Annales scientifiques de l'É.N.S.

Henri Milloux

Quelques propriétés des fonctions entières d'ordre infini. Distribution de leurs valeurs

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 49 (1932), p. 311-350

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1932_3_49__311_0>

QUELQUES PROPRIÉTÉS

DES

FONCTIONS ENTIÈRES D'ORDRE INFINI

DISTRIBUTION DE LEURS VALEURS

PAR M. HENRI MILLOUX

(Strasbourg)

Préface.

On sait que toute fonction entière $f(z)$ d'ordre fini ρ supérieur à $\frac{1}{2}$ possède au moins *deux demi-droites de Borel*, c'est-à-dire telles que dans tout angle d'ouverture arbitrairement petite ayant pour bissectrice l'une de ces deux demi-droites, l'exposant de convergence des zéros de $f(z)-a$ est égal à ρ, sauf peut-être pour une valeur finie de a [1].

D'une part, cette propriété n'est plus vraie, du moins d'une façon générale, pour les fonctions entières d'ordre fini inférieur à $\frac{1}{2}$: par exemple, et d'une manière plus précise, on peut citer des fonctions $f(z)$ d'ordre quelconque inférieur à $\frac{1}{2}$ qui convergent uniformément vers l'infini lorsque le point z s'éloigne indéfiniment, à l'extérieur de cercles centrés sur la partie positive de l'axe réel, les rayons de ces cercles tendant vers zéro avec l'inverse de leur éloignement.

D'autre part, cette même propriété semble également n'être plus vraie (en remplaçant ρ par l'infini) pour les fonctions entières d'ordre infini : en effet, il existe de telles fonctions qui sont d'ordre fini à l'extérieur d'un angle d'ouverture arbitrairement petite.

---

[1] J'ai donné ces résultats, ainsi que d'autres plus précis, dans les deux derniers Chapitres de mon Mémoire : *Les cercles de remplissage des fonctions méromorphes ou entières et le théorème de Picard-Borel* (*Acta Math.*, t. 52, p. 189-255).

Le but principal de ce Mémoire est d'établir que *cette dernière dissemblance n'est qu'apparente :* contrairement à ce qui se passe pour les fonctions entières d'ordre fini inférieur à $\frac{1}{2}$, les fonctions entières d'ordre infini s'apparentent, au point de vue auquel nous nous plaçons, aux fonctions entières d'ordre fini supérieur à $\frac{1}{2}$. Mais il faut renoncer au mode d'approximation du point à l'infini par des angles d'ouverture arbitrairement petite. La théorie des cercles de remplissage permet d'obtenir des résultats très précis.

J'établis, dans le troisième Chapitre du présent Mémoire, l'existence de *deux suites distinctes de tels cercles*. Je donne, en fonction simple de l'indice caractéristique $T(r, f)$ de la fonction entière $f(z)$ d'ordre infini, les valeurs des rayons de deux cercles correspondants dans les deux suites (ces cercles sont situés à peu près à la même distance de l'origine), ainsi que des limites inférieures de la différence des arguments des centres de ces cercles, et du nombre des zéros de $f(z) - a$ situés dans chacun de ces cercles : cette dernière limite inférieure se présente d'une façon telle que si l'on extrait de l'une quelconque des suites de cercles, une infinité quelconque de ces cercles, dans le domaine ainsi constitué, l'exposant de convergence des zéros de $f(z) - a$ est infini, sauf pour une valeur finie de a au plus.

Ces résultats fondamentaux du troisième Chapitre [1] sont obtenus à la suite d'une étude (faite dans le premier Chapitre) de grandeur des arcs sur lesquels une fonction entière est très grande, et d'une étude générale (faite dans le deuxième Chapitre) de distribution des valeurs d'une fonction holomorphe dans un cercle : dans cette dernière étude, on suppose que la fonction est relativement petite dans le cercle de rayon moitié, et relativement grande en un point du pourtour du cercle.

Enfin, l'examen de certaines fonctions entières d'ordre infini (fonctions de Mittag-Leffler) m'a conduit à étudier plus particulièrement le cas où l'indice caractéristique $T(r, f)$ de la fonction $f(z)$ satis-

---

[1] Déjà résumés en partie dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 29 décembre 1930 (*Une propriété générale des fonctions entières d'ordre infini*).

fait à la condition

$$\overline{\lim} \frac{\log T(r, f)}{r} = \rho.$$

ρ est une quantité finie différente de zéro.

Dans ce cas, j'obtiens, en partie par des méthodes spéciales, des résultats encore plus précis sur les arcs où la fonction est au moins de l'ordre de grandeur de $e^{T(r,f)}$, ainsi que sur la distribution des valeurs de cette fonction. Ces résultats généraux, confrontés avec ce qu'on connaît des fonctions de Mittag-Leffler, apparaissent très satisfaisants (*voir* par exemple le théorème VI et le corollaire du théorème IX). Ils sont exposés à la fin du Chapitre I et au Chapitre IV.

Depuis la rédaction de ce Mémoire, des résultats nouveaux ont été obtenus dans l'étude des domaines où une fonction entière est très grande. Ces résultats, issus de méthodes différentes, peuvent être confrontés avec ceux du Chapitre I du présent Mémoire; ils ont été résumés dans une Note aux *Comptes rendus* du 15 février 1932 (*Sur une inégalité de la théorie des fonctions et ses applications*) et seront développés dans un Mémoire ultérieur.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DES ARCS SUR LESQUELS UNE FONCTION ENTIÈRE EST TRÈS GRANDE.

I.

1. Dans un récent article [1], j'ai établi une proposition sur la somme des longueurs des arcs (pris sur certaines circonférences de centre origine) sur lesquels le logarithme du module d'une fonction entière est de l'ordre de grandeur de son indice caractéristique. Je me propose, dans ce premier Chapitre, d'obtenir une proposition plus maniable en vue d'applications à la distribution des valeurs d'une fonction entière d'ordre infini. J'étudierai aussi un cas particulier, que je traiterai d'une manière totalement différente.

---

[1] H. Milloux, *Remarque sur les fonctions entières* (*Bull. des Sc. Math.*, 2e série, t. LIV, oct. 1930).

2. *Comparaison entre le module maximum* $M(r, f)$ *d'une fonction entière* $f(z)$ *et l'indice caractéristique* $T(r, f)$ *de M. R. Nevanlinna.* — On connaît les inégalités [1]

$$(1) \qquad T(r, f) \leqq \log M(r, f) \leqq \frac{t+1}{t-1} T(rt, f).$$

Nous allons en déduire que dans tout intervalle rR suffisamment grand, il existe une valeur r' vérifiant l'inégalité suivante :

$$(2) \qquad \log M(r', f) \leqq T(r', f) \log^{1+\varepsilon} T(r', f) \quad (\varepsilon \text{ positif}).$$

Supposons en effet que l'inégalité (2) n'est vérifiée pour aucune valeur de r' comprise entre r et R. En combinant avec la deuxième inégalité (1), on obtient l'inégalité

$$(3) \qquad \frac{T(r't, f)}{T(r', f)} \geqq \frac{t-1}{t+1} \log^{1+\varepsilon} T(r', f).$$

Choisissons t de façon que le deuxième membre de cette inégalité soit égal à e. Alors lorsque $T(r', f)$ dépasse une constante numérique, on a

$$(4) \qquad \log t \leqq \frac{3(t-1)}{t+1} \leqq \frac{3e}{\log^{1+\varepsilon} T(r', f)}.$$

Ceci posé, partons de $r' = r$, et soit $r_1 = r, r_2, r_3, \ldots, r_n, \ldots$ une succession de valeurs déterminées à partir de la première par la succession d'égalités

$$r_n = r', \qquad r_{n+1} = tr'.$$

D'après l'inégalité (3) et les choix successifs de t, on a

$$(5) \qquad T(r_{n+1}, f) \geqq e^n T(r, f).$$

Donc $T(r_{n+1}, f)$ *augmente indéfiniment avec* n.

D'autre part, désignons par $t_1, t_2, \ldots, t_n = \frac{r_{n+1}}{r_n}, \ldots$, la succession des valeurs de t. D'après les inégalités (4), on a

$$\log t_n \leqq \frac{3e}{\log^{1+\varepsilon} T(r_n, f)}$$

et par suite

$$(6) \qquad \log r_{n+1} = \log r + \sum_{m=1}^{n} \log t_m \leqq \log r + 3e \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{\log^{1+\varepsilon} T(r_m, f)}.$$

---

[1] *Voir* R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Paris, Gauthier-Villars, 1929).

Montrons que cette dernière somme est convergente lorque n augmente indéfiniment. On a, d'après l'inégalité (5),

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{\log^{1+\varepsilon} T(r_m, f)} \leqq \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{[p + \log T(r, f)]^{1+\varepsilon}}.$$

Or, cette dernière série est convergente, et sa somme est comprise entre $\frac{1}{\varepsilon[\log T(r, f)]^{\varepsilon}}$ et $\frac{1}{\varepsilon[\log T(r, f) - 1]^{\varepsilon}}$. Lorsque $T(r, f)$ dépasse une constante numérique, on a donc, en utilisant l'inégalité (6), et ceci quel que soit n

$$\log r_{n+1} \leqq \log r + \frac{7}{\varepsilon[\log T(r, f)]^{\varepsilon}}.$$

La fonction $f(z)$ étant entière, l'indice $T(r, f)$ est fini; donc, d'après l'inégalité (5), il est impossible que $\log R$ puisse être supérieur ou égal à $\log r + \frac{7}{\varepsilon[\log T(r, f)]^{\varepsilon}}$, d'où le théorème suivant :

Théorème I. — *Soit $f(z)$ une fonction entière, à indice caractéristique* $T(r, f)$ *et à module maximum* $M(r, f)$ *sur le cercle de centre origine et de rayon r. Lorsque* $T(r, f)$ *dépasse une constante numérique, dans tout intervalle* rR *tel que*

$$\log \frac{R}{r} = \frac{7}{\varepsilon[\log T(r, f)]^{\varepsilon}},$$

il existe au moins une valeur r' vérifiant l'inégalité

$$\log M(r', f) \leqq T(r', f) \log^{1+\varepsilon} T(r', f); \tag{2}$$

ε est une constante positive quelconque; on pourra même la faire dépendre de l'indice $T(r, f)$.

3. *Remarque.* — Il n'est pas nécessaire que la fonction $f(z)$ soit entière pour que le théorème précédent soit valable : il suffit qu'elle soit holomorphe dans un cercle de centre origine et de rayon supérieur à R, les inégalités (1) de départ étant valables pour de telles fonctions.

4. Remplaçons l'inégalité (2) par l'inégalité plus restrictive suivante :

$$\log M(r', f) \leqq T(r', f) \log T(r', f) \tag{2'}$$

(obtenue en annulant ε), et recherchons dans quelles conditions cette inégalité est nécessairement vérifiée pour une valeur r' intérieure à un intervalle rR suffisamment grand.

La méthode suivie au n° 2 conduit aux résultats suivants : on a, d'une part,

$$\mathrm{T}(r_{n+1}, f) \geqq e^{n}\mathrm{T}(r, f),$$

d'autre part,

$$\log r_{n+1} \leqq \log r + 3e\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m+\log\mathrm{T}(r, f)}.$$

La somme du deuxième membre est inférieure à

$$\int_{-1}^{n-1}\frac{dx}{x+\log\mathrm{T}(r, f)} = \log\frac{n-1+\log\mathrm{T}(r, f)}{-1+\log\mathrm{T}(r, f)}$$

et par suite, dès que $\mathrm{T}(r, f)$ dépasse une constante numérique, on a

$$\log r_{n+1} \leqq \log r + 7\log\left[\frac{n+\log\mathrm{T}(r, f)}{\log\mathrm{T}(r, f)}\right].$$

Utilisant l'inégalité (5) et l'inégalité précédente, on peut écrire

$$\log\mathrm{T}(r_{n+1}, f) - \log\mathrm{T}(r, f) \geqq n \geqq -\log\mathrm{T}(r, f) + \left[\frac{r_{n+1}}{r}\right]^{\frac{1}{7}}\log\mathrm{T}(r, f)$$

ou

$$\log\mathrm{T}(r_{n+1}, f) \geqq \left[\frac{r_{n+1}}{r}\right]^{\frac{1}{7}}\log\mathrm{T}(r, f),$$

d'où le théorème suivant, plus précis que le théorème I, mais moins général :

Théorème II. — *Dans tout intervalle* rR *tel que l'on ait*

$$\log\mathrm{T}(r, f) \leqq \left[\frac{\mathrm{R}}{r}\right]^{\frac{1}{7}}\log\mathrm{T}(r, f), \tag{7}$$

il existe une valeur r' *vérifiant l'inégalité*

$$\log\mathrm{M}(r', f) \leqq \mathrm{T}(r', f)\log\mathrm{T}(r', f).$$

Remarquons qu'étant donnée une fonction entière $f(z)$, il n'existe pas nécessairement un système de valeurs rR vérifiant l'inégalité (7). On peut affirmer l'existence de tels systèmes dans les cas suivants :

A. *Fonctions entières d'ordre fini.* — Soit ρ l'ordre d'une de ces fonctions. Lorsque R est assez grand, on a

$$\log T(R, f) \leqq (\rho + \varepsilon) \log R$$

et, si $\frac{r}{R}$ est assez petit, l'inégalité (7) se trouve vérifiée.

En particulier, supposons que la fonction entière $f(z)$ vérifie, quel que soit r, les inégalités

$$h \log r \leqq \log T(r, f) \leqq k \log r,$$

h et k étant deux constantes positives [la deuxième inégalité est toujours vérifiée, à partir d'une certaine valeur de r, lorsqu'on prend k supérieur à l'ordre ρ; la première inégalité est vérifiée en particulier pour les fonctions à croissance régulière].

Alors l'inégalité (7) est vérifiée lorsque l'on a

$$\frac{k}{h} \log \frac{R}{r} \leqq \left[\frac{R}{r}\right]^{\frac{1}{7}},$$

c'est-à-dire dès que le rapport $\frac{R}{r}$ dépasse une constante dépendant uniquement du rapport $\frac{k}{h}$.

B. *Certaines fonctions entières d'ordre infini.* — Celles qui vérifient l'inégalité

$$\log T(R, f) \leqq R^{\rho},$$

ρ étant une constante inférieure à $\frac{1}{7}$; dans ce cas, il suffit que $\frac{R}{r}$ soit suffisament grand.

5. Soit r' une valeur de $|z|$ pour laquelle la fonction $f(z)$ vérifie l'inégalité (2). Rappelons la définition de l'indice caractéristique

$$T(r', f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |f(r' e^{i\varphi})| \, d\varphi.$$

Posons

$$\overset{+}{\log} |f(r' e^{i\varphi})| = T(r', f) \alpha(\varphi),$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi) \, d\varphi = 1.$$

Or, d'après le théorème I, $\alpha(\varphi)$ est inférieur à $\log^{1+\varepsilon}T(r', f) = A$. Si donc $\alpha(\varphi)$ est inférieur à η pour des valeurs de φ de mesure $m(\eta)$, on a nécessairement

$$\eta m(\eta) + [2\pi - m(\eta)]A \geqq 2\pi,$$

ou

$$2\pi - m(\eta) \geqq \frac{2\pi(1-\eta)}{A-\eta} \geqq \frac{6(1-\eta)}{A} \qquad (0 < \eta < 1),$$

d'où le

Théorème III [complément du théorème I]. — *Pour une valeur r' satisfaisant à l'inégalité* (2), *la mesure angulaire totale des arcs sur lesquels on a l'inégalité :*

$$(8) \qquad \log|f(r'e^{i\varphi})| \geqq \eta T(r', f) \qquad (0 < \eta < 1).$$

excède $\dfrac{6(1-\eta)}{\log^{1+\varepsilon}T(r', f)}$.

$T(r', f)$ doit dépasser une constante numérique.

Un énoncé analogue complète le théorème II.

II.

6. Je me propose, dans ce paragraphe, d'étudier les fonctions entières d'ordre infini satisfaisant à la condition

$$(9) \qquad \overline{\lim} \frac{\log T(r, f)}{r} = \rho,$$

où ρ est une quantité finie, différente de zéro. Il est équivalent d'écrire, d'après la double inégalité (1)

$$\overline{\lim} \frac{\log \log M(r, f)}{r} = \rho.$$

Je déduirai, de cette étude, la conséquence suivante, relative aux fonctions entières d'ordre infini, qui sont d'ordre fini à l'extérieur d'une bande rectangulaire indéfinie de largeur l : *le produit $l\rho$ est supérieur ou égal à* 2π [1].

---

[1] J'ai établi récemment, par une méthode analogue à celles employées au paragraphe précédent, que ce produit dépasse une constante numérique (voir *Remarques sur les fonctions entières*, loc. cit., n° 4). La méthode employée ici s'apparente à celle qui a été utilisée par MM. Phragmen et Lindelöf dans la démonstration de leur célèbre principe.

La comparaison avec les fonctions connues de ce type (fonctions de Mittag-Leffler par exemple) montre que la limite inférieure est atteinte.

7. Commençons par l'étude d'une fonction $f(z)$ holomorphe à l'intérieur du rectangle

$$x_1 \leqq x \leqq x_2, \qquad |y| \leqq \frac{\pi}{2}(1-\varepsilon)$$

et satisfaisant dans ce rectangle aux conditions suivantes :

A. *En tout point z intérieur au rectangle, on a l'inégalité*

$$(10) \qquad |f(z)| \leqq |e^{e^{hz}}| \quad (^1) \qquad (0 < h < 1).$$

B. *En un point* P *d'affixe* $\xi + i\eta = \zeta$, *intérieur au rectangle, on a l'inégalité*

$$(11) \qquad |f(\zeta)| \geqq |e^{e^{k\zeta}}| \quad (^2).$$

Pour ne pas nous trouver en contradiction avec l'inégalité (10), *nous supposerons k compris entre* 0 *et h, et* ξ *assez grand.* En effet, nous devons avoir

$$e^{k\xi}\cos k\eta < e^{h\xi}\cos h\eta.$$

Or, la fonction $e^{k\xi}\cos k\eta - e^{h\xi}\cos h\eta$ atteint son maximum, ξ étant

---

(1) Remarquons que cette inégalité est entraînée par la suivante :

$$(10') \qquad \log|f(z)| \leqq (1-h+h\varepsilon)e^{hx}.$$

En effet, elle s'écrit

$$\log|f(z)| \leqq e^{hx}\cos hy \leqq e^{hx}\cos(1-\varepsilon)\frac{h\pi}{2},$$

et cette dernière quantité est supérieure à

$$(1-h+h\varepsilon)^{hx}.$$

(2) Remarquons que cette inégalité est entraînée par l'inégalité

$$(11') \qquad \log|f(\zeta)| \geqq e^{h\xi}.$$

Il est bien entendu que si les inégalités de départ sont (10′) et (11′), au lieu de (10) et (11), ces inégalités doivent être compatibles, c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$(1-h+h\varepsilon)e^{(h-k)\xi} \geqq 1.$$

fixe et η variable, pour le maximum de η, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}(1-\varepsilon)$. Nous prendrons donc ξ assez grand pour que l'on ait

$$e^{(h-k)\xi} > \frac{\cos\frac{\pi}{2}k(1-\varepsilon)}{\cos\frac{\pi}{2}h(1-\varepsilon)},$$

ce qui est réalisé lorsque l'on a

$$e^{(h-k)\xi} > \frac{1-k+k\varepsilon}{1-h+h\varepsilon}.$$

C. Les points du rectangle où l'on a l'inégalité

$$(12) \qquad |f(z)| \geqq |e^{\alpha e^{kz}}| \qquad (0 < \alpha < 1),$$

comprennent un domaine $\Delta(\alpha)$ limité par une courbe Γ et par des segments du rectangle, domaine contenant le point P. *Nous supposerons que le contour de $\Delta(\alpha)$ ne contient aucun segment des côtés d'ordonnées $\pm\frac{\pi}{2}(1-\varepsilon)$ du rectangle.*

Ceci posé, nous nous proposons de montrer que si x_1 est assez petit et x_2 assez grand, *ces conditions* A, B, C *sont incompatibles.*

8. Considérons la fonction

$$F(z) = f(z)e^{-\alpha e^{kz}}.$$

Elle est holomorphe dans le rectangle, et son module est égal à l'unité sur la courbe Γ.

Et soit la fonction, holomorphe aussi dans le rectangle

$$\Phi(z) = F(z)e^{-\sigma e^{z}},$$

où σ est une constante positive qui sera déterminée dans la suite.

Nous allons rechercher une limite inférieure de $|\Phi(\zeta)|$ et des limites supérieures de $|\Phi(z)$ sur le contour du domaine $\Delta(\alpha)$.

1° En P, on a

$$\log|\Phi(\zeta) \geqq \mathcal{R}[e^{k\zeta} - \alpha e^{k\zeta} - \sigma e^{\zeta}] = (1-\alpha)e^{k\xi}\cos k\eta - \sigma e^{\xi}\cos\eta$$

et cette dernière quantité est supérieure à

$$[(1-\alpha)e^{k\xi} - \sigma e^{\xi}]\cos k\eta.$$

Choix de σ. — Nous prendrons

$$\sigma = \frac{1-\alpha}{2} e^{(k-1)\xi}.$$

Il en résulte l'inégalité

$$\log|\Phi(\zeta)| \geqq \frac{1-\alpha}{2} e^{k\xi} \cos k\eta. \tag{13}$$

2° Sur la courbe Γ, la quantité $|F(z)|$ est égale à 1, et par suite sur cette courbe, on a

$$\log|\Phi(z)| < 0. \tag{14}$$

3° Sur la portion (si elle existe) du côté d'abscisse x_1 du rectangle, limitant le domaine $\Delta(\alpha)$, on a

$$\log|\Phi(z)| \leqq \mathcal{R}[e^{hz} - \alpha e^{kz} - \sigma e^{z}] \leqq e^{hx_1}\cos hy - \alpha e^{kx_1}\cos ky.$$

k étant inférieur à h, α à 1, la dérivée, par rapport à y, de cette dernière expression est du signe de y lorsque y varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$. Cette expression atteint donc son maximum pour $y=0$, de sorte que l'on a l'inégalité

$$\log|\Phi(z)| \leqq e^{hx_1} - \alpha e^{kx_1} \tag{15}$$

et le second membre de cette inégalité est positif.

Nous choisirons x_1 de façon que le deuxième membre de l'inégalité (15) soit inférieur ou égal au deuxième membre de l'inégalité (13), de sorte que

$$e^{hx_1} - \alpha e^{kx_1} \leqq \frac{1-\alpha}{2} e^{k\xi} \cos k\eta. \tag{16}$$

4° Enfin, sur la portion (si elle existe) du côté d'abscisse x_2 du rectangle, limitant le domaine $\Delta(\alpha)$, on a

$$\log|\Phi(z)| \leqq \mathcal{R}[e^{hz} - \alpha e^{kz} - \sigma e^{z}] \leqq e^{hx_2} - \sigma e^{x_2}\cos(1-\varepsilon)\frac{\pi}{2}$$

et *a fortiori*

$$\log|\Phi(z)| \leqq e^{hx_2} - \sigma\varepsilon e^{x_2} = e^{hx_2} - \frac{(1-\alpha)\varepsilon}{2} e^{x_2+(k-1)\xi}. \tag{17}$$

Ceci posé, remarquons qu'en un point au moins du contour de $\Delta(\alpha)$,

$|\Phi(z)|$ doit être supérieur à $|\Phi(\zeta)|$. Or, ceci ne peut avoir lieu ni sur la courbe Γ, ni sur le côté d'abscisse x_1 du rectangle. Ceci a donc nécessairement lieu sur le côté d'abscisse x_2 [ce qui prouve, par ailleurs, l'existence de la portion 4° du contour de $\Delta(\alpha)$], et l'on a l'inégalité

$$e^{hx_2} - \frac{(1-\alpha)\varepsilon}{2} e^{x_2+(k-1)\xi} > \frac{1-\alpha}{2} e^{k\xi} \cos k\eta > 0$$

et *a fortiori*

$$e^{(1-h)x_2} < \frac{2}{\varepsilon(1-\alpha)} e^{(1-k)\xi}$$

ou encore

$$(18) \qquad (1-h)x_2 < (1-k)\xi + \log \frac{2}{\varepsilon(1-\alpha)}.$$

9. En résumé, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème IV. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur du rectangle*

$$|y| \leqq \frac{\pi}{2}(1-\varepsilon), \qquad x_1 \leqq x \leqq x_2$$

et satisfaisant, dans ce rectangle, aux conditions suivantes :

1° *En tout point $z = x + iy$ intérieur au rectangle, on a l'inégalité*

$$|f(z)| < |e^{e^{hz}}| \qquad (0 < h < 1).$$

2° *En un point $\zeta = \xi + i\eta$ intérieur au rectangle, on a*

$$|f(\zeta)| \geqq |e^{e^{k\zeta}}| \qquad (0 < k < h).$$

On suppose que les deux inégalités précédentes sont compatibles, ce qui est réalisé lorsque l'on a

$$e^{(h-k)\xi} > \frac{1-k+k\varepsilon}{1-h+h\varepsilon}.$$

3° *x_1 et x_2 satisfont aux inégalités*

$$e^{hx_1} - \alpha e^{kx_1} \leqq \frac{1-\alpha}{2} e^{k\xi} \cos k\eta \qquad (0 < \alpha < 1),$$

$$(1-h)x_2 \geqq (1-k)\xi + \log \frac{2}{\varepsilon(1-\alpha)}.$$

Ceci posé : le domaine d'un seul tenant, $\Delta(\alpha)$, qui comprend à son *intérieur le point* ζ, *et en tout point duquel la fonction* $f(z)$ *satisfait à l'inégalité*

$$|f(z)| \geqq |e^{\alpha e^{kz}}|,$$

coupe nécessairement l'un au moins des côtés

$$y = \pm \frac{\pi}{2}(1 - \varepsilon)$$

du rectangle.

10. L'énoncé précédent se présente sous une forme générale peu maniable pour les applications que nous avons en vue. Nous allons faire un choix particulier des quantités qui figurent dans cet énoncé, de façon à ne conserver que les trois quantités ε, ξ et k.

Prenons $h = 1 - \varepsilon$, et $1 - k = \varepsilon(1 + \varepsilon')$; $\alpha = 1 - \varepsilon$.

Pour fixer les idées, nous supposerons ε et ε' inférieurs à $\frac{1}{10}$.

L'inégalité relative à ξ s'écrit

$$e^{\varepsilon\varepsilon'\xi} > \frac{1 + \varepsilon' + 1 - \varepsilon - \varepsilon\varepsilon'}{2 - \varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon'(1 - \varepsilon)}{2 - \varepsilon}$$

et elle est vérifiée si l'on suppose que ξ est supérieur à $\frac{1}{2\varepsilon}$; nous supposerons même dorénavant que ξ est supérieur à $\frac{1}{\varepsilon^2 \varepsilon'}$.

Choix de x_1. — L'inégalité relative à x_1 devient

$$e^{(1-\varepsilon)x_1}[1 - (1 - \varepsilon)e^{-\varepsilon\varepsilon' x_1}] \leqq \frac{\varepsilon}{2} e^{(1-\varepsilon-\varepsilon\varepsilon')\xi} \cos(1 - \varepsilon - \varepsilon\varepsilon')\eta,$$

η étant inférieur à $\frac{\pi}{2}(1 - \varepsilon)$, on a

$$\cos(1 - \varepsilon - \varepsilon\varepsilon')\eta > \sin\frac{\pi}{2} 3\varepsilon > 3\varepsilon$$

et l'inégalité relative à x_1 est entraînée par l'inégalité

$$e^{(1-\varepsilon)x_1}[1 - (1 - \varepsilon)e^{-\varepsilon\varepsilon' x_1}] \leqq \frac{3\varepsilon^2}{2} e^{(1-\varepsilon-\varepsilon\varepsilon')\xi},$$

ce qui a lieu lorsque l'on prend

$$x_1 = (1 - \varepsilon - \varepsilon')\xi.$$

En effet, dans ce cas l'on a

$$e^{-\varepsilon\varepsilon' x_1} < e^{-\frac{\varepsilon\varepsilon'\xi}{2}} < e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}} < e^{-50}$$

et il suffit de vérifier l'inégalité

$$\frac{1}{2\varepsilon^2} < e^{\varepsilon\xi(1-\varepsilon-\varepsilon\varepsilon')}.$$

Cette inégalité est évidente : on a

$$\xi\varepsilon(1-\varepsilon-\varepsilon') > \frac{8}{10\varepsilon^2\varepsilon'} > \frac{8}{\varepsilon^2}$$

et $\frac{1}{2\varepsilon^2}$ est inférieur à $e^{\frac{8}{\varepsilon^2}}$ si ε est inférieur à $\frac{1}{10}$.

Choix de x_2. — L'inégalité relative à x_2 devient

$$x_2 \geqq (1+\varepsilon')\xi + \frac{1}{\varepsilon}\log\frac{2}{\varepsilon^2},$$

et elle est vérifiée si l'on prend

$$x_2 = (1+\varepsilon+\varepsilon')\xi.$$

En effet, on a

$$\varepsilon^2\xi > \log\frac{2}{\varepsilon^2},$$

d'après la condition d'inégalité imposée entre ε et ξ, et la petitesse de ε.

En résumé, nous pouvons énoncer le corollaire suivant, cas particulier du théorème IV :

Corollaire I. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le rectangle*

$$|y| \leqq \frac{\pi}{2}(1-\varepsilon), \qquad x_1 \leqq x \leqq x_2 \left(\varepsilon < \frac{1}{10}\right)$$

et satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *En tout point z intérieur au rectangle, on a*

$$|f(z)| < |e^{e^{(1-\varepsilon)z}}|.$$

2° *En un point $\zeta = \xi + i\eta$ intérieur au rectangle, on a*

$$|f(\zeta)| > |e^{e^{(1-\varepsilon-\varepsilon\varepsilon')\zeta}}| \qquad \left(\varepsilon' < \frac{1}{10},\ \varepsilon^2\varepsilon'\xi > 1\right).$$

3° *x_1 et x_2 sont respectivement égaux à $(1-\varepsilon-\varepsilon\varepsilon')\xi$ et $(1+\varepsilon+\varepsilon\varepsilon')\xi$.*

Ceci posé, le domaine Δ d'un seul tenant, qui contient le point ζ, et en tout point duquel on a l'inégalité

$$|f(z)| > |e^{(1-\varepsilon)e^{(1-\varepsilon-\varepsilon\varepsilon')z}}|,$$

coupe nécessairement l'un au moins des côtés d'ordonnées $\pm\frac{\pi}{2}(1-\varepsilon)$ du rectangle.

11. *Remarque.* — Si x_1 est supérieur à une constante numérique, on peut remplacer la condition 1° par la condition

$$\log|f(z)| < \varepsilon e^{(1-\varepsilon)|z|}. \tag{19}$$

En effet, on a

$$(1-\varepsilon)|z| = (1-\varepsilon)x + \frac{(1-\varepsilon)y^2}{x+\sqrt{x^2+y^2}},$$

quantité inférieure à $(1-\varepsilon)x + \frac{\pi^2}{2x}$.

Or,

$$\mathcal{R}[e^{(1-\varepsilon)z}] = e^{(1-\varepsilon)x}\cos\frac{\pi}{2}(1-\varepsilon)^2 > \varepsilon(2-\varepsilon)e^{(1-\varepsilon)x}$$

et x doit être supposé assez grand pour que l'on ait

$$e^{\frac{\pi^2}{2x}} > 2-\varepsilon,$$

ε étant inférieur à $\frac{1}{10}$, il suffit de supposer *que x est supérieur à 4.*

12. On peut donner au théorème IV et à son corollaire une forme plus générale, déduite de la forme précédente par représentation conforme du rectangle sur un autre rectangle. C'est ainsi que l'on peut énoncer la propriété suivante, conséquence du corollaire I précédent et en tenant compte de la remarque du n° 11

Corollaire II. — *Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans le rectangle*

$$|y| \leqq \frac{\pi}{2}A(1-\varepsilon), \qquad x_1 \leqq x \leqq x_2 \left(\varepsilon < \frac{1}{10}\right)$$

et satisfaisant aux conditions suivantes :

1° *En tout point z intérieur au rectangle, on a*

$$\log|f(z)| < \varepsilon e^{\frac{(1-\varepsilon)|z|}{A}}.$$

2° *En un point $\zeta = \xi + i\eta$ intérieur au rectangle, on a*

$$|f(\zeta)| > \left| e^{e^{\frac{(1-\varepsilon-\varepsilon\varepsilon')\zeta}{A}}} \right| \qquad \left(\varepsilon' < \frac{1}{10},\ \varepsilon^2\varepsilon'\xi > A\right).$$

3° *x_1 et x_2 sont respectivement égaux à $(1-\varepsilon-\varepsilon\varepsilon')\xi$ et $(1+\varepsilon+\varepsilon\varepsilon')\xi$ et ξ est supposé assez grand pour que x_1 soit supérieur à $4A$* (¹).

Ceci posé, le domaine Δ d'un seul tenant, qui contient le point ζ, et en tout point duquel on a l'inégalité

$$|f(z)| > \left| e^{(1-\varepsilon)e^{\frac{(1-\varepsilon-\varepsilon\varepsilon')z}{A}}} \right| = B$$

coupe nécessairement l'un au moins des côtés d'ordonnées $\pm\frac{\pi}{2}A(1-\varepsilon)$ du rectangle.

13. Appliquons ce corollaire II aux fonctions entières d'ordre infini satisfaisant à la condition

$$\overline{\lim}\, \frac{\log T(r, f)}{r} = \rho,$$

ρ étant une quantité finie différente de zéro; cette condition peut être remplacée, comme nous l'avons vu, par la suivante

$$\overline{\lim}\, \frac{\log\log M(r, f)}{r} = \rho.$$

ε_1 étant une petite quantité positive choisie à l'avance, il en résulte que lorsque $|z|$ est assez grand, on a l'inégalité

$$(20) \qquad \log\log|f(z)| < \rho|z|(1+\varepsilon_1)$$

et pour une suite de valeurs $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ tendant vers l'infini

$$(21) \qquad \log\log|f(z_n)| > \rho|z_n|(1-\varepsilon_n) \qquad (\lim \varepsilon_n = 0).$$

La quantité η étant supérieure à ε_n, et choisie ultérieurement, il

---

(¹) Ce qui a lieu si ξ est supérieur à $5A$.

existe un domaine δ d'un seul tenant contenant le point z_n, et en tout point z duquel on a l'inégalité

$$\log\log|f(z)| > \rho|z|(1-\eta).$$

On limite aussi le domaine δ aux circonférences de centre origine et de rayons r et R, ces deux dernières quantités devant être choisies aussi ultérieurement en fonction des données.

Supposons qu'on puisse enfermer le domaine δ, ainsi défini et limité, à l'intérieur de deux droites parallèles placées de façon telle que la droite équidistante de ces deux droites passe par l'origine (on choisira cette droite équidistante comme axe réel).

Alors *l'écart entre ces deux droites parallèles est supérieur à une quantité voisine de* $\frac{\pi}{\rho}$.

14. Pour cadrer avec les notations du corollaire II, désignons par $\pi A(1-\varepsilon)$ l'écart entre ces deux droites parallèles.

La condition 1° de ce corollaire est réalisée, d'après l'inégalité (20), si l'on prend

$$\text{(E)} \qquad \frac{(1-\varepsilon)|z|}{A} + \log\varepsilon \geqq \rho|z|(1+\varepsilon_1).$$

Rappelons que le minimum de $|z|$ dans le domaine δ a été désigné par r.

Quant à la condition 2°, nous la simplifierons en donnant à ε' sa valeur limite $\frac{1}{10}$. Elle est réalisée pour $\zeta = z_n$, d'après l'inégalité (21), si l'on prend

$$\text{(E}'\text{)} \qquad \frac{10-11\varepsilon}{10A} \leqq \rho(1-\varepsilon_n).$$

Nous devons avoir en outre

$$\text{(E}''\text{)} \qquad \varepsilon^2 \mathcal{R}(z_n) > 10A.$$

Choisissons dès maintenant ε et A en fonction de ε_1

$$\varepsilon = 30\varepsilon_1, \qquad \frac{1}{A} = \rho(1+32\varepsilon_1).$$

Nous supposerons en outre ε_1 inférieur à $\frac{1}{1000}$.

L'inégalité (E) devient

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \rho\,|z| \geqq \frac{1}{\varepsilon_1(1-960\,\varepsilon_1)} \log \frac{1}{30\,\varepsilon_1}.$$

L'inégalité (E′) est vérifiée si ε_1 est supérieur à ε_n, ce que nous supposerons.

Enfin, l'inégalité (E″) est entraînée par la suivante

$$(\mathrm{E}''_1) \qquad \rho\, r\, \varepsilon_1^3 > 1$$

qui entraîne aussi l'inégalité (E_1).

Quant aux conditions 3° du corollaire II, nous prendrons

$$r \leqq x_1, \qquad \mathrm{R} \geqq \sqrt{x_2^2 + \frac{\pi^2 \mathrm{A}^2 (1-\varepsilon)^2}{4}}$$

de sorte que le rectangle défini dans le corollaire II est situé dans la couronne

$$r < |z| < \mathrm{R}.$$

Choix de r. — r est inférieur à

$$x_1 = \xi\left[1 - \frac{11}{10}\varepsilon\right].$$

Or, $\xi = \mathcal{R}(z_n)$ et comme $\mathcal{I}(z_n)$ est inférieure à $\frac{\pi}{2}\mathrm{A}(1-\varepsilon)$, on a

$$\xi^2 > |z_n|^2 - \frac{\pi^2 \mathrm{A}^2}{4}(1-\varepsilon)^2$$

quantité qui est supérieure, d'après les conditions déjà imposées, à $|z_n|(1-2\varepsilon_1^6)$, de sorte que nous pourrons prendre

$$r = |z_n|(1 - 34\,\varepsilon_1).$$

Il résulte de ce choix que l'inégalité (E''_1) est vérifiée si l'on suppose

$$\rho\,|z_n|\,\varepsilon_1^3 > 2.$$

Choix de R. — Une discussion analogue à la précédente montre que l'on peut prendre

$$\mathrm{R} = (1 + 34\,\varepsilon_1)\,|z_n|.$$

La condition supplémentaire imposée au paragraphe 3° du corollaire II est réalisée : c'est une conséquence de l'hypothèse $\rho\,|z_n|\,\varepsilon_1^3 > 2$.

Calculons maintenant, en fonction de $|z|$, une limite inférieure du deuxième membre de l'inégalité fondamentale du corollaire II :

x et y désignant les parties réelle et imaginaire de z, $|y|$ est limité supérieurement par $\frac{\pi}{2}\mathrm{A}(1-\varepsilon)$, et l'on a

$$\log \mathrm{B} > (1-\varepsilon)e^{\frac{(10-11\varepsilon)x}{10\mathrm{A}}} \cos\frac{\pi}{2}\left(1-\varepsilon\frac{10-11\varepsilon}{10}\right)$$

le deuxième membre est égal à

$$(1-30\varepsilon_1)\sin\frac{\pi}{2}(63\varepsilon_1-990\varepsilon_1^2)^{(1-33\varepsilon_1)(1+32\varepsilon_1)\rho x}$$

et comme l'on a

$$x = |z|\sqrt{1-\frac{y^2}{z^2}} > |z|\sqrt{1-\frac{\mathrm{A}^2\pi^2(1-\varepsilon)^2}{4|z|^2}} > |z|(1-\varepsilon_1),$$

il vient

$$\log \mathrm{B} > 100\,\varepsilon_1\, e^{(1-3\varepsilon_1)\rho|z|}$$

$\rho|z|$ étant supérieur à $\frac{2}{\varepsilon_1^3}$, $\frac{1}{100\,\varepsilon_1}$ est inférieur à $e^{\varepsilon_1\rho|z|}$ d'où finalement

$$\log \mathrm{B} > e^{(1-4\varepsilon_1)\rho|z|},$$

d'où le théorème suivant, qui précise la propriété annoncée au n° 13 :

THÉORÈME V. — *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre infini dont l'indice caractéristique $\mathrm{T}(r, f)$ satisfait à la condition*

$$\overline{\lim}\,\frac{\log \mathrm{T}(r, f)}{r} = \rho.$$

ε_1 étant une quantité positive choisie à l'avance (inférieure à 10^{-3}), lorsque $|z|$ est assez grand, la fonction $f(z)$ vérifie l'inégalité

$$\log\log|f(z)| < \rho|z|(1+\varepsilon_1)$$

tandis que l'inégalité

$$\log\log|f(z)| > \rho|z|(1-\varepsilon_1)$$

est vérifiée pour une suite de valeurs de z, z_1, z_2, ..., z_n, ... tendant vers l'infini.

Ceci posé, on choisit l'un de ces points z_n assez éloigné de l'origine *pour que* $\rho\,|z_n|$ *soit supérieur à* $2\varepsilon_1^{-3}$, *et l'on considère le domaine* Δ *d'un seul tenant, contenant* z_n *à son intérieur, situé entre les cercles*

$$|z| = |z_n|(1 \pm 34\varepsilon_1),$$

et en tout point duquel la fonction $f(z)$ *satisfait à l'inégalité*

$$\log\log|f(z)| > (1 - 4\varepsilon_1)\rho\,|z|.$$

Il est impossible que le domaine Δ *puisse être enfermé à l'intérieur de deux droites parallèles placées de façon telle que la droite équidistante (médiane) passe par l'origine, et dont l'écart soit inférieur ou égal à* $(1 - 62\varepsilon_1)\dfrac{\pi}{\rho}$.

15. Une conséquence immédiate et simple du théorème précédent est la suivante :

Théorème VI. — *Soit* $f(z)$ *une fonction entière d'ordre infini dont l'indice caractéristique* $T(r, f)$ *satisfait à la condition*

$$\overline{\lim}\,\frac{\log T(r, f)}{r} = \rho$$

et qui soit d'ordre fini à l'extérieur d'une bande rectangulaire indéfinie. La largeur de la bande est nécessairement supérieure ou égale à $\dfrac{\pi}{\rho}$.

En effet, il suffit de choisir une suite de valeurs de ε_1 tendant vers zéro et d'appliquer le théorème V.

16. Le théorème VI précise une propriété que j'ai établie dans un Mémoire déjà cité (¹); et où j'ai montré que la largeur de la bande est supérieure à $\dfrac{A}{\rho}$, A désignant une constante positive.

L'intérêt de la précision actuelle réside dans le fait que, pour certaines fonctions simples, la limite $\dfrac{\pi}{\rho}$ de la largeur de la bande est atteinte. Il suffit de le montrer pour $\rho = 1$, puisque l'on passe de ce cas au cas général par une simple homothétie par rapport à l'origine.

(¹) H. Milloux, *Remarque sur les fonctions entières.*

Soit (c) le contour constitué par le segment

$$\mathcal{R}(z) = u_0, \qquad -\pi < \mathcal{I}(z) < \pi$$

et par les demi-droites

$$\mathcal{R}(z) \geqq u_0, \qquad \mathcal{I}(z) = \pm\pi,$$

et soit l'intégrale

$$\mathrm{E}(z) = \int_{(c)} \frac{e^{e^\zeta}}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

la fonction $f(z)$, identique à l'intégrale précédente lorsque z est extérieur au domaine limité par le contour (c), et définie comme étant le prolongement analytique de cette intégrale lorsque z est sur (c) ou à l'intérieur de (c), est une fonction entière (fonction de Mittag-Leffler) jouissant des propriétés suivantes :

1° Son indice caractéristique $\mathrm{T}(r, f)$ satisfait à la condition

$$\overline{\lim} \frac{\log \mathrm{T}(r, f)}{r} = 1,$$

comme cela résulte de la valeur approchée e^{e^z} de la fonction à l'intérieur du contour (c);

2° Elle est bornée à l'extérieur du rectangle indéfini limité par (c), rectangle dont la largeur est précisément égale à π.

D'une façon plus générale, $\varphi(z)$ désignant une fonction entière d'ordre fini, la fonction entière définie de la même façon que la fonction de Mittag-Leffler, mais à partir de l'intégrale

$$\int_{(c)} \frac{\varphi(\zeta) e^{e^\zeta}}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

jouit des mêmes propriétés que la fonction de Mittag-Leffler.

Il en est de même, plus généralement encore, lorsque la fonction $\varphi(z)$ est une fonction entière d'ordre infini dont l'indice caractéristique satisfait à l'inégalité

$$\overline{\lim} \frac{\log \mathrm{T}(r, \varphi)}{r} < 1.$$

CHAPITRE II.

ÉTUDE DE FONCTIONS HOLOMORPHES DANS DES CERCLES.

17. Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans le cercle-unité $[|x|=1]$ et aux environs de ce cercle. La fonction $f(x)$ est supposée relativement petite dans le cercle $|x|=\frac{1}{2}$, par rapport à sa valeur en un certain point du cercle-unité. Je me propose, dans ce Chapitre, de montrer l'existence d'un petit cercle de rayon ε, à l'intérieur duquel le nombre des zéros de $f(z)-a$ est grand, sauf pour des valeurs de a qu'on peut considérer comme exceptionnelles. Des précisions seront apportées ultérieurement aux hypothèses et aux conclusions.

18. Je m'appuierai, en premier lieu, sur la deuxième inégalité fondamentale de M. R. Nevanlinna, présentée sous la forme suivante (¹)

$$T(r, f) < 2[N(R, a) + N(R, b) + N(R, c)] + H$$

R est une quantité quelconque supérieure ou égale à $r\left[1+\frac{1}{T(r, f)}\right]$. Quant à H, sa valeur est égale à la plus grande des quantités 264 et

$$248 + 40 \overset{+}{\log} A + 18 \overset{+}{\log}\frac{1}{|c-a|} + 14 \overset{+}{\log}\frac{1}{|c-b||b-a|} + 4 \overset{+}{\log}|f(0)| - 2C(f') + 6\overset{+}{\log}\frac{1}{r}.$$

A est la plus grande des quantités α et $\frac{1}{|f(0)-\alpha|}$ $[\alpha=a, b, c]$ et $C(f')$ est le log du module du premier coefficient différent de zéro du développement en série de la fonction f' aux environs de l'origine.

J'utiliserai ensuite les deux théorèmes suivants :

Théorème A. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans un domaine Δ contenant à son intérieur un domaine D dans lequel elle prend plus de*

(¹) *Voir* H. Milloux, *Remarques sur la théorie des fonctions méromorphes* (*Proc. of the Phys. Math. Soc. of Japan*, janv. 1930).

N *fois toutes les valeurs dont les images sphériques constituent l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{1}{4}$. On partage le domaine* D *en p domaines partiels, et l'on construit des cercles $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$, contenant ces domaines, et les cercles $C_1, C_2, \ldots, C_p$ concentriques aux précédents et de rayons* 20 *fois plus grands. Il existe un cercle C_i à l'intérieur duquel la fonction $f(z)$ prend plus de $n = \frac{N}{70p}$ fois toute valeur, sauf peut-être des valeurs dont les images sphériques sont incluses dans deux petits cercles de rayon e^{-n}* (¹).

Théorème B. — *Soit $g(x)$ une fonction holomorphe dans le cercle $|x| = 30$. On suppose que le maximum de $|g(x)|$ est supérieur à* 1 *dans le cercle-unité, et inférieur à $e^{-\mu}$ dans le cercle $|x| = \frac{1}{2}$, μ dépassant une constante numérique.*

Alors le nombre des zéros de $g(x) - a$ situés dans le cercle $|x| = 30$ est supérieur à $\alpha\mu$, sauf peut-être pour des valeurs de a dont les images sphériques sont incluses dans deux petits cercles de rayon $e^{-\beta\mu}$, l'un d'eux entourant nécessairement l'image du point à l'infini du plan des a.

α et β sont des constantes numériques (²).

19. Nous supposerons que la fonction $f(x)$ vérifie l'inégalité

$$\log|f(x)| \leqq m,$$

dans le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$, et qu'en un point A du cercle-unité, point, si l'on veut, d'affixe 1, on a

$$\log|f(\text{A})| = \text{M}.$$

Nous supposerons que M est assez grand par rapport à m; d'une façon un peu plus précise, ε désignant une petite quantité positive (qui pourra être précisée plus tard), nous supposerons provisoirement que $\frac{\varepsilon \text{M}}{m}$ dépasse une constante numérique.

(¹) *Voir* Mémoire cité précédemment, p. 15 et suiv.

(²) *Loc. cit.*

Nous distinguerons deux cas, suivant que la dérivée $f'(x)$ est petite ou non dans le cercle de centre O et de rayon $\frac{1}{4}$.

PREMIER CAS. — *Dans le cercle* $|x| = \frac{1}{4}$, *la dérivée* $f'(x)$ *est en module, inférieure à* $e^{-\varepsilon M k}$.

k est une constante numérique que nous serons amenés à déterminer dans le second cas. Posons

$$F(x) = f(x) - f(0).$$

Il résulte de l'hypothèse faite que, dans le cercle $|x| = \frac{1}{4}$, cette fonction satisfait à l'inégalité

$$|F(x)| < \frac{1}{4} e^{-k\varepsilon M}.$$

Au point A d'affixe 1, la fonction $F(x)$ est supérieure en module à $e^M - e^m$, quantité supérieure à 1. Donc, il existe un cercle limite $|x| = \rho$ $\left[\rho \text{ compris entre } \frac{1}{4} \text{ et } 1\right]$ tel que $|F(x)|$ est inférieure à 1 dans ce cercle et égale à 1 en un point x_0 au moins de ce cercle. Les deux limitations de $|F(x)|$, à savoir : 1 dans le cercle $|x| = \rho$; $\frac{1}{4} e^{-k\varepsilon M}$ dans le cercle $|x| = \frac{1}{4}$, conduisent alors, en application d'un théorème que j'ai établi dans ma thèse (¹) à la limitation suivante :

Dans le cercle $|x| = t\rho$ [t étant compris entre 0 et 1], on a l'inégalité

$$|F(x)| < e^{-kM\varepsilon(1-t)\theta(t)}.$$

Faisons $1 - t = \frac{\varepsilon}{30}$, et soit x'_0 le point du cercle $|x| = t\rho$ le plus

---

(¹) H. MILLOUX, *Le théorème de M. Picard...* (*J. de Math. pures et appliquées*, 1924, t. 3, fasc. 4, p. 347-348). La propriété est démontrée pour $t = \frac{1}{2}$, mais il suffit de faire une représentation conforme pour passer au cas de t quelconque.

Cette propriété a été démontrée différemment par divers auteurs, notamment MM. Schmidt, Landau, Polya. J'en ai donné récemment une extension dans le volume IV de *Mathematica*, sous le titre : *Sur certaines fonctions holomorphes et bornées dans un cercle.*

proche de x_0. L'application du théorème B, rappelé au n° 18, à la fonction $F(x)$ dans le cercle de centre x'_0 et de rayon εx_0 montre que le nombre des zéros de $F(x) - a$ situés dans ce cercle est supérieur à $\varepsilon^2 M k O(1)$, sauf peut-être pour des valeurs de a dont les images sphériques sont incluses dans deux petits cercles de rayon $e^{-kM\varepsilon^2 O(1)}$.

Revenons maintenant à la fonction

$$f(x) = F(x) + f(0)$$

et rappelons que $\log|f(0)|$ est inférieur à m. L'équivalent de la propriété précédente est la suivante :

Dans le premier cas, et en supposant de plus vérifiée l'inégalité

$$m < kM\varepsilon^2 o(1), \tag{22}$$

il existe une circonférence de rayon ε, dont le centre est intérieur au cercle $|x| = 1$, à l'intérieur de laquelle le nombre des zéros de $f(x) - a$ est supérieur à $kM\varepsilon^2 o(1)$, sauf peut-être pour des valeurs de a dont les images sphériques sont incluses dans deux petits cercles de rayon $e^{-kM\varepsilon^2 O(1)}$.

Nota. — $O(1)$ désigne une constante numérique, qui, bien entendu, n'a pas nécessairement la même valeur partout où elle figure.

L'énoncé précédent suppose que $M\varepsilon^2$ dépasse une constante numérique.

Deuxième cas. — *En un point du cercle $|x| = \frac{1}{4}$, la dérivée $f'(x)$ est supérieure ou égale en module à $e^{-kM\varepsilon}$.*

Remarquons que cette inégalité a lieu non seulement en ce point, mais encore le long d'un arc de courbe continu issu de ce point et aboutissant à la frontière du domaine où la fonction $f'(x)$ est holomorphe. En particulier, il existe un arc de courbe continu L traversant la couronne circulaire

$$\frac{1}{4} \leqq |x| \leqq \frac{1}{2}$$

en chaque point duquel on a l'inégalité

$$\log|f'(x)| \geqq -kM\varepsilon. \tag{23}$$

Rappelons qu'en vertu de l'une des hypothèses, en chacun de ces points, on a aussi

$$\log|f(x)| < m.$$

Ceci posé, nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

LEMME. — *Si l'on fait la représentation, sur la sphère de Riemann, des valeurs prises par la fonction $f(x)$ dans le cercle $|x| = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, on constate qu'il existe sur cette sphère un cercle de rayon $\frac{1}{4}$, tel que toute valeur intérieure à ce cercle est prise par $f(x)$ un nombre de fois au moins égal à n, n étant une fonction de* M *et de* ε *que la démonstration précisera.*

Supposons, en effet, que ce lemme n'est pas vérifié. Étant donnée une quantité b, on pourra alors trouver trois quantités $a_i [i = 1, 2, 3]$ satisfaisant aux inégalités

$$|a_i| < o(1),$$

$$\frac{1}{|a_i - b|} < o(1),$$

$$\frac{1}{|a_i - a_j|} < o(1),$$

et qui ne sont prises par la fonction $f(x)$ dans le cercle $|x| = \frac{1}{2}$ qu'un nombre de fois inférieur à n.

Faisons la représentation conforme du cercle $|x| = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ sur le cercle $|x'| = 1$ de façon qu'au centre O′ de ce nouveau cercle corresponde un point B choisi ultérieurement de l'arc de courbe **L**. La fonction $f(x)$ devient ainsi une certaine fonction $\varphi(x')$.

P'_i désignant un point du cercle $|x'| = 1$, en lequel $\varphi(x')$ est égal à a_i, on a

$$N[1, a_i] = \Sigma \log \frac{1}{O'P'_i}$$

[en supposant les a_i choisis différents de $\varphi(O')$].

Les points P'_i correspondent, dans le cercle $|x| = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$, à des points P_i. Il résulte de la correspondance des deux domaines que l'on a

$$O'P'_i = O(1)BP_i.$$

Et, par suite, le nombre des zéros de $f(x) - a_i$ situés dans le cercle $|x| = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ étant inférieur à n, on a l'inégalité

$$(24) \qquad N[1, a_i] < O(1)n + \Sigma \log \frac{1}{BP_i}.$$

Rappelons un théorème dû à M. H. Cartan (¹) :

Étant donnés m points Q_i, l'inégalité

$$\Sigma \log \frac{1}{CQ_i} < m \log h$$

est vérifiée par tous les points C *extérieurs à des circonférences dont la somme des rayons est* $\frac{2e}{h}$.

Appliquant la propriété aux trois groupes de points P_i correspondant aux trois valeurs de i, on constate que l'on a chaque fois l'inégalité

$$\Sigma \log \frac{1}{CP_i} < n \log h$$

pour tous les points C extérieurs à des circonférences dont la somme des rayons est au plus $\frac{6e}{h}$.

Or, B est un point, encore non déterminé, de l'arc de courbe L, lequel traversant la courone circulaire,

$$\frac{1}{4} \leqq |x| \leqq \frac{1}{2}$$

ne peut évidemment être enfermé dans des circonférences dont la somme des rayons surpasse $\frac{1}{8}$. Donc, on peut supposer que le point B

(¹) H. Cartan, *Sur les systèmes de fonctions holomorphes...* (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. XLV, p. 273).

jouit des propriétés des points C, à condition toutefois de prendre $16e$ comme valeur de h [1].

Il résulte alors de l'inégalité (24) que l'on a

$$N[1, a_i] < O(1)n.$$

Rappelons que $\log|f'(B)|$ est supérieur à $-Mk\varepsilon O(1)$; il en est de même, en raison de la correspondance conforme, de $\log|\varphi'(O')|$.

En outre, on a

$$\log|\varphi(O')| = \log|f(B)| < m < kM\varepsilon^2 O(1)$$

d'après une condition déjà imposée dans l'étude du premier cas.

Appliquons la deuxième inégalité fondamentale de M. R. Nevanlinna, sous la forme précise rappelée au n° 17; il vient l'inégalité

$$T(r, \varphi) < O(1)n + kM\varepsilon O(1) + kM\varepsilon^2 O(1) + O(1) \tag{25}$$

r étant arbitraire, pourvu que l'on ait l'inégalité

$$r\left[1 + \frac{1}{T(r, \varphi)}\right] \leq 1. \tag{26}$$

$\operatorname{Log}|f(A)|$ étant égal à M, il en est de même de $\log|\varphi(x')|$ au point A′ correspondant au point A; d'après la correspondance conforme entre les domaines des points x et x', on a

$$O'A' = 1 - \varepsilon O(1).$$

D'après la deuxième inégalité (1) rappelée au n° 2 du présent Mémoire, on a donc, en désignant par r' la moyenne arithmétique entre 1 et O′A′,

$$T(r', \varphi) > O(1)M\varepsilon.$$

Si $M\varepsilon^2$ dépasse une constante numérique, on peut prendre $r = r'$; l'inégalité (26) est, en effet, vérifiée dans ces conditions.

Portant dans l'inégalité (25), il vient

$$O(1)M\varepsilon < O(1)n + kM\varepsilon O(1) + kM\varepsilon^2 O(1) + O(1).$$

---

(1) On a aussi supposé, dans le cours de la démonstration de ce lemme, que les a_i étaient choisis différents de $\varphi(O')$, c'est-à-dire de $f(B)$. Or, il reste une certaine élasticité dans le choix de B; et, quitte à la déplacer très peu, on peut supposer qu'il en est ainsi.

La constante k n'a pas encore été choisie. *Si on lui donne une valeur numérique suffisamment faible* [pour fixer les idées, la moitié du rapport des constantes numériques $O(1)$ qui figurent au premier et troisième rangs dans l'inégalité précédente], *il vient*

$$n > O(1)M\varepsilon.$$

Telle est la limitation inférieure de n, dont le sens est précisé dans l'énoncé du lemme. *Ce lemme est donc démontré avec* $n = O(1)M\varepsilon$.

Appliquons maintenant le théorème A, rappelé au n° 17, au partage du cercle $|x| = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ en cercles de rayon $\frac{\varepsilon}{40}$ couvrant tout le cercle; nous obtenons un énoncé, qui, combiné à l'énoncé obtenu dans l'étude du premier cas, fournit le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans le cercle $|x| = 1 + \varepsilon'$ et satisfaisant aux inégalités suivantes :*

$$\log|f(x)| \leqq m \qquad \text{pour } |x| < \frac{1}{2},$$

$\log|f(x)| \geqq M$ *en un point au moins du cercle* $|x| = 1$. *On suppose que* $\frac{M\varepsilon'^2}{m}$ *et* $M\varepsilon'^3$ *dépassent des constantes numériques.*

Alors il existe dans le cercle $|x| = 1 + \varepsilon'$ un cercle de rayon ε', à l'intérieur duquel le nombre des zéros de $f(x) - a$ est supérieur à $M\varepsilon'^3 O(1)$, sauf peut-être pour des valeurs de a dont les images sphériques sont incluses dans deux petits cercles de rayon $e^{-M\varepsilon'^3 O(1)}$, l'un de ces petits cercles entourant l'image du point à l'infini du plan des a.

Remarque. — Ce théorème n'a pas acquis sa forme définitive : il semble que l'on peut espérer assigner $M\varepsilon' O(1)$ comme limite inférieure au nombre de zéros de $f(x) - a$ (sauf, bien entendu, pour les valeurs exceptionnelles de a).

COROLLAIRE DU THÉORÈME VII. — *Soit $f(x)$ une fonction holomorphe dans le cercle $|x| = 1 + \varepsilon'$ et satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° *En un point au moins du cercle $|x| = 1$, $\log|f(x)|$ est supérieur ou égal à M (on suppose que $M\varepsilon'^3$ dépasse une constante numérique)*;

2° *Dans le cercle $|x| = 1 + \varepsilon'$, il n'existe aucun cercle de rayon ε', à* *l'intérieur duquel le nombre des zéros de $f(x)-a$ est supérieur à* $\mathrm{M}\varepsilon'^3\mathrm{O}(1)$, *sauf peut-être pour des valeurs de a, dont les images sphériques sont incluses dans deux petits cercles de rayon* $e^{-\mathrm{M}\varepsilon'^3\mathrm{O}(1)}$.

Alors, on peut affirmer qu'en un certain point intérieur au cercle $|x|=\frac{1}{2}$, *la fonction $f(x)$ vérifie l'inégalité*

$$\log|f(x)|>\mathrm{M}\varepsilon'^2\mathrm{O}(1).$$

Après une représentation conforme convenable, on peut remplacer la conclusion précédente par la suivante :

Alors, on peut affirmer qu'à l'intérieur de tout cercle de rayon $\frac{1}{4}$ *intérieur au cercle* $|x|=1$, *il existe un point en lequel la fonction $f(x)$ vérifie l'inégalité*

$$\log|f(x)|>\mathrm{M}\varepsilon'^2\mathrm{O}(1).$$

C'est avec cette dernière conclusion que nous appliquerons le corollaire du théorème VII.

CHAPITRE III.

APPLICATION A LA DISTRIBUTION DES VALEURS D'UNE FONCTION ENTIÈRE D'ORDRE INFINI.

20. Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre infini, et soit r' une des valeurs de $|z|$ dont il est question dans l'énoncé du théorème III (*voir* cet énoncé); pour simplifier, on fera, dans ce théorème,

$$\eta=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \varepsilon=1.$$

Il résulte de ce théorème qu'il existe deux points P_1 et P_2 tels que l'angle P_1OP_2 est au moins égal à

$$\frac{3}{\log^2 \mathrm{T}(r', f)}$$

et, en chacun de ces points, la fonction $f(z)$ vérifie l'inégalité

$$\log|f(z)| \geqq \frac{1}{2} T(r', f).$$

Ceci posé, construisons deux circonférences C_1 et C_2 dont les rayons, pour fixer les idées, sont égaux à $\frac{r'}{10}$, qui sont orthogonales à la circonférence $|z| = r'$ et passent l'une par P_1, l'autre par P_2 de façon qu'elles ne comprennent pas à leur intérieur le plus petit arc P_1P_2. Construisons encore les circonférences Γ_1 et Γ_2 déduites des précédentes par homothétie par rapport à leurs centres respectifs, le rapport d'homothétie étant $1 + \varepsilon'$, avec

$$\varepsilon' = \frac{1}{\log^2 T(r, f)}.$$

Il résulte de ces constructions, et du minimum de l'arc P_1P_2 que la différence des arguments de deux points pris l'un dans Γ_1, l'autre dans Γ_2, est encore supérieure à

$$\frac{1}{\log^2 T(r', f)}.$$

Ceci posé, deux cas qui s'excluent et se complètent, peuvent être prévus *a priori*, suivant que l'on se trouve dans les circonstances décrites dans l'énoncé du théorème VII ou de son corollaire.

Premier cas. — *On peut appliquer le théorème VII à l'étude de la fonction $f(z)$ dans chacune des circonférences Γ_1 et Γ_2*, en prenant $\frac{1}{2}T(r', f)$ comme valeur de M; c'est, en effet, une valeur dépassée par $\log|f(z)|$ aux points P_1 et P_2.

Alors il existe, dans chacun des cercles Γ_1 et Γ_2, un cercle de rayon $\frac{r'}{10 \log^2 T(r', f)}$, à l'intérieur duquel le nombre des zéros de $f(z) - a$ surpasse $\frac{O(1) T(r', f)}{\log^6 T(r', f)}$, sauf peut-être pour des valeurs de a, dont les images sphériques sont incluses dans deux petits cercles de rayon $e^{-\frac{O(1) T(r', f)}{\log^8 T(r', f)}}$.

Ce premier cas se présente nécessairement lorsque $f(z)$ est une fonction entière d'ordre infini, qui est d'ordre fini à l'extérieur d'un angle A dont l'ouverture est arbitrairement petite. Il se présente aussi dans le cas où l'ouverture de l'angle A est finie et inférieure à 2π : dans ce cas, on opère de proche en proche à partir de P_1 et de P_2 en décrivant des circonférences de rayon $\frac{r'}{10}$, qui se déduisent des circonférences C_1 et C_2 par des rotations autour de l'origine. On peut, plus généralement encore, affirmer que le premier cas se présente lorsque la fonction $f(z)$ satisfait, à l'extérieur de l'angle (fini) A, à l'inégalité

$$\log|f(re^{i\varphi})| < O(1)\frac{T(2r, f)}{\log^4 T(2r, f)}$$

r étant quelconque.

Le théorème VII ne cesse pas d'être applicable dans toutes ces extensions.

Deuxième cas. — *Le théorème* VII *n'est pas applicable dans l'une au moins des circonférences* Γ_1 *et* Γ_2; dans cette circonférence, soit Γ_1, son corollaire est donc applicable.

Il en résulte qu'en deux points au moins Q_1 et Q_2 d'affixes $r_1e^{i\varphi_1}$ et $r_2e^{i\varphi_2}$, r_1 et r_2 d'une part, φ_1 et φ_2 d'autre part, satisfaisant aux inégalités

$$O(1) < \frac{r_2}{r_1} < O(1), \qquad |\varphi_2 - \varphi_1| > O(1),$$

on a

$$\log|f(Q_i)| > \frac{O(1)T(r', f)}{\log^4 T(r', f)} \qquad (i = 1, 2).$$

Supposons que ce deuxième cas se présente pour une suite de valeurs de r' tendant vers l'infini. Nous nous contenterons de montrer l'existence de deux suites de circonférences C_n et C'_n s'éloignant indéfiniment, vues de l'origine sous des angles qui tendent vers O, dont les centres ont leurs arguments qui tendent vers deux limites différentes φ et φ' et telles que le nombre des zéros de $f(z) - a$ situés dans C_n ou C'_n est supérieur à $r_n^{A_n}$ ou $r_n'^{A_n}$ [r_n et r'_n désignent les modules des centres de C_n et C'_n, et A_n est une quantité qui augmente indéfiniment avec n], sauf peut-être pour des valeurs de a dont les images sphériques sont incluses dans deux petits cercles de rayons $e^{-r_n^{A_n}}$ ou $e^{-r_n'^{A_n}}$.

Dans l'ensemble des C_n, ou des C'_n, les zéros de $f(z)-a$ ont un exposant de convergence infini, sauf peut-être pour une valeur finie de a.

En effet, prenons pour valeur une des valeurs limites de φ_1, et pour φ' une des valeurs limites de φ_2, différente de φ, ce qui est possible, d'après ce que nous avons vu au sujet de la différence $|\varphi_1 - \varphi_2|$. Traçons deux angles, ω et ω', d'ouverture ε, admettant comme bissectrices les rayons d'arguments φ et φ'; ε est choisi assez petit pour que ces deux angles soient extérieurs l'un à l'autre.

Étudions les propriétés de la fonction $f(z)$ dans l'angle ω par exemple, la fonction y est d'ordre infini, et par conséquent, appliquant une propriété connue, l'exposant de convergence des zéros de $f(z)-a$ situés dans cet angle est infini, sauf pour une valeur de a au plus. L'existence de la suite de cercles C_n s'établit très aisément à l'aide des considérations suivantes : la fonction $f(z)$ étant d'ordre infini dans l'angle ω, le maximum de $\log|f(r^{i\varphi})|$ dans cet angle croît plus rapidement que r^A, si grande que soit la constante positive A. [Notons que pour certaines valeurs de r, la plus grande des quantités précédentes peut être r^A]. Il en résulte que l'on peut trouver deux suites de quantités de r_n et A_n, tendant vers l'infini, de façon telle que les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\log|f(r_n e^{i\Phi})| < r_n^{A_n},$$
$$\max.\log|f[r_n(1+\varepsilon)e^{i\Phi}]| > [r_n(1+\varepsilon)]^{A_n}$$

(les points d'arguments Φ étant intérieurs à l'angle ω).

Construisons la circonférence γ_n tangente aux côtés de l'angle ω et dont le centre est situé à la distance r_n de l'origine.

Dans la partie de γ_n située à une distance de l'origine inférieure à r_n, on a

$$\log|f(z)| < r_n^{A_n} = m,$$

tandis qu'en un point x de la circonférence concentrique à γ_n et de rayon double, on a

$$\log|f(x)| > [r_n(1+\varepsilon)]^{A_n} = M.$$

Nous pouvons appliquer le théorème VII; nous obtenons ainsi la propriété suivante :

Dans le cercle concentrique à γ_n et de rayon $3\varepsilon r_n$, il existe, dès que $[1+\varepsilon]^{A_n}\varepsilon'^2$ dépasse une constante numérique, un cercle γ'_n de rayon $\varepsilon' r_n$ à l'intérieur duquel le nombre des zéros de $f(z)-a$ surpasse $O(1)\,\varepsilon'^3 r_n^{A_n}$, sauf pour les valeurs exceptionnelles possibles, habituelles de a.

Ces cercles γ'_n sont vus de l'origine sous des angles qui tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, si l'on fait dépendre ε' de n d'une façon convenable $\left[\text{on peut par exemple prendre } \varepsilon'=(1+\varepsilon)^{-\frac{A_n}{3}}\right]$.

D'autre part, il résulte du nombre des zéros de $f(z)-a$ situés dans chaque γ'_n que dans l'ensemble des γ'_n, l'exposant de convergence des zéros de $f(z)-a$ est infini, sauf pour une valeur finie au plus de a.

Pour terminer l'étude du deuxième cas, énonçons la propriété suivante :

Ou bien toute demi-droite issue de l'origine est bissectrice d'un angle d'ouverture arbitrairement petite dans lequel les zéros de $f(z)-a$ ont, sauf pour une valeur finie au plus de a, un exposant de convergence infini [avec existence de cercles de remplissage comme il vient d'être montré].

Ou bien le premier cas se présente pour une suite de valeurs de r' tendant vers l'infini [on peut prendre r' dans tout intervalle r, $2r$].

Cette propriété résulte aisément des remarques faites à la fin de l'étude de ce premier cas.

21. Résumons les propriétés obtenues dans le théorème fondamental suivant :

Théorème VIII. — *Toute fonction entière d'ordre infini possède au moins deux suites de cercles de remplissage* C_n *et* C'_n, *vus de l'origine sous des angles qui tendent vers zéro avec* $\frac{1}{n}$, *les cercles* C_n et C'_n *étant tracés tous deux dans la couronne circulaire :*

$$r_n<|z|<2r_n \qquad (\lim r_n=\infty).$$

Dans C_n *et dans* C'_n, *le nombre des zéros de* $f(z)-a$ *est au moins égal* *à* $r_n^{A_n}$ [A_n *croissant indéfiniment avec* n] *sauf peut-être pour des valeurs de* a *dont les images sphériques sont incluses dans deux petits cercles de rayon* $e^{-r_n^{A_n}}$ [*l'un de ces petits cercles entoure l'image du point à l'infini du plan des* a.

Donc, dans chacune des suites C_n et C'_n, *l'exposant de convergence des zéros de* $f(z) - a$ *est infini sauf pour une valeur finie au plus de* a.

Les cercles C_n *et* C'_n *sont extérieurs l'un à l'autre. Dans les circonstances les plus défavorables, la différence des arguments de leurs points est au moins égale à* $\frac{1}{\log^2 T[r'_n, f]}$, r'_n *désignant une certaine valeur comprise entre* r_n *et* $2r_n$.

En ce qui concerne l'existence de deux suites de cercles de remplissage, la soudure est ainsi faite entre le cas des fonctions entières d'ordre infini, et celui des fonctions entières d'ordre fini ρ supérieur à $\frac{1}{2}$. Mais il faut remarquer que dans ce dernier cas, dans les circonstances les plus défavorables, la différence des arguments des points de deux cercles de remplissage correspondants C_n et C'_n est au moins égale à une quantité qui tend, lorsque n augmente indéfiniment, vers la plus petite des quantités $\frac{\pi}{\rho}$, $2\pi - \frac{\pi}{\rho}$ $\left[\text{lorsque } \rho \text{ est supérieur à } 1 \text{ c'est } \frac{\pi}{\rho}\right]$: il semble que, dans le cas des fonctions entières d'ordre infini, la limite inférieure de la différence des arguments de C_n et C'_n puisse être, plus exactement que la limite trouvée, une quantité de la forme

$$\frac{\pi \log r'_n}{\log T[r'_n, f]}$$

pour cadrer avec le cas des fonctions entières d'ordre fini.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DE FONCTIONS PARTICULIÈRES.

22. Nous nous proposons de revenir, dans ce Chapitre, sur l'étude des fonctions entières $f(z)$ d'ordre infini satisfaisant à la condition

$$\overline{\lim} \frac{\log T(r, f)}{r} = \rho$$

et de combiner les résultats obtenus au paragraphe 2 du Chapitre I, aux résultats du Chapitre II, de façon à obtenir des propriétés précises [positions, nombre des zéros de $f(z)-a$, valeur des rayons] des cercles de remplissage de ces fonctions.

Nous nous bornerons au cas des *fonctions entières du type considéré, qui sont d'ordre fini à l'extérieur d'un angle d'ouverture arbitrairement petite*, quoique les raisonnements que nous ferons s'étendent sans modification notable aux fonctions qui sont d'ordre fini à l'extérieur d'un angle d'ouverture finie inférieure à 2π. Mais notre but étant surtout de fixer d'une manière très précise un minimum de l'écart des cercles de remplissage correspondants des deux suites que nous savons exister d'après les résultats généraux du Chapitre IV, ces fonctions plus générales perdent, à ce point de vue, leur intérêt car elles possèdent des suites de cercles de remplissage possédant plusieurs, et même en général une infinité, d'arguments limites.

23. Revenons aux résultats signalés dans l'énoncé du théorème V, et, reprenant les notations qui y sont utilisées, considérons le domaine Δ, situé à l'intérieur de la couronne circulaire limitée par les cercles

$$|z| = |z_n|(1 \pm 34\varepsilon_1)$$

et en tout point duquel la fonction $f(z)$ satisfait à l'inégalité

$$\log\log|f(z)| > (1-4\varepsilon_1)\rho|z|.$$

Soit δ une demi-droite issue de l'origine, et coupant le domaine Δ. Construisons deux droites δ_1 et δ_2, parallèles à δ, situées de part et d'autre de δ, à la même distance, et coupant encore, l'une et l'autre, Δ. L'énoncé du théorème V nous indique qu'il existe au moins une direction δ et deux parallèles associées δ_1 et δ_2 telles que la distance de ces deux parallèles est au moins égale à $(1-62\varepsilon_1)\frac{\pi}{\rho}$. Pour simplifier les expressions, nous prendrons comme partie positive de l'axe réel la demi-droite δ; nous désignerons par P_1 et P_2 deux points quelconques de Δ situés respectivement sur δ_1 et δ_2.

Construisons un cercle Γ_1, tangent à δ_1 en P_1, situé dans le demi-plan, découpé par δ_1 qui ne contient pas δ_3, et choisissons la valeur

$|z_n|$ comme rayon de ce cercle. La fonction $f(z)$ étant d'ordre fini à l'extérieur d'un angle d'ouverture arbitrairement petite, on a, dans la moitié au moins de ce cercle Γ_1, une inégalité de la forme

$$\log \log |f(z)| < A \log |z|,$$

A est une constante ne dépendant que de la fonction $f(z)$.

Nous pouvons appliquer le théorème VII à la fonction $f(z)$ considérée dans le cercle Γ'_1, concentrique au cercle Γ_1, et dont le rapport d'homothétie avec ce cercle est $(1+\varepsilon')$. Désignons par z_1 l'affixe de P_1. La valeur de la quantité M figurant dans l'énoncé du théorème VII est ici

$$e^{(1-4\varepsilon_1)\rho|z_1|}$$

et la valeur de la quantité m

$$[|z_1|O(1)]^A.$$

Les conditions imposées dans l'énoncé de ce théorème se traduisent ici de la façon suivante :

$$\frac{e^{(1-4\varepsilon_1)\rho|z_1|\varepsilon'^2}}{[|z_1|O(1)]^A} \quad \text{et} \quad e^{(1-4\varepsilon_1)\rho|z_1|\varepsilon'^3}$$

doivent dépasser des constantes numériques. Ces conditions sont réalisées, lorsque $|z_1|$ est assez grand, si l'on choisit

$$\varepsilon' = e^{-\frac{1}{4}(1-4\varepsilon_1)\rho|z_1|}.$$

Alors, il existe, dans le cercle Γ_1, un cercle γ_1 de rayon $O(1)|z_1|\varepsilon'$, à l'intérieur duquel le nombre des zéros de $f(z) - a$ est supérieur à

$$p = e^{\frac{1}{4}(1-4\varepsilon_1)\rho|z_1|}O(1),$$

sauf peut-être pour des valeurs de a dont les images sphériques sont incluses dans deux petits cercles de rayon e^{-p}.

Ce qui vient d'être dit pour le cercle Γ_1 peut être répété pour le cercle Γ_2 construit d'une façon analogue à partir du point P_2.

Remarquons que les deux petits cercles γ_1 et γ_2 satisfont aux conditions suivantes :

a. Ils sont contenus dans une même couronne circulaire

$$|z| = |z_n| O(1).$$

b. Si l'on mène les parallèles à l'axe réel δ'_1 et δ'_2 tangentes à γ_1 et γ_2, de façon que ces circonférences soient à l'extérieur de ces parallèles, l'écart entre δ'_1 et δ'_2 est au moins égal à

$$(1 - 62\varepsilon_1)\frac{\pi}{\rho} - 2\varepsilon'.$$

24. Résumons et simplifions les résultats du n° 24 dans le théorème suivant :

Théorème IX. — *Les notations du théorème V étant conservées, il existe, à l'intérieur de la couronne circulaire*

$$|z_n| O(1) < |z| < |z_n| O(1),$$

deux petits cercles au moins, γ_1 et γ_2, à l'intérieur de chacun desquels le nombre des zéros de $f(z) - a$ est supérieur à

$$e^{\rho |z_1| O(1)},$$

sauf peut-être pour des valeurs de a dont les images sphériques sont incluses dans deux petits cercles de rayon

$$e^{-e^{\rho |z_1| O(1)}}.$$

Les rayons de γ_1 et γ_2 sont égaux à

$$e^{-\rho |z_1| O(1)}.$$

Les cercles γ_1 et γ_2 sont situés de part et d'autre, et à l'extérieur, d'une certaine bande rectangulaire indéfinie, de largeur

$$\frac{\pi}{\rho}(1 - 62\varepsilon_1) - 2e^{-\rho |z_1| O(1)},$$

dont l'axe médian passe par l'origine.

25. Le théorème précédent précise les positions relatives des deux suites de cercles de remplissage possédées par la fonction $f(z)$. Le corollaire suivant en est la conséquence immédiate.

COROLLAIRE DU THÉORÈME IX. — *Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre infini, dont l'indice caractéristique satisfait à la condition*

$$\overline{\lim} \frac{\log T(r, f)}{r} = \rho$$

et qui soit d'ordre fini à l'extérieur d'une bande rectangulaire indéfinie; on sait (théorème VI) que la largeur de la bande est au moins égale à $\frac{\pi}{\rho}$. Il existe au moins 2 demi-droites δ_1 et δ_2 parallèles aux frontières de la bande, écartées l'une de l'autre d'une quantité au moins égale à $\frac{\pi}{\rho}$, et telles qu'à l'intérieur de chacune des bandes rectangulaires d'écart arbitrairement petit ayant pour bissectrice (ou axe médian) δ_1 et δ_2, les zéros de $f(z) - a$ ont un exposant de convergence infini, sauf pour une valeur finie au plus de a

Bien entendu le théorème IX permet d'énoncer des résultats plus précis, mais moins concis et moins clairs.

Certaines fonctions, comme la fonction de Mittag-Leffler, citée au n° 16, ne possèdent que deux demi-droites telles que δ_1 et δ_2; la fonction de Mittag-Leffler converge uniformément vers l'infini lorsque $|z|$ augmente indéfiniment à l'intérieur de toute bande rectangulaire indéfinie B intérieure à la bande limitée par les droites

$$\mathcal{R}(z) > 0, \qquad \mathcal{I}(z) = \pm \frac{\pi}{\rho}$$

et tend vers zéro lorsque $|z|$ augmente indéfiniment à l'extérieur de toute bande

$$\mathcal{R}(z) > 0, \qquad \mathcal{I}(z) > \frac{\pi}{\rho}(1 + \varepsilon) \qquad (\varepsilon > 0).$$

Cet exemple montre que les résultats énoncés dans le corollaire précédent ne peuvent être, à un certain point de vue, améliorés.

26. Nous terminerons en énonçant sans démonstration les propriétés suivantes, compléments du corollaire précédent.

S'il n'existe qu'un système de droites δ_1 et δ_2, leur écart est exactement $\frac{\pi}{\rho}$. La fonction $f(z)$ est à croissance régulière, en ce sens que l'on a

$$\lim \frac{\log T(r, f)}{r} = \rho.$$

Si l'on forme une fonction entière (qui est nécessairement d'ordre fini) $\varphi(z)$, possédant comme zéros les zéros de $f(z)$ intérieurs à une bande rectangulaire indéfinie B *intérieure à la bande $\delta_1 \delta_2$, le rapport $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ converge uniformément vers l'infini dans* B. *La fonction $f(z)$ converge elle-même uniformément vers l'infini dans* B, *exception faite de régions pouvant être enfermées dans des cercles très petits, dont les dimensions tendent rapidement vers zéro lorsque ces cercles s'éloignent indéfiniment, les cercles n'ayant aucun point commun entre eux.*

L'énoncé précédent s'inspire d'une part des propriétés de la fonction de Mittag-Leffler, et, d'autre part, d'un énoncé analogue (1) que j'ai établi pour les fonctions entières d'ordre fini, et dans lequel principalement les mots *bande rectangulaire* doivent être remplacés par le mot *angle*. La démonstration peut être menée parallèlement à celle qui a été donnée pour les fonctions entières d'ordre fini.

(1) *Voir* H. Milloux, *Les cercles de remplissage*... (*Acta Math.*, t. 52, Ch. V).