classe de  $s_2$  représentée par  $(t_{12})$ . D'après les résultats du texte,  $\mathcal{B}(4, \pi^2)$ , qui contient  $\overline{\mathcal{B}}(4, \pi)$ , a deux autres classes de  $s_2$ , mais qui sont hors de  $\overline{\mathcal{B}}(4, \pi)$ .

Si  $-1$  est carré, on peut représenter respectivement ces trois classes par  $(-z)$ ,  $(-u)$  et  $(-z)(-u)$  ou, en posant  $\varepsilon^2 = -1$ , par  $\left(\frac{\varepsilon z}{\varepsilon-1}\right)$ ,  $\left(\frac{\varepsilon u}{\varepsilon-1}\right)$  et  $\left(\frac{\varepsilon z}{\varepsilon-1}\right)\left(\frac{\varepsilon u}{\varepsilon-1}\right)$ : leurs correspondantes respectives dans  $\mathcal{B}$ , sont  $(m_{1,\varepsilon}\overline{m_{2,\varepsilon^{-1}}})$ ,  $(m_{1,\varepsilon}m_{2,\varepsilon})$ ,  $(d_v)$ .

Comme  $d_1 T_{1_2} = \overline{d_1 T_{1_2} t_{1_2}} = d$ ,  $(d_1 T_{1_2})$  et  $(d_1 T_{1_2} t_{1_2})$  sont de première ou de seconde espèce suivant que  $-1$  est carré ou non (5, 6);  $(t_{1_2})$  est évidemment toujours de première espèce.

49. En faisant correspondre  $m_{i\lambda} = \begin{vmatrix} z & \lambda z \\ u & \lambda u \end{vmatrix}$  à  $m_{i\lambda}$ , on voit que  $\mathcal{A}^0 = \{\mathcal{U}_z \mathcal{U}_u, m_N\} = [\mathcal{A}^0]$ . Toute substitution  $\sigma$  de  $[\mathcal{A}^0]$  hors de  $\mathcal{U}_z \mathcal{U}_u$  a la forme  $(Nz)\alpha_z(Nu)\beta_u$ ,  $\alpha_z$  étant dans  $\mathcal{U}_z$  et  $\beta_u$  dans  $\mathcal{U}_u$ , c'est-à-dire la forme  $\alpha'_z \beta'_u$ ,  $\alpha'_z$  étant dans  $\mathcal{L}_z$  hors de  $\mathcal{U}_z$ , et  $\beta'_u$  dans  $\mathcal{L}_u$  hors de  $\mathcal{U}_u$ . Pour que  $\sigma$  soit d'ordre 2, il faut et suffit que les deux substitutions  $\alpha'_z$  et  $\beta'_u$  soient d'ordre 2. Comme  $\mathcal{L}_z$  n'a, hors de  $\mathcal{U}_z$ , qu'une classe de  $s_2$  (12), représentée par  $\frac{-N}{z}$ , et que toute cette classe s'obtient en transformant  $\frac{-N}{z}$  par  $\mathcal{U}_z$  (15),  $\sigma$  est toujours conjuguée de

$$\left(\frac{-N}{z}\right)\left(\frac{-N}{u}\right) = \left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)^{m_N},$$

qui répond à  $(t_{1_2} m_{1N})$  de  $\mathcal{A}^0$ ; comme  $\overline{t_{1_2} m_{1N}} = 1$ , cette  $s_2$  est de première espèce.

Comme  $\mathcal{U}_z$  et  $\mathcal{U}_u$  sont normaux dans  $[\mathcal{A}^0]$ , aucune substitution de ce groupe ne peut transformer l'une dans l'autre deux des substitutions  $\left(\frac{-1}{z}\right)$ ,  $\left(\frac{-1}{u}\right)$ ,  $\left(\frac{-1}{z}\right)\left(\frac{-1}{u}\right)$ . Ainsi les trois classes de  $\mathcal{B}$  restent distinctes dans  $\mathcal{A}^0$ .

50. En faisant correspondre  $t = \begin{vmatrix} z & u \\ u & z \end{vmatrix}$  à  $t_2$ , on voit (I, 40) que  $\mathcal{A} = \{\mathcal{U}_z \mathcal{U}_u, m_N, t\} = [\mathcal{A}]$ . Toute substitution  $\sigma$  de  $[\mathcal{A}]$  hors de  $[\mathcal{A}^0]$  a la forme  $t m_N^\varepsilon \alpha_z \beta_u$  ( $\varepsilon = 0, 1$ ;  $\alpha_z$  dans  $\mathcal{U}_z$ ,  $\beta_u$  dans  $\mathcal{U}_u$ ) ou  $t \alpha'_z \beta'_u$ , en posant  $(N^\varepsilon z)\alpha_z = \alpha'_z$ ,  $(N^\varepsilon u)\beta_u = \beta'_u$ . La condition  $\sigma^2 = 1$  donne

$$1 = t \alpha'_z \beta'_u t \alpha'_z \beta'_u = \alpha'_u \beta'_z \alpha'_z \beta'_u,$$

d'où  $\beta'_z = \alpha'^{-1}_u$ . Donc  $\sigma$  a la forme  $t \alpha'_z \alpha'^{-1}_z = \alpha'_u t \alpha'^{-1}_u = (N^\varepsilon u) \alpha_u t \alpha_u^{-1} (N^{-\varepsilon} u)$ .

En posant  $\gamma_u = (N^\varepsilon u) \alpha_u^{-1} (N^{-\varepsilon} u)$ , qui est dans  $[\mathcal{B}]$ , on voit

$$\sigma = \gamma_u^{-1} (N^\varepsilon u) \iota (N^{-\varepsilon} u) \gamma_u.$$

Donc  $\sigma$  est conjuguée dans  $[\mathcal{A}]$ , de  $(N^\varepsilon u) \iota (N^{-\varepsilon} u) = \iota (N^\varepsilon z) (N^\varepsilon u)$ . D'ailleurs  $\iota (Nz) (N^{-1} u)$  n'est pas conjuguée dans  $\mathcal{A}$ , de  $\iota$ , car elle devrait être transformée de  $\iota$  par une substitution de la forme  $\iota^{\alpha} \iota_N^\varepsilon \alpha_z \beta_u (\gamma, \varepsilon = 0, 1)$ , en sorte que

$$\iota (Nz) (N^{-1} u) = \beta_u^{-1} \alpha_z^{-1} \iota_N^\varepsilon \iota \iota_N^\varepsilon \alpha_z \beta_u = \iota \beta_u^{-1} \alpha_u^{-1} \alpha_z \beta_u,$$

et  $(Nz) (N^{-1} u)$  serait dans  $\mathcal{U}_z \mathcal{U}_u$ . On verrait de même que  $\iota (Nz) (N^{-1} u)$  ne peut être conjugué de  $\iota (kNz) (k^{-1} N^{-1} u)$  que si  $k$  est carré.

Donc  $[\mathcal{A}]$  a, hors de  $[\mathcal{A}^0]$ , deux classes de  $s_2$ , représentées par  $\iota$  et  $\iota (Nz) (N^{-1} u)$  ou, plus généralement, par

$$\iota (kz) (k^{-1} u) \quad \text{et} \quad \iota (kNz) (k^{-1} N^{-1} u).$$

auxquelles répondent dans  $\mathcal{A}$ ,  $(t_2)$  et  $(t_2 m_{2N})$ , ou, plus généralement,  $(t_2 m_{2k})$  et  $(t_2 m_{2, kN})$ , toutes deux de première espèce. [On verra au n° 51 que  $(\iota u)$  correspond à  $(\gamma)$ , donc  $(\iota z)$  à  $(t_2 \gamma t_2)$ .]

Il est clair que  $\iota$  transforme l'une dans l'autre les deux classes de  $s_2$  de  $[\mathcal{A}^0]$  représentées par  $\left(\frac{-1}{z}\right)$  et  $\left(\frac{-1}{u}\right)$ , et transforme en elle-même chacune des classes représentée par  $\left(\frac{-1}{z}\right) \left(\frac{-1}{u}\right)$  et  $\left(\frac{-1}{z}\right) \left(\frac{-1}{u}\right) \iota_N$ . Donc les  $s_2$  de  $\mathcal{A}$  qui sont dans  $\mathcal{A}^0$  forment trois classes représentées par  $(d_1 T_{12})$  [ou par  $(d_1 T_{12} t_{12})$ ],  $(t_{12})$ , et  $(t_{12} m_{1N})$ , la dernière seule étant hors de  $\mathcal{B}$ .

51. En faisant correspondre  $g_u = (\iota u)$  à  $\gamma$ , on voit que

$$[\mathcal{A}'] = [\mathcal{A}] + g_u [\mathcal{A}]$$

est isomorphe à  $\mathcal{A}' = \mathcal{A} + (\gamma) \mathcal{A}$ . On remarquera que  $[\mathcal{A}'] = \{\mathcal{L}_z \mathcal{L}_u, \iota\}$ , et que les substitutions  $g_u$  et  $g_z = \iota g_u \iota$  correspondent respectivement à  $\gamma$  et  $t_2 \gamma t_2$  suivant la même loi que les substitutions  $\beta_u$  de  $\mathcal{U}_u$  et  $\alpha_z$  de  $\mathcal{U}_z$  aux substitutions  $r$  de  $\mathbf{W}$  et  $s$  de  $\mathbf{V}$ . En prenant  $\{\mathbf{V}, s_2 \gamma t_2\} = \mathbf{V}'$  et  $\{\mathbf{W}, \gamma\} = \mathbf{W}'$ , le produit direct  $\mathcal{L}_z \mathcal{L}_u$  correspond à  $\mathbf{V}' \mathbf{W}'$ ; mais  $\gamma$  n'est pas permutable à toute substitution de  $\mathbf{V}$ , ni donc  $t_2 \gamma t_2$  à toute

substitution de **W**. Toute substitution  $\sigma$  de  $[\mathcal{C}']$  hors de  $[\mathcal{C}]$  est de la forme  $g_u t^s m_N^{\eta} \alpha_z \beta_u$  ( $\varepsilon, \eta = 0, 1$ ;  $\alpha_z$  étant dans  $\mathcal{U}_z$ , et  $\beta_u$  dans  $\mathcal{U}_u$ ).

Si  $\varepsilon = 1$ ,  $\sigma$  a la forme  $g_u t \alpha'_z \beta'_u$ ,  $\alpha'_z = (N^{\eta} z) \alpha_z$ ,  $\beta'_u = (N^{\eta} u) \beta_u$ . La condition  $\sigma^2 = 1$  donne

$$1 = g_u t \alpha'_z \beta'_u g_u t \alpha'_z \beta'_u = g_u \alpha'_z \beta'_z g_z \alpha'_z \beta'_u.$$

D'où

$$g_u (N^{\eta} u) \alpha_u (N^{\eta} u) \beta_u = (N^{\eta} z) \beta_z g_z (N^{\eta} z) \alpha_z = 1.$$

Le premier membre est dans le complexe  $g_u \mathcal{U}_u$ , il ne peut donc pas être égal à 1.

Soit donc  $\varepsilon = 0$ , alors  $\sigma$  a la forme  $g_u \alpha'_z \beta'_u$ . La condition  $\sigma^2 = 1$  donne

$$\alpha'_z{}^2 = (g_u \beta'_u)^2 = 1.$$

Si  $\eta = 0$ ,  $\alpha'_z = \alpha_z$  est conjuguée, dans  $\mathcal{U}_z$ , de 1 ou de  $\frac{-1}{z}$ ;  $g_u \beta'_u = g_u \beta_u$  qui est hors de  $\mathcal{U}_u$  est conjuguée par  $\mathcal{U}_u$  de  $\frac{-N}{u}$ . Donc  $\sigma$  est conjuguée de  $\frac{-N}{u}$  ou de  $\left(\frac{-N}{u}\right) \left(\frac{-1}{z}\right)$ .

Si  $\eta = 1$ , on voit de même que  $\sigma$  est conjuguée de  $\frac{-N}{z}$  ou de  $\left(\frac{-N}{z}\right) \left(\frac{-1}{u}\right)$ .

$t$  transforme les deux dernières substitutions en les deux premières. Comme  $\{\mathcal{U}_u \mathcal{U}_z, m_N, g_u\} = \mathcal{L}_z \mathcal{L}_u$ , d'où  $[\mathcal{C}'] = \{\mathcal{L}_z \mathcal{L}_u, t\}$ ,  $\left(\frac{-N}{u}\right)$  n'est pas conjuguée de  $\left(\frac{-N}{u}\right) \left(\frac{-1}{z}\right)$ . Donc  $[\mathcal{C}']$  n'a hors de  $[\mathcal{C}]$  que deux classes de  $s_2$  représentées par  $\frac{-N}{u} = \left(\frac{-1}{u}\right) (Nu)$  et  $\left(\frac{-N}{u}\right) \left(\frac{-1}{z}\right)$  auxquelles répondent respectivement, dans  $\mathcal{C}'$ , si  $N = t^k$  ( $k$  impair) [en sorte que  $(Nu) = g_u^k$ ],  $(d_1 T_{12} t_{12} \gamma^k) = (d_2 T_{12} t_{12} \gamma^k)$  et  $(t_{12} \gamma^k)$ .

Les relations  $\overline{d_1 T_{12} t_{12} \gamma^k}^2 = [-t^k]$  et  $\overline{t_{12} \gamma^k}^2 = [t^k]$  montrent que  $(t_{12} \gamma^k)$  est toujours de seconde espèce et que  $(d_1 T_{12} t_{12} \gamma^k)$  est de seconde ou de première espèce suivant que  $-1$  est carré ou non.

Les quatre classes de  $s_2$  de  $[\mathcal{C}]$  représentées par  $\left(-\frac{1}{z}\right)$  et  $\left(\frac{-1}{z}\right) \left(\frac{-1}{u}\right)$ , qui sont dans  $[\mathcal{B}]$ ,  $\left(\frac{-1}{z}\right) \left(\frac{-1}{u}\right) m_N$  qui est dans  $[\mathcal{C}^0]$

hors de  $[\mathcal{B}]$ ,  $\dagger$  qui est dans  $[\mathcal{C}]$  hors de  $[\mathcal{C}^0]$  restent évidemment distinctes dans  $[\mathcal{C}']$ ; mais  $(N^{-1}u)$  transforme  $\dagger$  en  $\dagger(Nz)(N^{-1}u)$ . Les deux classes correspondantes de  $[\mathcal{C}]$  se réunissent donc en une seule dans  $[\mathcal{C}']$ .

52. Cherchons maintenant les normalisants respectifs  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{N}'$ ,  $\mathcal{N}^0$ ,  $\mathcal{X}$  dans  $[\mathcal{C}]$ ,  $[\mathcal{C}']$ ,  $[\mathcal{C}^0]$ ,  $[\mathcal{B}]$  d'une  $s_2$  quelconque  $\sigma$  de  $[\mathcal{C}']$ .

Soit d'abord  $\psi$  irréductible. Alors (47)  $[\mathcal{C}'] = \{ \mathcal{L}(2, \pi^2), \dot{z} \}$ . Désignons par  $\mathcal{N}$  le normalisant de  $\sigma$  dans  $\mathcal{L}(2, \pi^2)$  et par  $\alpha_z$  la substitution générale  $\left( \frac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'} \right)$  de  $\mathcal{U}(2, \pi^2)$ , en supposant  $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$ .

Soit d'abord  $\sigma$  dans  $[\mathcal{B}] = \mathcal{U}(2, \pi^2)$ . On peut supposer que  $\sigma = -z$ . D'après ce qu'on a vu (13), on a ici  $\mathcal{N} = \left\{ \iota' z, \frac{-1}{z} \right\}$ ,  $\mathcal{X} = \left\{ \iota'^2 z, \frac{-1}{z} \right\}$ . Comme  $\dot{z}$  est permutable à  $-z$ , on a  $\mathcal{N} = \{ \mathcal{X}, \dot{z} \} = \mathcal{X} + \mathcal{X}\dot{z}$ ,  $\mathcal{N}' = \{ \mathcal{N}, \dot{z} \} = \{ \mathcal{N}, \iota' z \}$ ;  $\mathcal{X}$  est normal et d'indice 4 dans  $\mathcal{N}'$ .

53. Soit  $\sigma$  dans  $[\mathcal{C}]$  hors de  $\mathcal{B}$ . On peut d'abord supposer (45) que  $\sigma = \dot{z}$ . Pour qu'une substitution  $\alpha_z$  vérifie  $\alpha_z \sigma = \sigma \alpha_z$ , il faut et suffit que l'on ait;  $\rho$  désignant un facteur de proportionnalité,

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \rho \alpha, & \dot{\alpha}' &= \rho \alpha', & \text{d'où } \rho^2 &= 1. \\ \dot{\beta} &= \rho \beta, & \dot{\beta}' &= \rho \beta'. \end{aligned}$$

Si  $\rho = 1$ ,  $\alpha_z$  est une substitution quelconque de  $\mathcal{U}(2, \pi)$ . Si  $\rho = -1$ , en introduisant  $\omega = v - v$  au lieu de  $v = -\frac{b}{2c} + \frac{\omega}{2}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta'$  ont respectivement les formes  $\omega\alpha_1$ ,  $\omega\alpha'_1$ ,  $\omega\beta_1$ ,  $\omega\beta'_1$ , d'où  $\alpha_1\beta'_1 - \beta_1\alpha'_1 = \frac{1}{\omega^2}$ ,  $\omega^2 = \frac{\partial}{\partial z}$  étant non carré dans  $\mathcal{C}$ . Donc  $(\omega^{-2}z) \left( \frac{\alpha_1 z + \alpha'_1}{\beta_1 z + \beta'_1} \right)$  est dans  $\mathcal{U}(2, \pi)$ , donc  $\alpha_z$  est une substitution quelconque de  $(\omega^2 z) \mathcal{U}(2, \pi)$ . Donc  $\mathcal{X} = \mathcal{N}^0 = \mathcal{U}(2, \pi) + (\omega^2 z) \mathcal{U}(2, \pi) = \mathcal{L}(2, \pi)$ . Donc  $\mathcal{N} = \{ \mathcal{X}, \dot{z} \}$ , et  $\dot{z}$  étant permutable à  $\mathcal{L}(2, \pi)$ ,  $\mathcal{N} = \mathcal{X} + \mathcal{X}\dot{z}$ .

Comme  $\left( \frac{-1}{z} \right)$  est conjuguée de  $z$  dans  $[\mathcal{C}']$  (47), on obtiendra le normalisant dans  $[\mathcal{C}]$  de  $\left( \frac{-1}{z} \right)$  en transformant celui de  $\dot{z}$  par une

substitution  $s$  de  $[\mathcal{C}']$ , transformant  $(\bar{z})$  en  $\left(\frac{-1}{\bar{z}}\right)$ . La forme générale de  $s$  est  $\left[\frac{(\alpha z + \alpha')}{\rho(\alpha z + \alpha')}\right]$ ,  $\rho\bar{\rho} = -1$ .

De plus, le nombre des conjuguées de  $\bar{z}$  dans  $[\mathcal{C}']$  étant double du nombre de ses conjuguées dans  $[\mathcal{C}]$ , on a  $\mathcal{N}' = \mathcal{N}$ .

54. Soit  $\sigma$  dans  $[\mathcal{C}]$  hors de  $[\mathcal{C}]$ . On peut supposer (48) que  $\sigma = \left(\frac{-\xi}{z}\right)$ . Comme au n° 52, on connaît (13) ses normalisants  $\mathcal{N}$  dans  $\mathcal{L}(2, \pi^2)$  et  $\mathcal{Q} = \mathcal{N}^0$  dans  $\mathcal{U}(2, \pi^2) \equiv \mathcal{B} = \mathcal{C}^0$ . Pour déterminer  $\mathcal{N}$ , il suffit donc de chercher une substitution  $\tau = z\alpha_z$ , de  $\bar{z}\mathcal{U}(2, \pi^2)$ , permutable à  $\sigma$ . Or, si l'on pose

$$\alpha_z = \frac{\alpha z + \alpha'}{\beta z + \beta'}, \quad \alpha\beta' - \beta\alpha' = 1,$$

la condition  $\sigma z\alpha_z = \bar{z}\alpha_z\sigma$  donne, en désignant par  $\rho$  un facteur de proportionnalité,

$$\begin{aligned} \alpha\bar{\xi} &= \rho\bar{\xi}\beta', & \beta\bar{\xi} &= -\rho\alpha', \\ \beta' &= \rho\alpha, & \alpha' &= -\rho\bar{\xi}\beta. \end{aligned}$$

La condition de compatibilité est  $\rho^2 = \xi^{1-\pi}$ . La condition  $\alpha\beta' - \beta\alpha' \equiv 1$  donne  $\rho\alpha^2 + \rho\bar{\xi}\beta^2 = 1$ . Si  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ , on peut faire  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \xi^{\frac{\pi-1}{4}}$ ; alors  $\alpha_z = \frac{\bar{z}}{\rho} = \xi^{\frac{\pi-1}{2}}$ . Si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ , on peut faire  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = \xi^{-\frac{\pi+1}{2}}$ ; alors  $\alpha_z = -\frac{\rho\bar{\xi}}{\bar{z}} = -\frac{\xi^{\frac{\pi+1}{2}}}{z}$ . Alors  $\mathcal{N} = \mathcal{N}^0 + \mathcal{N}^0\tau$ . Enfin

$$\mathcal{N}' = \mathcal{N} + \mathcal{N}\sigma = \mathcal{N} + \mathcal{N}\tau;$$

et l'on peut ici, quel que soit  $\pi$ , prendre une quelconque des deux formes de  $\tau$ .

55. Supposons maintenant  $\psi$  réductible. Désignons ici par  $\mathcal{N}_z k$  et  $\mathcal{N}_{zk}$  les normalisants respectifs de  $\left(\frac{-k}{z}\right)$  dans  $\mathcal{L}_z(2, \pi)$  et  $\mathcal{U}_z(2, \pi)$ . On a vu (13), pour  $-k$  carré et (13-15) pour  $-k$  non carré, que  $\mathcal{N}_z k$  et  $\mathcal{N}_{zk}$  sont diédraux et que, si  $\mathcal{D}_z k$  et  $\mathcal{D}_{zk}$  sont leurs diviseurs



cycliques d'indice  $z$ , on peut déterminer une même substitution  $\tau_{zk}$  telle que

$$\mathfrak{M}_{zk} = \{\omega_{zk}, \tau_{zk}\}, \quad \mathfrak{N}_{zk} = \{\omega_{zk}^0, \tau_{zk}\}.$$

Je supprimerai l'indice  $k$  pour  $k = 1$ .

Soit d'abord  $\sigma = \frac{-1}{z}$ . Alors, comme  $[\mathcal{B}] = \mathfrak{U}_z \mathfrak{U}_u$ , on a  $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_z \mathfrak{U}_u$ ; et comme  $[\mathcal{A}^0] = \{[\mathcal{B}], m_N\}$  (49) =  $\{[\mathcal{B}], \alpha_z \alpha_u\}$ ,  $\alpha_z$  étant dans  $\mathcal{L}_z$  hors de  $\mathfrak{U}_z$ , on a  $\mathfrak{N}^0 = \{\mathfrak{X}, \beta_z \alpha_u\}$ ,  $\beta_z$  étant dans  $\mathfrak{M}_z$  hors de  $\mathfrak{N}_z$ . Comme  $[\mathcal{A}] = [\mathcal{A}^0] + [\mathcal{A}^0]_t$  (50) et comme aucune substitution de  $[\mathcal{A}^0]_t$  n'est permutable à  $\sigma$ , on a  $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^0$ ; cela correspond au fait que, dans  $[\mathcal{A}]$ ,  $\left(\frac{-1}{z}\right)$  est conjugué de  $\left(\frac{-1}{u}\right)$ . Enfin, comme

$$[\mathcal{A}'] = \{[\mathcal{A}], g_u\} = \{\mathcal{L}_z \mathcal{L}_u, t\},$$

on a  $\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}_z \mathcal{L}_u$ .

Pour traiter le cas  $\sigma = \left(\frac{-1}{u}\right)$ , il suffit de remarquer que

$$\left(\frac{-1}{u}\right) = t \left(\frac{-1}{z}\right) t.$$

Soit

$$\sigma = \left(\frac{-1}{z}\right) \left(\frac{-1}{u}\right).$$

Alors

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_z \mathfrak{N}_u, \quad \mathfrak{N}^0 = \{\mathfrak{X}, \beta_z \beta_u\}, \quad \mathfrak{N} = \{\mathfrak{N}_0, t\},$$

et, comme

$$[\mathcal{A}'] = \{\mathcal{L}_z \mathcal{L}_u, t\}, \quad \mathfrak{N}' = \{\mathfrak{M}_z \mathfrak{M}_u, t\}.$$

Soit

$$\sigma = \left(\frac{-1}{z}\right) \left(\frac{-1}{z}\right) m_N = \left(\frac{-N}{z}\right) \left(\frac{-N}{u}\right).$$

Alors

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{N}_{zN} \mathfrak{N}_{uN}, \quad \mathfrak{N}^0 = \{\mathfrak{X}, \sigma\}, \quad \mathfrak{N} = \{\mathfrak{N}_0, t\},$$

$$\mathfrak{N}' = \left\{ \mathfrak{N}, \left(\frac{-N}{z}\right) \right\} = \{\mathfrak{M}_{zN} \mathfrak{M}_{uN}, t\}.$$

Soit  $\sigma = t$ . Désignons par  $\mathfrak{U}_{zu}$  le groupe formé des substitutions  $\alpha_z \alpha_u$  où  $\alpha_z$  parcourt  $\mathfrak{U}_z$  et soit  $\mathcal{L}_{zu} = \{\mathfrak{U}_{zu}, (N_z)(N_u)\}$ . Il est clair que  $\mathfrak{X} = \mathfrak{U}_{zu}$ ,  $\mathfrak{N}^0 = \{\mathfrak{X}, m_N\} = \mathcal{L}_{zu}$ ; puis  $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{N}^0, t\}$ . Comme

$$\mathcal{A}' = \{\mathcal{L}_z \mathcal{L}_u, t\},$$

on a  $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$ .

Soit  $\sigma = \begin{pmatrix} -N \\ u \end{pmatrix}$ , on a  $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}_{uN} \mathfrak{U}_z$ ,  $\mathfrak{N}^0 = \{ \mathfrak{A}, \beta_{uN} \alpha_z | \alpha_z \text{ étant dans } \mathfrak{L}_z$   
hors de  $\mathfrak{U}_z$  et  $\beta_{uN}$  dans  $\mathfrak{N}_{uN}$  hors de  $\mathfrak{N}_{uN}$ ,  $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^0$ ,  $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}_{uN} \mathfrak{L}_z$ .

Soit  $\sigma = \begin{pmatrix} -N \\ u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ z \end{pmatrix}$ . On a  $\mathfrak{A} = \mathfrak{N}_{uN} \mathfrak{N}_z$ . Soient  $\beta_{uN}$  une substitution de  $\mathfrak{N}_{uN}$  hors de  $\mathfrak{N}_{uN}$ , et  $\beta_z$  une substitution de  $\mathfrak{N}_z$  hors de  $\mathfrak{N}_z$ . Comme on peut écrire  $[\mathfrak{A}^0] = \{ [\mathfrak{B}], \beta_{uN} \beta_z \}$ , on a  $\mathfrak{N}^0 = \{ \mathfrak{A}, \beta_{uN} \beta_z \}$ . Comme  $\iota$  transforme  $\sigma$  en  $\begin{pmatrix} -N \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ u \end{pmatrix}$  et qu'aucune substitution de  $[\mathfrak{A}_0]$  ne peut transformer  $\begin{pmatrix} -1 \\ u \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} -N \\ u \end{pmatrix}$ , qui est hors de  $\mathfrak{U}_u$ , donc hors de  $[\mathfrak{A}_0]$ , on a  $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^0$ . On a de même, aucune substitution de  $\iota \mathfrak{L}_z \mathfrak{L}_u$  n'étant permutable à  $\sigma$ ,  $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}_{uN} \mathfrak{N}_z$ .

56. Passons aux groupes B, A<sup>0</sup> A, A'.

Tout d'abord, si (s) est une s<sub>2</sub> de première espèce de  $\mathfrak{A}'$ , c'est-à-dire si  $s^2 = [\iota^{2h}]$ , Is contient exactement deux s<sub>2</sub> qui sont  $[\iota^{-h}]s$  et  $d[\iota^{-h}]s$ . Si au contraire (s) est de seconde espèce, c'est-à-dire si  $s^2 = [\iota^{2h+1}]$ , Is ne contient évidemment aucune s<sub>2</sub>. Ainsi Is contient ou non des s<sub>2</sub> suivant que (s) est de première ou de seconde espèce. On a vu d'ailleurs (5) que, si s et s' sont deux s<sub>2</sub> de A', (s') est conjuguée de (s) dans  $\mathfrak{A}'$  toujours et seulement si s' l'est, dans A', de s ou de ds.

Si donc (s) parcourt un système de représentants (s<sub>1</sub>), (s<sub>2</sub>), ... des classes de première espèce de A', s<sub>i</sub> étant choisi de manière que s<sub>i</sub><sup>2</sup> = 1, l'ensemble des substitutions s<sub>i</sub>, ds<sub>i</sub> et d contient un système de représentants des classes de s<sub>2</sub> de A', s<sub>i</sub> ne pouvant être conjuguée de s<sub>k</sub>, ni de ds<sub>k</sub>, si k ≠ i. Si d'ailleurs s<sub>i</sub> est conjuguée de ds<sub>i</sub> dans A', le normalisant de s<sub>i</sub> (qui est toujours aussi celui de ds<sub>i</sub>) est d'indice 2 dans le normalisant S<sub>i</sub> de Ds<sub>i</sub> dans A' qui correspond à celui de (s<sub>i</sub>) dans  $\mathfrak{A}'$ . Si au contraire s<sub>i</sub> n'est pas conjuguée de ds<sub>i</sub>, S<sub>i</sub> est à la fois le normalisant de s<sub>i</sub> et de Ds<sub>i</sub>.

Les mêmes considérations s'appliquent à  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{A}^0$ ,  $\mathfrak{B}$ , en observant que les s<sub>i</sub> tels que s<sub>i</sub><sup>2</sup> = 1 ne sont pas nécessairement tous dans A, A<sup>0</sup>, qui ne contiennent pas I, mais seulement D, ni dans B qui peut ne pas contenir D (I, 39).

57. Supposons d'abord  $\psi$  irréductible.

$\mathfrak{B}$  n'ayant ici qu'une classe de s<sub>2</sub> (44) et d étant ici hors de B (I, 39),

B n'a qu'une classe de  $s_2$ , que l'on peut représenter par  $t_{0, m_{1k}}$ ,  $k$  étant tel que cette substitution soit dans B (I, 32).

Il est clair que  $A_0 = BD$  a exactement trois classes de  $s_2$  représentées par  $s = t_{0, m_{1k}}$ ,  $d$ , et  $ds$ . On peut remplacer  $ds$  par une  $s_2$  quelconque  $\neq d$  hors de B, par exemple par  $sm_{1N}$ .

Dans A, les trois classes de  $s_2$  de  $A^0$  restent distinctes, puisque  $t_{0, m_{1k}}$  est dans B, et  $dt_{0, m_{1k}}$  hors de B. Comme  $\mathcal{A}$  a, hors de  $\mathcal{A}^0$  les deux classes  $(t_1)$  et  $(t_2)$  (46), l'ensemble des quatre substitutions  $t_1, t_2, dt_1, dt_2$  contient (56) un système de représentants des classes de  $s_2$  de  $\mathcal{A}$  hors de  $\mathcal{A}^0$ ,  $t_i$  ne pouvant être conjugué ni de  $t_k$ , ni de  $dt_k$ , si  $k \neq i$ . D'ailleurs  $t_i$ , ayant un multiplicateur égal à  $-1$  et trois égaux à  $1$ , ne peut être conjugué de  $dt_i$ . Donc A a exactement, hors de  $A^0$ , quatre classes de  $s_2$ , représentées par  $t_1, t_2, dt_1, dt_2$ .

On remarquera que  $t_2$  est conjugué de  $t_1 m_{1N}$ . En effet les substitutions de  $[\mathcal{A}']$  qui correspondent respectivement à  $It_1, It_2, Im_{1h}$  (puissance de  $I\gamma$ ) sont (45, 47)  $\left(\frac{-1}{z}\right), \dot{z}, (hz)$ . Donc à  $It_1 m_{1h}$  correspond  $\left(\frac{-1}{z}\right)(hz) = \dot{z}\left(\frac{-h}{z}\right)$ . Si  $h = r^2$ , on a  $\left(\frac{-h}{z}\right) = \left(\frac{-r}{r^{-1}z}\right)$ ; et le caractère (44) de  $(\dot{z})\left(\frac{-r}{r^{-1}z}\right)$  est  $\frac{-r}{r} = -r^{1-\pi} = -h^{\frac{1-\pi}{2}}$ . Selon que  $h$  est carré ou non, ce caractère est  $-1$  ou  $+1$ ; donc, (45)  $\dot{z}\left(\frac{-h}{z}\right)$  est conjuguée de  $\left(\frac{-1}{z}\right)$ ; ou de  $(\dot{z})$ ; donc  $(t_1 m_{1h})$  est conjuguée de  $(t_1)$  ou  $(t_2)$ . Donc  $t_1 m_{1h}$  est conjuguée de  $t_1$  ou  $t_2$ , puisqu'elle n'a comme eux qu'un seul multiplicateur égal à  $-1$  (1). On peut donc remplacer  $t_1$  et  $t_2$  par  $t_1 m_{1k}, t_1 m_{1kN}$ . Donc les classes de A peuvent être représentées par  $t_{0, m_{1k}} = s, sm_{1N}$  et  $d$ , qui sont dans  $A^0$ , puis  $st_0, sm_{1N}t_0, dst_0, dsm_{1N}t_0$ , qui sont hors de  $A^0$ , où l'on voit qu'il n'est plus nécessaire de préciser le caractère quadratique de  $k$ .

A toute  $s_2$  de  $A'$  hors de A correspond une  $s_2$  de première espèce de  $\mathcal{A}'$  hors de  $\mathcal{A}$ . Or  $\mathcal{A}'$  n'a hors de  $\mathcal{A}$  qu'une classe de  $s_2$  représentée

(1) De même  $t_2 m_{2\sigma}$ ,  $\sigma$  étant de la forme  $\xi^{k(n-1)}$  est conjuguée de  $t_2$  ou de  $t_1$  suivant que  $k$  est pair ou impair. Car  $t_2 m_{2\sigma}$  répond à  $(\dot{z})(\dot{\sigma}z)$ , dont le caractère est  $(-1)^k$ , et ne peut être conjuguée de  $dt_2$  ni de  $dt_1$ , qui ont trois multiplicateurs égaux à  $-1$ .

par  $(t_{12}\gamma)$  (47). Comme  $(t_{12}\gamma)^2 = [1]$  cette classe est de seconde espèce. Donc  $A'$  n'a aucune  $s_2$  hors de  $A$ .

On voit de suite que les classes de  $s_2$  de  $A^0$  restent distinctes dans  $A'$ , comme dans  $A$ . Mais les classes de  $A$  représentées par  $t_1$  et  $t_2$  se réunissent dans  $A'$ , et de même celles représentées par  $dt_1$  et  $dt_2$ . Cela résulte de ce que les deux classes de  $s_2$  de  $\mathcal{C}$  hors de  $\mathcal{C}_0$ , représentées par  $(t_1)$  et  $(t_2)$ , se réunissent en une seule dans  $\mathcal{C}'$  (47) (1).

58. Supposons maintenant  $\psi$  réductible,  $B$  contient ici  $d$  (I, 39). Les trois classes de  $s_2$  de  $\mathcal{B}$  sont  $(d_1 T_{12})$ ,  $(d_1 T_{12} t_{12})$ ,  $(t_{12})$ ; et  $\overline{d_1 T_{12}^2} = \overline{d_1 T_{12} t_{12}^2} = d$  (48). Donc pour que  $[t^h] d_1 T_{12}$  et  $[t^h] d_1 T_{12} t_{12}$  soit d'ordre 2, il faut que  $\pi - 1$  soit  $\equiv 0 \pmod{4}$  et que  $h = \frac{\pi - 1}{4}$ ; mais alors ces substitutions sont dans  $A'$  hors de  $A$ . A la classe  $(t_{12})$  de  $\mathcal{B}$  correspondent au plus, dans  $B$ , deux classes représentées par  $t_{12}$  et  $dt_{12}$ . Mais  $dt_{12}$  est conjuguée de  $t_{12}$ . En effet, on a  $t_{12} = R_{1,2,1} S_{1,2,-1}$  (I, 28),  $R_{1,2,1}$  étant dans  $\mathbf{V} \equiv U_{x_1, x_2}$  et  $S_{1,2,-1}$  dans  $\mathbf{W} \equiv U_{x_1, x_2}$  (I, 28, 40). Or  $R_{1,2,1}$  par exemple répond à  $|x_2 - x_1| = \alpha$  de  $U_{x_1, x_2}$ ; et toute substitution de  $U_{x_1, x_2}$  de la forme  $\beta = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix}$  où  $\lambda^2 + \mu^2 = -1$  transforme  $\alpha$  en  $\alpha \cdot \alpha^2$ ,  $\alpha^2 = |-x_1, -x_2|$  (S., p. 115). Donc la substitution de  $\mathbf{V}$  qui répond à  $\beta$  transforme  $R_{1,2,1}$  en  $dR_{1,2,1}$ , et, par suite  $t_{12}$  en  $dt_{12}$ . Cette substitution, qui est

$$\begin{vmatrix} x_1 & \lambda x_1 & & + \mu x_2 \\ y_1 & & - \lambda y_1 & - \mu y_2 \\ x_2 & \mu x_1 & & - \lambda x_2 \\ y_2 & & - \mu y_1 & + \lambda y_2 \end{vmatrix}$$

est égale à  $m_{1\lambda} m_{2\lambda}^{-1} V_{1,2,\lambda\mu} V_{2,1,\mu/\lambda}$ , si  $\lambda \neq 0$ , et à  $m_{1\mu} m_{2\mu} T_{12}$  si  $\lambda = 0$  ( $\lambda^2 + \mu^2 = -1$ ). Donc  $B$  a exactement deux classes de  $s_2$  représentées par  $d$  et  $t_{12}$ .

D'après l'étude de  $\mathcal{C}^0$  (49),  $A^0$  a, hors de  $B$ , au plus deux classes

(1) On pourrait dire aussi que  $\gamma^{-1} t_1 \gamma = t_1 m_{11}$  est, comme on vient de le voir, conjuguée de  $t_2$ . Mais c'est au fond la même démonstration.

de  $s_2$ , représentées par  $t_{12}m_{1N}$  et  $dt_{12}m_{1N}$ . Mais ces deux substitutions sont conjuguées dans  $A^0$ , car si  $-1$  est carré, la substitution  $m_{1\lambda}m_{2\lambda}$ , où  $\lambda^2 = -1$  transforme  $t_{12}m_{1N}$  en  $dt_{12}m_{1N}$ ; et, si  $(-1)$  est non carré, la substitution  $m_{1\mu}T_{12}m_{1\mu}^{-1}$ , où  $\mu^2 = -N$ , transforme encore  $t_{12}m_{1N}$  en  $dt_{12}m_{1N}$ . On peut remplacer  $t_{12}$  par  $s = t_{01}m_{1k}$  ( $k$  étant tel que cette substitution soit dans  $B$ ). Alors, comme dans le cas de  $\psi$  irréductible, les trois classes de  $s_2$  de  $A^0$  peuvent être représentés par  $s$ ,  $sm_{1N}$ , et  $d$ ; où l'on voit qu'il n'est plus nécessaire de préciser le caractère quadratique de  $k$ .

D'après l'étude de  $\mathcal{A}$  (50),  $A$  a, outre les classes de  $s_2$  de  $A^0$  (qui restent évidemment distinctes dans  $A$ ), exactement quatre classes de  $s_2$ , représentées par  $t_2m_{2k}$  et  $dt_2m_{2k}$ ,  $t_2m_{2,kN}$  et  $dt_2m_{2,kN}$  ( $t_2m_{2k}$  et  $t_2m_{2,kN}$  ont un seul multiplicateur  $-1$ ; leurs produits par  $d$  en ont trois), ou, en transformant par  $T_{12}$ , par  $t_1m_{1k}$  et  $dt_1m_{1k}$ ,  $t_1m_{1,kN}$  et  $dt_1m_{1,kN}$ . Donc  $A$  a exactement, comme pour  $\psi$  irréductible, sept classes de  $s_2$ , que l'on peut représenter par  $s$ ,  $sm_{1N}$  et  $d$ , qui sont dans  $A^0$ , et  $st_0$ ,  $dst_0$ ,  $st_0m_{1N}$ ,  $dst_0m_{1N}$ , qui sont hors de  $A^0$ .

On a vu que les classes de  $s_2$  de  $\mathcal{B}$  représentées par  $(d_1T_{12})$  et  $(d_1T_{12}t_{12})$  (48) se réunissent en une dans  $\mathcal{A}$  (50). D'autre part (58) il ne leur correspond de  $s_2$  que dans  $A'$  hors de  $A$ , et seulement si  $-1$  est carré. De plus la seule classe de  $s_2$  de  $\mathcal{A}'$  hors de  $\mathcal{A}$  qui puisse fournir des  $s_2$  de  $A'$  est  $(d_1T_{12}t_{12}\gamma^k)$  ( $k$  impair) (54, 56), et seulement si  $-1$  est non carré.

Si  $-1$  est carré, et si  $-1 = \varepsilon^2$ , les  $s_2$  de  $Id_1T_{12}$  sont (56)  $[\varepsilon]d_1T_{12}$  et  $[\varepsilon]d_2T_{12}$ , que  $T_{12}$  transforme l'une dans l'autre. Si  $-1$  est non carré, et si  $g^2 = -1$ , les  $s_2$  de  $Id_1T_{12}t_{12}\gamma^k$  sont  $[g^{-k}]d_1T_{12}t_{12}\gamma^k$  et  $[g^{-k}]d_2T_{12}t_{12}\gamma^k$ , que  $T_{12}$  transforme encore l'une dans l'autre.

Donc, quel que soit  $\pi$ ,  $A'$  a, hors de  $A$ , une seule classe de  $s_2$  que l'on peut, par exemple, représenter par  $\varphi = \gamma^{(\pi-1)/2}$  (38).

D'après l'étude de  $\mathcal{A}'$  (54), les quatre classes, de  $s_2$  de  $A$  hors de  $A^0$  se réunissent, dans  $A'$ , en deux classes, que l'on peut représenter par  $t_2m_{2k}$  et  $dt_2m_{2k}$ . Les autres classes de  $s_2$  de  $A$  restent évidemment distinctes dans  $A'$ .

59. D'après le n° 12, si  $-k$  est carré  $\left(\frac{-k}{\varepsilon}\right)$  est conjugué de  $(-\varepsilon)$

dans  $\mathcal{L}_z$ ; les substitutions qui transforment  $\left(\frac{-k}{z}\right)$  en  $(-z)$  forment le complexe  $\mathfrak{M}_{z_k c_{zk}}$ ,  $c_{zk}$  étant la substitution unimodulaire  $\xi$  du n° 13 et  $\mathfrak{M}_{z_k}$  le normalisant de  $\left(\frac{-k}{z}\right)$  dans  $\mathcal{L}_z$ . Soient  $e = k$  une des deux correspondantes de  $c_{zk}$  dans B (48) et  $\varepsilon^2 = -k$ .

Soit  $-1$  carré, et  $k = 1$ , les transformées de  $[\varepsilon]d_1T_{1,2}$  et de  $[\varepsilon]d_2T_{1,2}$  par  $e_{\varepsilon^1}$  sont les  $s_2$  du complexe  $Im_{1,\varepsilon}m_{\varepsilon^1}^{-1}$  qui correspond à  $(-z)$  (1). Ces  $s_2$  sont les substitutions du complexe  $D[\varepsilon]m_{1,\varepsilon}m_{\varepsilon^1}^{-1}$  dont l'une fixe 1000.

Soit  $-1$  non carré; si  $k$  est non carré et  $= u^h$  ( $h$  impair), les transformées de  $[g^{-h}]d_1T_{1,2}t_{1,2}\gamma^h$  et de  $[g^{-h}]d_2T_{1,2}t_{1,2}\gamma^h$  par  $e_{u^h}$  sont les deux  $s_2$  du complexe qui correspond à  $(-u) = \frac{\pi-1}{u^2}$ . Ces deux  $s_2$  sont  $\varphi$  et  $d\varphi$ , dont la seconde fixe 1000.

60. Cherchons les normalisants respectifs  $N, N', N^0, P$  dans  $A, A', A^0, B$  d'une  $s_2$   $s \neq d$  de  $A'$ . Au complexe  $Is$  (dont les seules  $s_2$  sont  $s$  et  $ds$ ) répond dans  $[\mathcal{C}']$  une  $s_2\sigma$ . Soient  $N_D, N'_D, N^0_D, P_D$  les diviseurs de  $A, A', A^0, B$  qui répondent respectivement à  $\mathcal{N}, \mathcal{N}', \mathcal{N}^0, \mathcal{B}$  (52) dans les homomorphismes de  $[\mathcal{C}], [\mathcal{C}'], [\mathcal{C}^0], \mathcal{B}$  à  $A, A', A^0, B$ . Ce sont les normalisants respectifs de  $Is$ , donc de  $Ds$  dans  $A, A', A^0, B$ . L'indice  $(N_D, N)$  est 2 ou 1 suivant que  $s$  et  $ds$  sont conjuguées ou non dans  $A$  (toute substitution de  $A$  transformant  $s$  en  $ds$  est dans  $N_D$  hors de  $N$ ). Si d'ailleurs  $s$  et  $ds$  sont conjugués dans  $A$ , le diviseur  $N_D$  correspond à un diviseur d'indice 2 dans  $\mathcal{N}$ . Il suffira d'un petit nombre d'essais pour déterminer celui de ces diviseurs auquel correspond  $N$ .

61. Si  $\psi$  est irréductible, on a vu (57) que  $s$  n'est jamais conjuguée de  $ds$ . Les normalisants  $N, N', N^0, P$  sont donc complètement déterminés par  $\mathcal{N}, \mathcal{N}', \mathcal{N}^0, \mathcal{B}$ .

62. Soit  $\psi$  réductible. Comme précédemment on connaît déjà ici (50, 55) le normalisant de  $t_2$  et de  $dt_2$ . Il reste donc seulement à

---

(1) On voit directement que  $(m_{1,\varepsilon}m_{\varepsilon^1}^{-1})$  de  $\mathcal{B}$  correspond à  $(-z)$ .

considérer les cas

$$\begin{aligned} s &= [\varepsilon] d_1 T_{12} & (-1 \text{ carré; } \varepsilon^2 = -1), \\ s &= [g^{-1}] d_1 T_{12} t_{12} \gamma & (-1 \text{ non carré; } g^2 = -1) \quad (58), \\ s &= t_{12} m_{1\bar{N}} \quad (49), & s = t_{12} \quad (48). \end{aligned}$$

63. Au lieu de  $s = [\varepsilon] d_1 T_{12}$ ,  $\sigma = \left(\frac{-1}{z}\right)$  (48, 58), il est avantageux de prendre (59)  $s = [\varepsilon] m_{1z} m_{2\bar{z}-1}$ ,  $\sigma = (-z)$ . En désignant ici par  $\mathfrak{N}_z$  et  $\mathfrak{U}_z$  les normalisants  $\left\{ (tz), \frac{-1}{z} \right\}$  et  $\left\{ (t^2 z), \left(\frac{-1}{z}\right) \right\}$  (43) de  $(-z)$  dans  $\mathcal{L}_z$  et  $\mathcal{U}_z$ , et par  $\mathfrak{E}$  celui de  $(-z)$  dans  $[\mathcal{B}]$ , on a  $\mathfrak{E} = \mathfrak{N}_z \mathcal{U}_u$  (55).  $\mathfrak{N}_z$  a trois diviseurs d'indice 2, qui sont

$$\{t^2 z\} = \mathcal{O}_z^0, \quad \left\{ (tz), \left(\frac{-1}{z}\right) \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ (t^2 z), (t^2 z) \left(\frac{-1}{z}\right) \right\}.$$

Or les correspondants de  $\left(\frac{-1}{z}\right)$  sont hors de A, et ceux de  $(t^2 z)$  étant dans B, ceux de  $(tz) \left(\frac{-1}{z}\right)$  sont hors de B. D'ailleurs (1, 40) toute substitution du groupe **W** qui répond à  $\mathcal{U}_u$  est permutable à  $s$ , qui est dans **V**. Donc P répond à  $\mathcal{O}_z^0 \mathcal{U}_u$ . De même N<sup>o</sup> répond à un diviseur d'indice 2 de  $\mathfrak{N}^0 = \{ \mathfrak{E}, \beta_z \alpha_u \}$  (55), où l'on peut supposer  $\beta_z = (tz)$  (43) et  $\alpha_u = (tu)$ . Comme  $\mathfrak{E} = \left\{ (t^2 z), \left(\frac{-1}{z}\right), \mathcal{U}_u \right\}$ , on a

$$\mathfrak{N}^0 = \left\{ m_z, \left(\frac{-1}{z}\right), \mathcal{U}_u \right\}.$$

Comme précédemment, le seul diviseur d'indice 2 dont le correspondant soit dans A<sup>0</sup> est  $\{m_z, \mathcal{U}_u\}$ .

Comme  $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}^0$ , et que ce diviseur est aussi le seul dont le correspondant soit dans A (55), on a  $N = N^0$ . Enfin  $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}_z \mathcal{L}_u$  (55) n'a qu'un diviseur d'indice 2 contenant  $\sigma$ , qui est  $\left\{ \mathcal{O}_z^0, \frac{-1}{z}, \mathcal{L}_u \right\}$ , donc N', qui contient évidemment  $s$ , correspond à ce diviseur.

64. Soient

$$s = [g^{-1}] d_1 T_{12} \gamma \quad (-1 \text{ non carré; } g^2 = -1), \quad \sigma = \left(\frac{-t}{u}\right), \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{N}_u \mathcal{U}_z.$$

Le diédral  $\mathcal{D}_{u_i}$  a trois diviseurs d'indice 2. Une vérification directe montre que  $\mathcal{D}_{u_i}^0$  (13) est le seul auquel corresponde un diviseur de P. Donc P répond à  $\mathcal{D}_{u_i}^0 \mathcal{U}_z$ . De même N<sup>o</sup> répond à un diviseur d'indice 2 de  $\mathcal{D}^0 = \{ \mathcal{E}, \beta_{u_i} \alpha_z \}$  (55) où l'on peut supposer que  $\beta_{u_i}$  est un générateur de  $\mathcal{D}_{u_i}$  (13) et que  $\alpha_z = (\iota z)$ . Comme  $\mathcal{E} = \{ \beta_{u_i}^2, \tau_{u_i}, \mathcal{U}_z \}$ ,  $\tau_{u_i}$  étant, comme  $\tau_k$  au n<sup>o</sup> 55, la substitution  $\sigma$  du n<sup>o</sup> 15 où l'on change  $z$  en  $u$  et  $k$  en  $\iota$ , on a  $\mathcal{D}^0 = \{ \beta_{u_i}(\iota z), \tau_{u_i}, \mathcal{U}_z \}$ . Le diédral  $\{ \beta_{u_i}(\iota z), \tau_{u_i} \}$  a trois diviseurs d'indice 2. Une vérification directe, opérée sur les correspondantes (51) de  $\beta_{u_i}$  et  $(\iota z)$  montre que  $\{ \beta_{u_i}(\iota z) \}$  est le seul auquel corresponde un diviseur de N<sup>o</sup>. Donc N<sup>o</sup> répond à  $\{ \beta_{u_i}(\iota z), \mathcal{U}_z \}$ . Comme  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^0$  (55) on a  $N = N^0$ . Enfin on voit, comme dans le cas de P, que N' répond à  $\mathcal{D}_{u_i} \mathcal{E}_z$ .

65. Soient

$$s = t_{12} m_{1\iota}, \quad \sigma = \left( \frac{-1}{z} \right) \left( \frac{-1}{u} \right)_{u_i} (49) = \left( \frac{-\iota}{z} \right) \left( \frac{-\iota}{u} \right).$$

On a  $\mathcal{E} = \mathcal{D}_{z\iota} \mathcal{D}_{u_i}$ .  $\mathcal{E}$  a plusieurs diviseurs d'indice 2. Le diviseur de B répondant à  $\mathcal{E}_1 = \{ \mathcal{D}_{z\iota}^0 \mathcal{D}_{u_i}^0, \tau_{z\iota} \tau_{u_i} \}$  est P. En effet, soit  $s = s' s''$ ,  $s'$  et  $s''$  étant deux  $s_2$  de A' répondent respectivement à  $\left( \frac{-\iota}{z} \right)$  et  $\left( \frac{-\iota}{u} \right)$ . D'après le cas précédent, les substitutions de B correspondant à celles de  $\mathcal{D}_{z\iota}^0 \mathcal{D}_{u_i}^0$  sont permutables à  $s'$  et  $s''$ ; celles qui répondent à  $\tau_{z\iota}$  transforment  $s'$  en  $ds'$  en sont permutables à  $s''$ ; celles qui répondent à  $\tau_{u_i}$  transforment  $s''$  en  $ds''$ , et sont permutables à  $s'$ . Donc celles qui répondent à  $\tau_{z\iota} \tau_{u_i}$  sont permutables à  $s$ , et P répond à  $\mathcal{E}_1$ . Comme  $\mathcal{D}^0 = \{ \mathcal{E}, \sigma \}$  (55) et que  $s$  est ici dans A<sup>o</sup>, N<sup>o</sup> correspond à  $\{ \mathcal{E}_1, \sigma \} = \mathcal{D}_1^0$ . Comme  $\mathcal{D} = \{ \mathcal{D}_z^0, \iota \}$  (55) et que  $t_2$  est permutable à  $s$ , N répond à  $\{ \mathcal{D}_1^0, \iota \} = \mathcal{D}_1$ , et N' à  $\{ \mathcal{D}_1, \left( \frac{-1}{u} \right) \}$ .

66. Soient  $s = t_{12}$ ,  $\sigma = \left( \frac{-1}{z} \right) \left( \frac{-1}{u} \right)$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{D}_z \mathcal{D}_u$  a plusieurs diviseurs d'indice 2. Soit d'abord  $-1$  non carré. Une vérification directe montre que toute substitution de B correspondant à la substitution générale de  $\mathcal{D}_z^0$  (14) ou de  $\mathcal{D}_u^0$  est permutable à  $t_{12}$  (1). Au contraire,

---

(1) Ce calcul ne fait pas intervenir le caractère quadratique du déterminant de la substitution générale considérée. Il montre donc aussi que toute substitution de A<sup>o</sup> correspondant à la substitution générale de  $\mathcal{D}_z$  ou de  $\mathcal{D}_u$  est permutable à  $t_{12}$ .



toute substitution de  $\mathbf{B}$  correspondant à  $\tau_z$  (qui est ici la substitution  $\sigma$  du n° 15 pour  $k=1$ ) transforme  $t_{1,2}$  en  $dt_{1,2}$ . Donc toute substitution correspondant à  $\tau_z\tau_u$  est permutable à  $t_{1,2}$ . Donc  $\mathbf{P}$  répond à

$$\{\mathcal{O}_z^0 \mathcal{O}_u^0, \tau_z\tau_u\} = \mathcal{X}_1.$$

Soit  $-1$  carré, il est alors avantageux de prendre (59)  $s=d_1$ ,  $\sigma=(-z)(-u)$ . D'après les résultats obtenus pour les normalisants de  $[\varepsilon]m_{1\varepsilon}m_{2\varepsilon-1}$  correspondant à  $(-z)$ , le normalisant de  $d_1$  dans  $\mathbf{B}$  répond à

$$\left\{ \{t^2 z\} \{t^2 u\}, \left(\frac{-1}{z}\right) \left(\frac{-1}{u}\right) \right\} = \mathcal{X}'_1.$$

Si l'on transforme par la substitution  $e_{z1}^{-1}e_{u1}^{-1} = f(59)$ , on voit que le normalisant  $\mathbf{P}$  de  $t_{1,2}$  dans  $\mathbf{B}$  répond au transformé de  $\mathcal{X}'_1$  par  $e_{z1}^{-1}e_{u1}^{-1} = f$ , qui est précisément  $\mathcal{X}_1$ , les notations ayant toujours les significations indiquées au début du n° 55.

Si  $(-1)$  est carré, le normalisant de  $d_1$  dans  $\mathbf{A}^0$  répond à  $\{\mathcal{X}'_1, m_1\}$ , car  $\mathcal{X}'_1$  est d'indice 2 dans ce dernier groupe, et  $m_1$ , qui correspond à  $m_1$  (49) est évidemment permutable à  $d_1$ . Le normalisant  $\mathbf{N}^0$  de  $t_{1,2}$  dans  $\mathbf{A}^0$  s'obtient en transformant celui de  $d_1$  par  $f$ . Donc  $\mathbf{N}^0$  répond à  $\{\mathcal{X}_1, f^{-1}m_1f\} = \mathcal{X}_1^0$ . On remarquera que  $f^{-1}m_1f$  est le produit de deux générateurs respectifs  $\partial_z$  et  $\partial_u$  de  $\mathcal{O}_z$  et  $\mathcal{O}_u$ .

Il en est de même si  $(-1)$  est non carré, comme le montrent les observations faites à l'occasion du calcul de  $\mathbf{P}$ .

$\mathbf{N}$  répond évidemment à  $\{\mathcal{X}_1^0, t\} = \mathcal{X}_1$ , en sorte que  $\mathbf{N} = \{\mathbf{N}^0, t_2\}$ .  $\mathbf{N}'$  répond à  $\{\mathcal{X}_1, \partial_z\} = \{\mathcal{O}_z \mathcal{O}_u, \tau_z\tau_u\}$ , car, d'après les calculs précédents, toute substitution de  $\mathbf{A}'$  répondant à  $\partial_z$  est permutable à  $t_{1,2}$ .

### § III. $n > 4$ .

67. Les résultats précédents s'étendent comme il suit au cas où  $n$  est  $> 4$ . Supposons  $\psi \neq 0$ , réductible ou irréductible. Les classes de  $s_2$  de  $\mathbf{A}(n, \pi)$  peuvent être représentées, si  $n$  impair  $= 2\nu + 1$ , par les substitutions  $s_i = t_{01}m_{1k_i}d_{1\dots i}$ ,  $s_i m_{1N}$ , qui ont chacune  $2i$  multiplicateurs  $-1$  ( $i=1, \dots, \nu$ );  $s_i t_0$ ,  $s_i m_{1N} t_0$ , qui ont chacune  $2i-1$  multiplicateurs  $-1$  ( $i=1, \dots, \nu$ );  $d$ , qui a  $2\nu+1$  multiplicateurs  $(-1)$  ( $i=1, \dots, \nu$ );  $k_i$  étant assujetti à la condition que  $s_i$  soit dans  $\mathbf{B}$  ( $k_i$  ne dépend que de  $a$ ,

et, si  $-1$  est non carré, de  $i$ ; en prenant au besoin  $m_{1r}^{-1}s_i m_{1r}$  pour  $s_i$ , on peut remplacer  $k_i$  par  $k_i r^2$ );

si  $n$  pair  $= 2\nu$ , par les mêmes substitutions auxquelles on adjoint  $ds_1 t_0$  et  $ds_1 m_{1N} t_0$ , qui ont chacune  $2\nu + 1$  multiplicateurs  $-1$ , et qu'on peut désigner, pour plus de symétrie, par  $s_{\nu'} t_0, s_{\nu'} m_{1N} t_0$ , en posant  $s_{\nu'} = t_{01} m_{1k_{\nu'}}$  et en faisant  $k_{\nu'} = -k_1$  (<sup>1</sup>).

68. Montrons d'abord que les classes indiquées dans l'énoncé sont distinctes. Cela est clair pour celles qui n'ont pas le même nombre de multiplicateurs. Il reste seulement à établir, la distinction de deux classes de  $s_2$ , représentées, l'une par  $s$ , l'autre par  $sm_{1N}$ .

Si  $s$  est une  $s_i$ , cela résulte de ce que  $s_i$  est dans  $B$ , et  $s_i m_{1N}$  dans  $A^0$  hors de  $B$ .

Si  $s$  est une  $s_j t_0$ ,  $j = 1, \dots, \nu'$ ,  $s$  et  $sm_{1N}$  sont toutes deux dans  $A$  hors de  $A^0$ . Or on a  $A = A^0 + A^0 t_1$  (I, 34) et  $A^0 = B + Bm_{1N}$  (I, 39), donc  $A = B + Bm_{1N} - Bt_1 + Bt_1 m_{1N}$ ; et les deux groupes  $B^1 = \{B, t_1\}$ ,  $B^2 = \{B, t_1 m_{1N}\}$  sont d'indice 2 et normaux dans  $A$ . Il est clair que  $s$  et  $sm_{1N}$  sont toujours l'une dans  $B^1$ , l'autre dans  $B^2$ ; elles ne sont donc pas conjuguées dans  $A$ .

On a évidemment aussi

$$B^1 = \{B, t_i\}, \quad B^2 = \{B, t_i m_{1N}\} \quad (i = 1, \dots, \nu).$$

De même si  $n$  est pair, et  $m_{\nu'}$  dans  $A^0$  hors de  $B$ , les groupes  $B^1$  et  $B^2$  coïncident avec  $\{B, t_{\nu'}\}$  et  $\{B, t_{\nu'} m_{\nu'}$ ; pour préciser  $B^1$  coïncide avec  $\{B, t_{\nu'}\}$  toujours et seulement si  $t_{1\nu'}$  est dans  $B$ , c'est-à-dire toujours et seulement si  $\psi$  est réductible (<sup>2</sup>). De même  $B^1$  et  $B^2$  coïncident

(<sup>1</sup>) Si  $n$  est impair, les  $ds_i t_0$  et  $ds_i m_{1N} t_0$  sont conjugués des  $s_i$  et  $s_i m_{1N}$ ; car on a alors  $dt_0 = d_{1, \dots, \nu}$  ( $t_0 = d_0$  pour  $n$  impair) et la  $s_2 ds_i t_0 = t_{01} m_{1k_i} d_{i+1, \dots, \nu}$  est transformée par  $T_{i+1, 2} T_{i+2, 3} \dots T_{\nu, \nu-i+1}$  (qui se réduit à 1 pour  $i = 1$ ) en

$$t_{01} m_{1k_i} d_{2, \dots, \nu-i+1} = t_{01} m_{1, -k_i} d_{1, 2, \dots, \nu-i+1}$$

qui, suivant le caractère quadratique de  $-k_i$ , est conjuguée de  $s_{\nu-i+1}$  ou de  $s_{\nu-i+1} m_{1N}$ . Comme ici  $d$  n'a que  $2\nu$  multiplicateurs  $-1$  ( $d_0$  n'en a qu'un),  $ds_1 t_0$  et  $ds_1 m_{1N} t_0$  n'en ont que  $2\nu$ , comme  $s_{\nu}$  et  $s_{\nu} m_{1N}$ .

(<sup>2</sup>)  $t_{0i}$  est dans  $B$  toujours et seulement si  $\delta c$  est carré (I, p. 348).

Soit d'abord  $\psi$  irréductible. On a  $t_0 = t_{\nu'} m_{\nu' q}$  ( $q = xx^{-1}$ ,  $xx = c$ ) (I, p. 322). Si l'on pose  $c = t'^{k(\pi+1)}$ , on peut prendre  $x = t'^k$ ,  $x = t'^k \pi$ ; donc  $q = t'^{(1-\pi)k}$ . Donc pour

avec  $\{B, t_0\}$  et  $\{B, t_0 m_{j\rho}\}$ ,  $j$  étant l'un des nombres  $1, \dots, \nu'$ , et  $m_{j\rho}$  étant dans  $A^0$  hors de  $B$ . Pour préciser,  $B'$  coïncide avec  $\{B, t_0\}$  toujours si  $t_{01}$  est dans  $B$ , c'est-à-dire que si  $\delta c$  est carré (I, p. 348).

On remarquera, pour la suite, que, si une certaine substitution  $\tau$  est dans l'un des groupes  $B^1$  ou  $B^2$ , la substitution  $\tau_k = \tau m_{\nu'\sigma^k}$ ,  $\sigma$  étant d'ordre  $\pi + 1$ , est dans ce même groupe ou dans l'autre, suivant que  $m_{\nu'\sigma^k}$  est ou non dans  $B$ , c'est-à-dire suivant que  $k$  est pair ou impair.

Si  $n$  est impair, et  $\psi = cx^2$ ,  $t_{01} m_{1,-c\lambda^2}$  est toujours dans  $B$  (I, p. 336). Donc  $\{B, t_0\}$  coïncide avec  $B'$  toujours et seulement si  $-c$  est carré. D'autre part comme  $dt_1 = t_{01} m_{1,-c} m_{1,c^{-1}} d_{2,\dots,\nu}$ ,  $\{B, d\}$  coïncide avec  $B'$  toujours et seulement si  $c$  est carré avec  $-1$  carré ou  $\nu$  impair, ou si  $c$  est non carré avec  $-1$  non carré et  $\nu$  pair.

69. Montrons maintenant qu'il n'y a pas d'autres classes que celles indiquées dans l'énoncé. On l'a vu pour  $n = 3$  (43) et pour  $n = 4$  (57, 58). Admettons-le pour les valeurs de  $n$  inférieures à la valeur considérée. Soit  $s$  une  $s_2 \neq d$  de  $A$ . Si  $s$  déplace tous les points du champ, sa forme canonique est  $d$ , et, comme  $d$  est normale dans  $L$ ,  $s$  coïncide avec  $d$ . Donc  $s$  fixe au moins un point.

70. Soit d'abord  $n = 2\nu + 1$ . On a vu (II, 1) que  $A$  a  $\pi$  systèmes d'intransitivité  $q_{\lambda,a} = q_\lambda$ ,  $q_{\lambda,a}$  désignant l'ensemble des points vérifiant  $a = \lambda$ ,  $\lambda$  parcourant  $\mathcal{C}$ , et le point  $(0, \dots, 0)$  étant exclu de  $q_0$ .

Si  $s$  fixe un point de  $q_0$ , on peut supposer que  $s$  est dans le diviseur  $X_0$  de  $A$  qui fixe le point  $(1, 0, \dots, 0)$ . On voit alors, comme dans l'étude du groupe hermitien (17), que  $s$  est conjuguée d'une  $s_2$  du groupe  $A_1$  de la forme  $a - x_1 y_1$ . Ce groupe fixant tous les points  $(x_1, y_1, 0, \dots, 0)$ , on est ramené au cas où  $s$  fixe des points  $q_\lambda$  ( $\lambda \neq 0$ ).

que  $m_{\nu'q}$  soit dans  $B$ , il faut et il suffit (I, p. 347) que  $k$  soit pair, donc que  $c$  soit carré. Alors  $t_{01}$ , et, par suite,  $t_{1\nu'}$  ne sont pas dans  $B$ .

Soit maintenant  $\psi$  réductible. En posant  $q = xx'^{-1}$ ,  $xx' = c$ , on a encore (I, p. 333-334)  $t_0 = t_{\nu'} m_{\nu'q}$ . Pour que  $m_{\nu'q}$  soit dans  $B$ , il faut et il suffit que  $q$  soit carré (I, p. 347;  $\sigma$  est ici réel), ou, ce qui revient au même, que  $c$  soit carré. Alors  $t_{01}$ , et par suite  $t_{1\nu'}$ , sont dans  $B$ .

Supposons donc que  $s$  fixe un point de  $q_{\lambda, a}$  ( $\lambda \neq 0$ ) on peut supposer que  $s$  est dans le diviseur  $X_\lambda$  de  $A$  qui fixe le point  $(1, \lambda, 0, \dots, 0)$  [II, p. 48, note (1)]. Or ce groupe est isomorphe (I, 21) au groupe  $A(2\nu, \pi, a_{\lambda, 0})$  de la forme

$$a_{\lambda, 0} = \sum_{i=1}^{\nu-1} x_i y_i + c x^2 - \frac{y^2}{4\lambda},$$

dont les classes de  $s_2$  sont représentées par

$$s_i, s_i m_{1N}, s_i t_0, s_i m_{1N} t_0 \quad (i = 1, \dots, \nu - 1);$$

$$d_{1, \dots, \nu-1, 0} s_1 t_0, d_{1, \dots, \nu-1, 0} s_1 m_{1N} t_0, \text{ et } d_{1, \dots, \nu-1, 0}$$

D'après la correspondance indiquée [I, p. 48, note (1)] entre  $A(2\nu, \pi, a_{\lambda, 0})$  et  $X_\lambda$  (1), leurs correspondantes sont

$$s_{i\lambda} = m_{1\lambda} t_{12} m_{2k_i} d_{2, \dots, i+1}, \quad s_{i\lambda} m_{2N};$$

$$s_{i\lambda} m_{1\lambda} t_1 = t_2 m_{2k_i} d_{2, \dots, i+1},$$

$$s_{i\lambda} m_{2N} m_{1\lambda} t_1 = t_2 m_{2, k_i N} d_{2, \dots, i+1},$$

$$d_{2, \dots, \nu} m_{1\lambda} t_{01} t_2 m_{2k_1} d_2 = d m_{1\lambda} t_{12} m_{2k_1} d_{12}, \quad d m_{1\lambda} t_{12} m_{2, k_1 N} d_{12},$$

$$d_{2, \dots, \nu} m_{1\lambda} t_{01} = t_{01} m_{1\lambda} d_{2, \dots, \nu}.$$

Désignons maintenant par  $A_{j_1, j_2, \dots, j_r}, A_{j_1, \dots, j_r}^0, B_{j_1, \dots, j_r}$  ( $r \geq 2$ ) les diviseurs de  $A, A^0, B$ , qui agissent sur les seules variables d'indice  $j_1, \dots, j_r$  (l'un de ces indices pouvant être nul). La  $s_2 m_{1\lambda} t_{12} m_{2k_i} d_2 = s_{i\lambda} d_{3, \dots, i+1}$  ( $d_{3, \dots, i+1}$  est à supprimer si  $i = 1$ ) de  $A_{012}^0$  est conjuguée, dans  $A_{012}$  d'une  $s_2$  de la forme  $t_{01} m_{1\mu}$ . En effet,  $A_{012}^0$  n'a, d'après le cas  $n = 4$  et en négligeant  $d$ , qu'une classe de  $s_2$  dans  $B_{12}$  et une hors de  $B_{12}$  (58). Comme  $t_{12} m_{1\mu} m_{2, -c}$  est une  $s_2$  dans  $B_{12}$  ou hors de  $B_{12}$  suivant le caractère quadratique de  $\mu$ , on peut toujours déterminer  $\mu$  de manière que  $t_{12} m_{1\mu} m_{2, -c}$  soit conjuguée de  $s_{i\lambda} d_{3, \dots, i+1}$ . Ensuite, d'après le cas  $n = 3$  (43, note)  $t_2 m_{2, -c}$  est conjuguée de  $t_0$  dans  $A_{02}$ . Donc, dans  $A_{012}$ ,  $t_{01} m_{1\mu}$  est conjuguée de  $s_{i\lambda} d_{3, \dots, i+1}$ . Donc  $s_{i\lambda}$  est conjuguée de  $t_{01} m_{1\mu} d_{3, \dots, i+1}$ , que  $T_{32}, \dots, T_{i+1, i}$  transforme en  $s_i$  ou  $s_i m_{1N}$  ( $i = 1, \dots, \nu - 1$ ). On voit de même que  $s_i m_{2N}$  est conjuguée de  $s_i$  ou de  $s_i m_{1N}$  ( $i = 1, \dots, \nu - 1$ ). Les substitutions  $t_2 m_{2k_i} d_{2, \dots, i+1}$  et  $t_2 m_{2, k_i N} d_{2, \dots, i+1}$  sont transformées par  $T_{12}, T_{23}, \dots, T_{i, i+1}$  en  $s_i t_0$  et  $s_i m_{1N} t_0$  ( $i = 1, \dots,$

(1) D'après cette correspondance, aux substitutions  $t_0, d_0, t_k, d_k, m_{k\mu}$  ( $k = 1, \dots, \nu - 1$ ) de  $A(2\nu, \pi, a_{\lambda, 0})$  correspondent les substitutions  $m_{1\lambda} t_1, m_{1\lambda} t_{01}, t_{k+1}, d_{k+1}, m_{k+1, \mu}$ .

$\nu - 1$ ). On voit encore, comme pour  $m_{1\lambda} t_{12} m_{2k_i} d_2$ , que les substitutions

$$dm_{1\lambda} t_{12} m_{2k_i} d_{12} \quad \text{et} \quad dm_{1\lambda} t_{12} m_{2, k_{1N}} d_{12}$$

sont conjuguées de  $dt_{01}$  et  $dt_{01} m_{1N}$ , conjuguées elles-mêmes ( $d_0 = t_0$ ) de  $s_\nu t_0$  et  $s_\nu m_{1N} t_0$ .

Enfin  $t_{01} m_{1\lambda, -1} d_{2, \dots, \nu} = t_{01} m_{1, -\lambda-1} d_{1, 2, \dots, \nu}$  est évidemment conjuguée, suivant le caractère quadratique de  $\lambda$ , de  $s_\nu$  ou de  $s_\nu m_{1N}$ .

On n'a donc obtenu ainsi que les classes indiquées dans l'énoncé.

71. Soit  $n = 2\nu + 2$ . Si  $s$  fixe un point de  $q_0$ , on peut, ici encore, supposer que  $s$  est dans le diviseur  $X_0$  de  $A$  qui fixe le point  $(1, 0, \dots, 0)$ . On voit alors, comme dans le cas de  $n$  impair, que l'on est ramené au cas où  $s$  fixe un point de  $q_\lambda$  ( $\lambda \neq 0$ ).

Si  $s$  fixe un point de  $q_\lambda$  ( $\lambda \neq 0$ ), on peut d'abord supposer que  $\lambda = c'$ , et que  $s$  est dans le diviseur  $X_{c'}$  de  $A$  qui fixe le point de coordonnées

$$x_1 = \dots = x_\nu = x = 0, \quad y_1 = \dots = y_\nu = 0, \quad y = 1.$$

Ce groupe est isomorphe au groupe  $A(2\nu + 1, \pi, a_1)$  de la forme

$$a_1 = \sum_1^\nu x_i y_i + c_1 x^2 \quad \left( c_1 = \frac{-\delta}{4c'}, \delta = b^2 - 4cc' \right) \quad (\text{II, 22}),$$

dont les classes de  $s_2$  sont représentées par

$$s_i, \quad s_i m_{1N}, \quad s_i t_0, \quad s_i m_{1N} t_0 \quad (i = 1, \dots, \nu), \\ d_{12 \dots \nu 0} \quad (\text{ici } d_0 = |x, -x|).$$

D'après la correspondance indiquée [II, p. 50, note (1)] (1) entre  $A(2\nu + 1, \pi, a_1)$  et  $X_{c'}$  leurs correspondantes dans  $X_{c'}$  sont

$$s_{ic'} = u_0 t_{1k_i} m_{1k_i} d_{1 \dots i}, \quad s_{ic'} m_{1N}, \quad s_{ic'} u_0, \quad s_{ic'} m_{1N} u_0, \quad u_0 d_{1 \dots \nu}.$$

(1) D'après cette correspondance, à  $t_0 = d_0$  de  $A(2\nu + 1, \pi, a_1)$  correspond

$$u_0 = t_0 m_{0, -1, -b/c'} = \begin{vmatrix} x, & -x \\ y, & y + \frac{b}{c'} x \end{vmatrix} \quad (\text{I, 23}),$$

de  $X_{c'}$ ; aux substitutions  $d_k, t_k, m_{k\mu}$  de  $A(2\nu + 1, \pi, a_1)$  correspondent respectivement ces mêmes substitutions dans  $X_{c'}$ .

Or, d'après le cas  $n = 4$  (57), les substitutions

$$u_0 t_1 m_{1k_i} d_1 \quad \text{et} \quad u_0 t_1 m_{1, k_N} d_1$$

sont conjuguées, dans  $A_{0,1}^0$ , de substitutions de la forme  $t_0, m_{1\mu}$  et  $u_0 d_1$ , qui est dans  $A_{0,1}$  hors de  $A_{0,1}^0$  et a trois multiplicateurs  $-1$ , est conjuguée de l'une des deux  $s_2$  :  $d_{0,1} s_1 t_0$  ou  $d_{0,1} s_1 m_{1N} t_0$ . Donc  $s_{ic'}$  et  $s_{ic'} m_{1N}$  sont conjuguées de  $s_i$  et  $s_i m_{1N}$ ; ou  $u_0 d_{1,2,\dots,\nu}$  est conjuguée de l'une des  $s_2$  :  $ds_1 t_0$  ou  $ds_1 m_{1N} t_0$ . D'ailleurs  $s_{ic'} u_0$  et  $s_{ic'} m_{1N} u_0$ , sont, d'après leur forme, conjuguées de  $s_i t_0$  et  $s_i m_{1N} t_0$ .

Comme  $\gamma$  permute circulairement les  $q_\lambda$  où  $\lambda \neq 0$  (II, 15), si  $s$  fixe un point de  $q_\lambda$  ( $\lambda \neq c'$ ), on peut supposer que  $s$  est dans  $\gamma^{-k} X_{c'} \gamma^k$ . Les classes de  $s_2$  de ce groupe sont représentées, en supposant d'abord  $\psi$  irréductible, par

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \gamma^{-k} s_{ic'} \gamma^k = u_0 t_1 m_{1, k_i} t^k m_{\nu'}, & \rho^k d_{12\dots i}, & \sigma_i m_{1N}, \\ \sigma'_i &= \gamma^{-k} s_{ic'} u_0 \gamma^k = t_1 m_{1, k_i} t^k d_{12\dots i}, & \sigma'_i m_{1N}, \\ \tau_k &= \gamma^{-k} u_0 d_{1, \dots, \nu} \gamma^k = u_0 m_{\nu'}, & \rho^k d_{1\dots \nu}, & \rho = \xi \xi^{-1} \quad (1). \end{aligned}$$

Or, d'après le cas  $n = 4$ , toute  $s_2$  réelle de la forme  $u_0 t_1 m_{1h} m_{\nu X}$  est conjuguée, dans  $A_{0,1}^0$ , d'une  $t_0, m_{1\mu}$ ; et toute  $s_2$  réelle de la forme  $u_0 m_{\nu X} d_1$  (qui a trois multiplicateurs  $-1$ ) est conjuguée, dans  $A_{0,1}$ , d'une  $d_{0,1} t_1 m_{1\mu}$ . Donc  $\sigma_i$  et  $\sigma_i m_{1N}$  sont conjuguées de  $s_i$  et  $s_i m_{1N}$ ,  $\tau_k$  est, suivant la parité

(1) Pour justifier les formules ou textes il convient d'abord de rappeler les définitions suivantes :

Soient d'abord  $\psi$  irréductible, et  $\psi = cx^2 + bxy + c'y^2 = x_{\nu'} \gamma_{\nu'}$  en posant (I, 24) :

$$x_{\nu'} = z(x - \nu y), \quad y_{\nu'} = z(x - \nu' y), \quad z\bar{z} = c, \quad \psi(\nu, 1) = 0.$$

Si  $s = s_0 + u s_1$ ,  $s_0$  et  $s_1$  étant réels, on désignera par  $m_{0, s_0 s_1}$  l'action, sur  $x$  et  $y$ , de

$$m_{\nu' s} = \begin{vmatrix} x_{\nu'} & s x_{\nu'} \\ y_{\nu'} & s^{-1} y_{\nu'} \end{vmatrix} \quad (1, 25);$$

cette substitution est réelle toujours et seulement si  $s^{-1} = \bar{s}$ , c'est-à-dire  $s^{\pi+1} = 1$ . On vérifie alors les formules suivantes :

$$\begin{aligned} t_0 &= t_{\nu'} m_{\nu' q}, & q &= x\bar{x}^{-1}, & u_0 &= t_0 m_{0, -1, -b/c'} = t_{\nu'} m_{\nu' q}, & r &= -1 - \frac{b}{c'} \nu. \\ \gamma^{-1} t_i \gamma &= t_i m_{i\lambda}, & \gamma^{-1} m_{i\lambda} \gamma &= m_{i\lambda} & (i &= 1, \dots, \nu), \\ \gamma^{-1} t_{\nu'} \gamma &= t_{\nu'} m_{\nu' \rho}, & \rho &= \xi \xi^{-1}, & \gamma^{-1} m_{\nu' \xi} \gamma &= m_{\nu' \xi}, & \gamma^{-1} u_0 \gamma &= u_0 m_{\nu' \rho}. \end{aligned}$$

de  $k$  (68), conjuguée de  $ds_1 t_0$  ou de  $ds_1 m_{1N} t_0$ ; enfin  $\sigma'_i$  et  $\sigma'_i m_{1N}$  sont évidemment conjuguées de  $s_i t_0$  et  $s_i m_{1N} t_0$ .

Soit maintenant  $\psi$  réductible. On peut encore poser

$$x_{\nu} = x(x - \nu y), \quad y_{\nu} = x'(x - \nu' y), \quad xx' = c, \quad \psi(u, 1) = \psi(u', 1) = 0.$$

Les formules précédentes subsistent alors, en remplaçant  $s, \dot{s}, \xi, \dot{\xi}$  respectivement par des quantités réelles  $s, s', \xi, \xi'$  vérifiant  $ss' = 1$ ,  $\xi\xi' = 1$ ; alors  $s_0 + \nu s_1 = s$ ,  $s_0 + \nu' s_1 = s^{-1}$ ,  $r_0 + \nu r_1 = r_0 + \nu' r_1 = 1$ ; il faut, bien entendu, supposer que, dans le cas de  $\psi$  irréductible, on a toujours désigné les conjuguées de  $\nu, s, \xi$  par  $\dot{\nu}, \dot{s}, \dot{\xi}$ , et non par  $\nu^{\pi}, s^{\pi}, \xi^{\pi}$ .

72. Pour  $n > 4$  (comme pour  $n \leq 4$ ),  $A'$  n'a de  $s_2$  hors de  $A$  que si  $n$  est pair et  $\psi$  réductible : alors toute  $s_2$  de  $A'$  hors de  $A$  est conjuguée de  $\varphi$ .

En effet, soit  $s$  une  $s_2$  de  $A'$  hors de  $A$ . On voit d'abord, comme dans le cas de  $A$ , que  $s$ , nécessairement distincte de  $d$ , fixe au moins un point. Mais  $s$  ne peut fixer hors de  $q_0$ . Car le diviseur de  $A'$  fixant ce point est aussi le diviseur de  $A$  fixant ce même point (II, 21, 22), et alors  $s$  serait dans  $A$ . Donc  $s$  fixe un point de  $q_0$ ; et l'on peut supposer que  $s$  est dans le diviseur  $X' = \{X, m_{1t}^{-1} \gamma\}$  de  $A'$  qui fixe le point  $(1, 0, \dots, 0)$  (II, 18). Donc  $s$  a la forme  $(m_{1t}^{-1} \gamma)^{\rho} \alpha_1 \varpi$ ,  $\alpha_1$  étant dans  $A_1$  et  $\varpi$  dans  $P$  ( $m_{1t}$  et  $\gamma$  sont permutables à  $P$  et à  $A_1$ ). On voit alors, comme dans le cas du groupe hermitien (17), que  $s$  est conjuguée de  $s' = (m_{1t}^{-1} \gamma)^{\rho} \alpha_1$ . En considérant l'action de cette substitution sur les variables  $x_1, y_1$ , on voit que la condition  $s^2 = 1$  exige que  $\rho = \frac{k(\pi-1)}{2}$ , et que, en désignant par  $\gamma_1$  l'action de  $\gamma$  sur les variables de  $A_1$ ,  $(\gamma_1^{\rho} \alpha_1)^2 = 1$ . Or  $\rho$  ne peut être égal à  $\pi - 1$ , sans quoi  $s'$ , qui multiplie  $\alpha$  par  $\iota^{\rho}$  ou  $\iota^{2\rho}$ , serait dans  $A$ . Donc  $\rho = \frac{\pi-1}{2}$ , et la substitution  $\gamma_1^{\frac{\pi-1}{2}} \alpha_1$  multiplie  $\alpha_1$  par  $-1$ . En admettant le théorème pour les valeurs de  $n$  inférieures à la valeur considérée, on voit que  $s$  n'existe que si  $n$  est pair et  $\psi$  réductible, et qu'alors,  $\gamma_1^{\frac{\pi-1}{2}} \alpha_1$  étant conjuguée de  $\gamma_1^{\frac{\pi-1}{2}}$ ,  $s$  est conjuguée de  $d_1 \varphi$ , que  $t_1$  transforme en  $\varphi$ .

Si  $n$  est pair, les classes de  $s_2$  de  $A$  ne sont pas toutes distinctes dans  $A'$ , car,  $\gamma$  transformant  $B^1$  en  $B^2$  ( $\gamma^{-1} t_1 \gamma = t_1 m_{1t}$ ), les deux classes représentées par  $s_j t_0$  et  $s_j m_{1N} t_0$ ,  $j$  étant l'un des nombres  $1, \dots, \nu'$  se

réunissent en une seule dans  $A'$ . Les classes représentées par  $s_i$  et  $s_i m_{1N}$  étant, l'une dans B, l'autre dans  $A^0$  hors de B, restent distinctes dans  $A'$ .

Si  $n$  est impair, on a  $A' = AI$  (I, p. 320); et les classes de A restent évidemment distinctes dans  $A'$ .

73. Cherchons les normalisants N, N', N<sup>0</sup>, P dans A, A', A<sup>0</sup>, B d'une  $s_2 s \neq d$ . Je supposerai, dans ce qui suit, que  $\psi = x^2 + c'y^2$ ,  $c'$  étant nul si  $n$  est impair. Il est clair que chacun des groupes P, N<sup>0</sup>, N, N' est normal dans tous ceux des autres qui le contiennent.

Soit d'abord  $s$  dans A<sup>0</sup>, et par suite de la forme  $t_0 m_l d_{1, \dots, r}$ ,  $l$  étant carré ou non. L'action de  $s$  sur  $x_i$  et  $y_i$  est  $\begin{vmatrix} x_i & -ly_i \\ y_i & -t^{-1}x_i \end{vmatrix}$ . Prenons, au lieu de  $x_i$  et  $y_i$  les variables  $x'_i = x_i + ly_i$ ,  $y'_i = x_i - ly_i$  qui canonisent cette action ( $x_i = \frac{x'_i + y'_i}{2}$ ,  $y_i = \frac{x'_i - y'_i}{2l}$ ). Alors  $s$  multiplie par  $-1$  les variables  $x'_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r, y$ , et les autres par 1. Posons

$$a_1 = \sum_2^r x_i y_i + \frac{x_1^2}{4l} + c' y^2, \quad a_2 = \sum_{r+1}^n x_i y_i + x^2 - \frac{y^2}{4l},$$

d'où  $a = a_1 + a_2$ . Soient  $A_i$  le groupe de  $a_i$ ,  $A_i^0$  son groupe unimodulaire,  $B_i$  son groupe réduit (I, 39). Le normalisant de  $s$  dans  $L_{x'_1, y'_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r, x, y}$  est le produit direct de  $L_{x'_1, x_2, y_2, \dots, x_r, y_r, y}$  par  $L_{y', x_{r+1}, y_{r+1}, \dots, x_n, y_n, x}$  (3). On a donc  $N = A_1 A_2$ ,  $N' = \{A_1 A_2, \gamma_1 \gamma_2\}$ ,  $\gamma_i$  étant une substitution qui multiplie  $a_i$  par  $t$  ou  $t^2$ , suivant que  $c'$  est  $\neq 0$  ou  $= 0$ ,  $N^0 = \{A_1^0 A_2^0, \tau_1 \tau_2\}$ ,  $\tau_i$  étant une substitution quelconque de  $A_i$  hors de  $A_i^0$ ,  $P = \{B_1 B_2, \mu_1 \mu_2, \tau_1 \tau_2\}$ , car,  $\tau_1$  et  $\tau_2$  étant dans A hors de B, et  $A|B$  étant un  $g^4$  non cyclique (68),  $\tau_1 \tau_2$  est dans B.

Il est clair que l'on a  $N^0 = \{P, \mu_1\}$ ,  $N = \{N_0, \tau_1\}$ ; et, comme

$$(N', N) = (A', A)(N', P) = (A', B) \quad \text{et} \quad A' = BN'.$$

Donc (E, 67) tout système de restes de B mod P est un système de restes de A' mod N', et toutes les conjuguées de  $s$  dans A' s'obtiennent en la transformant par B.

Remarque. — Comme il n'y a, dans A<sup>0</sup>, que deux classes à  $2r$  multiplicateurs  $-1$ , représentées par  $s$  et  $s m_{1N}$ , l'une de ces substitutions est conjuguée de  $d_{1, \dots, r}$ . Soient en posant  $a_i = \sum_1^r x_i, y_i$ ,  $a - a_1 = a_2$ ,



$A_i$  le groupe de  $a_i$ ,  $A_i^0$  son groupe unimodulaire,  $B_i$  son groupe réduit. On aura évidemment

$$N = A_1 A_2, \quad N' = \{N, \gamma\}, \quad N^0 = \{A_1^0 A_2^0, t_{01}\}, \quad P = \{B_1 B_2, \mu_1 \mu_2, t_{01}\},$$

$\mu_i$  étant une substitution quelconque de  $A_i^0$  hors de  $B$ .

74. Supposons maintenant  $s$  dans  $A$  hors de  $A^0$ . Comme  $s_i t_0$  et  $s_i t_0 m_{iN}$  sont conjuguées dans  $A'$ , on peut prendre, pour  $s$ , une  $s_2$  quelconque de  $A$  ayant  $2i - 1$  multiplicateurs  $-1$ . Soit  $s = t_0 d_{1, \dots, \rho}$ ,  $\rho = i - 1$ ,  $d_{1, \dots, \rho} = 1$  si  $\rho = 0$ , et posons  $a_i = \sum_1^\rho x_i y_i + c' y^2$  si  $c' \neq 0$  (alors  $t_0 = \begin{vmatrix} x & x \\ y & -y \end{vmatrix}$ ),  $a_i = \sum_1^\rho x_i y_i + x^2$ , si  $c' = 0$  (alors  $t_0 = d_0 = |x, -x|$ ) en convenant que  $\sum_1^\rho x_i y_i = 0$  pour  $\rho \equiv 0$ , et  $a_2 = a - a_1$ . Soient  $A_i$  le groupe de la forme  $a_i$ ,  $A_i^0$  son groupe unimodulaire,  $B_i$  son groupe réduit. On aura

$$N = A_1 A_2, \quad N' = \{A_1 A_2, \gamma\}, \quad N^0 = \{A_1^0 A_2^0, \tau_1 \tau_2\},$$

$\tau_i$  étant une substitution quelconque de  $A_i$  hors de  $A^0$ ,  $P = \{B_1 B_2, \mu_1 \mu_2, \tau_1 \tau_2\}$ ,  $\mu_i$  étant une substitution quelconque de  $A_i^0$  hors de  $B_i$ .

On a, comme précédemment,

$$N' = \{N, \gamma\} = \{N^0, \tau_1, \gamma\} = \{P, \mu_1, \tau_1, \gamma\},$$

d'où

$$(N', P) = (A', B) \quad \text{et} \quad A' = BN'.$$

Donc tout système de restes de  $B \pmod{P}$  est un système de restes de  $A \pmod{N'}$ , et toutes les conjuguées de  $s$  dans  $A'$  s'obtiennent en transformant  $s$  par  $B$ .

Le normalisant de  $t_i m_{iL} d$ , qu'il n'y a d'ailleurs lieu de considérer que pour  $n$  pair (67) est le même que celui de  $t_i m_{iL}$ .

75. Soit enfin  $s$  dans  $A'$  hors de  $A$ , en supposant  $n$  pair et  $\psi$  réductible. On peut prendre  $s = \varphi$  (72). Soit  $\psi = x_{\nu}, y_{\nu}$ . Comme  $\varphi$  multiplie les  $x$  par  $-1$  sans altérer les  $y$ , son normalisant dans  $L_{x_1 y_1 \dots x_{\nu} y_{\nu}}$  est (3) le produit direct de  $L_{x_1 \dots x_{\nu}}$  par  $L_{y_1 \dots y_{\nu}}$ . Soient  $\alpha$  une substitution linéaire,  $\beta$  une substitution linéaire des  $y_i$ ; pour que  $\alpha\beta$  conserve  $a$ , il faut et il suffit, on le vérifie aisément, que  $\beta = \bar{\alpha}^{-1}$  (cf. E, 188).

Comme

$$L_{x_1, \dots, x_v} = \{ \{ U_{x_1, \dots, x_v} | x_1, \iota x_1 \} \},$$

on a

$$N = \{ \mathbf{V}_{1, \dots, v}(\pi), m_{1\iota} \} \quad (\text{I, 40, 41}),$$

que l'on peut désigner par  $\mathbf{V}_{1, \dots, v; \iota}(\pi)$ . Comme  $\mathbf{V}_{1, \dots, v}(\pi)$  est dans  $B$  (I, 41),  $N$  est dans  $A^0$ ; donc  $N^0 = N$ . Il est clair que

$$P = \{ \mathbf{V}_{1, \dots, v}(\pi), m_{1\iota} \} = \mathbf{V}_{1, \dots, v; \iota}(\pi),$$

Enfin  $N'$ , contenant évidemment  $\gamma$ , coïncide avec  $\{N, \gamma\}$ .

Comme précédemment, on a

$$N' = \{N, \gamma\} = \{N^0, \gamma\} = \{P, m_{1\iota}, \gamma\}, \quad \text{d'où } A' = AN',$$

Donc tout système de restes de  $A \pmod{N}$  est un système de restes de  $A' \pmod{N'}$ , et l'on obtient toutes les conjuguées de  $\varphi$  dans  $A'$  en la transformant par  $A$ . Mais ici  $A'$  est  $> A^0 N'$ . On a bien  $\Lambda^0 = BN^0$ ; et, par suite, tout système de restes de  $B \pmod{P}$  est un système de restes de  $A^0 \pmod{N^0}$ . Il en résulte qu'on obtient toutes les transformations de  $\varphi$  par  $A^0$  en la transformant par  $B$ .

76. Considérons  $\mathcal{A}'$  (ici  $n$  pourrait *a priori* être impair). Soit  $s$  une substitution de  $A'$  telle que  $(s)$  soit une  $s^2$  de  $\mathcal{A}'$ , c'est-à-dire telle que  $s^2$  soit dans  $I$ .

Si  $s^2$  a la forme  $[\iota^{2h}]$ ,  $s[\iota^{-h}]$  est une  $s^2$  de  $A'$ . Je dirai alors que  $(s)$  et sa classe sont de première espèce. *Les  $s_2$  de première espèce ne sont donc autres que les  $s_2$  de  $A'$  où l'on regarde les variables comme homogènes.* Il reste à étudier leur distribution en classes.

Il est clair d'abord que, si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont conjuguées dans  $A'$ ,  $(\sigma)$  et  $(\sigma')$  le sont dans  $\mathcal{A}'$ . Si  $\sigma$  et  $\sigma'$  sont deux  $s_2$  non conjuguées de  $A'$ ,  $(\sigma)$  et  $(\sigma')$  ne peuvent être conjuguées dans  $\mathcal{A}'$  que si  $\sigma'$  est conjuguée dans  $A'$  d'une  $s_2$  de la forme  $\sigma[\iota^h]$ , qui ne peut être que  $\sigma d$ , et que, par suite,  $\sigma'$  ait autant de multiplicateurs  $-1$  que  $\sigma$  a de multiplicateurs  $+1$ . Si alors  $\sigma'$  et  $\sigma d$  sont toutes deux dans  $B$ , ou toutes deux dans  $A^0$  hors de  $B$ , ou toutes deux dans  $A$  hors de  $A^0$ , ou toutes deux hors de  $A$ , elles sont conjuguées dans  $A'$  (67, 72).

77. Supposons d'abord  $n$  pair (et  $\psi \neq 0$ ). Soient  $\sigma = s_i$  ou  $s_i m_{1N}$ ,

et  $\sigma' = s_k$  ou  $s_k m_{1N}$  ( $i, k = 1, \dots, \nu$ ); pour que  $d\sigma$  soit conjuguée de  $\sigma'$  (donc aussi  $d\sigma'$  de  $\sigma'$ ), il faut d'abord que  $\sigma'$  ait  $n - 2i$  multiplicateurs  $-1$ ; d'où  $2k = n - 2i$ , ou  $k = \nu' - i$ . Si alors  $d$  est dans B,  $ds_i$  et  $ds_i m_{1N}$  sont respectivement conjuguées de  $s_k$  et  $s_k m_{1N}$ . Si  $d$  est hors de B,  $ds_i$  et  $ds_i m_{1N}$  sont respectivement conjuguées de  $s_k m_{1N}$  et  $s_k$ ; et si alors  $n = 4h$ , donc  $\psi$  irréductible (I, p. 348),  $ds_h$  est conjuguée de  $s_h m_{1N}$  et  $ds_h m_{1N}$  de  $s_h$ , donc  $(s_h)$  de  $(s_h m_{1N})$ .

Soient  $\sigma = s_i t_0$  et  $\sigma' = s_k t_0$  ( $i, k = 1, \dots, \nu'$ ). Pour que  $d\sigma$  soit conjuguée de  $\sigma'$ , il faut d'abord que  $\sigma'$  ait  $n = 2i + 1$  multiplicateurs  $-1$ . donc  $2k - 1 = n - 2i + 1$  ou  $k = \nu' - i + 1$ .

Donc, pour  $n$  pair, on aura des représentants, non conjugués, de toutes les classes de  $s_2$  de première espèce de  $\mathcal{C}'$  en prenant les  $(s_i)$  et les  $(s_i m_{1N})$  où  $i \leq \frac{\nu+1}{2} = \frac{n}{4}$ , en supprimant pour  $n = 4h$  et  $\psi$  irréductible,  $(s_h)$  ou  $(s_h m_{1N})$ ; puis les  $(s_i t_0)$  où  $i \leq \frac{\nu+1}{2} = \frac{n+2}{4}$ ; et enfin  $(\varphi)$ , si  $\psi$  est réductible.

78. Supposons  $n$  impair. Soient  $\sigma = s_i$  ou  $s_i m_{1N}$  et  $\sigma' = s_k t_0$  ou  $s_k m_{1N} t_0$ . Pour que  $d\sigma$  (qui est ici hors de  $A_0$ ) soit conjuguée de  $\sigma'$  (donc aussi  $d\sigma'$  de  $\sigma$ ), il faut d'abord que  $\sigma'$  ait  $n - 2i$  multiplicateurs  $-1$ ; d'où  $2k - 1 = n - 2i$  ou  $k = \nu - i + 1$ .

Alors  $ds_i$  est conjuguée de  $s_k t_0$  ou de  $s_k m_{1N} t_0$  qui sont, l'une dans un des B', l'autre dans l'autre (68). Pour préciser,  $ds_i$ , qui est dans  $\{B, d\}$ , est conjuguée de  $s_k t_0$ , qui est dans  $\{B, t_0\}$ , toujours et seulement si  $dt_0 = d_{1\dots\nu}$  est dans B, c'est-à-dire si  $-1$  est carré ou si  $\nu$  est pair.

Donc, pour  $n$  impair, on aura des représentants non conjugués de toutes les classes de  $s_2$  de première espèce de  $\mathcal{C}'$  en prenant les  $(s_i)$  et  $(s_i m_{1N})$  pour  $i = 1, \dots, \nu$ .

79. Si  $s^2$  a la forme  $[t^{2h+1}]$ , je dirai que  $(s)$  et sa classe sont de deuxième espèce. Il est clair qu'une  $s_2(s)$  de seconde espèce ne peut être conjuguée d'une  $s_2(s')$  de première espèce, car  $s'$  le serait d'une substitution de la forme  $[t^k]s$  et, leurs carrés étant dans I, on aurait  $s'^2 = [t^{2k}]s^2$ , ce qui est impossible. Dans  $\mathcal{C}'(n, \pi^2)$ ,  $(s)$  est évidemment de première espèce. Donc  $(s)$  est conjuguée d'un et d'un seul

des représentants obtenus des classes de première espèce de  $\mathcal{C}'(n, \pi^2)$ . Soit  $(\sigma)$  ce représentant.

Il y aura, dans  $A'(n, \pi^2)$ , une substitution  $\zeta$  telle que, pour une valeur convenable de  $k$ ,  $[v^k]\zeta^{-1}\sigma\zeta$  soit réelle et égale à  $s$ . Alors  $s^2 = [v^{2k}]$  et  $k$  doit être  $\not\equiv 0 \pmod{\pi + 1}$ , sans quoi  $(s)$  serait de première espèce dans  $\mathcal{C}'(n, \pi)$ . Les multiplicateurs de  $s$  sont, comme ceux de  $[v^k]\sigma$ , de la forme  $\pm v^k$ ; d'ailleurs,  $s$  étant réelle, ces multiplicateurs sont conjugués deux à deux. Donc il y a autant de multiplicateurs  $-v^k$  que de multiplicateurs  $v^k$ , et  $-v^k = v^{\pi k}$ . Donc  $n$  est pair et :

1°  $\sigma$  a autant de multiplicateurs  $-1$  que de multiplicateurs  $+1$ ;

2°  $k$  a la forme  $(2\lambda + 1)\frac{\pi + 1}{2}$ , donc  $v^k = v^\lambda v_0$ , et, en remplaçant au besoin  $s$  par  $[v^\lambda]s$ , ce qui ne change pas  $(s)$ , on peut supposer que  $\lambda = 0$ .

80. A chaque détermination de  $\sigma$  répond une seule classe de  $(s)$  dans  $A'(n, \pi)$ . Soient, en effet,  $\zeta^{-1}\sigma\zeta = s[v_0^{-1}]$  et  $\zeta^{-1}\sigma'\zeta = s'[v_0^{-1}]$ . D'après ce qu'on a vu (73-75),  $s'[v_0^{-1}]$  est une transformée de  $s[v_0^{-1}]$  par  $A(n, \pi^2)$  et non pas seulement par  $A'(n, \pi^2)$ . Il y a donc, dans  $A(n, \pi^2)$ , une substitution  $\alpha$  telle que  $s\alpha = \alpha s'$ . Donc, avec les variables  $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, x, y$ , les coefficients de  $s$  et  $s'$  étant réels, ceux de  $\alpha$  sont proportionnels à des nombres réels. Soit  $\alpha = [\rho]\alpha'$ ,  $\alpha'$  étant dans  $\mathcal{C}$ , et  $\rho$  étant un facteur de proportionnalité. Comme  $\rho$  multiplie  $\alpha$  par  $\rho^2$ ,  $\alpha'$  la multiplie par  $\rho^{-2}$  et  $\rho^2$  est réel. Donc  $\alpha'$  est dans  $A'(n, \pi)$ , et, puisque  $s\alpha = \alpha s'$ , on a aussi  $s\alpha' = \alpha' s'$ , en sorte que  $s'$  est conjuguée de  $s$  dans  $A'(n, \pi)$ .

81. Tenant compte de la condition qui porte sur les multiplicateurs, et remarquant que  $\psi$  est réductible dans le champ  $\mathcal{C}'$  de  $A'(n, \pi^2)$ , on voit, d'après le n° 77, que la  $s_2 \sigma$  de  $A'(n, \pi^2)$  ne peut avoir que les déterminations  $\varphi, s_h$  et  $s_h m_{1v}$  si  $n = 4h$ ,  $s_h t_0$  si  $n = 4h - 2$ . On peut d'ailleurs, si  $n = 4h$ , remplacer  $s_h$  par  $t_{1\dots v}$ , qui a les mêmes multiplicateurs et est dans  $B(n, \pi^2)$ , et  $s_h m_{1v}$  par  $t_{1\dots v} m_{1v}^\pi m_{2v}^\pi \dots m_{nv}^\pi$ , qui a les mêmes multiplicateurs et est dans  $A_0(n, \pi^2)$  hors de  $B(n, \pi^2)$ . On peut aussi, si  $n = 4h - 2$ , remplacer

$s_h t_0$  par  $t_{1\dots\nu}$ , ou encore par  $t_{1\dots\nu} m_{1\nu}^{\pi} m_{2\nu}^{\pi} \dots m_{\nu\nu}^{\pi}$ , qui ont les mêmes multiplicateurs et sont dans  $A(n, \pi^2)$  hors de  $A^0(n, \pi^2)$ .

82. Soit  $n = 2\nu' = 4h$ . La détermination  $s_h m_{1\nu}$  est à rejeter si  $\psi$  est réductible, et la détermination  $s_h$  est à rejeter si  $\psi$  est irréductible.

Soit, en effet,  $\zeta^{-1} \sigma[\iota_0] \zeta = s$ ,  $\sigma$  étant dans  $A^0(n, \pi^2)$ . Comme  $\sigma[\iota_0]$ , et de même  $s$ , multiplie  $a$  par  $\iota$ ,  $s$ , qui est dans  $A'(n, \pi)$ , est de la forme  $\alpha\gamma$ ,  $\alpha$  étant dans  $A(n, \pi)$  et  $\zeta^{-1} \sigma \zeta = \alpha\gamma[\iota_0^{-1}]$ .

Soit d'abord  $\psi$  réductible; on a  $\gamma[\iota_0^{-1}] = \Pi_1^{\nu'} m_{1\nu_0}$ ; je désignerai ce dernier produit par  $\mu_{\nu_0}$ . Donc tout d'abord,  $|\alpha| = 1$ ; donc  $\alpha$  est dans  $A^0(n, \pi)$ . Comme  $A^0(n, \pi)$  et  $\mu_{\nu_0}$  sont dans  $B(n, \pi^2)$ ,  $\sigma$  y est aussi, donc  $a$  nécessairement la forme  $s_h$ . On peut d'ailleurs remplacer  $s_h$  par  $t_{1\dots\nu}$ , qui a les mêmes multiplicateurs, et est dans  $B(n, \pi)$ .

Soit maintenant  $\psi$  irréductible. Alors, en posant  $\nu' \frac{\pi-1}{2} = j_0$ , on a

$$\gamma[\iota_0^{-1}] = m_{\nu_0}^{\nu' j_0} \Pi_1^{\nu'} m_{1\nu_0}.$$

Comme  $\nu$  est impair, et que  $j_0$  et  $\nu_0$ , dont le produit est  $\nu^{\pi}$ , ont toujours des caractères quadratiques opposés,  $\gamma[\iota_0^{-1}]$  est dans  $A^0(n, \pi^2)$ , donc  $|\alpha| = |\sigma| = 1$  hors de  $B(n, \pi^2)$ . Donc  $\alpha$  est dans  $A^0(n, \pi)$ , c'est-à-dire dans  $B(n, \pi^2)$  et  $\sigma$  hors de  $B(n, \pi^2)$ ; donc  $\sigma$  a la forme  $s_h m_{1\nu}$ .

83. Je dis, de plus, que la détermination  $\varphi$  n'est acceptable, pour  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , que si  $\psi$  est réductible, et, pour  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , que si  $\psi$  est irréductible. En effet,  $\varphi[\iota_0]$  multiplie  $a$  par  $-\iota$ , et a pour déterminant  $(-1)^{\nu}$ . Sa conjuguée réelle  $\zeta^{-1} \varphi[\iota_0] \zeta$  a donc la forme  $\gamma_0 \alpha$ ,  $\alpha$  étant dans  $A$ , en posant  $\gamma_0 = \gamma \frac{\pi+1}{2}$ . Comme  $|\gamma_0| = (-1)^{\nu}$ , on a  $|\alpha| = 1$ , donc  $\alpha$  est dans  $A^0$ . La condition  $(\gamma_0 \alpha)^2 = [\iota]$  peut s'écrire

$$\gamma_0^{-1} \alpha \gamma_0 \alpha^{-1} = [\iota] \gamma_0^{-2} \alpha^{-2}.$$

Or le premier membre est dans  $B(n, \pi)$ , car  $\alpha$  et  $\gamma_0^{-1} \alpha \gamma_0$  sont dans  $A^0$  et toutes deux en même temps dans  $B$  ou hors de  $B$ . Comme  $\alpha^2$  est dans  $B$ ,  $[\iota] \gamma_0^{-2}$  est donc dans  $B$ .

Or, si  $\psi$  est réductible,  $[\iota] \gamma_0^{-2} = \Pi_1^{\nu'} m_{1\nu}^{-1}$ , et cette substitution ne peut être dans  $B$  que si  $\nu$  est pair ou  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Si  $\psi$  est irréduc-

tible  $[\iota] \gamma_0^{-2} = \Pi' m_i^{-1}$ , et cette substitution ne peut être dans B que si  $\nu$  est pair, ou  $n \equiv 2 \pmod{4}$ .

On remarquera que, si  $\psi$  est irréductible, l'action de  $\varphi[\iota_0]$  sur  $x_\nu$  et  $y_\nu$ , est réelle (les multiplicateurs  $-\iota_0$  et  $\iota_0$  sont conjugués). Il suffit donc que l'on puisse trouver une substitution  $\zeta$ , agissant sur  $x_1, y_1, \dots, x_\nu, y_\nu$  seuls, telle que  $\zeta^{-1} \varphi[\iota_0] \zeta$  soit réelle. Or  $\nu$  étant ici paire, on saura former une telle substitution  $\zeta$  si l'on sait la former dans le cas où  $\psi$  est réductible.

84. D'après les résultats obtenus,  $\mathcal{A}'(n, \pi)$  peut avoir seulement : une classe de  $s_2$  de seconde espèce lorsque  $n \equiv 0 \pmod{4}$  et  $\psi$  irréductible, ou lorsque  $n \equiv 2 \pmod{4}$  et  $\psi$  réductible; deux classes de  $s_2$  de seconde espèce lorsque  $n \equiv 0 \pmod{4}$  et  $\psi$  réductible ou lorsque  $n \equiv 2 \pmod{4}$  et  $\psi$  irréductible.

Pour tous les cas, on a vu (42) que  $\mathcal{A}'(2, \pi)$  contient  $(t_1 \gamma)$ , et l'on a  $\overline{t_1 \gamma}^2 = [\iota]$ . Donc le carré de

$$\Pi' t_i \gamma_i = t_{1\dots\nu} \gamma$$

est  $[\iota]$ , et  $(t_{1\dots\nu} \gamma)$  est une  $s_2$  de seconde espèce. Donc  $\mathcal{A}'(n, \pi)$  a toujours une classe de  $s_2$  de seconde espèce que l'on peut représenter par  $(t_{1\dots\nu} \gamma)$ . Elle est toujours hors de  $\mathcal{A}(n, \pi)$ .

85. Pour les troisième et quatrième cas, il faut distinguer suivant que  $\pi \equiv 1$  ou  $3 \pmod{4}$ .

Soit  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ .  $\mathcal{A}'(4, \pi)$  si  $\psi$  est réductible contient  $(d_1 T_{12} t_{12})$  et  $\overline{d_1 T_{12} t_{12}}^2 = [d]$ . Donc dans le troisième cas, le carré de

$$\Pi'^{1/2} d_{2i-1} T_{2i-1, 2i} t_{2i-1, 2i} = \Theta_\nu = \Theta$$

est  $[d]$  et  $(\Theta)$  est une  $s_2$  de seconde espèce de  $\mathcal{A}'(n, \pi)$ . Comme (I, 28)  $T_{12} = S_{121} d_2 t_{12}$ , la substitution  $T_{12} d_2 t_{12} = d_1 T_{12} t_{12}$  est dans B. Il en est donc de même de  $\Theta$ .

Il est impossible que l'on ait

$$\alpha'^{-1} \Theta \alpha' = [\mu] t_{1\dots\nu} \gamma,$$

$\alpha'$  et  $\mu$  étant dans  $A'(n, \pi)$ , car la substitution du premier membre

conserve la forme  $a$ , et la substitution du second membre la multiplie par  $\mu^2 t$ , toujours  $\neq 1$ .

Dans le quatrième cas, si l'on pose

$$\Pi_1^{\nu/2} d_{2i-1} T_{2i-1,2i} t_{2i-1,2i} = \Theta_\nu,$$

on a toujours  $(\Theta_\nu)^2 = \Pi_1^\nu d_i$ . Or on a vu que si  $\Psi$  est irréductible  $\mathcal{A}'(2, \pi)$  contient  $(\gamma \frac{\pi+1}{2}) = ([t_0] \varphi)$  et que  $\overline{[t_0] \varphi}^2 = [t]$ . Désignons alors en général par  $s_i$  l'action de  $s$  sur les variables  $x_i$  et  $y_i$ . On aura

$$\overline{d_{2i-1} T_{2i-1,2i} t_{2i-1,2i} [t]_{2i-1}^{\frac{\pi+1}{4}} [t]_{2i}^{\frac{\pi+1}{4}}} = [t]_{2i-1} [t]_{2i}.$$

Donc

$$\overline{\Theta_\nu \Pi_1^\nu [t]_{2i-1}^{\frac{\pi+1}{4}} [t]_{2i}^{\frac{\pi+1}{4}} \varphi_{\nu'} = [t].$$

Or on voit que

$$[t_0]_{\nu'} \varphi_{\nu'} = [t^{\frac{\pi+1}{4}}]_{\nu'} m_{\nu'\varepsilon};$$

donc on a

$$\Theta_\nu \Pi_1^\nu [t^{\frac{\pi+1}{4}}]_{2i-1} [t_0]_{\nu'} \varphi_{\nu'} = \Theta_\nu [t^{\frac{\pi+1}{4}}]_{2i} m_{\nu'\varepsilon}$$

et, si  $\Theta' = \Theta_\nu m_{\nu'\varepsilon}$ , on a  $\Theta'^2 = [d]$ . Et  $(\Theta')$  est une  $s_2$  de seconde espèce de  $\mathcal{A}'(n, \pi)$ .  $\Theta_\nu$  est toujours dans  $B$ , donc  $\Theta'$  toujours dans  $A^0$  est dans  $B$  en même temps que  $m_{\nu'\varepsilon}$ , c'est-à-dire (I, 40) toujours et seulement si l'ordre 4 de  $\varepsilon$  divise  $\frac{\pi+1}{2}$ , c'est-à-dire si  $\pi+1 \equiv 0 \pmod{8}$ .

Il est impossible que l'on ait

$$\alpha'^{-1} \Theta' \alpha' = [\mu] t_{1\dots\nu'} \gamma,$$

$\alpha'$  et  $[\mu]$  étant dans  $A'(n, \pi)$ , car la substitution premier membre conserve la forme  $a$  et la substitution second membre la multiplie par  $\mu^2 t$ , toujours  $\neq 1$ .

86. Soit  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ .  $\mathcal{A}'(4, \pi)$ , si  $\Psi$  est réductible, contient  $d_1 T_{1,2} t_{1,2} \gamma$  et  $\overline{d_1 T_{1,2} t_{1,2} \gamma}^2 = [-1]$ . Donc, dans le troisième cas, le carré de

$$\Pi_1^{\nu/2} d_{2i-1} T_{2i-1,2i} t_{2i-1,2i} \gamma_{2i-1} \gamma_{2i} = \Theta \gamma$$

est  $[-1]$  et  $(\Theta \gamma)$  est une  $s_2$  de seconde espèce de  $\mathcal{A}'(n, \pi)$ .

Il est impossible que l'on ait

$$\alpha'^{-1} \Theta \gamma \alpha' = [\mu] t_{1, \dots, \nu} \gamma,$$

$\alpha'$  et  $[\mu]$  étant dans  $A'(n, \pi)$ , car, en élevant au carré on aurait

$$[-t] = [\mu^2][t],$$

d'autre part, les deux substitutions devant multiplier la forme  $a$  par une même quantité, il faudrait  $\mu^2 = 1$ .

Pour le quatrième cas, on voit que le carré de  $\Theta, \Pi_1^\nu \gamma_i [t]_i^{\frac{\pi-1}{4}}$  est  $\Pi_1^\nu [t]_i$ . Comme le carré de  $[t_0]_{\nu, \varphi_{\nu, \rho}}$  est  $[t_{\nu, \rho}]$ , le carré de

$$\Theta, \Pi_1^\nu \gamma_i [t]_i^{\frac{\pi-1}{4}} [t_0]_{\nu, \varphi_{\nu, \rho}}$$

est  $[t]$ . Si l'on pose

$$[t_0]_{\nu, \varphi_{\nu, \rho}} = \gamma_{\nu, \rho} [t^{\frac{\pi-1}{4}}]_{\nu, \alpha_{\nu, \rho}},$$

on voit que  $|\alpha_{\nu, \rho}| = 1$ , donc  $\alpha_{\nu, \rho} = m_{\nu, \rho}$ , et l'on doit avoir, en comparant les multiplicateurs de  $x_{\nu, \rho}$ ,

$$-t_0 = t^{\frac{\pi-1}{4}} \rho \quad \text{ou} \quad \rho = t^{\frac{\pi^2-1}{2} + \frac{\pi+1}{2} - 1 - \frac{\pi^2-1}{4}} = t^{\frac{\pi-1}{4}} t'^{\frac{\pi-1}{2}},$$

et si  $\Theta, \gamma m_{\nu, \rho} = \Theta''$ , on a  $\Theta''^2 = d$ , et  $(\Theta'')$  est une  $\rho_2$  de seconde espèce de  $\mathcal{A}'(n, \pi)$ . Comme  $\Theta''$  est dans  $A''\gamma$ ,  $(\Theta'')$  est hors de  $\mathcal{A}$ .

Il est impossible que l'on ait

$$\alpha'^{-1} \Theta'' \alpha' = [\mu] t_{1, \dots, \nu} \gamma,$$

$\alpha'$  et  $[\mu]$  étant dans  $A'(n, \pi)$ , car, en élevant au carré, on aurait  $[d] = [\mu^2][t]$  ou  $\mu^2 = -1$ ; d'autre part, les deux substitutions devant multiplier la forme  $a$  par une même quantité, il faudrait  $t = \mu^2 t$ , ou  $\mu^2 = -1$ .

*Ainsi à la classe représentée par  $(t_{1, \dots, \nu} \gamma)$ , s'ajoute comme classe distincte :*

*Si  $n \equiv 0 \pmod{4}$  et  $\psi$ , réductible, la classe représentée par  $(\Theta) = (\Pi_1^{\nu/2} d_{2i-1} T_{2i-1, 2i} t_{2i-1, 2i})$ , si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ , et par  $(\Theta \gamma)$  si  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ ;*

*Si  $n \equiv 2 \pmod{4}$  et  $\psi$  irréductible, la classe représentée par  $\Theta' = \Theta, m_{\nu, \rho}$ , si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ , et par  $(\Theta'') = \Theta, \gamma m_{\nu, \rho}$ ,  $\rho = t^{\frac{\pi-1}{4}} t'^{\frac{\pi-1}{2}}$ , si  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ .*



87. D'après le n° 79, les substitutions de  $A'(n, \pi)$  ainsi obtenues doivent être conjuguées, dans  $A'(n, \pi^2)$ , d'une des déterminations acceptables de  $\sigma[l_0]$ , à savoir  $t_{1\dots\nu}[l_0]$ , ou  $t_{\nu'}[l_0]\Pi'_i t_i m_{ii}^{\pi}$ , (81, 82) ou  $\varphi[l_0]$  (84).

Or si l'on pose  $a_i = x_i y_i$ ,  $a_{\nu'} = \psi$ , le groupe  $\mathcal{C}'(2, \pi^2, a_i)$  (I, p. 284) contient pour  $i = 1, \dots, \nu'$  les substitutions  $(t_i)$ ,  $(t_i m_{ii}^{\pi})$ ,  $(\gamma'_i)$  que l'on peut écrire en posant  $\frac{x_i}{y_i} = z$ ,  $\left(\frac{1}{z}\right)$ ,  $\left(\frac{1^{1-2\pi}}{z}\right)$ ,  $(l'z)$ . Le groupe  $\mathcal{C}(2, \pi^2, a_i)$  contient  $(t_i \gamma_i)$ , et l'on a

$$(t_i \gamma_i) = \left(\frac{l}{z}\right) \quad (i = 1, \dots, \nu)$$

et

$$t_{\nu'} \gamma_{\nu'} = \left(\frac{l}{z}\right) \quad \text{pour } \psi \text{ réductible,}$$

$$t_{\nu'} \gamma_{\nu'} = \left(\frac{1}{jz}\right) \quad \text{pour } \psi \text{ irréductible.}$$

Les substitutions  $\left(\gamma'_i \frac{\pi+1}{2}\right) = (l_0 z)$  et  $\left(\gamma'_i \frac{1-\pi}{2}\right) = (l_0^{-1} z)$  transforment respectivement les pôles 1 et -1 de  $(t_i)$  et ceux  $l'^{\pi}$  et  $-l'^{\pi}$  de  $(t_i m_{ii}^{\pi})$  en ceux  $l_0$  et  $-l_0$  de  $(t_i \gamma_i)$ . Si  $\zeta_i = \gamma'_i \frac{\pi+1}{2}$ , et  $\zeta'_i = \gamma'_i \frac{1-\pi}{2}$ , on vérifie que

$$\zeta_i^{-1} t_i [l_0]_i \zeta_i = t_i \gamma_i \quad (i = 1, \dots, \nu),$$

$$\zeta_i^{-1} t_i m_{ii}^{\pi} [l_0]_i \zeta_i = t_i \gamma_i$$

Si  $\psi$  est réductible, on a aussi

$$\zeta_{\nu'}^{-1} t_{\nu'} [l_0]_{\nu'} \zeta_{\nu'} = t_{\nu'} \gamma_{\nu'}.$$

Si donc  $\zeta = \gamma'^{\frac{\pi+1}{2}}$ , on a

$$\zeta^{-1} t_{1\dots\nu'} [l_0] = \zeta = t_{1\dots\nu'} \gamma.$$

Si  $\psi$  est irréductible, on a

$$\zeta'_{\nu'}^{-1} t_{\nu'} [l_0] \zeta'_{\nu'} = t_{\nu'} \gamma_{\nu'}.$$

Si donc  $\zeta' = \gamma'^{\frac{1-\pi}{2}}$ , on a

$$\zeta'^{-1} [l_0] t_{\nu'} \Pi'_i t_i m_{ii}^{\pi} \zeta' = t_{1\dots\nu'} \gamma.$$

Si, en supposant  $n \equiv 0 \pmod{4}$  et  $\psi$  réductible (83), on pose

$$a_i = x_{2i-1}y_{2i-1} + x_{2i}y_{2i} \quad (i = 1, \dots, \nu^{1/2}),$$

le groupe  $\mathcal{C}'(4, \pi^2, a_i)$  contient les substitutions ( $\varphi$ )

$$(d_{2i-1} T_{2i-1, 2i} l_{2i-1, 2i}) = (\theta_i) \quad (\theta_i \gamma_{2i-1} \gamma_{2i})$$

qui, si l'on pose  $\frac{x_{2i-1}}{y_{2i}} = u$ , répondent respectivement aux substitutions  $(-u)$ ,  $\left(\frac{-1}{u}\right)$  et  $\left(\frac{-1}{u}\right)$  de  $[\mathcal{C}'(4, \pi^2, a_i)]$  (48, 51). Leurs pôles respectifs sont 0 et  $\infty$ ,  $\varepsilon$  et  $-\varepsilon$  ( $\varepsilon^2 = -1$ ),  $\eta$  et  $-\eta$  ( $\eta^2 = -1$ ).

Or  $\mathcal{U}(2, \pi^2)$  contient la substitution  $\rho = \begin{pmatrix} -\rho u - \frac{1}{2} \\ u - \frac{1}{2\rho} \end{pmatrix}$  qui transforme 0 et  $\infty$  en  $\rho$  et  $-\rho$ ; et dans la correspondance de  $\mathcal{U}(2, \pi^2)$  à  $\mathcal{B}(4, \pi^2, a_i)$  (48; I, 40) à  $\mathcal{L}_\rho$  répond

$$\zeta_{i\rho} = U_{2i-1, 2i, 1-1/2\rho} W_{2i-1, 2i, 1} U_{2i-1, 2i, 1-\rho}.$$

On vérifie alors que, si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ ,

$$\zeta_{i\varepsilon}^{-1} \varphi_i [l_0]_i \zeta_{i\varepsilon} = \left[ l^{\frac{\pi+1}{4}} \right]_i d_{2i-1, 2i} \theta_i$$

et que, si  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ ,

$$\zeta_{i\eta}^{-1} \varphi_i [l_0]_i \zeta_{i\eta} = \left[ l^{\frac{\pi-1}{4}} \right] \theta_i \gamma_{2i-1} \gamma_{2i};$$

si donc on pose  $\Theta = \Pi_1^{\nu/2} \theta_i$ , et suivant les cas,  $\zeta = \Pi_1^{\nu/4} \zeta_{i\varepsilon}$  ou  $\Pi_2^{\nu/2} \zeta_{i\eta}$ , on a

$$\zeta^{-1} \varphi [l_0] \zeta = \left[ l^{\frac{\pi+1}{4}} \right] d \Theta.$$

ou

$$\zeta^{-1} \varphi [l_0] \zeta = \left[ l^{\frac{\pi-1}{4}} \right] \Theta \gamma.$$

88. Cherchons maintenant les  $s_2$  de  $\mathcal{C} = \frac{A''}{I} = \frac{A}{D}$ . Une substitution ( $s$ ) de  $\mathcal{C}$  est une  $s_2$  toujours et seulement si  $s^2$  est dans D. Je dirai que ( $s$ ) et sa classe sont propres si  $s^2 = 1$ , impropres si  $s^2 = d$ . Une  $s_2$  propre est toujours de première espèce; une  $s_2$  impropre est de première ou de seconde espèce suivant que  $\pi \equiv 1$  ou  $3 \pmod{4}$ . Une  $s_2$  propre ( $s$ ) et une  $s_2$  impropre ( $s'$ ) ne peuvent être conjuguées

dans  $\mathcal{A}$ , car  $s'$ , qui est d'ordre 4 devrait être conjuguée de  $d^2s$  qui est d'ordre 2.

89. D'après leur définition, les  $s_2$  propres de  $\mathcal{A}$  ne sont autres que les  $s_2$  de  $A$  où l'on regarde les variables comme homogènes. Il reste à étudier leur distribution en classes.

( $\sigma'$ ) est conjuguée de ( $\sigma$ ) dans  $\mathcal{A}$  toujours et seulement si  $\sigma'$  est conjuguée, dans  $A$ , de  $\sigma$  ou de  $d\sigma$ . Or pour que deux  $s_2$  soient conjuguées dans  $A$  (67, 68) il faut et suffit qu'elles aient les mêmes multiplicateurs, et qu'elles soient toutes deux dans  $B$ , ou toutes deux dans  $A^0$  hors de  $B$ , ou toutes deux dans  $B'$ , ou toutes deux dans  $B^2$ .

90. Supposons d'abord  $n$  pair (et  $\psi \neq 0$ ). Soient  $\sigma = s_i$  ou  $s_i m_{1N}$ , et  $\sigma' = s_k$  ou  $s_k m_{1N}$ . Comme au n° 77, pour que  $d\sigma$  soit conjuguée de  $\sigma'$  (donc aussi  $d\sigma'$  de  $\sigma$ ), il faut d'abord que  $k = v' - i$ . Si alors  $d$  est dans  $B$ ,  $ds_i$  et  $ds_i m_{1N}$  sont respectivement conjuguées de  $s_k$  et  $s_k m_{1N}$ . Si  $d$  est hors de  $B$ ,  $ds_i$  et  $ds_i m_{1N}$  sont respectivement conjuguées de  $s_k m_{1N}$  et  $s_k$ ; et, si alors  $n = 4h$ , donc  $\psi$  irréductible (I, p. 348),  $ds_p$  est conjuguée de  $s_h m_{1N}$ , donc ( $s_h$ ) de ( $s_h m_{1N}$ ).

Soient  $\sigma = s_i t_0$  ou  $s_i m_{1N} t_0$ , et  $\sigma' = s_k t_0$  ou  $s_k m_{1N} t_0$  ( $i, k = 1, \dots, v'$ ). Comme au n° 77, pour que  $d\sigma$  soit conjuguée de  $\sigma'$ , il faut d'abord que  $k = v' - i + 1$ . Si alors  $d$  est dans  $B$ ,  $ds_i t_0$  et  $s_k t_0$ , toutes deux dans  $\{B, t_0\}$ , sont conjuguées,  $ds_i m_{1N} t_0$  et  $s_k m_{1N} t_0$ , toutes deux dans  $\{B, t_0 m_{1N}\}$  sont conjuguées. Si  $d$  est hors de  $B$ ,  $ds_i t_0$  et  $ds_i m_{1N} t_0$  sont respectivement conjuguées de  $s_k m_{1N} t_0$  et  $s_k t_0$ ; et, si alors  $n = 4h - 2$ ,  $ds_h t_0$  est conjuguée de  $s_h m_{1N} t_0$ , donc ( $s_h t_0$ ) de ( $s_h m_{1N} t_0$ ).

Donc, pour  $n$  pair, on aura des représentants non conjugués de toutes les classes de  $s_2$  propres de  $\mathcal{A}$  en prenant : les ( $s_i$ ) et ( $s_i m_{1N}$ ) où  $i \leq \frac{v'+1}{2} = \frac{n}{4}$ , en supprimant, pour  $n = 4h$  et  $\psi$  irréductible, ( $s_h$ ) ou ( $s_h m_{1N}$ ); puis les ( $s_i t_0$ ) et ( $s_i m_{1N} t_0$ ), où  $i \leq \frac{v'+1}{2} = \frac{n+2}{4}$ , en supprimant, pour  $n = 4h - 2$  et  $d$  hors de  $B$ , ( $s_h t_0$ ) ou ( $s_h m_{1N} t_0$ ).

91. Supposons  $n$  impair. Soient  $\sigma = s_i$  ou  $s_i m_{1N}$ , et  $\sigma' = s_k t_0$  ou  $s_k m_{1N} t_0$ . Alors  $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$  (I, p. 320). Il suffit donc de répéter l'énoncé du n° 78. Pour que  $d\sigma$  (qui est ici hors de  $A^0$ ) soit conjuguée de  $\sigma'$  (donc aussi

$d\sigma'$  de  $\sigma$ ), il faut d'abord (78) que  $k = \nu - i + 1$ . Alors  $ds_i$  est conjuguée de  $s_k t_0$  ou de  $s_k m_{1N} t_0$ , qui sont, l'une dans un des  $B^i$ , l'autre dans l'autre (68). Pour préciser,  $ds_i$ , qui est dans  $\{B, d\}$ , est conjuguée de  $s_k t_0$ , qui est dans  $\{B, t_0\}$  toujours et seulement si  $dt_0 = d_{1, \dots, \nu}$  est dans  $B$ , c'est-à-dire si  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ , ou si  $\nu$  est pair.

Donc, pour  $n$  impair, on aura des représentants non conjugués de toutes les classes de  $s_2$  propres de  $\mathcal{A}$  en prenant les  $(s_i)$  et  $(s_i m_{1N})$  pour  $i = 1, \dots, \nu$ .

92. Soit  $(s)$  une  $s_2$  impropre de  $\mathcal{A}$ .

Soit d'abord  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ . Alors  $[\varepsilon^{-1}]s = s_0$  est une  $s_2$  de  $A'$  hors de  $A$ . Elle n'existe (72) que si  $n$  est pair et  $\psi$  réductible, et elle est alors conjuguée de  $\varphi$  dans  $A'$ . Donc  $s$  est conjuguée, dans  $A' = \{A, \gamma\}$  de  $[\varepsilon]\varphi = d\Pi' m_{i\varepsilon} = d\mu$ . Comme  $\gamma$  est permutable à  $\mu$ ,  $s$  est conjuguée de  $d\mu$  dans  $A$ , donc  $(s)$  de  $(\mu)$  dans  $\mathcal{A}$ . En ce cas,  $\mathcal{A}$  contient donc une classe et une seule de  $s_2$  impropres, que l'on peut représenter par  $(\mu)$ .

Soit  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ . Alors  $(s)$  est une  $s_2$  de seconde espèce de  $\mathcal{A}'$ . Elle n'existe (79) que pour  $n$  pair, et (86) est conjuguée, dans  $\mathcal{A}'$ , de  $(\Theta)$  si  $n$  est  $\equiv 0 \pmod{4}$  et  $\psi$  réductible, de  $(\Theta') = (\Theta, m_{\nu/2})$ , si  $n$  est  $\equiv 2 \pmod{4}$  et  $\psi$  irréductible. Or on vérifie directement que

$$\gamma_{2i}^{-1} \gamma_{2i-1}^{-1} \theta_i \gamma_{2i-1} \gamma_{2i} = m_{2i-1, i}^{-1} \theta_i m_{2i-1, i};$$

donc, si l'on pose  $\mu = \Pi_{\gamma}^{\nu/2} m_{2i-1, i}$  pour  $n \equiv 0 \pmod{4}$  et  $\mu' = \Pi_{\gamma}^{\nu/2} m_{2i-1, i}$  pour  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , on a

$$\gamma^{-1} \Theta \gamma = \mu^{-1} \Theta \mu$$

et,  $\gamma$  comme  $\mu'$  étant permutable à  $m_{\nu/2}$ ,

$$\gamma^{-1} \Theta' \gamma = \mu'^{-1} \Theta' \mu'.$$

Ainsi toutes les conjuguées de  $\Theta$  ou  $\Theta'$  dans  $A' = \{A, \gamma\}$  s'obtiennent en transformant  $\Theta$  ou  $\Theta'$  par  $A$ . Donc les  $s_2$  impropres de  $\mathcal{A}$  forment une seule classe, que l'on peut représenter, suivant les cas, par  $(\Theta)$  ou  $(\Theta')$ .

93. Comme  $A^0$  contient ou non  $D$  suivant que  $n$  est pair ou impair, si  $n$  est impair  $\mathcal{A}^0 = A^0$ ; et, si  $n$  est pair  $\mathcal{A}^0 = \frac{A^0}{D}$ .

Soit donc  $n$  pair. Les  $s_2$  propres de  $\mathcal{A}^0$  ne sont autres que les  $s_2$  de  $A^0$

où l'on regarde les variables comme homogènes; et l'on voit, comme pour  $\mathcal{A}$ , que l'on obtient des représentants non conjugués de toutes les classes de  $s_2$  propres de  $\mathcal{A}^0$  en prenant les  $(s_i)$  et  $(s_i m_{1N})$  où  $i \leq \frac{\nu+1}{2} = \frac{n}{4}$ , en supprimant, pour  $n = 4h$  et  $\psi$  irréductible  $(s_h)$  ou  $(s_h m_{1N})$ .

94. Soit  $(s)$  une  $s_2$  impropre de  $\mathcal{A}^0$ .

Soit d'abord  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ . Comme pour  $\mathcal{A}$  (92),  $(s)$  n'existe que si  $\psi$  est réductible, et  $ds$  est conjuguée de  $\mu$  (92) dans  $A = \{A^0, t_1\}$ . Or  $t_1$  transforme  $m_{1\varepsilon}$  en  $m_{1,-\varepsilon} = d_1 m_{1\varepsilon}$ , donc  $\mu$  en  $d_1 \mu$ . Donc  $ds$  est conjuguée, dans  $A^0$ , de  $\mu$  ou de  $d_1 \mu$ . Or considérons en général les substitutions de  $A$  qui transforment  $\mu$  en  $d_{1\dots k} \mu$ , ou  $\varphi$  en  $d_{1\dots k} \varphi$ . Elles sont de la forme  $\sigma t_{1\dots k}$ ,  $\sigma$  étant permutable à  $\varphi$ , donc de la forme  $\alpha\beta$ ,  $\alpha$  étant dans  $\Gamma_{x_1\dots x_{\nu'}}$  et  $\beta$  dans  $\Gamma_{y_1\dots y_{\nu'}}$ . Pour que  $\alpha\beta$  soit dans  $A$ , il faut et suffit que l'on ait

$$\sum_i^{\nu'} \alpha_{ih} \beta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq h, \\ 1 & \text{si } k = h, \end{cases}$$

en sorte que  $|\sigma| = |\alpha| |\beta| = 1$ , et  $\sigma$  est dans  $A^0$ . Ainsi les substitutions de  $A$  qui transforment  $\mu$  en  $d_{1\dots k} \mu$  sont dans  $A^0$  ou hors de  $A^0$ , en même temps que  $t_{1\dots k}$ , c'est-à-dire suivant que  $k$  est pair ou impair.

Si donc  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , ni  $d_1 \mu$ , ni  $dd_1 \mu = d_{2\dots \nu'} \mu$  ne sont conjuguées de  $\mu$  dans  $A^0$ , donc  $(\mu)$  et  $(d_1 \mu)$  représentent deux classes distinctes de  $\mathcal{A}^0$ . Mais si  $n \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $dd_1 \mu$  est conjuguée de  $\mu$  dans  $A^0$ , donc  $(d, \mu)$  de  $(\mu)$  dans  $\mathcal{A}^0$ .

95. Soit maintenant  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ .

Alors (92),  $(s)$  est conjuguée, dans  $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}^0, t_1\}$ :

de  $(\Theta)$ , si  $n$  est  $\equiv 0 \pmod{4}$  et  $\psi$  réductible;

de  $(\Theta, m_{\nu\varepsilon})$ , si  $n$  est  $\equiv 2 \pmod{4}$  et  $\psi$  irréductible.

Dans le premier cas,  $(s)$  est conjuguée dans  $\mathcal{A}^0$ , dans  $(\Theta)$  ou  $(t_1, \Theta t_1) = (\Theta t_{12})$ . Or, dans ce cas, les  $s_2$  impropres de

$$\mathcal{A}^0(n, \pi^2) > \mathcal{A}^0(n, \pi)$$

forment [d'après le n° 94,  $\pi^2$  étant  $\equiv 1 \pmod{4}$ ] deux classes distinctes. Donc les  $s_2$  impropres de  $\mathcal{A}^0(n, \pi)$  forment deux classes distinctes, que l'on peut représenter par  $(\Theta)$  et  $(\Theta t_{12})$ .

Dans le deuxième cas, les  $s_2$  impropres de  $\mathcal{A}^0(n, \pi^2)$  ne forment qu'une classe (94). Il y a donc, dans  $A^0(n, \pi^2)$ , une substitution  $\alpha_0$  telle que  $D\Theta, t_{1,2} m_{\nu, \varepsilon} \alpha_0 = D\alpha_0 \Theta, m_{\nu, \varepsilon}$ . Si l'on prend pour variables  $x$  et  $y$  au lieu de  $x_\nu$  et  $y_\nu$ , il résulte de cette relation que les coefficients de  $\alpha'_0$  sont proportionnels à des nombres réels, en sorte que  $\alpha^0 = [\rho] \alpha'$ ,  $\alpha'$  étant dans  $A'(n, \pi)$ , et  $\rho$  désignant un facteur de proportionnalité. Comme  $\alpha'$  multiplie la forme  $a$  par  $\rho^{-2}$ ,  $\rho^2$  est réel. Si  $\rho^2$  est carré dans  $\mathcal{C}$ ,  $\rho$  est réel, donc  $\alpha'_0$  dans  $A^0(n, \pi)$  et  $(\Theta, m_{\nu, \varepsilon})$  est conjugué dans  $\mathcal{A}^0(n, \pi)$  de  $\Theta, t_{1,2} m_{\nu, \varepsilon}$ . Si  $\rho^2$  n'est pas carré dans  $\mathcal{C}$ , remarquons que  $m_{2i-1, \varepsilon} m_{2i, \varepsilon}^{-1}$  est permutable à  $d_{2i-1} T_{2i-1, 2i} t_{2i-1, 2i}$ , que, pour  $k = t \pm 1$ , et  $j = 1, \dots, \nu'$ ,  $m_{j, \varepsilon}^k$  est dans  $B(n, \pi^2)$  ( $\varepsilon$  est carré dans  $\mathcal{C}'$ ) et que

$$[\varepsilon]_{\bar{j}}^{-1} m_{j, \varepsilon}^k = \begin{vmatrix} x_j & \varepsilon^{-1+k} x_j \\ y_j & \varepsilon^{-1-k} y_j \end{vmatrix}$$

est toujours réel. Si donc on pose

$$\sigma_0 = \Pi_1^{1/2} m_{2i-1, \varepsilon} m_{2i, \varepsilon}^{-1} m_{\nu, \varepsilon},$$

$\sigma_0$  est permutable à  $\Theta, m_{\nu, \varepsilon}$  et dans  $B(n, \pi^2)$ , donc  $\alpha_0 \sigma_0$  est dans  $A^0(n, \pi^2)$  et transforme  $\Theta, m_{\nu, \varepsilon}$  comme  $\alpha_0$ . D'ailleurs  $\sigma_0 = [\varepsilon] \sigma'$ ,  $\sigma'$  étant dans  $A'(n, \pi)$ ; donc  $\alpha_0 \sigma_0 = [\varepsilon \rho] \alpha' \sigma'$ . Ici  $\overline{\varepsilon \rho^2} = -\rho^2$  est carré dans  $\mathcal{C}$ ; donc  $\varepsilon \rho$  est réel, donc  $\alpha_0 \sigma_0$  dans  $A^0(n, \pi)$ , et  $(\Theta, m_{\nu, \varepsilon})$  est conjugué, dans  $\mathcal{A}^0(n, \pi)$  de  $(\Theta, t_{1,2} m_{\nu, \varepsilon})$ . Donc les  $s_2$  impropres de  $\mathcal{A}^0(n, \pi)$  forment une seule classe, que l'on peut représenter par  $(\Theta, m_{\nu, \varepsilon})$ .

96. Si  $d$  est hors de  $B$  [ce qui a toujours lieu pour  $n$  impair (I, 39)], on a  $\mathcal{B} \equiv B$ . Supposons donc  $d$  dans  $B$ , donc  $n$  pair et (I, 39) :

ou bien  $n \equiv 0 \pmod{4}$  et  $\psi$  réductibles ;

ou bien  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , et soient  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$  et  $\psi$  réductible, soient  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$  et  $\psi$  irréductible.

Les  $s_2$  propres de  $\mathcal{B}$  ne sont autres que les  $s_2$  de  $B$  où l'on regarde les variables comme homogènes, et l'on voit, comme pour  $\mathcal{A}$ , que l'on obtient des représentants non conjugués de toutes les classes de  $s_2$  propres de  $\mathcal{B}$  en prenant les  $(s_i)$  où  $i \leq \frac{\nu'}{2} = \frac{n}{4}$ .

97. Soit  $(s)$  une  $s_2$  impropre de  $\mathcal{B}$ .

Soit d'abord  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ , Comme pour  $\mathcal{A}$  (92),  $(s)$  n'existe que si  $\psi$  est réductible et, dans  $A^0 = \{B, m_{1N}\}$ ,  $ds$  est conjuguée de  $\mu$  si  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , de  $\mu$  ou de  $d_1\mu$  (92) (ni  $\mu$  ni  $d_1\mu$  n'étant conjuguées de  $d_1\mu$ ) si  $n \equiv 0 \pmod{4}$  (94). Comme  $m_{1N}$  est permutable à  $\mu$  et  $d_1\mu$ ,  $ds$  sera conjuguée, par  $B$ , de  $\mu$ , si  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , de  $\mu$  ou de  $d_1\mu$ , si  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Si donc  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $\mu$  et  $d_1\mu$  sont dans  $B$ , les  $s_2$  impropres de  $\mathcal{B}$  forment deux classes, que l'on peut représenter par  $(\mu)$  et  $(d_1\mu)$ .

Si  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , comme  $\varepsilon = i^{\frac{\pi-1}{4}}$  n'est carré que si  $\pi \not\equiv 1 \pmod{8}$ ,  $\mu$  n'est pas de  $B$ , et  $\mathcal{B}$  n'a pas de  $s_2$  impropres. Mais si  $\pi \equiv 1 \pmod{8}$ ,  $\mu$  est dans  $B$ , les  $s_2$  impropres de  $\mathcal{B}$  forment une seule classe, que l'on peut représenter par  $(\mu)$ .

98. Soit maintenant  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ . Alors  $(s)$  est de deuxième espèce et n'existe, dans  $\mathcal{A}^0 = \{B, (d_1)!\}$ , que dans les deux cas suivants (95) :

si  $n$  est  $\equiv 0 \pmod{4}$  et  $\psi$  réductible; alors  $(s)$  est conjuguée de  $(\Theta)$  ou de  $(\Theta t_{12})$  représentant deux classes distinctes;

si  $n$  est  $\equiv 2 \pmod{4}$  et  $\psi$  irréductible; alors  $(s)$  est conjuguée de  $(\Theta, m_{\nu\varepsilon})$ .

Soient  $n \equiv 0 \pmod{4}$  et  $\psi$  réductible. La substitution  $d_1$  transforme  $d_1 T_{12} t_{12} = S_{1,2,-1}$  et  $d_1 T_{12} = R_{12,1}$  en  $d_{12} S_{1,2,-1} d_{12} R_{12,1}$ , donc  $\Theta$  en  $d_{12} \Theta$  et  $\Theta t_{12}$  en  $d_{12} \Theta t_{12}$ . Or (58) si  $\beta = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \mu & -\lambda \end{pmatrix}$  désigne une matrice de  $U(2, \Pi)$  ( $\lambda^2 + \mu^2 = -e$ ), à une substitution de  $U_{x_1, y_2}$  de matrice  $\beta$  répond dans  $\mathbf{W}$  (I, 40) une substitution transformant  $S_{1,2,-1}$  en  $d_{12} S_{1,2,-1}$ ; et à une substitution de  $U_{x_1, x_2}$ , répond, dans  $\mathbf{V}$  (I, 40), une substitution transformant  $R_{12,1}$  en  $d_{12} R_{12,1}$ . Ces substitutions étant dans  $B_{12} = \mathbf{VW}$ ,  $d_{12} \Theta$  et  $d_{12} \Theta t_{12}$  sont respectivement conjuguées, dans  $B$ , de  $\Theta$  et  $\Theta t_{12}$ . Donc les  $s_2$  impropres de  $\mathcal{B}$  forment alors deux classes que l'on peut représenter par  $(\Theta)$  et  $(\Theta t_{12})$ .

99. Soient  $n \equiv 2 \pmod{4}$  et  $\psi$  irréductible;  $d_1$  transforme  $\Theta, m_{\nu\varepsilon}$  en  $d_{12} \Theta, m_{\nu\varepsilon}$ . Or ces deux substitutions sont transformées l'une dans l'autre par la substitution de  $\mathbf{V}$  indiquée au numéro précédent; elles

sont donc conjuguées dans B; et les  $s_2$  impropres de  $\mathcal{B}$  forment alors une seule classe, que l'on peut représenter par  $(\Theta, m_{s_2})$ .

100. Soit  $(s)$  une  $s_2$  quelconque de  $\mathcal{A}'$ ; désignons par  $\mathcal{N}, \mathcal{N}', \mathcal{N}^0$ ,  $\mathcal{E}$  ses normalisants respectifs dans  $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}^0, \mathcal{B}$ . Si  $(\sigma)$  est dans  $\mathcal{N}'$ ,  $\sigma$  n'étant pas dans  $\mathcal{N}'$ , on doit avoir  $\sigma^{-1}s\sigma = [\iota^k]s$ . Élevant au carré et remarquant que  $s^2$  est dans  $I'$ , on obtient  $\iota^{2k} = 1$ , d'où  $\iota^k = -1$ . Donc  $\sigma$  transforme  $s$  en  $ds$  et  $\sigma^2$  est dans  $\mathcal{N}'$ .

101. Soit  $(s)$  de première espèce. On peut supposer que  $s^2 = 1$  (76) et (77, 78) que  $s = s_r = t_{0,1}m_{1i}d_{1\dots r}$ , ou  $s = s_r m_{1i}$ , ou  $s = s_r t_0$  si  $n$  est pair ou  $s = \varphi$  si  $n$  est impair,  $\Psi$  réductible.

Dans tous les cas, pour que  $dt$  soit conjuguée de  $s$ , il faut que  $s$  ait autant de multiplicateurs  $-1$  que de multiplicateurs  $+1$ , donc que  $n$  soit pair. Alors  $\sigma$  ne peut exister que pour  $\varphi$ , si  $\psi$  est réductible, ou, si  $n = 4h$  pour  $s_h$  ou  $s_h m_{1,2}$  qui ont  $2h$  multiplicateurs  $-1$  ou, si  $n = 4h - 2$ , pour  $s_h t_0$  qui ont  $2h - 1$  multiplicateurs  $-1$ . Dans tous les autres cas, les normalisants de  $(s)$  sont ceux de  $s$  où l'on regarde les variables comme homogènes.

102. Soient  $n = 4h$  et  $s = t_{0,1}m_{1i}d_{1\dots h}$ . Prenons les mêmes variables  $x'_1, y'_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, x, y$  qu'au n° 73, supposons que

$$\psi = x^2 + c'y^2,$$

et considérons encore les formes

$$a_1 = \sum_2^h x_i y_i + \frac{x_1^2}{4l} + c'y^2, \quad a_2 = \sum_{n+1}^n x_i y_i + x^2 - \frac{y_1^2}{4l}.$$

Comme  $s$  multiplie par  $-1$  les variables de  $a_1$ , et par  $1$  celles de  $a_2$ , pour que  $\sigma$  transforme  $s$  en  $ds$ , il faut qu'elle remplace les variables de  $a_1$  par des fonctions des seules variables de  $a_2$ , et les variables de  $a_2$  par des fonctions des seules variables de  $a_1$ . De plus pour que  $\sigma$  soit dans  $\mathcal{A}'$ , c'est-à-dire transforme  $a$  en  $fa$ , il faut et suffit qu'elle transforme  $a_1$  en  $fa_2$  et  $a_2$  en  $fa_1$ . Si donc  $A_1$  et  $A_2$  désignent les groupes respectifs des formes  $a_1$  et  $a_2$ , on aura  $\sigma^{-1}A_1\sigma = A_2$ ; donc  $A_1$  et  $A_2$  sont de même ordre. Il faut et suffit



pour cela (I, 27) que les discriminants des deux formes

$$\psi_1 = \frac{x_1'^2}{4l} + c'y^2 \quad \text{et} \quad \psi_2 = x^2 - \frac{y_1'^2}{4l}$$

aient même caractère quadratique. Donc  $-c'$  est carré et  $\psi$  réductible, et l'on peut supposer  $c' = -1$ . Mais alors  $(s_h)$  et  $(s_h m_{12})$  sont conjuguées dans  $\mathcal{A}'$  (77). On peut donc toujours supposer que  $s = t_{0,1} d_{1\dots h}$ , donc  $l = 1$ .

Les variables  $x'_1$  et  $y'_1$  sont alors définies par

$$x'_1 = x_1 + y_1, \quad y'_1 = x_1 - y_1.$$

On peut remplacer  $x$  et  $y$  par  $x_{1'} = x + y$  et  $y_{1'} = x - y$ , ce qui donne  $t_0 = t_{1'}$  (I, p. 322), donc  $s = t_{1'} d_{1\dots h}$ . On voit alors que la substitution

$$\sigma = T_{1'} T_{2,h+2} T_{3,h+3} \dots T_{h'}$$

qui est dans B, transforme  $s$  en  $ds$ .

Ainsi, pour  $n = 4h$ , si  $\psi$  est réductible, les normalisants de  $(s_h)$  sont  $\mathcal{N} = (N + \sigma P)$ ,  $\mathcal{N}' = (N' + \sigma N')$ ,  $\mathcal{N}^0 = (N^0 + \sigma N^0)$ ,  $\mathcal{P} = (P + \sigma P)$ . Si  $\psi$  est irréductible, les normalisants de  $s_h$  sont  $(N)$ ,  $(N')$ ,  $(N^0)$ ,  $(P)$ .

103. Soit  $n = 4h - 2$ . Comme au n° 74 prenons pour  $s$  une  $s_2$  quelconque de  $A'$  ayant  $2h - 1$  multiplicateurs  $-1$ , soit  $s = t_0 d_{1\dots, h-1}$ , et posons

$$a_1 = \sum_1^{h-1} x_i y_i + c' y^2, \quad a_2 = \sum_h^y x_i y_i + x^2.$$

Comme  $s$  multiplie par  $-1$  les variables de  $a_1$  et par  $1$  celles de  $a_2$ , pour que  $\sigma$  transforme  $s$  en  $ds$ , il faut qu'elle remplace les variables de  $a_1$  par des fonctions des seules variables de  $a_2$ , et les variables de  $a_2$  par des fonctions des seules variables de  $a_1$ . De plus, pour que  $\sigma$  soit dans  $A$ , c'est-à-dire transforme  $a$  en  $fa$ , il faut et suffit qu'elle transforme  $a_1$  en  $fa_2$  et  $a_2$  en  $fa_1$ . Donc les discriminants  $(-1)^{h-1} 2c'$  de  $a_1$  et  $(-1)^{h-1} f^{2h+1} 2$  de  $fa_2$  ont même caractère quadratique. Donc  $f$  a le caractère quadratique de  $c'$ .

Si  $c'$  est carré, on peut faire  $c' = 1$ . On voit alors que la substitution

$$\sigma = T_{1,h} T_{2,h+1} \dots T_{h-1,y} \begin{vmatrix} x & y \\ y & -x \end{vmatrix},$$

qui est dans  $A^0$ , transforme  $s$  en  $ds$ . On peut prendre  $x_{\nu} = x - \varepsilon y$ ,  $y_{\nu} = x + \varepsilon y$ , Alors  $\begin{vmatrix} x & y \\ y & -x \end{vmatrix} = m_{\nu\varepsilon}$ , et  $\sigma$  est dans  $B$  toujours et seulement si  $\pi \equiv 1$  ou  $7 \pmod{8}$  (I, 32). Si cette condition n'est pas remplie, on remplacera  $\sigma$  par  $\sigma\mu_1$ ,  $\mu_1$  étant une substitution quelconque de  $A_1^0$  hors de  $B_1$  (74), par exemple  $m_{12}$ .

Ainsi, pour  $n = 4h - 2$  et  $c' = 1$ , les normalisants de  $(t_0 d_{1, \dots, h-1})$  sont  $\mathcal{N} = (N + \sigma N)$ ,  $\mathcal{N}' = (N' + \sigma N')$ ,  $\mathcal{N}^0 = (N' + \sigma N^0)$ ,  $\mathfrak{A} = (P + \sigma P)$  en prenant

$$\sigma = T_{1,h} T_{2,h+1} \dots T_{h-1,\nu} m_{\nu\varepsilon} m_{11}^k,$$

$$k = \begin{cases} 0 & \text{si } \pi \equiv 1, 7 \\ 1 & \text{si } \pi \equiv 3, 5 \end{cases} \pmod{8}.$$

Soit  $c'$  non carré. Si  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $\psi$  est irréductible, et  $d$  est hors de  $B$  (I, p. 348). Si  $\psi \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $\psi$  est réductible et  $d$  est hors de  $B$  (*ibid.*). Donc, si  $c'$  est non carré,  $d$  est toujours hors de  $B$ ,  $A^0 = BD$  (I, 39) et  $\mathcal{B} = \frac{BD}{D} = \frac{A^0}{D} = \mathcal{A}_0$ . Alors  $\sigma$ , multipliant la forme  $a$  par un non carré est dans  $A'$  hors de  $A''$  (I, 24); donc  $(\sigma)$  sera dans  $\mathcal{A}'$  hors de  $\mathcal{A}$ .

Soient  $\tau$  la substitution, hors de  $A'$ , qui multiplie chaque  $x$  par  $c'$  sans altérer les  $y$ , et  $\sigma$  la substitution précédemment trouvée.

On voit que  $\sigma\tau$  transforme  $s$  en  $ds$  et la forme  $a$  en  $c'a$ .

Ainsi pour  $n = 4h - 2$  et  $c'$  non carré, les normalisants de  $t_0 d_{1, \dots, h-1}$  sont  $\mathcal{N} = (N)$ ,  $\mathcal{N}' = (N' + \sigma\tau N')$ ,  $\mathcal{N}^0 = (N^0) = \mathfrak{A}$ .

104. Soient  $s = \varphi$ , et  $\psi$  réductible. Comme

$$\varphi = \begin{vmatrix} x_i & -x_i \\ y_i & y_i \end{vmatrix} \quad (i = 1, \dots, \nu'),$$

on voit que  $t_{1, \dots, \nu'}$  transforme  $\varphi$  en  $d\varphi$  et est dans  $B$  ou dans  $A$  hors de  $A^0$  suivant que  $\nu'$  est pair ou impair. Si donc  $\nu'$  est pair les normalisants de  $(\varphi)$  sont  $\mathcal{N} = (N + \sigma N)$ ,  $\mathcal{N}' = (N' + \sigma N')$ ,  $\mathcal{N}^0 = \mathcal{N}[N^0 = N(75)]$ ,  $\mathfrak{A} = (P + \sigma P)$ ,  $\sigma = t_{1, \dots, \nu'}$ . Si  $\nu'$  est impair, toute substitution  $\sigma$  de  $A$  transformant  $\varphi$  en  $d\varphi$ , étant dans  $t_{1, \dots, \nu'} N < t_{1, \dots, \nu'} A^0$ , est nécessairement hors de  $A_0$ . Si donc  $\nu'$  est impair, les normalisants de  $(\varphi)$  sont  $\mathcal{N} = (N + \sigma N)$ ,  $\mathcal{N}' = (N' + \sigma N')$ ,  $\mathcal{N}^0 = (N)$ ,  $\mathfrak{A} = (P)$ .

104 bis. Soit  $(s)$  de deuxième espèce. On peut supposer (86) que  $s = t_{1\dots\nu'}\gamma$ , ou  $\theta$ , si  $n$  est  $\equiv 0 \pmod{4}$ ,  $\psi$  réductible, et  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ , ou  $(\theta\gamma)$ , si  $n$  est  $\equiv 0 \pmod{4}$ ,  $\psi$  réductible et  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ , ou  $\theta, m_{\nu'z}$ , si  $n$  est  $\equiv 2 \pmod{4}$ ,  $\psi$  irréductible, et  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ , ou  $(\theta, \gamma m_{\nu'p})$ , si  $n$  est  $\equiv 2 \pmod{4}$ ,  $\psi$  irréductible, et  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ .

Les normalisants  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{N}'$ ,  $\mathcal{N}^0$ ,  $\mathcal{P}$  de  $(s)$  dans les groupes  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{A}^0$ ,  $\mathcal{B}$ , contiennent les groupes  $(N)$ ,  $(N')$ ,  $(N^0)$ ,  $(P)$  obtenus en regardant les variables comme homogènes dans les normalisants de  $s$  dans  $A$ ,  $A'$ ,  $A^0$ ,  $B$ . Si, de plus, ces groupes contiennent une substitution  $\sigma$  transformant  $s$  en  $ds$  (100), les normalisants de  $(s)$  contiennent en outre les complexes  $(\sigma N)$ ,  $(\sigma N')$ ,  $(\sigma N^0)$ ,  $(\sigma P)$ .

105. Soit  $s = t_{1\dots\nu'}\gamma$ . Supposons  $\psi$  réductible. L'action  $s_i$  de  $s$  sur  $x_i$  et  $y_i$  ( $i = 1, \dots, \nu'$ ) est  $\begin{vmatrix} x_i & \iota y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix}$ . Si l'on prend les variables

$$x'_i = x_i + \iota_0 y_i, \quad y'_i = x_i - \iota_0 y_i,$$

$s_i$  prend la forme canonique  $\begin{vmatrix} x'_i & \iota_0 x'_i \\ y'_i & -\iota_0 y'_i \end{vmatrix}$ , et  $x_i y_i$  devient  $\frac{1}{4\iota_0} (x'^2_i - y'^2_i)$ .

Si donc on pose

$$a_1 = \frac{1}{4\iota_0} \sum_1^{\nu'} x'^2_i, \quad a_2 = -\frac{1}{4\iota_0} \sum_1^{\nu'} y'^2_i = \dot{a}_1,$$

$s$  multiplie les variables de  $a_1$  par  $\iota_0$ , et celles de  $a_2$  par  $-\iota_0$ . Dans  $A(n, \pi^2)$ , le normalisant de  $s$  est donc le produit direct  $A(\nu', \pi^2, a_1)A(\nu', \pi^2, a_2)$ . Comme  $y'_i = x'_i$ , les substitutions de l'un de ces groupes sont conjuguées de celles de l'autre. Le normalisant  $N$  de  $s$  dans  $A(n, \pi)$  sera formé des substitutions réelles de ce produit.

Ce sera donc le groupe  $\check{A}$  formé des produits  $\alpha_1 \alpha_2$  de deux substitutions conjuguées. Comme  $|\alpha_1| = |\alpha_2| = \pm 1$ ,  $\check{A}$  divise  $A^0(n, \pi)$ . Donc  $N = N^0 = \check{A}$ .  $P$  est le p. g. c. d. de  $\check{A}$  et de  $B$ .  $\check{A}$ , contenant nécessairement  $d$ , ne divise pas toujours  $B$ .

Comme  $s$  multiplie la forme  $a$  par  $\iota$ , on a  $A' = \{\check{A}, s\}$ , donc  $N' = \{N, s\}$ .

On voit ensuite, en revenant aux variables  $x_i$  et  $y_i$ , que  $\varphi$  transforme  $s$  en  $ds$ . D'ailleurs,  $s^{\frac{\pi-1}{2}} \varphi$  est dans  $A$  et transforme aussi  $s$  en  $ds$ .

On a  $|s| = (-t)^{\nu'} = t^{\nu' \frac{\pi+1}{2}}$ ; donc  $\left| s^{\frac{\pi-1}{2}} \right| = (-1)^{\nu' \frac{\pi+1}{2}}$ ; d'autre part,  $\varphi = (-1)^{\nu'}$ , donc  $\left| s^{\frac{\pi-1}{2}} \varphi \right| = (-1)^{\nu' \frac{\pi-1}{2}}$ . Si donc on prend  $\sigma = s^{\frac{\pi-1}{2}} \varphi$ ,  $\sigma$  est hors de  $A^0$  si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$  et  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Alors on a  $\mathcal{N}' = (N' + \sigma N')$ ,  $\mathcal{N} = (N + \sigma N)$ ,  $\mathcal{N}^0 = (N^0)$ ,  $\mathcal{P} = (P)$ . Si  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $\sigma$  est toujours dans  $A^0$ , donc  $\mathcal{N}^0 = (N^0 + \sigma N^0)$ ; on a  $\sigma = [\varepsilon] \varphi = \Pi_1^{\nu'} m_i^{-1}$ . Si  $n \equiv 0 \pmod{4}$  ou  $\pi \equiv 1 \pmod{8}$ ,  $\sigma$  est dans  $B$ , alors  $\mathcal{P} = (P + \sigma P)$ . Si  $n \equiv 2 \pmod{4}$  et  $\pi \not\equiv 1 \pmod{8}$ ,  $\sigma$  est hors de  $B$ , alors  $\mathcal{P} = (P)$ . Si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$  et  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , on trouve

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} x_i & t_0^{\frac{\pi+1}{2}} y_i \\ y_i & t_0^{-\frac{\pi+1}{2}} y_i \end{vmatrix} = t_i m_i^{\frac{\pi+1}{4}}.$$

Donc  $\sigma = \Pi_1^{\nu'} t_i m_i^{\frac{\pi+1}{4}}$  est dans  $B$ ; et  $\mathcal{P} = (P + \sigma P)$ .

106. Supposons  $\psi$  irréductible. Si l'on prend les variables

$$x'_i = x_i + t_0 y_i, \quad y'_i = x_i t_0 - y_i,$$

$s_i$  prend la forme canonique  $\begin{vmatrix} x'_i & t_0 x'_i \\ y'_i & -t_0 y'_i \end{vmatrix}$  ( $i = 1, \dots, \nu$ ); et, comme

$s_{\nu'} = \begin{vmatrix} x_{\nu'} & t' y_{\nu'} \\ y_{\nu'} & t'' x_{\nu'} \end{vmatrix}$ ,  $s_{\nu'}$ , si l'on prend les variables

$$x'_{\nu'} = x_{\nu'} + g y_{\nu'}, \quad y'_{\nu'} = g^{\pi} (x_{\nu'} - g y_{\nu'}), \quad g = t'^{\frac{1-\pi}{2}}, \quad g^{\pi} = -\frac{1}{g},$$

prend la forme canonique  $\begin{vmatrix} x'_{\nu'} & t_0 x'_{\nu'} \\ y'_{\nu'} & -t_0 y'_{\nu'} \end{vmatrix}$ . Ainsi la forme canonique

de  $s$  est  $\Pi_1^{\nu'} \begin{vmatrix} x'_k & t_0 x'_k \\ y'_k & -t_0 y'_k \end{vmatrix}$ . Et l'on a

$$x_i y_i = \frac{1}{4 t_0} (x_i^2 - y_i^2) \quad (i = 1, \dots, \nu'),$$

$$x_{\nu'} y_{\nu'} = \frac{1}{4} (g^{-1} x_{\nu'}^2 - g y_{\nu'}^2).$$

Si donc on pose

$$a_1 = \frac{1}{4} \left( \sum_1^{\nu'} \frac{x_i^2}{t_0} + \frac{x_{\nu'}^2}{g} \right), \quad a_2 = \frac{1}{4} \left( \sum_1^{\nu'} \frac{y_i^2}{-t_0} - g y_{\nu'}^2 \right) = a_1,$$

$s$  multiplie les variables de  $a_1$  par  $t_0$  et celles de  $a_2$  par  $-t_0$ . Comme

précédemment,  $N$  sera le groupe  $\check{A}$  formé des substitutions  $\alpha_1, \alpha_2$ ,  $\alpha_1$  étant dans le groupe  $A_1$  de la forme  $a_1$  et  $\alpha_2$  conjuguée de  $\alpha_1$  et  $\check{A}$  divise  $A^0(n, \pi)$ . Donc  $N = N^0 = \check{A}$ .  $P$  est le p. g. c. d. de  $\check{A}$  et de  $B$ , et  $N' = \{N, s\}$ .

On voit ensuite que la substitution

$$\tau = \Pi'_1 \begin{vmatrix} x'_i & y'_i \\ y'_i & x'_i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x'_i & g & y'_i \\ y'_i & -g^{-1} & x'_i \end{vmatrix}$$

transforme  $s$  en  $ds$ . D'ailleurs  $s^{\frac{\pi-1}{2}} \tau$  est dans  $A$ , et transforme aussi  $s$  en  $ds$ . Ici  $|\sigma| = -(-1)^{\frac{\nu(\pi-1)}{2}}$ . Si  $n \equiv 0 \pmod{4}$  ou si  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $\sigma$  n'est pas dans  $A^0$ , donc  $\mathcal{N} = (N + \sigma N)$ ,  $\mathcal{N}' = (N' + \sigma N')$ ,  $\mathcal{N}^0 = (N^0)$ ,  $\mathcal{X} = (P)$ . Si  $n \equiv 2 \pmod{4}$  et  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $\sigma$  est dans  $A^0$  et  $\mathcal{N}^0 = (N^0 + \sigma N^0)$ . En ce cas, on voit que  $\sigma = \Pi'_1 t_i m_i^{\frac{\pi+1}{4}} \cdot m_{i\pi}$ . Comme  $\nu$  est pair,  $\sigma$  est dans  $B$  ou hors de  $B$  en même temps que  $m_{i\pi}$ , c'est-à-dire suivant  $\frac{\pi+1}{2} \equiv 0$  ou  $\equiv 2 \pmod{4}$ . On a donc, suivant les cas,  $\mathcal{X} = (P + \sigma P)$ , ou  $\mathcal{X} = (P)$ .

107. Dans les quatre cas qui restent à étudier, on a une relation de la forme  $\zeta^{-1} \varphi[\iota_0] \zeta = [\iota^h] s$ ,  $h = \frac{\pi \pm 1}{4}$ . Considérons d'abord les normalisants  $N_\varphi, N'_\varphi, N^0_\varphi, P_\varphi$  de  $\varphi$  dans  $A(n, \pi^2), A'(n, \pi^2), A^0(n, \pi^2), B(n, \pi^2)$ , et ceux  $\mathcal{N}_\varphi, \mathcal{N}'_\varphi, \mathcal{N}^0_\varphi, \mathcal{X}_\varphi$  de  $(\varphi)$  dans  $\mathcal{A}(n, \pi^2), \mathcal{A}'(n, \pi^2), \mathcal{A}^0(n, \pi^2), \mathcal{B}(n, \pi^2)$ .

Or, on a (75),  $N_\varphi = N^0_\varphi = \mathbf{V}_{1, \dots, \nu, \dots}$ ,  $N'_\varphi = \{N_\varphi, \gamma'\}$ ,  $\gamma' = \Pi'_1 \begin{vmatrix} x_i & \iota' x_i \\ y_i & y_i \end{vmatrix}$ ,  $P_\varphi = \mathbf{V}_{1, \dots, \nu, \dots}$ , et (104), en posant  $\sigma = t_{1, \dots, \nu}$ ,  $\mathcal{N}_\varphi = (N_\varphi + \sigma N_\varphi)$ ,  $\mathcal{N}'_\varphi = (N'_\varphi + \sigma N'_\varphi)$ ; puis, si  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $\mathcal{N}^0_\varphi = \mathcal{N}_\varphi$ ,  $\mathcal{X}_\varphi = (P_\varphi + \sigma P_\varphi)$ ; si  $n \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $\mathcal{N}^0_\varphi = (N_\varphi)$ ,  $\mathcal{X}_\varphi = (P_\varphi)$ .

Le normalisant  $\mathcal{N}$  est formé des substitutions  $(\alpha)$  de  $\mathcal{A}$ ,  $\alpha$  transformant  $s$  en  $s$  ou  $ds$ . Si  $\alpha$  est permutable à  $s$ , elle le sera à  $\zeta^{-1} \varphi \zeta$ . Donc  $\zeta \alpha \zeta^{-1}$  est dans  $N_\varphi$ , donc  $\alpha$  dans  $\zeta^{-1} N_\varphi \zeta$ . De même, si  $\alpha$  transforme  $s$  en  $ds$ , elle transforme  $\zeta^{-1} \varphi \zeta$  en  $d\zeta^{-1} \varphi \zeta$ , donc  $\zeta \alpha \zeta^{-1}$  transforme  $\varphi$  en  $d\varphi$ . Donc  $\zeta \alpha \zeta^{-1}$  est dans  $N_\varphi \sigma$ , donc  $\alpha$  dans  $\zeta^{-1} N_\varphi \sigma \zeta$ . Donc  $\mathcal{N}$  est le p. g. c. d.

de  $\zeta^{-1} \mathcal{N}_\varphi \zeta$  avec  $\mathcal{A}(n, \pi)$ . De même  $\mathcal{N}'$ ,  $\mathcal{N}^0$ ,  $\mathcal{E}$  sont les p. g. c. d. de  $\mathcal{N}'_\varphi$ ,  $\mathcal{N}^0_\varphi$ ,  $\mathcal{E}_\varphi$  avec  $\mathcal{A}'(n, \pi)$ ,  $\mathcal{A}^0(n, \pi)$ ,  $\mathcal{B}(n, \pi)$ .

Il nous faut maintenant calculer  $\zeta^{-1} \alpha_\varphi \zeta = \beta_\varphi$ ,  $\alpha_\varphi$  étant une substitution quelconque de  $N_\varphi$ , et  $\zeta$  une des substitutions définies au n° 79, et déterminée au n° 87.

408. Soit  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , en posant  $j = 2i - 1$ ,  $k = 2i$ , on a

$$\zeta_{i\rho} = \zeta_{j/k\rho} = U_{j,k,1-1/2\rho} W_{j/k1} U_{j,k,1-\rho} = \begin{vmatrix} x_j & \rho x_j + \frac{1}{2} y_k \\ y_j & \frac{1}{2\rho} y_j + x_k \\ x_k & \rho x_k - \frac{1}{2} y_j \\ y_k & \frac{1}{2\rho} y_k - x_j \end{vmatrix}.$$

Comme (I, 28)  $\zeta_{j,k,\rho}^{-1} = \zeta_{k,i,1/2\rho}$ , on aura

$$\zeta_{j,k,\rho}^{-1} = \begin{vmatrix} x_j & \frac{1}{2\rho} x_j - \frac{1}{2} y_k \\ y_j & \rho y_j - x_k \\ x_k & \frac{1}{2\rho} x_k + \frac{1}{2} y_j \\ y_k & \rho y_k + x_j \end{vmatrix}.$$

La substitution  $\alpha_\varphi$  a la forme

$$\begin{vmatrix} x_i & \sum_k (\alpha_{ik} x_k + \alpha_{i,k+1} x_{k+1}) \\ y_i & \sum_k (\beta'_{ik} y_k + \beta'_{i,k+1} y_{k+1}) \\ x_{i+1} & \sum_k (\alpha_{i+1,k} x_k + \alpha_{i+1,k+1} x_{k+1}) \\ y_{i+1} & \sum_k (\beta'_{i+1,k} y_k + \beta'_{i+1,k+1} y_{k+1}) \end{vmatrix},$$

avec la condition  $\beta' = \bar{\alpha}^{-1}$  (I, 40, 41). On voit que  $\beta_\varphi$  se déduit de  $\alpha_\varphi$  en remplaçant chaque sous-matrice (S, 117) :

$$\alpha_\varphi^{(i,k)} = \begin{pmatrix} \alpha_{ik} & 0 & \alpha_{i,k+1} & 0 \\ 0 & \beta'_{ik} & 0 & \beta'_{i,k+1} \\ \alpha_{i+1,k} & 0 & \alpha_{i+1,k+1} & 0 \\ 0 & \beta'_{i+1,k} & 0 & \beta'_{i+1,k+1} \end{pmatrix}$$

( $i$  et  $k$  impairs) de  $\alpha_\varphi$  par  $\zeta_{k,k+1,\rho}^{-1} \alpha_\varphi^{(i,k)}$ ,  $\zeta_{i,i+1,\rho} = \beta_\varphi^{(i,k)}$  (cf. S, 117). On obtient

$$\beta_\varphi^{(i,k)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (\alpha_{ik} + \beta'_{i+1,k+1}) & \frac{\rho}{2} (\alpha_{i,k+1} + \beta'_{i+1,k}) & \frac{1}{2} (\alpha_{i,k+1} - \beta'_{i+1,k}) & -\frac{\rho}{2} (\alpha_{ik} - \beta'_{i+1,k+1}) \\ \frac{1}{2\rho} (\alpha_{i+1,k} + \beta'_{i,k+1}) & \frac{1}{2} (\alpha_{i+1,k+1} + \beta'_{ik}) & \frac{1}{2\rho} (\alpha_{i+1,k+1} - \beta'_{ik}) & -\frac{1}{2} (\alpha_{i+1,k} - \beta'_{i,k+1}) \\ \frac{1}{2} (\alpha_{i+1,k} - \beta'_{i,k+1}) & \frac{\rho}{2} (\alpha_{i+1,k+1} - \beta'_{ik}) & \frac{1}{2} (\alpha_{i+1,k+1} + \beta'_{ik}) & -\frac{\rho}{2} (\alpha_{i+1,k} + \beta'_{i,k+1}) \\ -\frac{1}{2\rho} (\alpha_{ik} - \beta'_{i+1,k+1}) & -\frac{1}{2} (\alpha_{i,k+1} - \beta'_{i+1,k}) & -\frac{1}{2\rho} (\alpha_{i,k+1} + \beta'_{i+1,k}) & \frac{1}{2} (\alpha_{ik} + \beta'_{i+1,k+1}) \end{pmatrix}$$

La matrice  $\beta_\varphi$ , ainsi obtenue, est la matrice générale du normalisant de  $s$  dans  $A(n, \pi^2)$ .

Il nous faut maintenant calculer  $\zeta^{-1} \alpha_\varphi \sigma$ ,  $\zeta = \tau_\varphi$ ,  $\sigma = t_{1\dots\nu}$ . Les sous-matrices de  $\alpha_\varphi \sigma$ , analogues aux  $\alpha_\varphi^{(i,k)}$ , sont

$$\alpha_\varphi^{(i,k)} t_{i,i+1} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{ik} & 0 & \beta'_{i,k+1} \\ \alpha_{ik} & 0 & \alpha_{i,k+1} & 0 \\ 0 & \beta'_{i+1,k} & 0 & \beta'_{i+1,k+1} \\ \alpha_{i+1,k} & 0 & \alpha_{i+1,k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

On aura donc

$$\tau_\varphi^{(i,k)} = \zeta_{k,k+1}^{-1} \alpha_\varphi^{(i,k)} t_{i,i+1} \zeta_{i,i+1},$$

ce qui donne

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4\rho} \alpha_{i+1,k} + \rho \beta'_{i,k+1} & \frac{1}{4} \alpha_{i+1,k+1} + \rho^2 \beta'_{ik} & \frac{1}{4\rho} \alpha_{i+1,k+1} - \rho \beta'_{ik} & -\frac{1}{4} \alpha_{i+1,k} + \rho^2 \beta'_{i,k+1} \\ \frac{1}{4\rho^2} \alpha_{ik} + \beta'_{i+1,k+1} & \frac{1}{4\rho} \alpha_{i,k+1} + \rho \beta'_{i+1,k} & \frac{1}{4\rho} \alpha_{i,k+1} - \beta'_{i+1,k} & -\frac{1}{4\rho} \alpha_{ik} + \rho \beta'_{i+1,k+1} \\ -\frac{1}{4\rho} \alpha_{ik} + \rho \beta'_{i+1,k+1} & -\frac{1}{4} \alpha_{i,k+1} + \rho^2 \beta'_{i+1,k} & -\frac{1}{4\rho} \alpha_{i,k+1} - \rho \beta'_{i+1,k} & \frac{1}{4} \alpha_{ik} + \rho^2 \beta'_{i+1,k+1} \\ \frac{1}{4\rho^2} \alpha_{i+1,k} - \beta'_{i,k+1} & \frac{1}{4\rho} \alpha_{i+1,k+1} - \rho \beta'_{ik} & \frac{1}{4\rho^2} \alpha_{i+1,k+1} + \beta'_{ik} & -\frac{1}{4\rho} \alpha_{i+1,k} - \rho \beta'_{i,k+1} \end{pmatrix}$$

109. Soit maintenant  $n \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $\psi$  étant alors irréductible,  $\beta_\varphi$  se déduit ici de  $\alpha_\varphi$ , en remplaçant :

1° chaque sous-matrice  $\alpha_\varphi^{(i,k)}$  où  $i$  et  $k$  sont impairs  $\leq \nu - 1$  par la sous-matrice  $\beta_\varphi^{(i,k)}$  de tout à l'heure ;

2° chaque sous-matrice

$$\alpha_{\varphi}^{(y',k)} = \begin{Bmatrix} \alpha_{y',k} & 0 & \alpha_{y',k+1} & 0 \\ 0 & \beta'_{y',k} & 0 & \beta'_{y',k+1} \end{Bmatrix},$$

$k$  impair  $\leq y - 1$  par

$$\zeta_{k,k+1}^{-1} \alpha_{\varphi}^{(y',k)} = \beta_{\varphi}^{(y',k)} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2\rho} \alpha_{y',k} & \frac{1}{2} \alpha_{y',k+1} & \frac{1}{2\rho} \alpha_{y',k+1} & -\frac{1}{2} \alpha_{y',k} \\ \beta'_{y',k+1} & \rho \beta'_{y',k} & -\beta'_{y',k} & \rho \beta'_{y',k+1} \end{Bmatrix};$$

3° chaque sous-matrice

$$\alpha_{\varphi}^{(i,y')} = \begin{Bmatrix} \alpha_{iy'} & 0 \\ 0 & \beta_{iy'} \\ \alpha_{i+1,y'} & 0 \\ 0 & \beta'_{i+1,y'}$$

par

$$\alpha_{\rho}^{(i,y')} \zeta_{i,i+1} = \beta_{\varphi}^{(i,y')} = \begin{Bmatrix} \rho \alpha_{iy'} & \frac{1}{2} \beta'_{i+1,y'} \\ \alpha_{i+1,y'} & \frac{1}{2\rho} \beta_{iy'} \\ \rho \alpha_{i+1,y'} & -\frac{1}{2} \beta'_{iy'} \\ -\alpha_{iy'} & \frac{1}{2\rho} \beta'_{i+1,y'} \end{Bmatrix};$$

4° la sous-matrice  $\alpha_{\varphi}^{(y,y')}$  par elle-même.

La matrice  $\beta_{\varphi}$  ainsi obtenue est la matrice générale du normalisant de  $\varphi$  dans  $A(n, \pi^2)$ . Il nous faut maintenant calculer  $\zeta^{-1} \alpha_{\varphi} \sigma \zeta = \tau_{\varphi}$ ,  $\sigma = t_{1\dots y'}$ . Les sous-matrices de  $\alpha_{\varphi} \sigma$  analogues aux  $\alpha_{\varphi}^{(i,k)}$  s'obtiennent en remplaçant :

1° chaque  $\alpha_{\varphi}^{(i,k)}$  où  $i$  et  $k$  sont impairs  $\leq y - 1$  par la matrice  $\alpha_{\varphi}^{(i,k)} t_{i,i+1}$  déjà formée pour  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ;

2° chaque  $\alpha_{\varphi}^{(y',k)}$  par

$$\alpha_{\varphi}^{(y',k)} t_{y'} = \begin{Bmatrix} 0 & \beta_{y',k} & 0 & \beta_{y',k+1} \\ \alpha_{y',k} & 0 & \alpha_{y',k+1} & 0 \end{Bmatrix};$$

3° chaque  $\alpha_{\varphi}^{(i,y')}$  par

$$\alpha_{\varphi}^{(i,y')} t_{i,i+1} = \begin{Bmatrix} 0 & \beta_{iy'} \\ \alpha_{iy'} & 0 \\ 0 & \beta'_{i+1,y'} \\ \alpha_{i+1,y'} & 0 \end{Bmatrix};$$



$$4^{\circ} \alpha_{\varphi}^{(v',v')} = \begin{Bmatrix} \alpha_{v',v'} & 0 \\ 0 & \beta'_{v',v'} \end{Bmatrix} \text{ par} \\ \alpha_{\varphi}^{(v',v')} t_{v'} = \begin{Bmatrix} 0 & \beta'_{v',v'} \\ \alpha_{v',v'} & 0 \end{Bmatrix}.$$

Donc  $\tau_{\varphi}$  se déduit de  $\alpha_{\varphi}$  en remplaçant :

1<sup>o</sup> chaque  $\alpha_{\varphi}^{(i,k)}$  où  $i$  et  $k$  sont impairs  $\leq v-1$  par la sous-matrice  $\tau_{\varphi}^{(i,k)}$  déjà considérée pour  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ;

2<sup>o</sup> chaque  $\alpha_{\varphi}^{(v',k)}$  par

$$\zeta_{n,k+1}^{-1} \alpha_{\varphi}^{(v',k)} t_{v'} = \tau_{\varphi}^{(v',k)} = \begin{Bmatrix} \beta_{v',k+1} & \rho \beta_{v',k} & -\beta_{v',k} & \rho \beta_{v',k+1} \\ \frac{1}{2\rho} \alpha_{v',k} & \frac{1}{2} \alpha_{v',k+1} & \frac{1}{2\rho} \alpha_{v',k+1} & -\frac{1}{2} \alpha_{v',k} \end{Bmatrix};$$

3<sup>o</sup> chaque  $\alpha_{\varphi}^{(i,v')}$  par

$$\alpha_{\varphi}^{(i,v')} t_{i,i+1} \zeta_{i,i+1} = \tau_{\varphi}^{(i,v')} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \alpha_{i+1,v'} & \rho \beta_{iv'} \\ \frac{1}{2\rho} \alpha_{iv'} & \beta'_{i+1,v'} \\ -\frac{1}{2} \alpha_{iv'} & \rho \beta'_{i+1,v'} \\ \frac{1}{2\rho} \beta_{i+1,v'} & -\beta'_{iv'} \end{Bmatrix};$$

4<sup>o</sup>  $\alpha_{\varphi}^{(v',v')}$  par

$$\alpha_{\varphi}^{(v',v')} t_{v'} = \begin{Bmatrix} 0 & \beta_{v',v'} \\ \alpha_{v',v'} & 0 \end{Bmatrix}.$$

110. Arrivons maintenant à la détermination de  $\mathcal{N}$ .

$N$ , p. g. c. d. de  $\zeta^{-1} N_{\varphi} \zeta$  et de  $A(n, \pi)$  sera formé des substitutions  $\beta_{\varphi}$  réelles.

Soit d'abord  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , donc  $\psi$  réductible,  $\rho$  est ici imaginaire [ $\rho = \eta$ , quand  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ , et  $\rho = \varepsilon$  quand  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ ] (87);  $\rho^2$  est réel et  $\bar{\rho} = -\rho$ . Un calcul direct montre que les conditions nécessaires et suffisantes pour la réalité des éléments de  $\beta_{\varphi}^{(i,k)}$  sont

$$(1) \quad \begin{cases} \beta'_{i+1,k+1} = \dot{\alpha}_{ik}, & \beta'_{ik} = \dot{\alpha}_{i+1,k+1}, \\ \beta'_{i,k+1} = -\dot{\alpha}_{i+1,k}, & \beta'_{i+1,k} = -\dot{\alpha}_{i,k+1}. \end{cases}$$

On a donc

$$\alpha_{\varphi}^{(i,k)} = \begin{Bmatrix} \alpha_{ik} & 0 & \alpha_{i,k+1} & 0 \\ 0 & \dot{\alpha}_{i+1,k+1} & 0 & -\dot{\alpha}_{i+1,k} \\ \alpha_{i+1,k} & 0 & \alpha_{i+1,k+1} & 0 \\ 0 & -\dot{\alpha}_{i,k+1} & 0 & \dot{\alpha}_{ik} \end{Bmatrix}.$$

Les relations fondamentales [I, p. 324, formules (4)] deviennent alors

$$(2) \quad \begin{cases} \sum_i (\alpha_{ik} \check{\alpha}_{i+1,l+1} - \alpha_{i+1,k} \check{\alpha}_{i,l+1}) = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq k, \\ 1 & \text{si } l = k, \end{cases} \\ \sum_i (\alpha_{i,k+1} \check{\alpha}_{i+1,l+1} - \alpha_{i+1,k+1} \check{\alpha}_{i,l+1}) = 0, \\ \sum_i (\alpha_{ik} \check{\alpha}_{i+1,l} - \alpha_{i+1,k} \check{\alpha}_{il}) = 0, \end{cases}$$

$i, k, l$  parcourant les nombres impairs  $< \nu'$ .

Considérons maintenant la matrice des  $\alpha$  qui détermine  $\alpha_\varphi$ . En remplaçant  $i$  par  $2i-1$  et  $k$  par  $2k-1$  (en sorte que  $i, k = 1, 2, \dots, \frac{\nu'}{2}$ ) la sous-matrice des  $\alpha$  qui figure dans  $\alpha_\varphi^{(i,k)}$  deviendra

$$\begin{pmatrix} \alpha_{2i-1,2k-1} & \alpha_{2i-1,2k} \\ \alpha_{2i,2k-1} & \alpha_{2i,2k} \end{pmatrix},$$

et pourra s'écrire  $\begin{pmatrix} \check{\alpha}_{ik} & \check{\alpha}'_{ik} \\ \check{\beta}_{ik} & \check{\beta}'_{ik} \end{pmatrix}$ . Par la même transformation,  $l$  étant aussi remplacé par  $2l-1$ , les formules (2) deviennent

$$\begin{aligned} \sum_i (\alpha_{2i-1,2k-1} \check{\alpha}_{2i,2l} - \alpha_{2i,2k-1} \check{\alpha}_{2i-1,2l}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq k, \\ 1 & \text{si } l = k, \end{cases} \\ \sum_i (\alpha_{2i-1,2k} \check{\alpha}_{2i,2l} - \alpha_{2i,2k} \check{\alpha}_{2i-1,2l}) &= 0, \\ \sum_i (\alpha_{2i-1,2k-1} \check{\alpha}_{2i,2l-1} - \alpha_{2i,2k-1} \check{\alpha}_{2i-1,2l-1}) &= 0. \end{aligned}$$

On peut les écrire

$$\begin{aligned} \sum_i (\check{\alpha}_{ik} \check{\beta}'_{il} - \check{\beta}_{ik} \check{\alpha}'_{il}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq k, \\ 1 & \text{si } l = k, \end{cases} \\ \sum_i (\check{\alpha}'_{ik} \check{\beta}'_{il} - \check{\beta}'_{ik} \check{\alpha}'_{il}) &= 0, \\ \sum_i (\check{\alpha}_{ik} \check{\beta}_{il} - \check{\beta}_{ik} \check{\alpha}_{il}) &= 0 \\ & \left( i, k, l = 1, 2, \dots, \frac{\nu'}{2} \right). \end{aligned}$$

Donc [I, p. 287, formules (4), (5), (6)] la matrice  $\check{\alpha}$  parcourt  $H(\nu', \pi)$ .

Soit  $H_\varphi \equiv H(\nu, \pi)$  le groupe que parcourt  $\alpha_\varphi$  quand  $\check{\alpha}$  parcourt  $H(\nu', \pi)$ . On voit que le p. g. c. d. de  $\zeta^{-1} N_\varphi \zeta$  avec  $A(n, \pi)$  est  $\zeta^{-1} H_\varphi \zeta$ .

On voit, comme précédemment, que les conditions nécessaires et

suffisantes pour la réalité des éléments de  $\tau_{\varphi}^{(l,k)}$  sont

$$\begin{aligned}\beta'_{l,k+1} &= -\frac{1}{4\rho^2} \dot{\alpha}_{i+1,k}, & \beta'_{i+1,k} &= -\frac{1}{4\rho^2} \dot{\alpha}_{i,k+1}, \\ \beta'_{ik} &= \frac{1}{4\rho^2} \dot{\alpha}_{i+1,k+1}, & \beta'_{i+1,k+1} &= \frac{1}{4\rho^2} \dot{\alpha}_{ik}.\end{aligned}$$

Donc

$$\alpha_{\varphi}^{(l,k)} t_{i,i+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{ik} & 0 & \alpha_{i,k+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\rho^2} \dot{\alpha}_{i+1,k+1} & 0 & -\frac{1}{4\rho^2} \dot{\alpha}_{i+1,k} \\ \alpha_{i+1,k} & 0 & \alpha_{i+1,k+1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4\rho^2} \dot{\alpha}_{i,k+1} & 0 & \frac{1}{4\rho^2} \dot{\alpha}_{ik} \end{pmatrix}.$$

La première des formules (2), pour  $l = k$ , devient

$$\Sigma_i(\alpha_{ik} \dot{\alpha}_{i+1,k+1} - \alpha_{i+1,k} \dot{\alpha}_{i,k+1}) = 4\rho^2;$$

les autres restent inaltérées. On peut encore écrire

$$\alpha_{\varphi}^{(l,k)} t_{i,i+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\rho} \alpha_{i+1,k} & 0 & \frac{1}{2\rho} \alpha_{i+1,k+1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2\rho} \dot{\alpha}_{i,k+1} & 0 & \frac{1}{2\rho} \dot{\alpha}_{ik} \\ \frac{1}{2\rho} \alpha_{ik} & 0 & \frac{1}{2\rho} \alpha_{i,k+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho} \dot{\alpha}_{i+1,k+1} & 0 & -\frac{1}{2\rho} \dot{\alpha}_{i+1,k} \end{pmatrix} \xi_i$$

( $\xi_i = T_{i,i+1} m_{i,2\rho} m_{i+1,2\rho} t_{i,i+1}$ )

ou, en remplaçant au second membre  $i$  par  $2i - 1$ ,

$$\begin{aligned}\xi_i &= T_{2i-1,2i} m_{2i-1,2\rho} m_{2i,2\rho} t_{2i-1,2i} \\ &= d_{2i-1} T_{2i-1,2i} t_{2i-1,2i} m_{2i-1,-2\rho} m_{2i,2\rho} = d_{2i-1} S_{2i-1,2i,2\rho}.\end{aligned}$$

La sous-matrice qui multiplie  $\xi_i$  étant une sous-matrice de  $H_{\varphi}$ ,  $\alpha_{\varphi} t_{1,\dots,\nu}$  est une substitution de  $H_{\varphi} \xi$ , en posant  $\xi = \Pi_1^{\nu/2} \xi_i$ . Donc

$$\mathcal{R} = (\zeta^{-1} H_{\varphi} \zeta + \zeta^{-1} H_{\varphi} \zeta \zeta).$$

On remarquera que  $\zeta^{-1} \xi \zeta = d_{2i,\dots,\nu}$ .

411. Soit maintenant  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , donc  $\psi$  irréductible.

Les conditions de réalité de  $\beta_{\varphi}^{(i,k)}$  ( $i, k$  impairs  $< \nu$ ) sont les mêmes que :

pour que  $\beta_{\varphi}^{(\nu',k)}$  soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

$$(3) \quad \beta_{\nu',k+1} = \frac{-1}{2\rho} \dot{\alpha}_{\nu'k}, \quad \beta_{\nu'k} = \frac{1}{2\rho} \dot{\alpha}_{\nu',k+1};$$

pour que  $\beta_{\varphi}^{(i,\nu')}$  soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

$$(4) \quad \beta_{i+1,\nu'} = -2\rho \dot{\alpha}_{i\nu'}, \quad \beta_{i\nu'} = 2\rho \dot{\alpha}_{i+1,\nu'};$$

pour que  $\beta_{\varphi}^{(\nu',\nu')}$  soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

$$(5) \quad \beta_{\nu'\nu'} = \dot{\alpha}_{\nu'\nu'}.$$

Les relations fondamentales deviennent donc :

$$(6) \quad \sum_i (\alpha_{ik} \dot{\alpha}_{i+1,l+1} - \alpha_{i+1,k} \dot{\alpha}_{i,l+1}) + \frac{1}{2\rho} \alpha_{\nu'k} \dot{\alpha}_{\nu',l+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq k, \\ 1 & \text{si } l = k, \end{cases}$$

$$(7) \quad \sum_l (\alpha_{i,k+1} \dot{\alpha}_{i+1,l+1} - \alpha_{i+1,k+1} \dot{\alpha}_{i,l+1}) + \frac{1}{2\rho} \alpha_{\nu',k+1} \dot{\alpha}_{\nu',l+1} = 0,$$

$$(8) \quad \sum_i (\alpha_{ik} \dot{\alpha}_{i+1,l} - \alpha_{i+1,k} \dot{\alpha}_{il}) + \frac{1}{2\rho} \alpha_{\nu'k} \dot{\alpha}_{\nu'k} = 0,$$

$$(9) \quad \sum_l (\alpha_{ik} \dot{\alpha}_{i+1,\nu'} - \alpha_{i+1,k} \dot{\alpha}_{i\nu'}) + \alpha_{\nu'k} \dot{\alpha}_{\nu'\nu'} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \nu', \\ 1 & \text{si } k = \nu', \end{cases}$$

$$(10) \quad 2\rho \sum_i (\alpha_{i,k+1} \dot{\alpha}_{i+1,\nu'} - \alpha_{i+1,k+1} \dot{\alpha}_{i\nu'}) + \alpha_{\nu',k+1} \dot{\alpha}_{\nu'\nu'} = 0.$$

Les indices  $i$  et  $l$  parcourent les nombres impairs  $< \nu$ . L'indice  $k$  parcourt les mêmes nombres dans (7), et peut prendre la valeur  $\nu'$  dans (6), (8), (9). [(6) pour  $k = \nu'$  est la conjuguée de (10), que l'on peut supprimer.]

Comme précédemment, la sous-matrice des  $\alpha$  qui figure dans  $\alpha_{\varphi}^{(i,k)}$  pourra s'écrire  $\begin{pmatrix} \check{\alpha}_{ik} & \check{\alpha}'_{ik} \\ \check{\beta}_{ik} & \check{\beta}'_{ik} \end{pmatrix}$  ( $i, k = 1, \dots, \frac{\nu}{2}$ ); la sous-matrice  $(\alpha_{\nu',2k-1}, \alpha_{\nu',2k})$  s'écrira  $(\check{\alpha}_{0k}, \check{\alpha}'_{0k})$ ; la sous-matrice  $\begin{pmatrix} \alpha_{2i-1} & \nu' \\ \alpha_{2i} & \nu' \end{pmatrix}$  pourra s'écrire  $\begin{pmatrix} \check{\alpha}_{i0} \\ \check{\beta}_{i0} \end{pmatrix}$ ; enfin, on remplacera  $\alpha_{\nu',\nu'}$  par  $\alpha_{00}$ . En faisant alors

$\omega = \frac{1}{4\rho}$ , d'où  $\omega = \omega - \dot{\omega} = \frac{1}{2\rho}$ , les relations (6), (10) s'écrivent :

$$\sum_i (\check{\alpha}_{ik} \check{\beta}'_{il} - \check{\beta}_{ik} \check{\alpha}'_{il}) + \omega \check{\alpha}_{0k} \check{\alpha}'_{0l} = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq k \\ 1 & \text{si } l = k \end{cases} \quad (k \geq 0; l \neq 0)$$

[cette relation vient de (6) et (10)],

$$\Sigma_i (\check{\alpha}_{ik} \check{\beta}'_{il} - \check{\beta}'_{ik} \check{\alpha}_{il}) + \omega \check{\alpha}'_{0k} \check{\alpha}'_{0l} = 0 \quad (k, l \neq 0)$$

[cette relation vient de (7)],

$$\Sigma_i (\check{\alpha}_{ik} \check{\beta}'_{il} - \check{\beta}'_{ik} \check{\alpha}_{il}) + \omega \alpha_{0k} \alpha_{0l} = \begin{cases} 0 & \text{sauf si } k=l=0 \\ \omega & \text{si } k=l=0 \end{cases}$$

[cette relation vient de (8) et (9)].

Donc [I, p. 287, formules (4), (5), (6)]  $\check{\alpha}$  parcourt  $H(\nu', \pi)$ .

Soit  $H_\varphi \equiv H(\nu', \pi)$  le groupe que parcourt  $\alpha_\varphi$  quand  $\alpha$  parcourt  $H(\nu', \varphi)$ . On voit que le p. g. c. d. de  $\zeta^{-1} N_\varphi \zeta$  avec  $A(n, \pi)$  est  $\zeta^{-1} H_\varphi \zeta$ .

On voit comme précédemment que les conditions nécessaires et suffisantes pour la réalité des éléments de  $\tau_\varphi^{(i,k)}$  ( $i, k$  impairs  $< \nu$ ) sont

$$\beta'_{\nu', k+1} = \frac{-1}{2\rho} \dot{\alpha}_{\nu', k}, \quad \beta'_{\nu', k} = \frac{1}{2\rho} \dot{\alpha}_{\nu', k+1}.$$

On remarquera que ce sont les mêmes conditions que pour la réalité de  $\beta_\varphi^{(i,k)}$ :

pour que  $\tau_\varphi^{(\nu', k)}$  soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta'_{\nu', k+1} = \frac{-1}{2\rho} \dot{\alpha}_{\nu', k}, \quad \beta'_{\nu', k} = \frac{1}{2\rho} \dot{\alpha}_{\nu', k+1};$$

pour que  $\tau_\varphi^{(i, \nu')}$  soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta'_{i\nu'} = \frac{1}{2\rho} \dot{\alpha}_{i+1, \nu'}, \quad \beta'_{i+1, \nu'} = \frac{-1}{2\rho} \dot{\alpha}_{i\nu'};$$

pour que  $\tau_\varphi^{(\nu', \nu')}$  soit réelle, il faut et il suffit que l'on ait

$$\beta'_{\nu', \nu'} = \dot{\alpha}_{\nu', \nu'}.$$

On transforme  $\alpha_\varphi^{(i,k)}$  comme dans le cas  $n \equiv 0 \pmod{4}$  [on a ici  $\frac{1}{4\rho^2} \Sigma_i (\dot{\alpha}_{il} \alpha_{i+1, k+1} - \alpha_{i+1, k} \dot{\alpha}_{i, k+1}) + \frac{1}{2\rho} \dot{\alpha}_{\nu', k} \alpha_{\nu', k+1} = 1$ ], et l'on a de plus

$$\alpha_\varphi^{(i, \nu')} t_{i, i+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{i\nu'} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho} \dot{\alpha}_{i+1, \nu'} \\ \alpha_{i+1, \nu'} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2\rho} \dot{\alpha}_{i\nu'} \end{pmatrix} t_{i, i+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\rho} \alpha_{i+1, \nu'} & 0 \\ 0 & -\dot{\alpha}_{i\nu'} \\ \frac{1}{2\rho} \alpha_{i\nu'} & 0 \\ 0 & \dot{\alpha}_{i+1, \nu'} \end{pmatrix} \xi_i$$

( $\xi_i = T_{i, i+1} m_{i, 2\rho} m_{i+1, 2\rho} t_{i, i+1}$ ),

ou, en remplaçant  $i$  par  $2i - 1$ ,

$$\xi_i = d_{2i-1} T_{2i-1, 2i} t_{2i-1, 2i} m_{2i-1, -2\varphi} m_{2i, 2\varphi} = d_{2i-1} S_{2i-1, 2i, 2\varphi}.$$

La sous-matrice qui multiplie  $\xi_i$  étant une sous-matrice de  $H_\varphi$ ,  $\alpha_\varphi t_{1, \dots, \nu'}$  est une substitution de  $H_\varphi \xi$  en posant

$$\xi = t_\nu \Pi_1^{\nu/2} \xi_i.$$

Donc  $\mathcal{N} = (\zeta^{-1} H_\varphi \xi + \zeta^{-1} H_\varphi \xi \zeta)$ ; comme dans le cas  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $\zeta^2 = 1$ .

112. Déterminons maintenant  $\mathcal{N}'$ . Pour que  $\zeta^{-1} \alpha_\varphi \gamma^{\nu'} \zeta$ , qui multiplie  $a$  par  $\nu'$  soit réelle, il faut que  $\nu'$  soit réel, donc  $\nu' = \nu$ . D'ailleurs  $\alpha_\varphi \gamma^{\nu'}$  se déduit de  $\alpha_\varphi$  en y multipliant chaque coefficient  $\alpha$  par  $\nu$ . Donc, les conditions de réalité se déduisent de (1) si  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , ou de (1), (3), (4), (5) si  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , en multipliant les deux nombres par  $\nu$ . Donc  $\alpha_\varphi = \alpha'_\varphi t_{1, \dots, \nu'} \gamma^{\nu'} t_{1, \dots, \nu'}$ ,  $\alpha'_\varphi$  se déduisent de  $\alpha_\varphi$  en multipliant chaque coefficient  $\beta'$  par  $\nu$ . Entre les coefficients de  $\alpha_\varphi$ , on a, au lieu des relations (2) ou (6)-(10), celles qui s'en déduisent en y remplaçant seulement les seconds membres 1 par  $\nu$ . Donc la matrice  $(\alpha_{ik})$  est dans  $H(\nu', \pi)[\nu^{-\lambda}]$ , où elle peut être prise arbitrairement. Donc  $(\alpha)_{ik}[\nu^{\lambda}]$  peut être prise arbitrairement dans  $H(\nu', \pi)$ . Or, la matrice correspondante de  $H_\varphi$  est  $\alpha'_\varphi \gamma^{\nu'} t_{1, \dots, \nu'} \gamma^{\nu'} t_{1, \dots, \nu'}$ . Ainsi  $\alpha'_\varphi$  peut être prise arbitrairement dans  $H_\varphi \xi^{\lambda}$ , en posant  $\xi' = \Pi_1^{\nu'} \begin{vmatrix} x_i, \nu^{\pi} x_i \\ y_i, \nu^{\lambda} y_i \end{vmatrix} (\xi' = \Pi_1^{\nu'} m_{i, \nu}^{-1}$ , si  $n \equiv 0 \pmod{4}$ ;  $\xi' = \gamma \Pi_1^{\nu'} m_{i, \nu}^{-1}$ , si  $n \equiv 2 \pmod{4}$ ). Donc  $\alpha_\varphi \gamma^{\nu'}$  est quelconque dans  $H_\varphi \{ \xi' \}$ . Donc  $\mathcal{N}' = (\zeta^{-1} \{ H_\varphi, \xi, \xi' \} \xi)$ ,  $\xi'$  est permutable à  $H_\varphi$ , *a priori*; et l'on a  $\xi^2 = 1$ ,  $\xi^{-1} \xi' \xi = \xi'^{\pi}$ ; enfin  $\xi'^{\pi-1} = \Pi_1^{\nu'} m_{i, \nu}^{-\pi}$  est dans  $H_\varphi$ .

113. Si  $n \equiv 0 \pmod{4}$ , on a  $\mathcal{N}_\varphi^0 = \mathcal{N}_\varphi$  (107). Donc, la substitution  $\xi$  trouvée au n° 110 étant dans  $B(n, \pi^2)$ , on a  $\mathcal{N}^0 = \mathcal{N}$ .

Si  $n \equiv 2 \pmod{4}$ , on a  $\mathcal{N}_\varphi^0 = (N_\varphi)$ . Donc  $\mathcal{N}^0 = (\zeta^{-1} H_\varphi \xi)$ .

114. Déterminons maintenant P.

Soit d'abord  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Désignons par  $m'_1 \rho$  la substitution  $\begin{vmatrix} x_1 \rho x_1 \\ \rho^{-\pi} x_2 \end{vmatrix}$ .

On a  $(1, 2) H = \{ H^0, m'_{1, \nu} \}$ , et, tout diviseur d'indice 2 contenant néces-

sairement  $H^0(I, p. 303)$ , le seul diviseur d'indice 2 de  $H$  est  $\{H^0, m_{1,t}^{-2}\}$ . Soit  $H_\varphi^0$  le diviseur de  $H_\varphi$  qui répond à  $H^0$ . La substitution de  $H_\varphi$  qui répond à  $m_{1,t}'$  est  $m_{1,t}' m_{2,t'}^{-\pi} = m_{1,t_0}^{-1} m_{2,t_0}^{-1} m_{1,t_0} m_{2,t_0}^{-1}$ ; et l'on a

$$m_{1,t}' m_{2,t'}^{-2\pi} = m_{1,j}^{-1} m_{2,j}^{-1} m_{1,t} m_{2,t}^{-1}.$$

Comme  $m_{1,t} m_{2,t}^{-1}$ , qui répond à  $m_{1,t}'$ , est dans  $H_\varphi^0$ , le seul diviseur de  $H_\varphi$  est  $K_\varphi = \{H_\varphi^0, m_{1,j} m_{2,j}\}$ .

En posant  $\alpha = \frac{t' + t'^\pi}{2}$ ,  $\beta = \frac{t' - t'^\pi}{2\rho}$  ( $\alpha$  et  $\beta$  sont réels), on a

$$\zeta^{-1} m_{1,t}' m_{2,t'}^{-\pi} \zeta = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha x_1 - \beta \rho^2 y_2 \\ y_1 & t^{-1}(\alpha y_1 + \beta x_2) \\ x_2 & t^{-1}(\alpha x_2 + \beta \rho^2 y_1) \\ y_2 & \alpha y_2 - \beta x_1 \end{vmatrix} = m_{2,\alpha/t} m_{1,\alpha} U_{2,1,\alpha\beta\rho^2/t} W_{1,2,\beta/\alpha}.$$

Comme  $\alpha$  et  $\alpha t$  ont des caractères quadratiques différents,  $m_{2,\alpha/t} m_{1,\alpha}$  est hors de  $B(n\pi)$ . Il en est de même de  $\zeta^{-1} m_{1,t}' m_{2,t'}^{-\pi} \zeta$ . Donc  $(N, P)$  qui est  $\leq 2$  est égal à 2. Donc le p. g. c. d. de  $\zeta^{-1} H_\varphi \zeta$  avec  $B$  est d'indice 2 dans  $\zeta^{-1} H_\varphi \zeta$ . Ce p. g. c. d. est donc  $\zeta^{-1} K_\varphi \zeta$ .

D'autre part  $\zeta^{-1} \xi \zeta = d_{2,4,\dots,v'}$  (110) est dans  $B$  sauf si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$  avec  $v' \equiv 2 \pmod{4}$ . Donc  $\mathfrak{R} \equiv (\zeta^{-1} K_\varphi \zeta + \zeta^{-1} K_\varphi \xi \zeta)$  sauf si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$  avec  $v' \equiv 2 \pmod{4}$ .

Si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$  et  $v' \equiv 2 \pmod{4}$  il suffit de remplacer  $\xi$  par son produit  $\xi_0$  par  $m_{1,t}' m_{2,t'}^{-\pi}$ , dont la transformée par  $\zeta$  est dans  $N$  hors de  $B$ .

Si  $n = 4$ ,  $v' = 2$ , les objets qui dans  $[\mathcal{C}^0(4\pi^2)]$  répondent à  $H_\varphi^0$ ,  $m_{1,t}' m_{2,t'}^{-\pi} m_{1,j} m_{2,j}$ ,  $\xi_0$  sont respectivement  $\mathcal{U}_z, (1z), (j^{-1}u), (j^2u), (-1z) \left( \frac{-j}{4u} \right)$ .

On retrouve ainsi les résultats obtenus.

115. Soit maintenant  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . On a  $\mathfrak{U}_\varphi^0 = (N_\varphi)(107)$ , donc  $\mathfrak{U}^0 = (\zeta^{-1} H_\varphi \zeta)$  (113), donc  $\mathfrak{R} = (\zeta^{-1} K_\varphi \zeta)$ .