GEORGES GIRAUD

Sur certains problèmes non linéaires de Neumann et sur certains problèmes non linéaires mixtes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 49 (1932), p. 1-104
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1932_3_49__1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

SUR CERTAINS PROBLÈMES NON LINÉAIRES DE NEUMANN ET SUR CERTAINS PROBLÈMES NON LINÉAIRES MIXTES

PAR M. GEORGES GIRAUD

Sommaire :

I. Fonctions représentées par des intégrales. II. Formules de Green. III. Cas particulier du problème linéaire de Neumann. IV. Dérivées d'ordre quelconque à l'intérieur du champ. V. Solutions élémentaires principales. VI. Extension des formules de Green. VII. Le potentiel de simple couche et ses dérivées. VIII. Le potentiel de double couche et ses dérivées. IX. Construction d'une fonction assujettie seulement à certaines conditions à la frontière. X. Problème linéaire de Dirichlet. XI. Problème linéaire de Neumann. XII. Problème linéaire mixte. XIII. Les dérivées secondes du potentiel de simple couche. XIV. Problème non linéaire de Neumann. XV. Autre problème non linéaire de Neumann. XVI. Les dérivées secondes du potentiel de domaine. XVII. Les dérivées secondes du potentiel de double couche. XVIII. Problème non linéaire mixte.

INTRODUCTION.

Dans ce Mémoire, dont le titre indique le but, il est revenu sur bon nombre de questions qui avaient déjà été traitées dans d'autres travaux (¹); mais ces questions sont traitées ici dans des conditions

(¹) Voici les travaux auxquels il sera renvoyé, et les abréviations qui les désigneront :

a. Sur le problème de Dirichlet généralisé, équations non linéaires à plus générales qu'antérieurement. La raison en est que, pour ces problèmes non linéaires, on se sert de la méthode des approximations successives due à M. Émile Picard, et que chacune de ces approximations s'obtient par la résolution d'un problème linéaire de même nature que le problème visé; dès lors le plus ou moins grand degré de perfection avec lequel est établie la théorie de ces problèmes linéaires, retentit sur l'étendue et la commodité des résultats concernant le problème non linéaire. C'est pourquoi il a paru désirable de pousser ici l'étude de ces problèmes linéaires aussi loin que le permettaient les méthodes employées ([1]).

C'est en vue de questions de même nature que celles qui font l'objet du présent travail que M. Picard, on le sait, a imaginé la méthode des approximations successives ([2]). Cette méthode est ici employée de deux façons différentes (*voir* Chapitres XIV et XV), l'une analogue à la méthode de Newton pour résoudre les équations dont l'inconnue est un nombre, l'autre analogue à la méthode de fausse position. Cette dernière méthode n'est possible que grâce aux perfectionnements ici apportés dans l'étude des problèmes linéaires.

Comme il ne pouvait être question de redonner complètement les démonstrations antérieures, on a du moins essayé, dans le présent Mémoire, d'y renvoyer d'une façon aussi précise que possible. Un certain nombre de démonstrations ont été tellement remaniées qu'il

---

m variables (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. 43, 1926, p. 1-128).

b. Sur le problème de Dirichlet généralisé (*deuxième mémoire*) (même recueil, t. 46, 1929, p. 131-245).

c. Sur les équations aux dérivées partielles du type elliptique (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 53, 1929, p. 367-395).

d. Sur différentes questions relatives aux équations du type elliptique (*Ann. scient. de l'Éc. Norm. sup.*, t. 47, 1930, p. 197-266).

Voir aussi *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 190, 1930, p. 613; t. 191, 1930, p. 244, 478 et 1110; t. 192, 1931, p. 471.

([1]) Certains résultats peuvent être perfectionnés par d'autres considérations (*Comptes rendus*, t. 190, 1930, p. 613).

([2]) Émile Picard, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives* (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VI, 1890).

a fallu donner complètement leur nouvelle forme. Un certain nombre de rectifications et de compléments aux démonstrations antérieures ont aussi été introduits, et les notations antérieures ont subi, dans un but d'abréviation, quelques modifications signalées au passage; c'est ainsi que la fonction nommée ici solution élémentaire principale et désignée ordinairement par $G(X, \Xi)$ diffère de celle qui était antérieurement utilisée, par un facteur dépendant de Ξ.

Une notion fort utile dans toute cette étude est celle de fonction lipschitzienne, au sens généralisé, c'est-à-dire avec un exposant h quelconque $(0 < h \leqq 1)$ (¹). Il résulte de l'ingénieux exemple publié par M. Ruziewicz (²) que le cas où h est inférieur à 1 diffère profondément de celui où $h = 1$, car, pour $h < 1$, il peut n'exister de dérivées pour aucun système de valeurs des variables. On verra ici que cette profonde différence n'entraîne pas toujours une complication plus grande dans le cas où $h < 1$, car beaucoup des démonstrations qui vont suivre supposent essentiellement $h < 1$.

CHAPITRE I.

FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR DES INTÉGRALES.

1. Rappelons d'abord le théorème suivant (*b*, I, th. 1, p. 137) :

THÉORÈME. — *Dans l'espace* $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *soient* $\mathcal{D}_1$ *un domaine borné ouvert de la multiplicité* $x_m = 0$ *et* $\mathcal{S}_1$ *sa frontière. Soient d'autre*

(¹) $L(X, Y)$, désignant la distance $\sqrt{\Sigma_\alpha (x_\alpha - y_\alpha)^2}$ de deux points

$$X(x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad \text{et} \quad Y(y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

on dit que $\varphi(X)$ satisfait à une condition de Lipschitz généralisée ou est lipschitzien d'exposant h et de coefficient M, si, quels que soient X et Y, on a

$$|\varphi(X) - \varphi(Y)| \leqq M L^h(X, Y).$$

Les mémoires antérieurs nommaient cette propriété *continuité* (L).

(²) STANISLAW RUZIEWICZ, *Sur les fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz généralisée* (*Annales de la Société polonaise de Mathématiques*, t. VII, 1928, p. 68 à 74).

part $\mathcal{D}$ et $\mathcal{S}$ les ensembles des points dont les $m-1$ premières coordonnées sont respectivement celles de points de $\mathcal{D}_1$ et de $\mathcal{S}_1$ et dont la dernière coordonnée x_m est comprise entre zéro (compris) et un nombre positif donné. Soient $\sigma(\mathrm{A})$ une fonction bornée et intégrable (¹) *d'un point de $\mathcal{D}_1 + \mathcal{S}_1$ et $\mathrm{G(X, A)}$ une fonction continue quand X appartient à un domaine convexe contenant $\mathcal{D} + \mathcal{S}$* (²) *et A à $\mathcal{D}_1 + \mathcal{S}_1$ et que ces deux points ne coïncident pas, les dérivées $\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_\alpha}$ étant continues dans les mêmes conditions et ces fonctions étant telles que* (³)

$$|\,\mathrm{G(X, A)}\,| < \mathrm{NL}^{\lambda-m+1}(\mathrm{X, A}), \qquad \left|\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_\alpha}\right| < \mathrm{NL}^{\lambda-m}(\mathrm{X, A})$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, m;\ 0 < \lambda \leqq 1),$$

où N *est une constante. Alors la fonction* (⁴)

$$\mathrm{F(X)} = \int_{\mathcal{D}_1}^{(m-1)} \mathrm{G(X, A)}\,\sigma(\mathrm{A})\,d\mathrm{V_A} \qquad [d\mathrm{V_A} = d(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})]$$

est lipschitzienne d'exposant λ si $\lambda < 1$, d'exposant quelconque inférieur à 1 si $\lambda = 1$.

Cette conclusion est valable dans le domaine convexe dont il a été parlé. D'une façon plus précise, on a

$$\mathrm{F(X)} - \mathrm{F(Y)} = \begin{cases} \mathrm{O}\left[\dfrac{\mathrm{MN}}{\lambda(1-\lambda)}\mathrm{L}^\lambda(\mathrm{X, Y})\right] & (\lambda < 1), \\ \mathrm{O}\left[\mathrm{MNL(X, Y)}\log\dfrac{\mathrm{L}_0}{\mathrm{L(X, Y)}}\right] & (\lambda = 1); \end{cases}$$

M désigne la borne supérieure de $|\sigma|$; L_0 est une longueur supérieure au maximum de $\mathrm{L(X, Y)}$ dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$; la constante impliquée dans le symbole O ne dépend que de m si $\lambda < 1$, de m et du minimum de $\frac{\mathrm{L}_0}{\mathrm{L}}$ si $\lambda = 1$. On trouvera la démonstration dans le Mémoire cité.

(¹) Ou *mesurable;* le passage cité disait : *une fonction continue.*

(²) Le passage cité disait : *quand* X *appartient à $\mathcal{D} + \mathcal{S}$*; mais l'hypothèse sur le domaine convexe est toujours vérifiée dans les applications de ce théorème.

(³) On pose $\mathrm{L(X, A)} = \sqrt{\Sigma_\alpha (x_\alpha - a_\alpha)^2}$, les x_α et les a_α étant respectivement les coordonnées de X et de A.

(⁴) La notation ici employée pour les intégrales ne peut causer aucune difficulté. Elle est exposée, avec différentes règles de calcul, dans *a*, I, p. 6 à 32.

2. Théorème. — *Si, outre les hypothèses du théorème précédent,*

$$\int_{\mathcal{D}_1}^{(m-1)} G(X, A)\, dV_A$$

est lipschitzien d'exposant $\lambda + h(0 < h < 1 - \lambda)$, *et si* σ *est lipschitzien d'exposant* h, $F(X)$ *est lipschitzien d'exposant* $\lambda + h$.

Soient en effet X et Y deux points de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$. Soient $\mathcal{D}''$ l'ensemble des points A de $\mathcal{D}$ tels que $L(X, A) < 2L(X, Y)$, et $\mathcal{D}'$ le reste de $\mathcal{D}$. Soient $\mathcal{D}''_1$ les points communs à $\mathcal{D}_1$ et à $\mathcal{D}''$, et $\mathcal{D}'_1$ le reste de $\mathcal{D}_1$. On a

$$\begin{aligned} F(Y) - F(X) = & \int_{\mathcal{D}''_1}^{(m-1)} G(Y, A)[\sigma(A) - \sigma(Y)]\, dV_A \\ & - \int_{\mathcal{D}''_1}^{(m-1)} G(X, A)[\sigma(A) - \sigma(X)]\, dV_A \\ & + [\sigma(Y) - \sigma(X)] \int_{\mathcal{D}'_1}^{(m-1)} G(Y, A)\, dV_A \\ & + \int_{\mathcal{D}'_1}^{(m-1)} [G(Y, A) - G(X, A)][\sigma(A) - \sigma(X)]\, dV_A \\ & + \sigma(X) \int_{\mathcal{D}_1}^{(m-1)} [G(Y, A) - G(X, A)]\, dV_A. \end{aligned}$$

Sous la première intégrale se trouve une fonction

$$O[MNL^{\lambda+h-m+1}(Y, A)];$$

l'intégrale est donc $O\left[\frac{MN}{\lambda + h} L^{\lambda+h}(X, Y)\right]$ (*voir b*, I, th. 1, note de la page 138) (on suppose que M est aussi le coefficient lipschitzien de σ pour l'exposant h). Même sorte de limitation pour la seconde intégrale. Le troisième terme est $O\left[\frac{MN}{\lambda} L^{\lambda+h}(X, Y)\right]$. Le quatrième est

$$O\left[\frac{MN}{1 - \lambda - h} L^{\lambda+h}(X, Y)\right]$$

(on applique le théorème des accroissements finis à G; *voir b*, I, th. 1, p. 139). Enfin, si N′ est le coefficient lipschitzien de

$$\int_{\varpi_1}^{(m-1)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}$$

pour l'exposant $\lambda + h$, le terme restant est $\mathrm{O}[\mathrm{MN}'\mathrm{L}^{\lambda+h}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})]$.

Donc F est lipschitzien d'exposant $\lambda + h$ et de coefficient

$$\mathrm{O}\left[\mathrm{MN}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{1-\lambda-h}\right) + \mathrm{MN}'\right];$$

la constante impliquée dans le symbole O ne dépend que de m.

3. *Remarque.* — Si l'on avait $\lambda + h = 1$, la limitation de l'avant-dernier terme ne serait plus valable; on aurait alors

$$\mathrm{F}(\mathrm{X}) - \mathrm{F}(\mathrm{Y}) = \mathrm{O}\left[\mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{N}}{\lambda} + \mathrm{N}'\right)\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \log \frac{\mathrm{L}_0}{\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})}\right];$$

la constante impliquée dans le symbole O ne dépend que de m et du minimum de $\frac{\mathrm{L}_0}{\mathrm{L}}$.

4. Théorème. — *Si, dans l'énoncé du théorème précédent, on remplace l'hypothèse* $\lambda + h < 1$ *par l'hypothèse* $\lambda + h > 1$, *et si l'on remplace l'hypothèse sur l'intégrale* $\int_{\varpi_1}^{(m-1)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}$, *par celle que cette intégrale admet, par rapport à* x_α (α *étant un entier donné,* $1 \leqq \alpha \leqq m$) *une dérivée continue, la dérivée de* F(X) *relativement à* x_α *existe et est continue.*

Soit Y le point déduit de X en remplaçant x_α par $x_\alpha + \delta$ sans changer les autres coordonnées. Écrivons F(Y) — F(X) comme ci-dessus et divisons par δ. Les limitations des trois premiers termes sont comme ci-dessus et par suite leurs quotients par δ tendent vers zéro avec δ.

Je dis que le quotient du quatrième terme par δ tend vers

$$\int_{\varpi_1}^{(m-1)} \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_\alpha}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,[\sigma(\mathrm{A}) - \sigma(\mathrm{X})]\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}$$

quand δ tend vers zéro. En effet, Ξ étant un certain point du segment de droite XY, on a, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\left|\frac{G(Y,A)-G(X,A)}{\delta}\right| < NL^{\lambda-m}(\Xi, A) < 2^{m-\lambda} NL^{\lambda-m}(X, A).$$

Soit ε un nombre positif donné. Déterminons un nombre positif η tel que, en étendant l'intégrale à $L(X, A) < \eta$, on ait

$$2^{m-\lambda} MN \int^{(m-1)} L^{\lambda+h-m}(X, A)\, dV_A < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Supposons $2|\delta| < \eta$, de sorte que ϖ'_1 comprend le domaine $L(X, A) > \eta$. En intégrant dans ce dernier domaine, on a, si δ est assez voisin de zéro,

$$\left|\int^{(m-1)} \left[\frac{G(Y,A)-G(X,A)}{\delta} - \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A)\right][\sigma(A)-\sigma(X)]\, dV_A\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

car le premier crochet est $\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(\Xi, A) - \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A)$ et, puisque $L(X, A) > \eta$ et $L(X, \Xi) < \frac{\eta}{2}$, il y a continuité uniforme par rapport à l'ensemble des deux points. D'autre part, d'après le choix de η, on a, en intégrant dans le reste de ϖ'_1, c'est-à-dire dans $2|\delta| < L(X, A) < \eta$,

$$\left|\int^{(m-1)} \frac{G(Y,A)-G(X,A)}{\delta}[\sigma(A)-\sigma(X)]\, dV_A\right| < \frac{\varepsilon}{3};$$

de même, en intégrant dans $L(X, A) < \eta$,

$$\left|\int^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A)[(\sigma A)-\sigma(X)]\, dV_A\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc on a bien, si δ est assez voisin de zéro,

$$\left|\int_{\varpi'_1}^{(m-1)} \frac{G(Y,A)-G(X,A)}{\delta}[\sigma(A)-\sigma(X)]\, dV_A - \int_{\varpi_1}^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A)[\sigma(A)-\sigma(X)]\, dV_A\right| < \varepsilon,$$

et, puisque ε est arbitraire, notre terme a bien la limite indiquée.

Enfin le quotient par δ du dernier terme tend vers

$$\sigma(X)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{\mathcal{D}_1}^{(m-1)} G(X, A)\, dV_A.$$

Donc

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = \int_{\mathcal{D}_1}^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A)[\sigma(A) - \sigma(X)]\, dV_A + \sigma(X)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{\mathcal{D}_1}^{(m-1)} G(X, A)\, dV_A.$$

Si

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{\mathcal{D}_1}^{(m-1)} G(X, A)\, dV_A\right| < N',$$

on voit que

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = O\left[\frac{MN}{\lambda + h - 1} + MN'\right].$$

5. *Remarque.* — Si l'hypothèse relative à la dérivée de l'intégrale $\int_{\mathcal{D}_1}^{(m-1)} G(X, A)\, dV_A$ n'a lieu que pour les points X d'un certain ensemble compris dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, la conclusion n'a lieu que pour les points de cet ensemble.

6. Corollaire. — En particulier, si $\alpha \neq m$ et si $\frac{\partial G}{\partial a_\alpha}$ existe et est continu pour $X \neq A$ et si

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right| < NL^{\lambda - m + h}(X, A),$$

on a, pourvu que X ne soit pas sur $\mathcal{S}_1$,

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{\mathcal{D}_1}^{(m-1)} G(X, A)\, dV_A = \int_{\mathcal{D}_1}^{(m-1)}\left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right) dV_A - \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-2)} G(X, A)\,\varpi_\alpha(A)\, dS_A,$$

ϖ_α étant l'un des cosinus directeurs de la normale extérieure à $\mathcal{S}_1$ et dS_A étant la mesure de l'élément de $\mathcal{S}_1$ (*a*, I, 13, p. 28; *voir* aussi, *b*, I, th. 2, p. 140). En portant ce résultat dans celui du théorème précédent, on retrouve un théorème déjà démontré d'autre façon (*b*, I, th. 2, p. 140). La formule obtenue peut donner une limitation de $\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}$, pourvu que X reste à une distance de $\mathcal{S}_1$ supérieure à un nombre positif fixe.

7. Théorème. — *Dans le domaine* $\mathcal{D}$ (§ 1), *soient* $w_n(X)$ $(n = 1, 2, \ldots, p)$ *p fonctions lipschitziennes d'exposant h et de coefficient* M. *Soit*

$$G(X, A; v_1, v_2, \ldots, v_p; w_1, w_2, \ldots, w_p)$$

une fonction des $2p$ *variables* v_n, w_n *et des points* A *de* $\mathcal{D}_1$ *et* X *d'un domaine convexe contenant* $\mathcal{D}$. *On suppose que si,* B *et* C *étant deux points quelconques de ce domaine convexe, on a*

$$w_n = w_n(A), \qquad v_n = (1-\theta)\, w_n(A) + \theta\theta' w_n(B) + \theta(1-\theta')\, w_n(C)$$
$$(0 \leqq \theta \leqq 1, \ 0 \leqq \theta' \leqq 1),$$

et si X *et* A *sont distincts,* G, *les* $\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}$ *et les* $\frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial v_n}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m;$ $n = 1, 2, \ldots, p)$ *sont des fonctions continues de* X, *de* A, *des* v_n *et des* w_n. *On suppose encore que, pour ces valeurs des* v_n *et des* w_n,

$$\left|\frac{\partial G}{\partial v_n}(X, A; v_n; w_n)\right| < NL^{\lambda-m}(X, A) \qquad (1 - h < \lambda \leqq 1),$$
$$\left|\frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial v_n}(X, A; v_n; w_n)\right| < NL^{\lambda-m-1}(X, A) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m; n = 1, 2, \ldots, p),$$

N *étant indépendant de* X, *de* A, *de* B, *de* C, *de* θ *et de* θ'. *Enfin on suppose que, si* $\theta = 0$, G *est identiquement nul (pour* $X \neq A$). *Alors la fonction*

$$F(X) = \int_{\mathcal{D}_1}^{(m-1)} G[X, A; w_n(X); w_n(A)]\, dV_A$$

est lispchitzienne d'exposant $\lambda + h - 1$ *si* $\lambda < 1$.

Tout d'abord le théorème des accroissements finis nous donne

$$G[X, A; w_n(X); w_n(A)]$$
$$= \Sigma_q [w_q(X) - w_q(A)]\, \frac{\partial G}{\partial v_q}[X, A; (1-\theta)\, w_n(A) + \theta\, w_n(X); w_n(A)]$$
$$(0 < \theta < 1),$$

d'où

$$|G[X, A; w_n(X); w_n(A)]| < p\, MNL^{\lambda+h-m}(X, A);$$

l'exposant de L est plus grand que $1-m$, de sorte que l'intégrale est uniformément convergente.

Soient X et Y deux points quelconques de $\mathcal{D}$. Nous allons limiter $F(X)-F(Y)$.

Pour cela, soient $\mathcal{D}'$, $\mathcal{D}''$, $\mathcal{D}'_1$, $\mathcal{D}''_1$ les mêmes domaines qu'au paragraphe 2. On a

$$\int_{\mathcal{D}''_1}^{(m-1)} G[Y, A;\, \varpi_n(Y);\, \varpi_n(A)]\, dV_A = O\left[\frac{pMN}{\lambda+h-1} L^{\lambda+h-1}(X, Y)\right],$$

et de même en remplaçant Y par X au premier membre.

Si maintenant A appartient à $\mathcal{D}'_1$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} &G(X, A;\, \varpi_n(X);\, \varpi_n(A)] - G[Y, A;\, \varpi_n(Y);\, \varpi_n(A)] \\ &\quad = \Sigma_\alpha (x_\alpha - y_\alpha)\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}[(1-\theta)Y + \theta X; \\ &\qquad\qquad A;\, (1-\theta)\varpi_n(Y) + \theta\varpi_n(X);\, \varpi_n(A)] \\ &\quad + \Sigma_q[\varpi_q(X) - \varpi_q(Y)]\frac{\partial G}{\partial v_q}[(1-\theta)Y + \theta X; \\ &\qquad\qquad A;\, (1-\theta)\varpi_n(Y) + \theta\varpi_n(X);\, \varpi_n(A)] \\ &\qquad\qquad (0<\theta<1). \end{aligned}$$

Mais si $v_n = \varpi_n = \varpi_n(A)$, les $\dfrac{\partial G}{\partial x_\alpha}$ sont nuls comme dérivées de fonctions nulles; donc

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}[(1-\theta)Y + \theta X;\, A;\, (1-\theta)\varpi_n(Y) + \theta\varpi_n(X);\, \varpi_n(A)] \\ &\quad = \Sigma_q[(1-\theta)\varpi_q(Y) + \theta\varpi_q(X) - \varpi_q(A)] \\ &\quad \times \frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha\, \partial v_q}[(1-\theta)Y + \theta X; \\ &\qquad\qquad A;\, (1-\theta')\varpi_n(A) + \theta'(1-\theta)\varpi_n(Y) + \theta\theta'\varpi_n(X);\, \varpi_n(A)] \\ &\qquad\qquad (0<\theta'<1). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &(1-\theta)\varpi_q(Y) + \theta\varpi_q(X) - \varpi_q(A) \\ &\quad = (1-\theta)[\varpi_q(Y) - \varpi_q(A)] + \theta[\varpi_q(X) - \varpi_q(A)], \end{aligned}$$

d'où, A étant dans $\mathcal{D}'_1$,

$$\begin{aligned} &|(1-\theta)\varpi_q(Y) + \theta\varpi_q(X) - \varpi_q(A)| \\ &\quad < \left[(1-\theta)\left(\frac{3}{2}\right)^h + \theta\right] ML^h(X, A) < \left(\frac{3}{2}\right)^h ML^h(X, A). \end{aligned}$$

Donc

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}[(1-\theta)Y+\theta X;\ A;\ (1-\theta)w_n(Y)+\theta w_n(X);\ w_n(A)]\right|$$
$$< 3^h 2^{m+1-\lambda-h} p\,MNL^{\lambda+h-m-1}(X, A).$$

Un raisonnement antérieur (*d*, II, 4, p. 212; le présent théorème généralise celui auquel il est ici renvoyé) permet de déduire de là que

$$\int_{\varpi_1}^{(m-1)} \Sigma_\alpha(x_\alpha - y_\alpha)\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}[(1-\theta)Y+\theta X;$$
$$A;\ (1-\theta)w_n(Y)+\theta w_n(X);\ w_n(A)]\,dV_A$$
$$= O\left[MNL^{\lambda+h-1}(X, Y)\log\frac{L_0}{L(X, Y)}\right];$$

si l'on préfère, dans le cas où $\lambda + h < 2$, on a aussi la limitation

$$O\left[\frac{MN}{2-\lambda-h}L^{\lambda+h-1}(X, Y)\right].$$

De même

$$\Sigma_q[w_q(X) - w_q(Y)]\int_{\varpi_1}^{(m-1)}\frac{\partial G}{\partial v_q}[(1-\theta)Y+\theta X;$$
$$A;\ (1-\theta)w_n(Y)+\theta w_n(X);\ w_n(A)]\,dV_A$$
$$= O\left[MNL^{\lambda+h-1}(X, Y)\log\frac{L_0}{L(X, Y)}\right];$$

si l'on préfère, mais seulement si $\lambda < 1$, on a aussi la limitation

$$O\left[\frac{MN}{1-\lambda}L^{\lambda+h-1}(X, Y)\right].$$

Si l'on objecte qu'il n'est pas démontré que les deux dernières intégrales portent sur des fonctions intégrables, il suffit de parler des intégrales supérieures des valeurs absolues.

En définitive

$$F(X) - F(Y) = \begin{cases} O\left[MN\left(\dfrac{1}{\lambda+h-1}+\dfrac{1}{1-\lambda}\right)L^{\lambda+h-1}(X, Y)\right] & (\lambda < 1), \\ O\left[MNL^{\lambda+h-1}(X, Y)\log\dfrac{L_0}{L(X, Y)}\right] & (\text{dans tous les cas}), \end{cases}$$

ce qui démontre le théorème. Les constantes impliquées dans les symboles O ne dépendent que de m et de p dans la première limitation, de m, de p et du minimum de $\frac{L_0}{L}$ dans la seconde.

8. *Cas où* $\lambda = 1$. — Si $\lambda = 1$, il est un cas où l'on peut affirmer que $F(X)$ est lipschitzien d'exposant h : c'est celui où l'on est certain que, quelle que soit la façon dont θ (qui dépend de A) peut varier entre zéro et 1, l'intégrale

$$\int_{\varpi'_1}^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial v_q}[X; A; (1-\theta)\,\varpi_n(Y) + \theta\varpi_n(X); \varpi_n(A)]\, dV_A$$

est bornée quand X et Y varient de façon quelconque, et où de plus h est inférieur à 1.

Pour le voir, écrivons, avec cette hypothèse, pour les points A de ϖ'_1,

$$\begin{aligned} &G[X, A; \varpi_n(X); \varpi_n(A)] - G[Y, A; \varpi_n(Y); \varpi_n(A)] \\ &\quad = G[X, A; \varpi_n(Y); \varpi_n(A)] - G[Y, A; \varpi_n(Y); \varpi_n(A)] \\ &\qquad + G[X, A; \varpi_n(X); \varpi_n(A)] - G[X, A; \varpi_n(Y); \varpi_n(A)] \\ &\quad = \Sigma_\alpha (x_\alpha - y_\alpha)\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}[(1-\theta')Y + \theta' X; A; \varpi_n(Y); \varpi_n(A)] \\ &\qquad + \Sigma_q[\varpi_q(X) - \varpi_q(Y)]\frac{\partial G}{\partial v_q}[X, A; (1-\theta)\,\varpi_n(Y) + \theta\varpi_n(X); \varpi_n(A)] \\ &\qquad\qquad (0 < \theta < 1,\ 0 < \theta' < 1). \end{aligned}$$

L'intégrale supérieure ou inférieure du premier terme est, d'après ce qui a été dit, $O\left[\frac{MN}{1-h} L^h(X, Y)\right]$, sous la condition $h < 1$. Quant au second terme, si N′ est une limite supérieure de la valeur absolue de l'intégrale de l'hypothèse, la valeur absolue de l'intégrale (supérieure ou inférieure) est moindre que $pMN'L^h(X, Y)$. Donc, dans ce cas,

$$F(X) - F(Y) = O\left\{\left[\frac{MN}{h(1-h)} + MN'\right] L^h(X, Y)\right\},$$

la constante impliquée dans le symbole O ne dépendant que de m et de p.

9. *Cas fréquent où l'hypothèse précédente se vérifie.* — Supposons

que les $\dfrac{\partial^2 G}{\partial v_n \partial v_q}$ existent et soient, en valeur absolue, moindres que $NL^{1-m}(X, A)(n, q = 1, 2, \ldots, p)$, et qu'en outre $\dfrac{\partial G}{\partial v_q}[X, A; w_n(X); w_n(A)]$ soit la dérivée $\dfrac{\partial H}{\partial a_\alpha}$ d'une fonction $H(X, A)$ valant $O[L^{2-m}(X, A)]$, α n'étant pas égal à m. Je dis qu'alors l'hypothèse précédente se vérifie. En effet

$$\left|\frac{\partial G}{\partial v_q}[X; A; (1-\theta) w_n(Y) + \theta w_n(X); w_n(A)] - \frac{\partial G}{\partial v_q}[X, A; w_n(X); w_n(A)]\right|$$
$$< pMNL^{1-m}(X, A)\, L^h(X, Y);$$

l'intégrale dans $\mathcal{D}'_1$ est donc $O\left[MNL^h(X, Y)\log\dfrac{L_0}{L(X, Y)}\right]$, donc bornée. Ensuite

$$\int_{\mathcal{D}'_1}^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial v_q}[X, A; w_n(X); w_n(A)]\, dV_A = \int_{\mathcal{D}'_1}^{(m-1)} \frac{\partial H}{\partial a_\alpha}(X, A)\, dV_A$$
$$= \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-2)} H(X, A)\, \varpi_\alpha(A)\, dS_A - \int_{\mathcal{S}'_1}^{(m-2)} H(X, A)\, \varpi_\alpha(A)\, dS_A,$$

$\mathcal{S}'_1$ étant la frontière de $\mathcal{D}'_1$ et de $\mathcal{D}''_1$, et ϖ_α se rapportant, sur $\mathcal{S}'_1$, à la direction extérieure de la normale : ceci suppose toutefois que X n'est pas sur $\mathcal{S}_1$, et que $2L(X, Y) < \delta$, δ étant la borne inférieure de la distance de X aux points de $\mathcal{S}_1$. L'intégrale étendue à $\mathcal{S}_1$, si l'on suppose

$$|H(X, A)| < N'' L^{2-m}(X, A),$$

et si l'on nomme ω la mesure de $\mathcal{S}_1$, est en valeur absolue moindre que $N''\left(\dfrac{\delta}{2}\right)^{2-m}\omega$. Quant à la mesure de $\mathcal{S}'_1$, elle est $O[L^{m-2}(X, Y)]$, de sorte que l'intégrale correspondante est $O(N'')$. Si $2L(X, Y) > \delta$, la limitation reste la même pour les intégrales étendues à des parties de $\mathcal{S}_1$ et de $\mathcal{S}'_1$.

Notre proposition est vérifiée *pourvu que* X *reste à une distance de* $\mathcal{S}_1$ *supérieure à un minimum positif* δ, et l'on voit que

$$N' = O\left(\frac{MN}{h} + N''\omega\,\delta^{2-m} + N''\right),$$

la constante impliquée dans O ne dépendant que de m, de p et de L_0.

10. *Cas où $w(X) - w(A)$ figure linéairement.* — Si notre intégrale est du type

$$\int_{\varpi_1}^{(m-1)} G(X, A)[w(X) - w(A)]\, dV_A,$$

tout ce qui précède (§ 7 à 9) s'applique en se simplifiant. Les nombres θ et θ', compris entre zéro et 1, deviennent inutiles. On retrouve ainsi, avec l'utile complément relatif au cas où $\lambda = 1$, un résultat antérieur (d, II, 4, p. 211).

11. *Application aux dérivées de* $\int^{(m-1)} G(X, A)\,\sigma(A)\, dV_A$. — On a, dans des conditions déjà indiquées (§ 4, 6),

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{\varpi_1}^{(m-1)} G(X, A)\sigma(A)\, dV_A = \int_{\varpi_1}^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A)[\sigma(A) - \sigma(X)]\, dV_A$$
$$+ \sigma(X)\int_{\varpi_1}^{(m-1)} \left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right) dV_A - \sigma(X)\int_{\mathcal{S}_1}^{(m-2)} G(X, A)\,\varpi_\alpha(A)\, dS_A$$
$$(\alpha \neq m).$$

Si nous ajoutons aux hypothèses d'alors celle que les $\frac{\partial G}{\partial x_\beta}$, *les* $\frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ *et les* $\frac{\partial^2 G}{\partial a_\alpha \partial x_\beta}$ $(\beta = 1, 2, \ldots, m)$ *existent et sont continus pour* $X \neq A$ *et que*

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x_\beta}\right| < N L^{\lambda-m}(X, A), \qquad \left|\frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right| < N L^{\lambda-m-1}(X, A),$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right)\right| < N L^{\lambda+h-m-1}(X, A),$$

la dérivée étudiée est lipschitzienne d'exposant $\lambda + h = 1$, pourvu que la distance de X aux points de $\mathcal{S}_1$ reste supérieure à un minimum positif δ et pourvu que $\lambda + h < 2$.

En effet si d'abord $\lambda < 1$, le premier terme est lipschitzien d'exposant $\lambda + h - 1$ et de coefficient $O\left[MN\left(\frac{1}{\lambda + h - 1} + \frac{1}{1 - \lambda}\right)\right]$ (§ 7) ; le second terme est lipschitzien d'exposant $\lambda + h - 1$ et de coefficient $O\left[\frac{MN}{(\lambda + h - 1)(2 - \lambda - h)}\right]$ (§ 1), la constante impliquée dans le symbole O dépendant de m et du domaine ϖ, car l'intégrale

$$\int_{\varpi_1}^{(m-1)} \left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right) dV_A \quad \text{est} \quad O\left(\frac{N\Omega^{\frac{\lambda+h-1}{m}}}{\lambda+h-1}\right),$$

Ω étant la mesure de ϖ_1 (b, note de la page 138), et d'autre part on peut prendre $ML_0^{1-\lambda}$ comme coefficient lipschitzien de σ pour l'exposant $\lambda + h - 1$; enfin l'intégrale qui figure dans le troisième terme a toutes ses dérivées continues et valant $O(\omega\delta^{\lambda-m}N)$, ω étant la mesure de $\mathfrak{S}_1$, et par suite le coefficient lipschitzien de ce troisième terme est $O(MN)$, la constante dépendant de ϖ_1 et de δ. Donc si $\lambda < 1$, le coefficient lipschitzien pour l'exposant $\lambda + h - 1$ est

$$O\left[MN\left(\frac{1}{\lambda+h-1} + \frac{1}{1-\lambda}\right)\right],$$

la constante impliquée dans O dépendant de ϖ et de δ.

Supposons maintenant que $\lambda = 1$. Nous avons à voir que, ρ étant positif variable, l'intégrale

$$\int_{\varpi'_1}^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A)\, dV_A$$

est bornée, ϖ'_1 étant $L(X, A) > \rho$. Or

$$\int_{\varpi'_1}^{(m-1)} \left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right) dV_A = O\left(\frac{N}{h}\right),$$

la constante dépendant de ϖ_1 (voir ci-dessus). D'autre part (§ 9)

$$\int_{\varpi'_1}^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(X, A)\, dV_A = O(N).$$

Donc, si $h < 1$, le premier terme est lipschitzien d'exposant h et de coefficient $O\left[\frac{MN}{h(1-h)}\right]$ (§ 8). D'autre part le second terme est aussi lipschitzien d'exposant h avec un coefficient $O\left[\frac{MN}{h(1-h)}\right]$ (§ 4). Enfin le troisième est lipschitzien d'exposant h avec un coefficient $O(MN)$. Donc si $\lambda = 1$ et $h < 1$, la dérivée étudiée est lipschitzienne d'exposant h avec un coefficient $O\left[\frac{MN}{h(1-h)}\right]$, la constante dépendant de $\mathcal{D}$ et de δ.

Ce théorème pourra remplacer un théorème antérieur (b, I, th. 3, p. 142) qui conduisait à un exposant lipschitzien moindre, avec des hypothèses, il est vrai, plus larges (voir aussi b, I, th. 4, p. 144).

12. Donnons encore l'énoncé suivant, dont la démonstration est toute semblable à celle d'un théorème antérieur auquel il suffit de renvoyer (c, th. I, p. 370) :

Théorème. — Soit $G(X, A; w_1, w_2, \ldots, w_p)$ *une fonction du point* X *du domaine* $\mathcal{D}$ (§ 1), *du point* A *du domaine* $\mathcal{D}_1$, *et des p variables* w_1, $w_2, \ldots, w_p$. *On suppose que* $G(X, A; w_n)$ *et les dérivées*

$$\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}, \quad \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}, \quad \frac{\partial G}{\partial w_n}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial w_n} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m-1; n = 1, 2, \ldots, p)$$

existent et sont continues par rapport à l'ensemble des $2m-1+p$ *variables quand* X *et* A *appartiennent respectivement* à $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ *et à* $\mathcal{D}_1+\mathcal{S}_1$ *et sont différents, et quand, en outre,*

$$w_n = (1-\theta)w_n(A) + \theta w_n(X) \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1),$$

où les $w_n(X)$ *sont p fonctions données définies dans* $\mathcal{D}+\mathcal{S}$; *enfin on suppose qu'il existe des constantes*

$$\lambda, \quad h, \quad M, \quad N \qquad (0 < \lambda \leqq 1,\ 1-\lambda < h \leqq 1,\ M > 0,\ N > 0)$$

telles que, dans ces conditions

$$|w_n(X) - w_n(A)| < ML^h(X, A), \qquad |G(X, A)| < NL^{\lambda-m+1}(X, A),$$
$$\left|\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}\right| < NL^{\lambda-m}(X, A), \qquad \left|\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right| < NL^{\lambda+h-m}(X, A),$$
$$\left|\frac{\partial G}{\partial w_n}\right| < NL^{\lambda-m+1}(X, A), \qquad \left|\frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial w_n}\right| < NL^{\lambda-m}(X, A).$$

Alors les dérivées de la fonction

$$F(X) = \int_{\mathcal{D}_1}^{(m-1)} G[X, A; w_n(A)]\, dV_A,$$

relatives à $x_1, x_2, , x_{m-1}$, *existent et sont continues en tout point de* $\mathcal{D}$.

Le résultat obtenu est en effet

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = \int_{\varpi_1}^{(m-1)} \left\{ \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}[X, A; x_m(A)] + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}[X, A; x_m(X)] \right\} dV_A$$
$$- \int_{S_1}^{(m-2)} G(X, A; x_m(X)] \varpi_\alpha(A)\, dS_A \qquad (\alpha \neq m).$$

13. *Cas où x_m est toujours nul.* — Dans ce qui précède, x_m pouvait varier entre zéro et une limite positive. Si l'on astreint x_m à être toujours nul, tout reste vrai, mais il n'y a plus à faire d'hypothèse sur les dérivées relatives à x_m. Il revient au même de considérer alors des intégrales d'ordre m, car cela revient à appeler $m+1$ ce qu'on appelait m (*b*, I, th. 5 à 8, p. 146 et 147 ; *c*, th. 1 à 3, p. 370 à 375).

CHAPITRE II.

FORMULES DE GREEN.

1. *Opérations $\mathcal{F}$ et Θ.* — Ce chapitre est destiné autant à indiquer des notations constamment employées dans la suite de ce travail qu'à rappeler des formules qui s'obtiennent par une suite d'intégrations par parties.

Nous poserons

$$\mathcal{F}u = \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\beta \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m);$$

dans cette notation, les $a_{\alpha,\beta}$, les b_α et c désignent des fonctions données du point $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ou X, et u est une fonction arbitraire à laquelle s'applique l'opération $\mathcal{F}$; on a

$$a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m),$$

et, dans la sommation $\Sigma_{\alpha,\beta}$, chacun des indices varie indépendamment de l'autre de 1 à m, de sorte que si $\beta \neq \alpha$, le terme se répète.

Soit d'autre part $\mathcal{S}$ une multiplicité à $m-1$ dimensions, située dans l'espace $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$; autrement dit $\mathcal{S}$ est l'ensemble des points obtenus en prenant pour $x_1, x_2, \ldots, x_m$ des fonctions de $m-1$ paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$. On suppose que les dérivées de ces m fonctions existent et sont continues et que leurs m déterminants fonctionnels ne s'annulent nulle part ensemble. Cela permet de définir, pour chaque point de $\mathfrak{S}$, les cosinus directeurs d'un certain sens choisi sur la normale : ce sont m nombres ϖ_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ tels que $\Sigma_\alpha \varpi_\alpha^2 = 1$ et proportionnels aux expressions $(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} \dfrac{d(x_{\alpha+1}, \ldots, x_{\alpha-1})}{d(t_1, \ldots, t_{m-1})}$, les rapports ayant un signe donné; la notation $x_{\alpha+1}, \ldots, x_{\alpha-1}$ signifie ce que deviennent $x_1, x_2, \ldots, x_m$ quand on leur fait subir une permutation circulaire amenant x_α en tête et qu'on supprime x_α. Au lieu de représenter une certaine région de $\mathfrak{S}$ à l'aide des paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$, on peut la représenter aussi à l'aide d'autres paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$: on suppose que tout point de $\mathfrak{S}$ est *intérieur* à une région dont une telle représentation est possible, et que le nombre total des représentations nécessaires pour avoir $\mathfrak{S}$ entier est fini. $\mathfrak{S}$ peut donc se composer de plusieurs parties sans points communs deux à deux. On prend pour les ϖ_α des fonctions continues du point correspondant de $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire de $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$; on suppose que $\mathfrak{S}$ n'est pas incompatible avec ce choix (c'est-à-dire que $\mathfrak{S}$ a deux côtés distincts).

Nous définissons alors l'opération Θu par l'identité

$$\Theta u = \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\, \varpi_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + \psi u,$$

où ψ est une nouvelle fonction donnée sur $\mathfrak{S}$; on suppose que X est sur $\mathfrak{S}$.

2. *Autre notation.* — Si les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ existent, nous emploierons aussi la notation

$$\mathfrak{F} u = \Sigma_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(a_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) + \Sigma_\alpha e_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu,$$

$$\Theta u = \Sigma_{\alpha,\beta}\, \varpi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta}(a_{\alpha,\beta} u) + \omega u,$$

avec

$$e_\alpha = b_\alpha - \Sigma_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}, \qquad \omega = \psi - \Sigma_{\alpha,\beta} \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta} \varpi_\alpha.$$

3. *Première formule de Green.* — Plaçons-nous dans l'hypothèse

précédente (§ 2) et supposons de plus que $\mathcal{S}$ soit la frontière d'un domaine borné et ouvert $\mathcal{D}$; on suppose encore qu'en tout point de $\mathcal{S}$ la direction $(\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m)$ aille vers l'extérieur de $\mathcal{D}$. Supposons enfin qu'o~~n a~~ sur $\mathcal{S}$

$$\psi = \Sigma_\alpha \theta_\alpha \varpi_\alpha, \qquad \omega = \Sigma_\alpha \left(\theta_\alpha - \Sigma_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}\right) \varpi_\alpha.$$

où les θ_α sont m fonctions données dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, et dont les dérivées existent et sont bornées dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ (1). On suppose aussi que les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ sont bornées dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, ainsi que les dérivées secondes de u.

Si l'on définit une nouvelle opération $\mathrm{P}u$ par l'identité

$$\mathrm{P}u = \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_\beta} - \Sigma_\alpha (e_\alpha - 2\theta_\alpha) u \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \left(\Sigma_\alpha \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial x_\alpha} - c\right) u^2,$$

on a alors l'identité (2)

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} u \mathcal{F} u \, d\mathrm{V} = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} u \Theta u \, d\mathrm{S} - \int_{\mathcal{D}}^{(m)} \mathrm{P} u \, d\mathrm{V},$$

$d\mathrm{V}$ et $d\mathrm{S}$ étant les éléments de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{S}$.

4. *Opérations $\mathcal{G}$ et Z.* — Une nouvelle opération peut être définie dans le cas où s'applique la seconde notation relative à $\mathcal{F}$ et à Θ (§ 2). C'est l'opération Z (*dzêta*) :

$$\mathrm{Z}u = \Sigma_{\alpha,\beta} \varpi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} (a_{\alpha,\beta} u) + (\omega - \Sigma_\alpha e_\alpha \varpi_\alpha) u,$$

ou, si l'on préfère,

$$\mathrm{Z}u = \Sigma_{\alpha,\beta} \varpi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\beta} (a_{\alpha,\beta} u) + (\psi - \Sigma_\alpha b_\alpha \varpi_\alpha) u.$$

Si maintenant nous ajoutons aux hypothèses que les dérivées des e_α existent, nous définissons l'opération $\mathcal{G}$ par l'identité

$$\mathcal{G} u = \Sigma_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(a_{\alpha,\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - \Sigma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (e_\alpha u) + c u.$$

(1) Avec la notation de b, p. 209, on aurait $\psi = -\Sigma_\alpha \theta_\alpha \varpi_\alpha$.

(2) Ces intégrales sont prises au sens de M. Lebesgue ; de même plus loin.

Dans l'hypothèse plus étroite où les dérivées secondes des $a_{\alpha,\beta}$ et les dérivées des b_α existeraient, on pourrait aussi écrire

$$\mathcal{G}u = \Sigma_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}(a_{\alpha,\beta}u) - \Sigma_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(b_\alpha u) + cu;$$

nous ne ferons pas, pour le moment, cette hypothèse. L'opération $\mathcal{G}$ est dite *adjointe* à l'opération $\mathcal{F}$.

5. *Deuxième formule de Green.* — Ajoutons aux hypothèses précédentes (§ 3 et 4) celles que les dérivées des e_α et les dérivées secondes d'une nouvelle fonction v sont bornées dans $\varpi + \mathcal{S}$. On a alors

$$\int_{\varpi}^{(m)}(v\mathcal{F}u - u\mathcal{G}v)\,dV = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}(v\Theta u - uZv)\,dS.$$

6. *Retour à la première formule de Green.* — Dans les mêmes hypothèses (§ 5), la première formule (§ 3) peut aussi s'appliquer à $\mathcal{G}u$; on a

$$\int_{\varpi}^{(m)}u\mathcal{G}u\,dV = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}uZu\,dS - \int_{\varpi}^{(m)}\mathrm{P}u\,dV,$$

l'opération P étant la même que plus haut (§ 3), comme on le voit immédiatement en faisant $v = u$ dans la deuxième formule (§ 5).

7. *Convention relative aux fonctions de deux points.* — Nous aurons souvent à appliquer les opérations $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, Θ, Z à des fonctions F (X, A) de deux points X et A. Il nous est commode de convenir que, sauf avis contraire, les opérations $\mathcal{F}$ et Θ portent sur le premier point, et les opérations $\mathcal{G}$ et Z sur le second point.

8. *Cas où $\mathcal{F}$ est du type elliptique.* — On sait que $\mathcal{F}$ est dit appartenir au type elliptique dans un certain domaine si la forme quadratique en $p_1, p_2, \ldots, p_m$

$$\Sigma_{\alpha,\beta}a_{\alpha,\beta}p_\alpha p_\beta$$

est *définie* quel que soit X dans ce domaine. Nous supposerons que cette forme est positive, ce qui ne diminue pas la généralité.

Nous désignerons alors par D le discriminant des $a_{\alpha,\beta}$, qui est positif, et par $A_{\alpha,\beta}$ le quotient par D du mineur de $a_{\alpha,\beta}$ dans ce déterminant.

Le produit par $-4D^{-1}$ du discriminant de P (§ 3), considéré comme forme quadratique en $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$, est

$$4\left(c - \Sigma_\alpha \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial x_\alpha}\right) + \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(e_\alpha - 2\theta_\alpha)(e_\beta - 2\theta_\beta);$$

si cette expression est négative, la forme quadratique P est définie positive.

CHAPITRE III.

CAS PARTICULIER DU PROBLÈME LINÉAIRE DE NEUMANN.

1. *Fonctions* H(X, Ξ ; o) *et* K (X, Ξ). — Nous nous plaçons, dans ce chapitre, dans le cas où les coefficients $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m$) et le second membre f de l'équation du type elliptique (II, 8)

$$\mathcal{F} u = \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu = f \tag{1}$$

sont toujours lipschitziens d'exposant h dans un domaine borné ouvert $\mathcal{D}$. La frontière $\mathcal{S}$ de ce domaine remplit les conditions déjà indiquées (II, 1) et en outre celle que les dérivées des coordonnées des points de $\mathcal{S}$ par rapport aux paramètres sont lipschitziennes d'exposant h.

Sur $\mathcal{S}$ on se donne deux fonctions continues ψ et φ, la première étant celle qui sert à former l'opération Θu déjà définie (II, 1); les ϖ_α sont les cosinus directeurs de la normale extérieure, On s'impose alors sur $\mathcal{S}$ la condition

$$\Theta u = \varphi. \tag{2}$$

Le problème de trouver une fonction u, ayant ses dérivées secondes continues en tout point de $\mathcal{D}$, satisfaisant dans $\mathcal{D}$ à l'équation (1) et sur $\mathcal{S}$ a la condition (2), est ce que nous appelons le *problème généralisé de Neumann*, dans le cas linéaire.

Dans ce chapitre sera rappelée une méthode exposée ailleurs (*c*, p. 380 à 384) qui résout ce problème dans certains cas ; certains points de la méthode seront ici éclaircis.

Il faut d'abord introduire certains éléments analytiques très utiles dans l'étude des équations du type elliptique.

Si le nombre m des variables est supérieur à 2, nous définissons la fonction H (X, Ξ ; o) de deux points X et Ξ de l'espace par l'identité

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}, \Xi; \mathrm{o}) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right)}{4\sqrt{\pi^m \mathrm{D}(\Xi)}} [\Sigma_{\alpha,\beta} \mathrm{A}_{\alpha,\beta}(\Xi)(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta)]^{\frac{2-m}{2}} \qquad (m > 2),$$

où l'on emploie la notation indiquée (II, 8) ; si $m = 2$, on prend

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}, \Xi; \mathrm{o}) = \frac{-1}{4\pi\sqrt{\mathrm{D}(\Xi)}} \log \Sigma_{\alpha,\beta} \mathrm{A}_{\alpha,\beta}(\Xi)(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta) \qquad (m = 2).$$

Dans les deux cas nous posons, avec la convention déjà faite (II, 7),

$$\mathrm{K}(\mathrm{X}, \Xi) = \mathcal{F}\,\mathrm{H}(\mathrm{X}, \Xi; \mathrm{o}).$$

On a donné ailleurs (b, III, p. 161; notation un peu différente) l'expression de K (X, Ξ). Le fait le plus important est que, quand X tend vers Ξ,

$$\mathrm{K}(\mathrm{X}, \Xi) = \mathrm{O}[\mathrm{L}^{h-m}(\mathrm{X}, \Xi)].$$

L'idée d'introduire H (X, Ξ ; o) est due à E. E. Levi (¹).

2. *Fonctions* $\mathrm{K}^{(p)}(\mathrm{X}, \Xi)$ et H (X, Ξ ; p). — Soit $\mathcal{D}_1$ un domaine borné ouvert contenant $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ à son intérieur. On suppose que sa frontière $\mathcal{S}_1$ satisfait aux conditions déjà dites (II, 1), les dérivées relatives aux paramètres étant continues. On suppose que les coefficients $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c et f sont lipschitziens d'exposant h dans $\mathcal{D}_1$.

Nous confondons $\mathrm{K}^{(1)}$ avec K et nous posons

$$\mathrm{K}^{(p)}(\mathrm{X}, \Xi) = \int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} \mathrm{K}^{(p-1)}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\mathrm{K}(\mathrm{A}, \Xi)\, d\mathrm{V}_\mathrm{A} \qquad (p > 1).$$

On démontre (b, II, th. 3, p. 150) que, si $ph < m$,

$$\mathrm{K}^{(p)}(\mathrm{X}, \Xi) = \mathrm{O}[\mathrm{L}^{ph-m}(\mathrm{X}, \Xi)];$$

(¹) Eugenio-Elia Levi, *Sulle equazioni lineari totalmente ellitiche alle derivate parziali* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 24, 1907, p. 275-317).

si l'entier p est tel que $ph = m$,

$$K^{(p)}(X, \Xi) = O\left[\log \frac{L_0}{L(X, \Xi)}\right],$$

L_0 étant supérieur au maximum de $L(X, \Xi)$ dans $\mathcal{D}_1 + \mathfrak{S}_1$. Enfin si $ph > m$, $K^{(p)}(X, \Xi)$ est une fonction continue de l'ensemble des deux points, même s'ils sont confondus.

Nous poserons encore

$$H(X, \Xi; p) = H(X, \Xi; o) + \sum_{n=1}^{p} \int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} H(X, A; o) K^{(n)}(A, \Xi)\, dV_A.$$

Cette fonction est continue par rapport à l'ensemble des deux points sauf quand ceux-ci sont confondus, et

$$H(X, \Xi; p) = \begin{cases} O[L^{2-m}(X, \Xi)] & (m > 2), \\ O\left[\log \frac{L_0}{L(X, \Xi)}\right] & (m = 2). \end{cases}$$

On voit tout de suite qu'on peut la dériver par rapport à l'un des x_α, que le résultat est continu pour $X \neq \Xi$ et que

$$\frac{\partial H}{\partial x_\alpha} = O[L^{1-m}(X, \Xi)].$$

On démontre de plus que les dérivées secondes existent et sont continues pour $X \neq \Xi$, pourvu que X soit intérieur à $\mathcal{D}_1$ (c, th. 4 et 5, p. 376 à 378 ; c, p. 381 et 382 ; un théorème énoncé ici, I, 12 et 13, est essentiel à la démonstration) ; les dérivées secondes de $H(X, \Xi; o)$ sont évidemment $O[L^{-m}(X, \Xi)]$ et les dérivées secondes de l'ensemble des termes suivants sont $O[L^{h-m}(X, \Xi)]$.

3. *Intégrales* $\int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} H(X, A; o)\, \rho(A)\, dV_A$. — Si $\rho(A)$ est borné et intégrable, il est évident que les intégrales

$$u = \int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} H(X, A; o) \rho(A)\, dV_A.$$

et leurs dérivées sont des fonctions continues. Si de plus ρ est lipschitzien, les dérivées secondes existent en tout point intérieur à $\mathcal{D}_1$

(1, 12, 13) et l'on a (c, p. 380)

$$\mathcal{F} u(X) = -\rho(X) + \int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} K(X, A)\rho(A)\, dV_A.$$

Il résulte immédiatement de là que

$$\mathcal{F} H(X, \Xi; p) = K^{(p+1)}(X, \Xi)$$

et que

$$\mathcal{F} \int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} H(X, A; p)\rho(A)\, dV_A = -\rho(X) + \int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} K^{(p+1)}(X, A)\rho(A)\, dV_A.$$

4. *Intégrales* $\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H(X, A; p)\, \sigma(A)\, dS_A$. — Il est évident que les intégrales

$$u = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} H(X, A; p)\sigma(A)\, dS_A,$$

où σ est une fonction bornée et intégrable des paramètres du point A de $\mathcal{S}$, représentent des fonctions continues, même quand X vient sur $\mathcal{S}$.

Supposons maintenant que σ soit continu. On va démontrer que si l'on considère seulement un côté de $\mathcal{S}$ (l'intérieur ou l'extérieur), l'expression Θu a un sens bien déterminé, mais la valeur de Θu n'est pas la même des deux côtés (cette démonstration manque dans le Mémoire c).

Selon un procédé déjà indiqué (b, III, p. 165 et 166), nous introduisons des fonctions $c_1, c_2, \ldots, c_m$ des points de $\mathcal{S}$, proportionnelles à m polynomes en $x_1, x_2 \ldots, x_m$, et telles qu'en tout point de $\mathcal{S}$

$$\Sigma_\alpha c_\alpha^2 = 1, \qquad \Sigma_\alpha c_\alpha \varpi_\alpha > 0.$$

Si $x_\alpha = \varphi_\alpha\, (s_1, s_2, \ldots, s_{m-1})$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ est une représentation paramétrique d'une partie de $\mathcal{S}$, les équations

$$x_\alpha = \varphi_\alpha + c_\alpha s_m$$

établissent, dans un certain domaine comprenant cette partie de $\mathcal{S}$, une correspondance biunivoque entre $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et $s_1, s_2, \ldots, s_m$; les dérivées des x_α par rapport aux s_β, et celles des s_α par rapport aux x_β, existent et sont lipschitziennes d'exposant h. La valeur de s_m en un point $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ donné ne dépend pas de la représentation paramétrique adoptée.

A tout point de l'espace suffisamment voisin de $\mathcal{S}$, nous faisons correspondre un point de $\mathcal{S}$ et un seul, savoir celui qu'on obtient en annulant s_m sans changer $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$. Si X est le point donné, X′ sera ce point de $\mathcal{S}$ (il ne dépend pas non plus de la représentation paramétrique adoptée).

Cela permet de définir Θu pour les points suffisamment voisins de $\mathcal{S}$: on reprend la définition donnée (II, 1) en convenant de prendre les ϖ_α et ψ en X′. *Si Θu tend vers une limite quand X tend vers un point donné de $\mathcal{S}$, cette limite est, par définition, la valeur de Θu en ce point de $\mathcal{S}$* (même si les dérivées de u n'existent pas sur $\mathcal{S}$).

Ici l'on a évidemment hors de $\mathcal{S}$

$$\Theta u = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; p)\sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A}.$$

Mais si

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; p) = \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0) + \mathrm{J}(\mathrm{X}, \mathrm{A}),$$

les dérivées de J sont $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h-m}(\mathrm{X}, \mathrm{A})]$; par suite

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta \mathrm{J}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$

est continu même sur $\mathcal{S}$. Il en est de même de

$$\psi(\mathrm{X}') \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)\sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A}.$$

Ce qui reste de Θu peut s'écrire

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(\mathrm{X}) \left[\varpi_\alpha(\mathrm{X}') \frac{\partial \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)}{\partial x_\beta} + \varpi_\alpha(\mathrm{A}) \frac{\partial \mathrm{H}(\mathrm{A}, \mathrm{X}; 0)}{\partial a_\beta} \right] \sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$
$$- \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(\mathrm{X}) \varpi_\alpha(\mathrm{A}) \frac{\partial \mathrm{H}(\mathrm{A}, \mathrm{X}; 0)}{d a_\beta} \sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A}.$$

La première intégrale porte sur une fonction valant

$$\mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h-m}(\mathrm{X}, \mathrm{A})];$$

elle représente donc une fonction continue même sur $\mathcal{S}$. Le dernier terme enfin s'écrit

$$-\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{2\sqrt{\pi^m}\,D(X)}\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)}\frac{\sigma(A)\Sigma_\alpha(x_\alpha-a_\alpha)\varpi_\alpha(A)}{[\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha-a_\alpha)(x_\beta-a_\beta)]^{\frac{m}{2}}}\,dS_A.$$

Nous avons déjà établi (a, II, 17 à 22, p. 69 à 80) que cette intégrale a une limite quand X tend vers un point de $\mathfrak{S}$ par points de $\mathcal{D}$, et une autre limite si X tend vers ce point de $\mathfrak{S}$ par points extérieurs à $\mathcal{D}+\mathfrak{S}$. La valeur de Θu correspondant au côté intérieur est

$$\Theta u=\frac{\sigma(X)}{2}+\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)}\Theta H(X, A; p)\sigma(A)\,dS_A \qquad (X \text{ sur } \mathfrak{S}),$$

et l'intégrale existe, car $\Sigma_\alpha(x_\alpha-a_\alpha)\varpi_\alpha(A)=O[L^{1+h}(X, A)]$ et par suite cette intégrale porte sur $O[L^{1+h-m}(X, A)]$ (X étant sur $\mathfrak{S}$). Pour le côté extérieur

$$\Theta u=-\frac{\sigma(X)}{2}+\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)}\Theta H(X, A; p)\sigma(A)\,dS_A.$$

5. *Problème de Neumann; mise en équations de Fredholm.* — Soit p un entier tel que

$$(p+1)h>1.$$

Introduisons, pour résoudre le problème indiqué plus haut (§ 1), deux inconnues auxiliaires ρ et σ en posant

$$u(X)=-\int_{\mathcal{D}_1}^{(m)}H(X, A; 0)\rho(A)\,dV_A+2\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)}H(X, A; p)\sigma(A)\,dS_A;$$

on voit que ρ est une fonction inconnue d'un point de $\mathcal{D}_1$, et σ une fonction inconnue d'un point de $\mathfrak{S}$. *Si ρ est lipschitzien*, on doit avoir, d'après ce qui précède,

$$(3)\quad \rho(X)-\int_{\mathcal{D}_1}^{(m)}K(X, A)\rho(A)\,dV_A+2\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)}K^{(p+1)}(X, A)\sigma(A)\,dS_A=f(X),$$

$$(4)\quad \sigma(Y)-\int_{\mathcal{D}_1}^{(m)}\Theta H(Y, A; 0)\rho(A)\,dV_A+2\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)}\Theta H(Y, A; p)\sigma(A)\,dS_A=\varphi(Y)$$

Y désignant un point quelconque de $\mathfrak{S}$ et X un point quelconque de

$\mathcal{D}_1$; (1) aura alors lieu aussi dans $\mathcal{D}_1 - \mathcal{D} - \mathcal{S}$. Or c'est là un système de deux équations auquel s'applique la théorie de Fredholm : on démontre en effet (*b*, II, th. 1 à 4, p. 147 à 152) que l'itération suffisamment répétée conduit à un système analogue mais à noyaux continus; le fait que les inconnues ne dépendent pas du même nombre de variables est sans importance (*b*, III, p. 169, ou *c*, p. 382).

6. *Caractère lipschitzien de* ρ. — Nous allons montrer que, dans tout ensemble fermé intérieur à $\mathcal{D}_1$, la fonction ρ qui fait partie d'une solution quelconque de notre système de Fredholm, est lipschitzienne d'exposant h si $h < 1$. Il en résultera aussitôt que les dérivées secondes de la fonction u correspondante sont continues en tout point de $\mathcal{D}$ (§ 3), et que par suite cette fonction u est une solution du problème proposé.

Supposons d'abord $ph > 1$. Les deux fonctions ρ et σ sont nécessairement bornées. Montrons qu'alors $\int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} K(X, A)\rho(A)\,dV_A$ est lipschitzien d'exposant $\frac{h}{2}$ dans tout ensemble fermé intérieur à $\mathcal{D}_1$. Nous avons tout d'abord les termes

$$(5) \qquad \int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} [a_{\alpha,\beta}(X) - a_{\alpha,\beta}(A)] \frac{\partial^2 H(X, A; o)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \rho(A)\,dV_A;$$

dans tout $\mathcal{D}_1$, ils sont certainement lipschitziens d'exposant quelconque inférieur à h (I, 10, 13). Puis

$$b_\alpha(X) \int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} \frac{\partial H(X, A; o)}{\partial x_\alpha} \rho(A)\,dV_A \qquad \text{et} \qquad c(X) \int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} H(X, A; o)\rho(A)\,dV_A$$

sont lipschitziens d'exposant h si $h < 1$ (I, 1, 13). L'autre intégrale de la même équation (3), $\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} K^{(p+1)}(X, A)\sigma(A)\,dS_A$, est aussi lipschitzienne d'exposant $\frac{h}{2}$ car, par suite de notre hypothèse sur p, elle peut s'écrire

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(\Xi) \int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} K(X, A) K^{(p)}(A, \Xi)\,dV_A\,dS_\Xi$$
$$= \int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} K(X, A) \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} K^{(p)}(A, \Xi)\sigma(\Xi)\,dS_\Xi\,dV_A;$$

or l'intégrale d'ordre $m-1$ est bornée; donc l'intégrale donnée est lipschitzienne d'exposant $\frac{h}{2}$. Tous les termes autres que ρ, dans notre équation, sont donc lipschitziens d'exposant $\frac{h}{2}$ au moins; donc ρ lui-même est lipschitzien d'exposant $\frac{h}{2}$.

Pour arriver à l'exposant h (si $h<1$), remarquons alors que l'intégrale

$$\int^{(m)} \frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{A};0)}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}\rho(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}$$

étendue à la région de $\mathcal{O}_1$ telle que $\mathrm{L}(\mathrm{X},\mathrm{A})>\delta>0$ est bornée quand δ varie. En effet il en est d'abord ainsi pour

$$\int^{(m)} \frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{A};0)}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}[\rho(\mathrm{A})-\rho(\mathrm{X})]\, d\mathrm{V}_\mathrm{A},$$

puisque cette intégrale porte sur $\mathrm{O}\left[\mathrm{L}^{\frac{h}{2}-m}(\mathrm{X},\mathrm{A})\right]$. Puis

$$\rho(\mathrm{X})\int^{(m)}\left[\frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{A};0)}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}-\frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{A},\mathrm{X};0)}{\partial a_\alpha\, \partial a_\beta}\right]d\mathrm{V}_\mathrm{A}$$

porte sur $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{h-m}(\mathrm{X},\mathrm{A})]$ et est donc aussi borné. Enfin

$$\int^{(m)} \frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{A},\mathrm{X};0)}{\partial a_\alpha\, \partial a_\beta}\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}$$

est borné (I, 9) puisqu'on est à une distance de la frontière de $\mathcal{O}_1$ supérieure à un minimum positif. Donc (I, 8, 10, 13) l'intégrale (5) est lipschitzienne d'exposant h dans l'ensemble donné. Il en est par suite de même des termes autres que ρ dans l'équation (3); donc ρ lui-même est lipschitzien d'exposant h.

Si maintenant $ph\leqq 1<(p+1)h$, soient ρ' et σ' les inconnues qui correspondraient à l'entier $p+1$ (en supposant qu'elles existent). Il est évident que

$$\rho(\mathrm{X})=\rho'(\mathrm{X})-2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}\mathrm{K}^{(p+1)}(\mathrm{X},\mathrm{A})\sigma'(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A}, \qquad \sigma=\sigma';$$

par suite ρ *est encore lipschitzien d'exposant* h. D'ailleurs ces relations se résolvent par rapport à ρ' et à σ', de sorte qu'il est certain que ces dernières fonctions existent.

7. *Un cas où le problème est soluble.* — Nous renvoyons à un Mémoire cité (c, p. 383 et 384) pour la démonstration du résultat suivant :

Si $\mathcal{D}$ est homothétique d'un domaine donné dans le rapport variable λ par rapport à un centre d'homothétie situé à l'intérieur du domaine où les coefficients de l'équation sont lipschitziens; si de plus ψ est remplacé par $\lambda^{-1}\psi$ où ψ est une fonction positive donnée d'un point de la frontière du domaine donné, notre système de Fredholm, et par suite le problème donné, sont certainement solubles si λ est assez voisin de zéro.

De plus, le problème n'a qu'une solution (d, addition, p. 266).

CHAPITRE IV.

DÉRIVÉES D'ORDRE QUELCONQUE A L'INTÉRIEUR DU CHAMP.

1. *Énoncé: introduction d'un problème de Neumann.* — Supposons que les coefficients et le second membre de l'équation du type elliptique

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu = f \tag{1}$$

sont lipschitziens d'exposant $h < 1$ dans un domaine borné ouvert $\mathcal{D}$. Alors *si les dérivées secondes d'une solution u sont continues en tout point de $\mathcal{D}$, elles sont lipschitziennes d'exposant h dans tout domaine fermé intérieur à $\mathcal{D}$.*

Pour le démontrer, nous allons prouver qu'à tout point de $\mathcal{D}$ on peut attacher un nombre r, tel que les dérivées secondes de u soient lipschitziennes d'exposant h dans l'hypersphère [1] de rayon r qui a pour centre ce point. Le domaine fermé donné pouvant être recouvert par un nombre fini de telles hypersphères, cela suffira à notre démonstration.

Nous pouvons prendre pour origine O le point donné de $\mathcal{D}$. Soient $\mathcal{D}_1$ l'hypersphère de centre O et de rayon $2r$ (r étant pour le moment indéterminé) et $\mathcal{D}_2$ l'hypersphère de centre O et de rayon $3r$. Sur la

---

[1] Nous employons cette expression parce que m peut être supérieur à 3.

frontière $\mathfrak{S}_1$ de $\mathfrak{D}_1$, on a

$$\frac{1}{2r}\left(\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + u\right) = \varphi,$$

φ étant une fonction continue, qui dépend aussi de r. D'après ce qu'on a vu (III, 7), si r est assez petit, le problème de Neumann consistant à calculer u en se servant de l'équation (1) et de cette condition est soluble par la méthode du chapitre précédent dès que r est assez petit. Le domaine $\mathfrak{D}_1$ du chapitre précédent (III, 2) sera ici remplacé par $\mathfrak{D}_2$. Le raisonnement cité (*c*, p. 383 et 384) prouve qu'une limite supérieure de r au-dessous de laquelle le problème est certainement possible peut être fixée connaissant des limites supérieures des valeurs absolues des coefficients de l'équation et de leurs coefficients lipschitziens pour l'exposant h et connaissant en outre une limite inférieure positive du déterminant des $a_{\alpha,\beta}$. Le problème est en outre bien déterminé (*voir* ci-après, XI, des raisonnements qui peuvent sur ce point remplacer ceux de *d*, p. 266).

2. *Dérivées secondes de la première intégrale.* — Nous savons (III, 6) que ρ est lipschitzien d'exposant h dans tout domaine fermé intérieur à $\mathfrak{D}_2$. Je dis qu'en conséquence, *les dérivées secondes du premier terme de u*

$$-\int_{\mathfrak{D}_2}^{(m)} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)\rho(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}$$

sont lipschitziennes d'exposant h dans $\mathfrak{D}_1$.

En effet (I, 12) :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}&\int_{\mathfrak{D}_2}^{(m)} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)\rho(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}\\ &= \int_{\mathfrak{D}_2}^{(m)} \left[\frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\rho(\mathrm{A}) - \frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{A}, \mathrm{X}; 0)}{\partial a_\alpha \partial a_\beta}\rho(\mathrm{X})\right] d\mathrm{V}_\mathrm{A}\\ &\quad + \rho(\mathrm{X})\int_{\mathfrak{S}_2}^{(m-1)} \frac{\partial \mathrm{H}(\mathrm{A}, \mathrm{X}; 0)}{\partial a_\alpha}\varpi_\beta(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A},\end{aligned}$$

$\mathfrak{S}_2$ étant la frontière de $\mathfrak{D}_2$. Or, au second membre, l'intégrale d'ordre

$m-1$ est évidemment, dans $\mathcal{D}_1$, fonction lipschitzienne d'exposant h, car on peut la considérer comme fonction composée des x_α par l'intermédiaire des $a_{\beta,\gamma}(X)$ et des x_α eux-mêmes : or, dans $\mathcal{D}_1$, les dérivées relatives à ces fonctions intermédiaires sont continues, et ces fonctions intermédiaires sont lipschitziennes d'exposant h.

A la première intégrale du second membre, nous pouvons appliquer le théorème (I, 7); ce sont les $a_{\gamma,\varepsilon}(X)$ et $\rho(X)$ qui jouent le rôle des $w_n(X)$ du théorème. Le nombre λ est ici égal à 1, ce qui montre déjà que cette intégrale admet n'importe quel exposant lipschitzien inférieur à h.

Pour montrer qu'elle admet l'exposant h, on va vérifier les hypothèses supplémentaires (I, 8). Les dérivées secondes relatives aux $a_{\gamma,\varepsilon}(X)$ et à $\rho(X)$ existent et sont $O[L^{-m}(X, A)]$. D'autre part, en dérivant par rapport à ρ, on a à considérer l'intégrale

$$\int^{(m)} \frac{\partial^2 H(A, X; 0)}{\partial a_\alpha \, \partial a_\beta} dV_A,$$

étendue à la partie de $\mathcal{D}_2$, telle que $L(X, A) > \delta$, δ étant positif variable : elle est bornée dans $\mathcal{D}_1$ (I, 9). La dérivée par rapport à $a_{\gamma,\varepsilon}(X)$, intégrée dans le même domaine, conduit à

$$\rho(X) \int^{(m)} \frac{\partial}{\partial a_\beta} \frac{\partial^2}{\partial a_\alpha \, \partial a_{\gamma,\varepsilon}} H(A, X; 0) \, dV_A;$$

elle est donc encore bornée dans $\mathcal{D}_1$ (I, 9).

Donc (I, 8) les dérivées secondes de ce terme de u sont lipschitziennes d'exposant h.

3. *Dérivées secondes de la deuxième intégrale.* — Je dis maintenant que les dérivées secondes de la deuxième partie de u

$$2 \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} H(X, A; p) \sigma(A) \, dS_A,$$

sont lipschitziennes d'exposant h dans l'hypersphère $\mathcal{D}'$ de centre O et de rayon r.

Il est tout d'abord évident que le premier terme

$$\int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; \mathrm{o})\sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$

est holomorphe dans $\mathcal{D}'$.

Passons à l'un quelconque des termes suivants; il peut s'écrire

$$\int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \sigma(\Xi) \int_{\mathcal{D}_2}^{(m)} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; \mathrm{o})\mathrm{K}^{(n)}(\mathrm{A}, \Xi)\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}\, d\mathrm{S}_\Xi.$$

Soit $\mathcal{D}''$ l'hypersphère de centre O et de rayon $\frac{3r}{2}$; il est clair que

$$\int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \sigma(\Xi) \int_{\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}''}^{(m)} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; \mathrm{o})\mathrm{K}^{(n)}(\mathrm{A}, \Xi)\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}\, d\mathrm{S}_\Xi$$

est holomorphe dans $\mathcal{D}'$, car X est alors extérieur au domaine $\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}''$. Il reste à examiner une intégrale qui peut s'écrire

$$\int_{\mathcal{D}''}^{(m)} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; \mathrm{o}) \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \mathrm{K}^{(n)}(\mathrm{A}, \Xi)\sigma(\Xi)\, d\mathrm{S}_\Xi\, d\mathrm{V}_\mathrm{A},$$

car, A étant dans $\mathcal{D}''$, $\mathrm{K}^{(n)}(\mathrm{A}, \Xi)$ est continu sur $\mathcal{S}_1$ et la permutation des intégrations est légitime. D'après ce qui précède (§ 2), il nous suffit de prouver que

$$\int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \mathrm{K}^{(n)}(\mathrm{X}, \Xi)\sigma(\Xi)\, d\mathrm{S}_\Xi$$

est lipschitzien d'exposant h dans un domaine contenant $\mathcal{D}''$ et contenu dans $\mathcal{D}_1$. C'est évident si $n = 1$. Si $n > 1$, cette fonction est

$$\int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \sigma(\Xi) \int_{\mathcal{D}_2 - \Omega(n-1)}^{(m)} \mathrm{K}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\mathrm{K}^{(n-1)}(\mathrm{A}, \Xi)\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}\, d\mathrm{S}_\Xi$$
$$+ \int_{\Omega(n-1)}^{(m)} \mathrm{K}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \mathrm{K}^{(n-1)}(\mathrm{A}, \Xi)\sigma(\Xi)\, d\mathrm{S}_\Xi\, d\mathrm{V}_\mathrm{A},$$

les $\Omega(n)$ $(n = 1, 2, \ldots, p)$ étant des hypersphères de rayons décroissant depuis un nombre inférieur à $2r$ jusqu'à un nombre supérieur à $\frac{3r}{2}$. Dans le premier terme, on peut considérer $K(X, A)$ comme fonction composée de X par l'intermédiaire des x_α, des $a_{\alpha,\beta}(X)$, des $b_\alpha(X)$ et de $c(X)$: la dérivation sous le signe $\int$ étant légitime par rapport à toutes ces fonctions, ce terme est lipschitzien d'exposant h dans $\Omega(n)$. Dans le second terme, si l'on a déjà démontré que

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} K^{(n-1)}(A, \Xi)\sigma(\Xi)\, dS_\Xi$$

est lipschitzien dans $\Omega(n-1)$, ce second terme est lipschitzien d'exposant h dans $\Omega(n)$ (*voir* un point de la démonstration III, 6). On voit bien ainsi que toutes ces intégrales sont lipschitziennes d'exposant h dans le domaine $\Omega(p)$ contenant $\mathcal{D}''$.

Nous avons ainsi fini de démontrer que les dérivées secondes de u sont lipschitziennes d'exposant h dans $\mathcal{D}'$. Par suite la proposition énoncée au début du chapitre est aussi démontrée.

4. *Dérivées troisièmes.* — *Si, outre les hypothèses précédentes* (§ 1), *les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$, des b_α, de c et de f sont lipschitziennes d'exposant $h < 1$ dans $\mathcal{D}$, les dérivées troisièmes de u existent et sont lipschitziennes d'exposant h dans tout ensemble fermé intérieur à $\mathcal{D}$.*

En effet, nous avons maintenant

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{\mathcal{D}_2}^{(m)} K(X, A)\rho(A)\, dV_A = &\int_{\mathcal{D}_2}^{(m)} \frac{\partial K}{\partial x_\alpha}(X, A)[\rho(A)-\rho(X)]\, dV_A \\ &+\rho(X)\int_{\mathcal{D}_2}^{(m)}\left(\frac{\partial K}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial K}{\partial a_\alpha}\right)dV_A - \rho(X)\int_{\mathcal{S}_2}^{(m-1)} K(X, A)\varpi_\alpha(A)\, dS_A.\end{aligned}$$

On constate toujours de la même façon (I, 7) que tous les termes sont lipschitziens d'exposant quelconque inférieur à h. Le même calcul montre que, pour p assez grand, les dérivées de $K^{(p+1)}(X, A)$ sont lipschitziennes et qu'il en est par suite de même de celles de

$$\int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} K^{(p+1)}(X, A)\sigma(A)\, dS_A.$$

Donc les dérivées de ρ existent et sont lipschitziennes. Alors

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \int_{\mathcal{D}_2}^{(m)} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)\rho(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}}$$
$$= \int_{\mathcal{D}_2}^{(m)} \left[\frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\rho(\mathrm{A}) + \frac{\partial^2 \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)}{\partial x_\alpha \partial a_\beta}\rho(\mathrm{A}) + \frac{\partial \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \rho}{\partial a_\beta}\right] d\mathrm{V}_{\mathrm{A}}$$
$$- \int_{\mathcal{S}_2}^{(m-1)} \frac{\partial \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)}{\partial x_\alpha}\rho(\mathrm{A})\varpi_\beta(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}};$$

les dérivées de l'intégrale d'ordre $m - 1$ existent et sont continues dans tout ensemble fermé intérieur à $\mathcal{D}_1$; il en est de même des dérivées de l'intégrale d'ordre m $\left(\text{I, 12, les } \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial a_\gamma} \text{ et } \frac{\partial \rho}{\partial a_\beta} \text{ jouant le rôle des } w_n\right)$. On démontre de même que les dérivées troisièmes de l'autre terme de u sont continues. Donc les dérivées troisièmes de u existent et sont continues. Si $\frac{\partial x_\lambda}{\partial u} = v$, on a donc

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} + cv$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} - \Sigma_{\alpha,\beta} \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Sigma_\alpha \frac{\partial b_\alpha}{\partial x_\lambda}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial c}{\partial x_\lambda} u;$$

le second membre étant lipschitzien d'exposant h, il en est de même (§ 1) des dérivées secondes de v, donc des dérivées troisièmes de u.

5. *Dérivées d'ordre quelconque. — Si, outre les hypothèses précédentes, les dérivées d'ordre q des $a_{\alpha,\beta}$, des b_α, de c et de f sont lipschitziennes d'exposant $h < 1$ dans $\mathcal{D}$, les dérivées d'ordre $q + 2$ de u existent et sont lipschitziennes d'exposant h dans tout ensemble fermé intérieur à $\mathcal{D}$.*

En effet, si $q = 1$, c'est la proposition précédente.

Si $q \geqq 2$, reprenons l'équation en v ci-dessus : les dérivées du second membre existent et sont lipschitziennes d'exposant h (§ 4); donc les dérivées troisièmes de v existent et sont lipschitziennes d'exposant h, c'est-à-dire que, si $q = 2$, le théorème est vérifié.

Mais alors, si $q \geqq 3$, les dérivées secondes du second membre existent et sont lipschitziennes d'exposant h; donc les dérivées quatrièmes de v

existent et sont lipschitziennes d'exposant h, c'est-à-dire que, si $q=3$, le théorème est vérifié.

Et ainsi de suite si $q>3$.

CHAPITRE V.

SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES PRINCIPALES.

1. *Solutions élémentaires : définition.* — D'après ce qu'on a vu, si $(p-1)h>m$, $K^{(p-1)}(X,\Xi)$ est une fonction continue de X (III, 2) et par suite $K^{(p)}$ (X, Ξ est une fonction lipschitzienne (III, 6), il en résulte que les dérivées secondes, par rapport à X, de

$$\int^{(m)} H(X, A; o) K^{(p)}(A, \Xi) \, dV_A$$

existent et sont lipschitziennes (III, 3). Donc si l'on donne à p différentes valeurs remplissant cette condition, les fonctions $H(X, \Xi; p)$ ne diffèrent les unes des autres que par des fonctions dont les dérivées secondes, relatives à X, sont lipschitziennes.

Nous nommons *solution élémentaire* de l'équation homogène *toute fonction* $F(X, \Xi)$ *satisfaisant à l'équation relativement à* X, *et ne différant de* $H(X, \Xi; p)$ *que par une fonction continue ainsi que ses dérivées jusqu'au second ordre relatives à* X.

On pourrait, au moins dans certains cas, donner une définition plus simple (*b*, V, th. 1, p. 192). On a ici un peu modifié la définition admise antérieurement : on a changé le facteur numérique qui figure dans l'expression de $H(X, \Xi; o)$ et l'on a ajouté le facteur $\frac{1}{\sqrt{D(\Xi)}}$. C'est M. Hadamard qui a proposé le nom de solution élémentaire.

2. *Équation* $\Sigma_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u = o$. — L'équation

$$\Sigma_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u = o,$$

où g est une constante positive, admet une solution élémentaire très remarquable, dont l'expression va être rappelée (*b*, V, th. 2, p. 195). Si $r = L(X, \Xi)$, cette solution, déduite des travaux de M. Whittaker sur les fonctions hypergéométriques confluentes (¹) et déjà considérée par M. Picard pour $m = 2$ et pour $m = 3$ (²), est

$$\mathrm{F}(r) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)} \frac{e^{-gr}}{2g}\left(\frac{g}{2\pi r}\right)^{\frac{m-1}{2}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{m-3}{2}}\left(1+\frac{t}{2gr}\right)^{\frac{m-3}{2}} e^{-t}\,dt \qquad (m \geqq 2).$$

Quand r tend vers zéro, cette fonction a la partie principale exigée,

$$2^{-2}\pi^{-\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)r^{2-m}\,(m>2), \qquad \frac{-\log r}{2\pi}\,(m=2),$$

et, pour r infini, elle admet le développement asymptotique, indéfiniment dérivable terme à terme,

$$\frac{e^{-gr}}{2g}\left(\frac{g}{2\pi r}\right)^{\frac{m-1}{2}}\left\{1+\Sigma_n \frac{(-2gr)^{-n}}{n\,!}\prod_{p=1}^{n}\left[\left(\frac{2p-1}{2}\right)^2-\left(\frac{m-2}{2}\right)^2\right]\right\},$$

c'est-à-dire qu'elle tend vers zéro, ainsi que ses dérivées de tout ordre, comme des fonctions exponentielles décroissantes de r; nous dirons qu'alors ces fonctions *tendent exponentiellement vers zéro*.

3. *Solution élémentaire principale; définition.* — Considérons une équation du type elliptique (II, 8)

$$\mathcal{F}u = \Sigma_{\alpha,\beta}a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu = 0 \qquad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

à coefficients lipschitziens dans tout l'espace, et qui, hors d'un certain domaine borné, se réduit à

$$\mathcal{F}u = \Sigma_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u = 0 \qquad (g = \text{constante positive}).$$

Nous nommons *solution élémentaire principale* de cette équation une solution élémentaire $\mathrm{G}(\mathrm{X},\ \Xi)$, définie quel que soit $\mathrm{X} \neq \Xi$, et qui tend vers zéro, ainsi que ses dérivées de tout ordre, comme des fonc-

(¹) Whittaker et Watson, *Modern Analysis*, Chap. XVI.

(²) Émile Picard, *Bulletin de la Société mathématique*, t. 28, 1900, p. 186 à 191, et *Selecta*, p. 231 à 247, ou *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 37, 1914, p. 249 à 261.

tions exponentielles décroissantes de $L(X, \Xi)$ quand, Ξ restant fixe, cette distance augmente indéfiniment.

Les conditions imposées aux coefficients de $\mathcal{F}$ hors d'un domaine borné peuvent sembler fort étroites et artificielles. Il serait évidemment intéressant de prouver l'existence de fonctions pouvant remplacer G, dans des conditions plus générales sous ce rapport, mais ce n'est pas nécessaire pour notre but actuel, car les questions que nous traiterons seront relatives à des domaines bornés, et par suite nous pourrons, hors de ces domaines, définir l'équation de façon à satisfaire aux hypothèses actuelles.

4. *Premières conditions suffisantes d'existence.* — Dans $\mathcal{F}u$, ne changeons pas les $a_{\alpha,\beta}$ ni les b_α, mais imaginons que $c(X)$ soit remplacé par une fonction $c(X, g)$ du point X et de la variable positive g, se réduisant à $-g^2$ hors d'un certain domaine borné, et telle que $c(X, g)+g^2$ soit borné quand X et g varient [hypothèse satisfaite, notamment, si $c(X, g)=-g^2$ quels que soient X et g].

Alors, *si g est assez grand*, $G(X, \Xi)$ *existe.*

Pour le démontrer, admettons d'abord l'existence de G. Posons

$$H(X, \Xi; o)=\frac{1}{\sqrt{D(\Xi)}}F\left[\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta)}\right],$$

où F a la signification déjà dite (§ 2). Ensuite posons, comme plus haut (III, 1),

$$K(X, \Xi)=\mathcal{F}H(X, \Xi; o).$$

Si l'on remarque que

$$\begin{aligned}\Sigma_{\alpha,\beta}a_{\alpha,\beta}(\Xi)\frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}&=\frac{F''\left[\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta)}\right]}{\sqrt{D(\Xi)}\,\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta}\\&\quad\times\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}a_{\alpha,\beta}(\Xi)A_{\alpha,\gamma}(\Xi)A_{\beta,\delta}(\Xi)(x_\gamma-\xi_\gamma)(x_\delta-\xi_\delta)\\&\quad+\frac{F'\left[\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta)}\right]}{\sqrt{D(\Xi)}\left[\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta)\right]^{\frac{3}{2}}}\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}a_{\alpha,\beta}(\Xi)\\&\quad\times\left[A_{\alpha,\beta}(\Xi)A_{\gamma,\delta}(\Xi)-A_{\alpha,\gamma}(\Xi)A_{\beta,\delta}(\Xi)\right](x_\gamma-\xi_\gamma)(x_\delta-\xi_\delta)\\&=\frac{1}{\sqrt{D(\Xi)}}\left\{F''\left[\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta)}\right]\right.\\&\qquad\left.+(m-1)\frac{F'\left[\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x_\alpha-\zeta_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta)}\right]}{\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta}A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta)}}\right\}\\&=g^2H(X, \Xi; o),\end{aligned}$$

on trouve que, comme avec l'autre définition,

$$K(X, \Xi) = O(L^{h-m}(X, \Xi)],$$

h étant l'exposant lipschitzien des $a_{\alpha,\beta}$, car

$$K(X, \Xi) = \Sigma_{\alpha,\beta}[a_{\alpha,\beta}(X) - a_{\alpha,\beta}(\Xi)]\frac{\partial^2 H}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha(X)\frac{\partial H}{\partial x_\alpha} + [c(X, g) + g^2]H.$$

On voit de plus que si, Ξ restant fixe, $L(X, \Xi)$ augmente indéfiniment, K tend vers zéro comme une fonction exponentielle décroissante de L. Si X et Ξ sont tous deux extérieurs à un certain domaine borné, K est identiquement nul (ceci a lieu même si, hors d'un certain domaine borné, les $a_{\alpha,\beta}$ sont supposés constants, sans plus, au lieu de particulariser comme plus haut ces constantes).

Posons alors, comme plus haut (III, 2),

$$K^{(1)}(X, \Xi) = K(X, \Xi), \qquad K^{(n)}(X, \Xi)] = \int^{(m)} (K^{(n-1)}(X, A)K(A, \Xi)\, dV_A,$$

$$H(X, \Xi; p) = H(X, \Xi; o) + \sum_{n=1}^{p} \int^{(m)} H(X, A; o)K^{(n)}(A, \Xi)\, dV_A,$$

les intégrales étant, cette fois, étendues à tout l'espace. On a encore (III, 3)

$$\mathcal{F}H(X, \Xi; p) = K^{(p+1)}(X, \Xi).$$

On a donc évidemment

$$\mathcal{F}[G(X, \Xi) - H(X, \Xi; o)] = - K(X, \Xi).$$

Mais la fonction

$$u(X, \Xi) = \int^{(m)} G(X, A)K(A, \Xi)\, dV_A$$

satisfait évidemment à l'équation

$$\mathcal{F}u(X, \Xi) = - K(X, \Xi) \qquad (X \neq \Xi)$$

car le second membre est lipschitzien. Donc

$$\mathcal{F}[G(X, \Xi) - H(X, \Xi; o) - u(X, \Xi)] = o.$$

Si nous admettons que

$$G(X, \Xi) - H(X, \Xi; 0) = u(X, \Xi),$$

u satisfait donc à l'équation intégrale

$$u(X, \Xi) = \int^{(m)} u(X, A) K(A, \Xi)\, dV_A + H(X, \Xi; 1) - H(X, \Xi; 0).$$

Malgré le champ infini de l'intégrale, la théorie de Fredholm s'applique à cette équation, en y regardant X comme un système de paramètres. En effet, traçons une hypersphère de centre O et de rayon R assez grand pour que K soit nul quand les deux points sont hors de cette hypersphère. Si A est extérieur à cette hypersphère, le point A′ donné par l'inversion

$$a'_\alpha = \frac{R^2 a_\alpha}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

lui est intérieur ; on a alors

$$\frac{d(a'_1, a'_2, \ldots, a'_m)}{d(a_1, a_2, \ldots, a_m)} = -\left(\frac{R^2}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2}\right)^m.$$

Soit Ξ' le point qui correspond à Ξ par la même inversion. Posons, pour un instant, si Ξ et A sont tous deux intérieurs à l'hypersphère,

$$K(A, \Xi) = N_1(A, \Xi);$$

si Ξ est intérieur et A extérieur, posons

$$K(A, \Xi) = -\left(\frac{a_1'^2 + a_2'^2 + a_m'^2}{R^2}\right)^m N_2(A', \Xi);$$

si Ξ est extérieur et A intérieur, posons

$$K(A, \Xi) = N_3(A, \Xi').$$

Si l'on a des fonctions $v(\Xi)$, $\varphi(\Xi)$, nous poserons de même, pour Ξ extérieur à l'hypersphère,

$$v(\Xi) = v'(\Xi'), \qquad \varphi(\Xi) = \varphi'(\Xi').$$

Dans ces conditions, l'équation intégrale

$$v(\Xi) = \int^{(m)} v(A) K(A, \Xi)\, dV_A + \varphi(\Xi)$$

où l'intégrale est étendue à tout l'espace, peut être remplacée par le système

$$\varphi(\Xi) = \int^{(m)} \varphi(A) N_1(A, \Xi)\, dV_A + \int^{(m)} \varphi'(A) N_2(A, \Xi)\, dV_A + \varphi(\Xi),$$

$$\varphi'(\Xi) = \int^{(m)} \varphi(A) N_3(A, \Xi)\, dV_A + \varphi'(\Xi),$$

où les points A et Ξ sont dans l'hypersphère à laquelle sont étendues les intégrales. Mais $N_1 = O[L^{h-m}(A, \Xi)]$ quand A tend vers Ξ, et N_2 et N_3 sont partout continus : donc la théorie de Fredholm s'applique. Si φ' s'annule à l'origine, nous voyons qu'il en est de même de φ', car $N_3(A, O)$ est identiquement nul. Pour appliquer la théorie de Fredholm, il n'est dorénavant plus nécessaire de recourir à cet artifice, car les séries introduites par Fredholm se transforment terme à terme si l'on fait subir aux deux points du noyau une même transformation.

Donc, si l'on n'est pas dans le cas d'un pôle de la résolvante, notre équation en $u(X, \Xi)$ admet une solution et une seule, et ce qui vient d'être dit prouve même que $u(X, \Xi)$ tend vers zéro quand, X tendant vers une limite, Ξ s'éloigne indéfiniment (*voir b*, V, th. 2, p. 197 et 198). Il en est de même si, Ξ tendant vers une limite, X s'éloigne indéfiniment, car le second membre tend uniformément vers zéro et la limite est atteinte de façon exponentielle; de même encore si X et Ξ s'éloignent tous deux indéfiniment de O, $u(X, \Xi)$ tend vers zéro. Si Ξ tend vers X, $u(X, \Xi) = O[L^{2+h-m}(X, \Xi)]$, comme le second membre. Ce second membre a, relativement à X, des dérivées premières et secondes valant respectivement $O[L^{1+h-m}(X, \Xi)]$ et $O[L^{h-m}(X, \Xi)]$; on en conclut la même chose pour les dérivées premières et secondes de $u(X, \Xi)$ relativement à X. On a donc

$$\mathcal{F} u(X, \Xi) = \int^{(m)} \mathcal{F} u(X, A) K(A, \Xi)\, dV_A + K^{(2)}(X, \Xi) - K(X, \Xi),$$

d'où, puisque la solution est unique

$$\mathcal{F} u(X, \Xi) = -K(X, \Xi).$$

En outre les dérivées de tout ordre, relatives à X, existent pour $L(O, X)$ assez grand et tendent exponentiellement vers zéro, uniformément par rapport à Ξ, quand $L(O, X)$ augmente indéfiniment. Il est évident aussi que, si p est assez grand et que

$$u(X, \Xi) = H(X, \Xi; p) - H(X, \Xi; 0) + v(X, \Xi),$$

les dérivées secondes de v, relatives à X, sont continues.

La fonction $H(X, \Xi; 0) + u(X, \Xi)$ jouit donc des propriétés exigées de G; on peut donc bien la prendre égale à G. Il n'y a d'ailleurs pas d'autre fonction G possible, au moins si g est assez grand pour que $c(X, g)$ soit négatif, car la différence de deux telles fonctions a ses dérivées secondes partout continues, elle s'annule à l'infini et elle ne peut avoir nulle part de maximum positif ni de minimum négatif (*voir*, sur ce point, l'adaptation d'un raisonnement célèbre de Paraf, *b*, V, th. 2, p. 200, note); elle est donc identiquement nulle.

Tout revient donc à prouver que l'équation homogène

$$v(\Xi) = \int^{(m)} v(A) K(A, \Xi) \, dV_A$$

n'a que la solution zéro. Il en est ainsi notamment si

$$\int^{(m)} |K(A, \Xi)| \, dV_A < q < 1,$$

q étant indépendant de Ξ, car alors, si M, supposé positif, est le maximum de $|v|$, on a

$$\left| \int^{(m)} v(A) K(A, \Xi) \, dV_A \right| < qM,$$

ce qui, en mettant Ξ à l'endroit où $|v| = M$, conduit à une contradiction.

Nous allons voir que cette condition suffisante est remplie si g est assez grand. Prenons d'abord dans K un des termes

$$[a_{\alpha,\beta}(A) - a_{\alpha,\beta}(\Xi)] \frac{\partial^2 H(A, \Xi; 0)}{\partial a_\alpha \, \partial a_\beta},$$

dont nous intégrerons la valeur absolue; par un changement linéaire effectué sur les $a_\gamma - \xi_\gamma$, de façon à changer $\Sigma_{\gamma,\delta} A_{\gamma,\delta}(\Xi)(a_\gamma - \xi_\gamma(a_\delta - \xi_\delta)$

en $\Sigma_\gamma(\alpha_\gamma - \xi_\gamma)^2$, on trouve que cette intégrale est moindre que

$$\mathrm{M}\int^{(m)} r^h \Sigma_{\gamma,\delta}\left|\frac{\partial^2}{\partial a_\gamma \partial a_\delta}\mathrm{F}(r)\right| d\mathrm{V}_{\mathrm{A}}\,[r = \mathrm{L}(\mathrm{A}, \Xi)],$$

M étant une constante indépendante de Ξ et $\mathrm{F}(r)$ étant la fonction définie plus haut (§ 2). Par une homothétie de rapport g, ceci devient

$$\mathrm{M}\,g^{-h}\int^{(m)} r^h \Sigma_{\gamma,\delta}\left|\frac{\partial^2}{\partial a_\gamma \partial a_\delta}\mathrm{F}_1(r)\right| d\mathrm{V}_{\mathrm{A}},$$

F_1 étant la fonction analogue à F, mais relative à $g = 1$. Quand g augmente indéfiniment, la limite est donc zéro. On voit de même que

$$\int^{(m)}\left| b_\alpha(\mathrm{A})\frac{\partial \mathrm{H}(\mathrm{A}, \Xi; 0)}{\partial a_\alpha}\right| d\mathrm{V}_{\mathrm{A}} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{g}\right),$$

et que

$$\int^{(m)} |[c(\mathrm{A}, g) + g^2]\mathrm{H}(\mathrm{A}, \Xi; 0)|\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}} = \mathrm{O}(g^{-2})$$

[cette dernière intégrale tendrait encore vers zéro si l'on supposait seulement que $g^{-2}[c(\mathrm{A}, g) + g^2]$ tend vers zéro uniformément par rapport à A]. Toutes ces intégrales tendant vers zéro, uniformément par rapport à Ξ, l'inégalité voulue est satisfaite pour g assez grand et le théorème est démontré.

5. *Retour à l'équation* $\sum_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u = 0$. — Si

$$\mathcal{F}(u) = \sum_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u,$$

l'opération adjointe $\mathcal{G}u$ est identique à $\mathcal{F}u$. La solution élémentaire principale $\mathrm{G}(\mathrm{X}, \Xi)$, si g est positif, est la fonction $\mathrm{F}(r)$ déjà définie (§ 2). Si $\psi(\Xi)$ est une fonction continue quelconque d'un point X d'une multiplicité remplissant les conditions déjà dites (II, 1), et si n est la normale à $\mathcal{S}$ dirigée dans le sens $(\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m)$,

$$\Theta u(\mathrm{X}) = \mathrm{Z}u(\mathrm{X}) = \frac{du}{dn} + \psi(\mathrm{X})\,u(\mathrm{X});$$

néanmoins, même dans ce cas, il est utile de distinguer Θ de Z quand ces opérations doivent être appliquées à une fonction de deux points, telle que $G(X, \Xi)$, car (II, 7) cela indique sur quel point porte l'opération; de même pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

En attendant une étude plus approfondie et plus générale, nous allons considérer, pour $G(X, \Xi) = F(r)$, les intégrales

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\rho(A)\,dV_A, \quad \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A)\sigma(A)\,dS_A,$$
$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\sigma(A)\,dS_A,$$

où ρ et σ sont des fonctions de points de $\mathcal{D}$ ou de $\mathcal{S}$; nous les nommerons respectivement *potentiel de domaine*, *potentiel de simple couche*, *potentiel de double couche*.

6. Lemme. — *Si, en plus des hypothèses déjà faites* (II, 1), *les dérivées secondes des coordonnées des points de* $\mathcal{S}$, *par rapport aux* $m-1$ *paramètres, sont lipschitziennes d'exposant* h *ainsi que les dérivées de* $\psi(A)$, *et si les valeurs limites du potentiel de double couche*

$$u(X) = 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\sigma(A)\,dS_A \qquad [G = F(r)],$$

quand X *tend vers les points d'une région de* $\mathcal{S}$ *en occupant des positions situées d'un même côté de* $\mathcal{S}$, *ont, par rapport aux paramètres des points de* $\mathcal{S}$, *des dérivées lipschitziennes, les dérivées de* σ *par rapport à ces paramètres existent et sont lipschitziennes dans tout ensemble fermé sans point commun avec la frontière de cette région de* $\mathcal{S}$.

Les valeurs limites en question sont

$$u(X) = \pm\sigma(X) + 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\sigma(A)\,dS_A;$$

$+$ si X vient du côté de $\mathcal{S}$ vers où est dirigée la normale n, $-$ dans le cas contraire. Il y a donc à prouver que les dérivées de

$$(1) \qquad \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\sigma(A)\,dS_A,$$

relatives aux paramètres des points de $\mathfrak{S}$, existent et sont lipschitziennes.

Remarquons que σ est nécessairement continu. En effet nous avons, X étant sur $\mathfrak{S}$, une équation de Fredholm en σ, dont le noyau vaut $O[L^{2-m}(X, A)]$ (*b*, IV, p. 175) et est continu pour $X \neq A$; $u(X)$ étant continu, toute solution est continue ([1]).

Introduisons les paramètres $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ de X considéré comme point de $\mathfrak{S}$, et les paramètres correspondants $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$ pour A; nous pouvons ne considérer qu'une région de $\mathfrak{S}$ pour laquelle une seule représentation paramétrique suffit. Soit alors

$$ZG(X, A) = N(S, T);$$

on a

$$N = O[L^{2-m}(S, T)], \qquad \frac{\partial N}{\partial s_\alpha} = O[L^{1-m}(S, T)], \qquad \frac{\partial N}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial N}{\partial t_\alpha} = O[L^{2-m}(S, T)],$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial s_\alpha \partial s_\beta} = O[L^{-m}(S, T)], \qquad \frac{\partial^2 N}{\partial s_\alpha \partial s_\beta} + \frac{\partial^2 N}{\partial t_\alpha \partial s_\beta} = O[L^{1-m}(S, T)].$$

D'autre part,

$$dS_A = \omega(T)\, d(t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}),$$

où $\omega(T)$ est positif, et où les dérivées de ω existent et sont lipschitziennes.

Alors (I, 1) l'intégrale (1) est lipschitzienne d'exposant quelconque inférieur à 1. D'après l'équation de Fredholm, il en est alors de même pour σ. Donc (I, 4, 6) les dérivées de l'intégrale (1) existent et (I, 11) elles sont lipschitziennes. Donc les dérivées de σ existent et sont lipschitziennes.

7. Lemme. — *Dans les hypothèses du lemme précédent, toutes les dérivées de $u(X)$, considéré comme fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, existent et sont lipschitziennes dans tout ensemble fermé sans point commun avec la frontière de notre région de $\mathfrak{S}$ et ne traversant pas $\mathfrak{S}$.*

En effet, les dérivées de σ existent et sont lipschitziennes, ce qui nous permet de renvoyer à un Mémoire antérieur (*d*, II, 1, p. 209) pour le reste de la démonstration (une démonstration plus générale sera donnée plus loin, VIII, 7).

---

(1) *Voir* VIII, 3, note.

8. Lemme. — *Dans les mêmes hypothèses, si l'on calcule Θu successivement pour les deux côtés de $\mathcal{S}$ en un même point, les deux valeurs sont égales.*

Tout d'abord, d'après le lemme précédent, ces deux valeurs de Θu existent. D'après les détails de la démonstration du lemme précédent (b, IV, th. 3, p. 185 à 187), Θu se ramène à une somme d'intégrales dont les seules qui puissent éprouver une discontinuité au passage de $\mathcal{S}$, sont des potentiels de double couche dont la densité est fonction linéaire et homogène de σ et de ses dérivées : donc, en un point de $\mathcal{S}$ où σ et ses dérivées sont nuls, les deux valeurs de Θu sont égales.

Or, en retranchant de u un autre potentiel de double couche dont la densité soit un polynome en $a_1, a_2, \ldots, a_m$, on peut toujours annuler en un point de $\mathcal{S}$ la différence des densités et ses dérivées. Nous sommes donc ramenés à prouver la proposition quand σ est un polynome. D'autre part nous pouvons aussi, en ajoutant à $\mathcal{S}$ et en en retranchant ce que nous voulons, sans que la distance de X aux parties ajoutées ou retranchées tombe au-dessous d'un certain minimum positif, faire en sorte que $\mathcal{S}$ soit la frontière d'un domaine borné ouvert $\mathcal{D}$, la direction $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m$ étant vers l'extérieur.

Posons alors $\theta(X) = 1$ quand X est dans $\mathcal{D}$, $\theta(X) = 0$ quand X est hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$; soit $\mathcal{E}$ l'extérieur de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$. Une formule de Green, appliquée à la partie de $\mathcal{D}$ extérieure à une hypersphère infiniment petite de centre X, donne (II, 5)

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\sigma(A)\,dS_A = -\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\mathcal{F}\sigma(A)\,dV_A + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A)\Theta\sigma(A)\,dS_A - \theta(X)\sigma(X);$$

en prenant maintenant la partie de $\mathcal{E}$ extérieure à une hypersphère infiniment petite de centre X et intérieure à une hypersphère infiniment grande de centre O, il vient

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\sigma(A)\,dS_A = \int_{\mathcal{E}}^{(m)} G(X, A)\mathcal{F}\sigma(A)\,dV_A + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A)\Theta\sigma(A)\,dS_A + [1 - \theta(X)]\sigma(X).$$

Mettons X dans $\mathcal{D}$ et prenons la deuxième formule; nous appliquons aux deux membres l'opération Θ (III, 4), et nous désignons par Θ_i la valeur limite de Θ quand X vient sur $\mathcal{S}$ par points de $\mathcal{D}$:

$$\Theta_i u = \int_{\mathcal{D}}^{(m)} \Theta G(X, A) \mathcal{F} \sigma(A)\, dV_A + \Theta_i \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A) \Theta \sigma(A)\, dS_A.$$

Mettons maintenant X dans $\mathcal{E}$ et faisons-le venir sur $\mathcal{S}$; soit Θ_e la nouvelle limite de Θ; la première formule donne

$$\Theta_e u = -\int_{\mathcal{D}}^{(m)} \Theta G(X, A) \mathcal{F} \sigma(A)\, dV_A + \Theta_e \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A) \Theta \sigma(A)\, dS_A.$$

Retranchons :

$$\Theta_i u - \Theta_e u = \int^{(m)} \Theta G(X,A) \mathcal{F} \sigma(A)\, dV_A + (\Theta_i - \Theta_e) \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A) \Theta \sigma(A)\, dS_A;$$

l'intégrale d'ordre m est ici étendue à l'espace. L'étude connue du potentiel de simple couche (III, 4) permet d'écrire cela

$$\Theta_i u - \Theta_e u = \int^{(m)} \Theta G(X, A) \mathcal{F} \sigma(A)\, dV_A + \Theta \sigma(X).$$

Mais en retranchant membre à membre les deux premières formules, il vient

$$\int^{(m)} G(X, A) \mathcal{F} \sigma(A)\, dV_A = -\sigma(X)$$

quel que soit X. Par comparaison avec le résultat précédent, on en conclut

$$\Theta_i u = \Theta_e u,$$

et le lemme énoncé est démontré [1].

9. Lemme. — *Si $\mathcal{F} u$ satisfait aux conditions précédemment énoncées*

---

[1] Ce résultat généralise une proposition à propos de laquelle des travaux de Liapounof sont cités par M. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes*, p. 2. Une généralisation plus étendue sera donnée plus loin (VIII, 8, 9); voir aussi *Comptes rendus*, t. 191, 1930, p. 478 à 480.

(§ 3) *et qu'en outre c soit négatif ou nul dans tout l'espace, si* $\mathcal{D}$ *est l'intérieur d'une hypersphère telle qu'on ait sur sa frontière* $\mathcal{S}$ *et à l'extérieur, ainsi qu'aux points de* $\mathcal{D}$ *assez voisins de* $\mathcal{S}$,

$$\mathcal{F} u = \Sigma_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u,$$

il existe une et une seule fonction u assujettie aux conditions de prendre sur $\mathcal{S}$ *des valeurs continues données* $\varphi(X)$ *et de satisfaire dans* $\mathcal{D}$ *à l'équation*

$$\mathcal{F} u = f(X),$$

où f est une fonction lipschitzienne donnée.

Remarquons d'abord que, si k est assez grand ($k > 0$), l'équation

$$\mathcal{F} u = k^2 u$$

admet une solution élémentaire principale $G(X, \Xi)$ (§ 4). Sur $\mathcal{S}$, posons $\psi(X) = -1$, pour définir les opérations Θ et Z; la normale sera dirigée vers l'extérieur. Posons

$$G^{(2)}(X, \Xi) = k^2 \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\, G(A, \Xi)\, dV_A,$$

$$G_2\,(X, \Xi) = G(X, \Xi) + G^{(2)}(X, \Xi).$$

Soit

$$u(X) = -\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\, \rho(A)\, dV_A - 2 \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} Z G_2(X, A)\, \sigma(A)\, dS_A;$$

ρ est une fonction inconnue d'un point de l'espace et σ une fonction inconnue d'un point de $\mathcal{S}$. Hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, nous prenons $f(X) = 0$, et nous assujettissons les fonctions ρ et σ aux deux équations suivantes

$$\rho(X) - k^2 \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\, \rho(A)\, dV_A - 2 k^2 \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} Z G^{(2)}(X, A)\, \sigma(A)\, dS_A = f(X),$$

$$\sigma(X) - \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\, \rho(A)\, dV_A - 2 \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} Z G_2\,(X, A)\, \sigma(A)\, dS_A = \varphi(X);$$

dans la première équation X est un point quelconque de l'espace, et dans la seconde X est un point quelconque de $\mathcal{S}$. Comme dans une question analogue déjà rencontrée (III, 5), la théorie de Fredholm est applicable à ce système d'équations intégrales ([1]). Si l'on n'est pas dans le cas d'un pôle de la résolvante, il y a une solution et une seule; pour prouver que la fonction u correspondante, définie dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, satisfait à la question, il suffit de prouver que ρ est lipschitzien dans tout ensemble fermé intérieur à $\mathcal{D}$. Or ρ est continu dans cet ensemble d'après les propriétés de l'équation de Fredholm; de plus ρ est borné dans tout l'espace. Dans la première équation, l'intégrale d'ordre $m-1$ a, dans notre ensemble, ses dérivées continues, et l'intégrale d'ordre m également; comme $f(X)$ est lipschitzien, ρ est lipschitzien dans notre ensemble. Donc u répond à la question.

Pour prouver que u existe, il suffit de prouver qu'en remplaçant les seconds membres par zéro, ρ et σ sont nuls. Or, si f et φ sont nuls, u est nul dans $\mathcal{D}$, car, d'après un raisonnement de Paraf dont une généralisation nous a déjà servi, si $c<0$, u ne peut avoir ni maximum positif ni minimum négatif en un point de $\mathcal{D}$; et le cas où c est négatif ou nul se ramène au précédent (b, V, 2^{e} application, p. 223). Nous allons donc prouver que si ρ et σ sont solutions des équations homogènes et si $u=0$ dans $\mathcal{D}$, ρ et σ sont identiquement nuls.

En effet considérons les deux fonctions u définies respectivement dans l'intérieur de $\mathcal{D}$ et dans l'extérieur de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$. On a

$$\Theta_i u = 0.$$

Mais $G_2(X, A)$ ne diffère de $F(r)$ (§ 2) que par une fonction $J(X, A)$ dont les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 J}{\partial x_\alpha \partial a_\beta}$ existent et sont $O[L^{2-m}(X, A)]$; on vérifie sans peine que les dérivées de

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZJ(X, A)\sigma(A)\,dS_A$$

sont lipschitziennes sur $\mathcal{S}$ (I, 1); on a donc (§ 8)

$$\Theta_i \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG_2(X, A)\sigma(A)\,dS_A = \Theta_e \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG_2(X, A)\sigma(A)\,dS_A.$$

([1]) Malgré le champ infini des variables dont dépend ρ (*voir* V, 4).

D'autre part, il est évident que

$$\Theta_i \int_{\varpi}^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, \rho(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}} = \Theta_e \int_{\varpi}^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, \rho(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}}.$$

Donc

$$\Theta_e u = 0.$$

Mais, hors de $\varpi + \mathcal{S}$, on a $\mathcal{F} u = k^2 u$, et il est évident que u s'annule à l'infini de façon exponentielle. Mais u ne peut avoir nulle part, hors de ϖ, de maximum positif ni de minimum négatif : ni en dehors de $\mathcal{S}$, parce que $-g^2 - k^2 < 0$, ni sur $\mathcal{S}$, car, pour un maximum positif atteint sur $\mathcal{S}$, ou aurait $\frac{du}{dn} \leqq 0$, et par suite du signe de ψ on ne pourrait avoir $\Theta_e u = 0$ (¹). Donc u est identiquement nul dans tout l'espace.

D'après les propriétés du potentiel de double couche, σ est donc identiquement nul. La première équation intégrale se réduit alors à $\rho = -k^2 u$, et par suite ρ est identiquement nul.

Le problème ne pouvant, on l'a vu, avoir deux solutions, le lemme est donc démontré.

10. Lemme. — *Si une fonction u, devant être définie à l'extérieur d'une hypersphère $\mathcal{S}$ de centre O, est assujettie à s'annuler à l'infini, à prendre sur $\mathcal{S}$ des valeurs données $\varphi(\mathrm{X})$, et à satisfaire à l'équation*

$$\Sigma_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u = f(\mathrm{X}) \qquad (g > 0)$$

où f est une fonction donnée, lipschitzienne et nulle à l'infini, ce problème a une solution u et une seule.

Il est évident que ce problème n'a pas plus d'une solution. Pour prouver qu'il en a une, on peut se ramener au cas où $f = 0$ en ajoutant à la fonction cherchée la fonction

$$\int^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) f(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}} \qquad [\mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) = \mathrm{F}(r)\,(\S\,3)],$$

qui est nulle à l'infini comme on le voit facilement : si M est le maxi-

---

(¹) Ce raisonnement est de M. Gevrey, *Journal de Mathématiques*, t. 9, 1930, p. 1 à 80, spécialement p. 74.

mum de $\int^{(m)} |G(X, A)| dV_A$, la valeur absolue de l'intégrale étendue à la région où $|f| \leqq \frac{\varepsilon}{2M}$ est moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$; et le reste est de valeur absolue moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$ si $L(O, X)$ est assez grand. Pour le reste de la solution, on peut se reporter à un Mémoire cité de M. Picard(¹), où la question est traitée pour $m = 3$, mais il n'y a aucun changement pour m quelconque ($m \geqq 2$).

11. Théorème. — *Si $\mathcal{F}u$ satisfait aux conditions déjà énoncées* (§ 3) *et si en outre c est négatif ou nul dans tout l'espace, la solution élémentaire principale* $G(X, \Xi)$, *relative à* $\mathcal{F}$, *existe et est unique* (²).

Ce qui a déjà été dit rend évident qu'il ne peut y avoir deux fonctions G différentes. Montrons qu'il y en a une; il suffit de le montrer si $c < 0$ partout (d, I, 4, p. 201 à 203).

Formons la même fonction $H(X, \Xi; 0)$ qu'un peu plus haut (§ 4) et déduisons-en $K(X, \Xi)$. Nous allons chercher une fonction $u(X, \Xi)$, nulle à l'infini, à dérivées secondes partout continues, et telle que

$$\mathcal{F} u(X, \Xi) = - K^{(p)}(X, \Xi),$$

p étant assez grand pour que le second membre soit partout lipschitzien (§ 1).

Soit $\mathcal{S}'$ la frontière d'une hypersphère de centre O et de rayon assez grand pour que, dans tout son extérieur $\mathcal{E}$, on ait

$$\mathcal{F} u = \Sigma_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u \qquad (g > 0).$$

Soit $\mathcal{D}$ une autre hypersphère de centre O et de rayon plus grand que celui de la précédente; la frontière de $\mathcal{D}$ sera nommée $\mathcal{S}$.

On va former deux suites de fonctions $u_n(X, \Xi)$ et $v_n(X, \Xi)$ ($n = 1$,

---

(¹) Émile Picard, *Selecta*, p. 231 à 247, ou *Rendiconti del Circ. mat. di Palermo*, t. 37, 1914, p. 249 à 261.

(²) Cette démonstration est plus simple que celle qui a été donnée antérieurement (b, V, t. 2, p. 194 à 208; d, I, 4, p. 201 à 203), elle comble une lacune qui restait dans ce qu'on avait dit relativement au cas où les coefficients sont seulement supposés lipschitziens.

2, ... ∞). Les $u_n(X, \Xi)$ doivent être définis pour X dans $\mathcal{O}$ et les v_n dans $\mathcal{E}$, et les uns et les autres satisfaire dans ces domaines aux équations

$$\mathcal{F} u_n(X, \Xi) = -K^{(p)}(X, \Xi), \qquad \mathcal{F} v_n(X, \Xi) = -K^{(p)}(X, \Xi).$$

Si X vient sur $\mathcal{S}$, u_1 devra être nul, et $u_n(n > 1)$ devra prendre les mêmes valeurs que v_{n-1}. Sur $\mathcal{S}'$, v_n devra prendre les mêmes valeurs que u_n. On voit ainsi qu'on pourra calculer de proche en proche u_1, v_1, u_2, v_2, ..., u_n, v_n, u_{n+1}, ... Toutes ces fonctions existent et sont bien déterminées (§ 9 et 10), car on a prouvé antérieurement (b, V, th. 2, p. 197 et 198) que $K^{(p)}(X, \Xi)$ s'annule à l'infini.

Prouvons maintenant que les u_n ont une limite dans $\mathcal{O}$ et les v_n une limite dans $\mathcal{E}$, que ces limites coïncident dans la région commune, et définissent dans tout l'espace la fonction $u(X, \Xi)$ cherchée. On voit qu'il s'agit d'employer la méthode alternée de Schwarz, déjà utilisée par M. Picard dans des cas très étendus ([1]).

Montrons qu'une fonction $u(X)$, satisfaisant dans $\mathcal{O}$ à l'équation $\mathcal{F} u = 0$ et prenant sur $\mathcal{S}$ la valeur 1, remplit sur tout $\mathcal{S}'$ une condition

$$0 \leqq u \leqq q < 1,$$

q étant constant. En effet u est partout positif ou nul puisqu'il est égal à 1 sur $\mathcal{S}$ et qu'il n'a nulle part ailleurs de minimum négatif. D'autre part u ne peut prendre sur $\mathcal{S}'$ aucune valeur supérieure ni égale à 1, car autrement u aurait un maximum au moins égal à 1 atteint en un point de $\mathcal{O}$, ce qui est impossible. La condition a donc lieu.

De même si $v(X)$ satisfait dans $\mathcal{E}$ à l'équation $\mathcal{F} v = 0$, s'annule à l'infini et prend sur $\mathcal{S}'$ la valeur 1, on a en tout point de $\mathcal{S}$

$$0 \leqq v \leqq q < 1,$$

avec la même constante q si l'on choisit convenablement celle-ci.

Soient h_n le maximum de $|u_{n+1} - u_n|$ sur $\mathcal{S}$ et k_n le maximum de $|v_{n+1} - v_n|$ sur $\mathcal{S}'$. La fonction $u_{n+1} - u_n - h_n u$ est négative ou nulle sur $\mathcal{S}$, donc aussi sur $\mathcal{S}'$, et la fonction $u_{n+1} - u_n + h_n u$ est positive ou

---

([1]) ÉMILE PICARD, *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*, p. 139, 158, 199.

nulle sur $\mathcal{S}$, donc aussi sur $\mathcal{S}'$; donc, sur $\mathcal{S}'$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leqq q h_n$$

et par suite

$$k_n \leqq q h_n.$$

De même

$$h_{n+1} \leqq q k_n.$$

Ceci suffit à prouver que les u_n et les v_n convergent uniformément Leurs limites satisfont à l'équation aux dérivées partielles donnée car il résulte du calcul (§ 9 et 10) que, dans tout domaine fermé intérieur à $\mathcal{D}$, la valeur absolue des dérivées secondes de $u_{n+1} - u_n$ est inférieure au produit de h_n par une constante indépendante de n : on a en effet

$$\mathcal{F}(u_{n+1} - u_n) = 0,$$

et l'on doit donc prendre $f = 0$ dans les équations intégrales (§ 9 σ et ρ et le coefficient lipschitzien de ρ dans notre domaine fermé sont donc $O(h_n)$, ce qui prouve immédiatement notre assertion, et l'on raisonne de même pour $v_{n+1} - v_n$.

Enfin ces limites coïncident dans la région commune à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{E}$, car elles coïncident sur la frontière $\mathcal{S} + \mathcal{S}'$ de cette région et leur différence ne peut avoir ni maximum positif ni minimum négatif.

La fonction

$$G(X, \Xi) = H(X, \Xi; p - 1) + u(X, \Xi)$$

est donc la solution élémentaire cherchée ; le théorème est démontré.

12. *Dérivées d'ordre quelconque. — Premier cas. — Si, outre les hypothèses précédentes* (§ 11) *les dérivées d'ordre q des* $a_{\alpha,\beta}$, *d'ordre* $q - 1$ *des* b_α *et de* c $(q \geqq 1)$, *existent et sont lipschitziennes, on peut dériver* $G(X, \Xi)$ *jusqu'à* $2q + 1$ *fois, dont* $q + 1$ *fois par rapport aux coordonnées de* X *et* q *fois par rapport à celles de* Ξ, *et ces dérivées de tout ordre tendent exponentiellement et uniformément vers zéro, si, l'un des deux points restant fixe, l'autre s'éloigne indéfiniment.*

Cela est évident pour la solution élémentaire principale de $\mathcal{F}u = k^2 u$, si c est assez grand (§ 4). Dans le cas plus général qui précède (§ 11), on vérifie de proche en proche que cela a lieu pour u_1, v_1, ..., u_n, v_n, ..., et par suite pour la limite $u(X, \Xi)$, car, même pour ces dérivées, la convergence est uniforme si p est assez grand. En ajoutant $H(X, \Xi; p-1)$, on vérifie que cela a lieu aussi pour G.

13. *Deuxième cas.* — *Si, outre les hypothèses précédentes* (§ 11), *les dérivées d'ordre q de tous les coefficients existent et sont lipschitziennes, on peut dériver* $G(X, \Xi)$ *jusqu'à* $2q+2$ *fois, dont* $q+2$ *fois par rapport aux coordonnées de* X *et* q *fois par rapport à celles de* Ξ, *et ces dérivées de tout ordre tendent exponentiellement et uniformément vers zéro si, l'un des deux points restant fixe, l'autre s'éloigne indéfiniment.*

Même démonstration que ci-dessus.

14. *Remarques.* — Les possibilités de dérivation de G relatives à X ne dépendent que des hypothèses remplies par les coefficients dans une région où se trouve X. De même les possibilités de dérivation relatives à Ξ ne dépendent que des hypothèses remplies par les coefficients dans une région où se trouve Ξ.

Si X tend vers Ξ ou Ξ vers X, la remarque que si p est assez grand, les dérivées correspondantes de $G(X, \Xi) - H(X, \Xi; p)$ sont continues, est utile.

15. *Équation adjointe.* — *Si l'équation* $\mathcal{F}u = 0$, *remplissant les hypothèses du paragraphe* 3, *admet une et une seule solution élémentaire principale* $G(X, \Xi)$, *tendant vers zéro, exponentiellement et uniformément, quand, l'un des deux points restant fixe, l'autre s'éloigne indéfiniment, et si en outre les dérivées des* $a_{\alpha,\beta}$ *et des* $b_\alpha - \sum_\beta \dfrac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}$ *existent et sont lipschitziennes,* G *est, relativement à* Ξ, *solution élémentaire de l'équation adjointe*

$$\mathcal{G}u = \Sigma_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(a_{\alpha,\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - \Sigma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\left(b_\alpha - \Sigma_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}\right)u\right] + cu = 0.$$

On prouve d'abord très simplement, à l'aide d'une formule de Green (II, 5), que, si $\mathcal{G}u = 0$ admet aussi une solution élémentaire principale, la proposition a lieu (b, V, th. 2, p. 200). Il en résulte que la proposition a lieu pour les opérations $\mathcal{F}u - k^2u$ et $\mathcal{G}u - k^2u$, si k est assez grand. Soit $G'(X, \Xi)$ la solution élémentaire principale de $\mathcal{F}u - k^2 u = 0$ relativement à X, de $\mathcal{G}u - k^2 u = 0$ relativement à Ξ. On peut dériver G jusqu'à trois fois, dont deux par rapport à X et une par rapport à Ξ, et l'on a (§ 12, 14)

$$\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} = O[L^{1-m}(X, \Xi)], \qquad \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial \xi_\alpha} = O[L^{2-m}(X, \Xi)],$$
$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} = O[L^{-m}(X, \Xi)], \qquad \frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \, \partial \xi_\beta} = O[L^{1-m}(X, \Xi)];$$

G' a les mêmes propriétés, avec possibilité d'échanger les rôles de Ξ et de X. La fonction

$$G'(X, \Xi) + k^2 \int^{(m)} G(X, A)\, G'(A, \Xi)\, dV_A,$$

où l'intégrale est étendue à tout l'espace, peut donc être dérivée deux fois par rapport à X, et l'on constate que

$$\mathcal{F}\left[G'(X, \Xi) + k^2 \int^{(m)} G(X, A)\, G'(A, \Xi)\, dV_A\right] = k^2 G' - k^2 G' = 0.$$

Quand X tend vers Ξ, la différence entre cette fonction et $G(X, \Xi)$ est $O[L^{3-m}(X, \Xi)]$ et les dérivées de cette différence sont $O[L^{2-m}(X, \Xi)]$; il en résulte que les dérivées secondes de cette différence sont continues même en Ξ (*b*, V, th. 1, p. 192 à 194; quoique les hypothèses du théorème cité soient un peu plus étroites que celles qui interviennent ici, la démonstration s'applique entièrement). D'autre part notre fonction et ses dérivées premières et secondes tendent vers zéro, de façon exponentielle, quand, Ξ restant fixe, $L(X, \Xi)$ croît indéfiniment; en effet, d'après ce qui précède, il y a des constantes positives a et b telles que, pour $L(X, \Xi) > 1$, on ait

$$|G(X, \Xi)| < a e^{-bL(X, \Xi)}, \qquad |G'(X, \Xi)| < a e^{-bL(X, \Xi)};$$

soit d'autre part M le plus grand des maxima de $\int^{(m)} |G(X, A)|\, dV_A$ et de $\int^{(m)} |G'(A, \Xi)|\, dV_A$; dès que $L(X, \Xi) > 2$, $L(X, A)$ ou $L(A, \Xi)$ dépasse 1, et par suite, en partageant notre intégrale en deux autres étendues respectivement aux régions $L(X, A) > L(A, \Xi)$ et

$L(X, A) < (A, \Xi)$, on voit que

$$\left| \int^{(m)} G(X, A)\, G'(A, \Xi)\, dV_A \right| < 2 M a \exp\left[-\frac{b}{2} L(X, \Xi) \right];$$

notre assertion est donc vérifiée pour la fonction et on la vérifie de même pour ses dérivées premières et secondes relatives à X. Notre fonction a donc toutes les propriétés qui définissent la solution élémentaire de $\mathcal{F} u = 0$ et par suite

$$G(X, \Xi) = G'(X, \Xi) + k^2 \int^{(m)} G(X, A)\, G'(A, \Xi)\, dV_A.$$

Il est alors visible sur cette formule que G peut être dérivé deux fois relativement à Ξ et que

$$\mathcal{G} G(X, \Xi) = k^2 G'(X, \Xi) - k^2 G(X, \Xi) + k^4 \int^{(m)} G(X, A)\, G'(A, \Xi)\, dV_A = 0.$$

Toutes les vérifications sur l'allure de la fonction et de ses dérivées premières et secondes relatives à Ξ, quand Ξ tend vers X ou s'en éloigne indéfiniment, se font comme il y a un instant, de sorte que le théorème est démontré.

Ce théorème s'applique notamment dans les hypothèses du paragraphe 11.

16. Corollaire. — *Si, outre les hypothèses du paragraphe* 11, *les dérivées d'ordre q des $a_{\alpha,\beta}$ et des $b_\alpha - \sum_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}$, d'ordre $q - 1$ de* c, *existent et sont lipschitziennes,* G *peut être dérivé jusqu'à $2q+1$ fois, dont $q+1$ fois par rapport aux coordonnées d'un quelconque des deux points.*

La démonstration est immédiate, en rapprochant les paragraphes 12 et 15.

17. *Caractère lipschitzien de certaines fonctions.* — Plaçons-nous dans les hypothèses du paragraphe 13. La fonction $H(X, \Xi; p)$ admet les mêmes possibilités de dérivation que G et $K^{(p+1)}(X, \Xi)$ peut être dérivé q fois par rapport à chacun des points ($2q$ fois en tout), le résultat étant lipschitzien d'exposant h si p est assez grand ($p > m + 2q$) (c. th. 4 et 5, p. 376 et 377). Il faut remarquer d'ailleurs que ce résultat

est lipschitzien d'exposant h aussi bien relativement à X qu'à Ξ; il l'est donc aussi par rapport à l'ensemble des deux points; cela se voit toujours par l'application des mêmes propositions fondamentales (I, 7, 8, 9, 12). Or nous avons vu (§ 4) que si $\int^{(m)} |K(A, \Xi)|\, dV_A < k < 1$,

$$G(X, \Xi) = \int^{(m)} [G(X, A) - H(X, A; 0)]\, K(A, \Xi)\, dV_A + H(X, \Xi; 1);$$

posons, dans cette relation,

$$G(X, \Xi) = H(X, \Xi; p) + v(X, \Xi);$$

nous obtenons

$$v(X, \Xi) = \int^{(m)} v(X, A)\, K(A, \Xi)\, dV_A + \int^{(m)} H(X, A; 0)\, K^{(p+1)}(A, \Xi)\, dV_A.$$

Or le dernier terme et ses dérivées jusqu'à l'ordre $2q + 2$ (avec au plus $q + 2$ dérivations relatives à X et q relatives à Ξ) sont tous lipschitziens d'exposant h par rapport à l'ensemble des deux points; on a d'ailleurs ici

$$v(X, \Xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int^{(m)} H(X, A; 0)\, K^{(p+n)}(A, \Xi)\, dV_A,$$

et il est visible que tous les termes de cette série ont la même propriété et que les coefficients lipschitziens successifs ont des valeurs absolues inférieures aux termes d'une progression géométrique de raison $\sqrt{k}$, car on peut décomposer le produit symbolique qui constitue le terme général dans le produit de

$$\int^{(m)} H(X, A; 0)\, K^{\left(\frac{p+n}{2}\right)}(A, A')\, dV_A \quad \text{par} \quad K^{\left(\frac{p+n}{2}\right)}(A', \Xi)$$

si $p + n$ est pair, et de

$$\int^{(m)} H(X, A; 0)\, K^{\left(\frac{p+n-1}{2}\right)}(A, A')\, dV_A \quad \text{par} \quad K^{\left(\frac{p+n+1}{2}\right)}(A', \Xi)$$

si $p + n$ est impair; alors dès que n est assez grand pour que les dérivées d'ordre $q + 2$ du premier facteur relatives à X soient lipschitziennes d'exposant h relativement à X, le coefficient lipschitzien est multiplié par k chaque fois que l'exposant symbolique de K augmente de 1; il en est de même pour les dérivées d'ordre q, relatives à Ξ, du second facteur. La somme de la série, et par suite v, ont donc les propriétés annoncées. Dans le cas général où l'on ne fait pas l'hypothèse $\int^{(m)} |K(A, \Xi)|\, dV_A < k < 1$, on vérifie sur la formation de G (§ 11) que les propriétés de v subsistent.

De même, dans les hypothèses du paragraphe 12, si $p > m + 2q$, les dérivées de $G(X, \Xi) - H(X, \Xi; p)$ dont l'existence résulte du paragraphe 12, sont toutes lipschitziennes d'exposant h par rapport à l'ensemble des deux points.

18. *Un cas où existe une équation remplaçant l'adjointe.* — Aux hypothèses du paragraphe 11, ajoutons, sans plus, celle que les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ existent et sont lipschitziennes d'exposant h, h étant aussi l'exposant lipschitzien des b_α et de c. *Nous allons voir que*

$$G(X, \Xi) = \omega(\Xi)\, N(X, \Xi),$$

ω *étant une fonction positive bornée dont les dérivées existent et sont lipschitziennes d'exposant* h, *et* $N(X, \Xi)$ *pouvant être dérivé jusqu'à trois fois dont deux fois au plus par rapport aux coordonnées de chaque point.* Nous formerons en outre *une équation linéaire dont, relativement à* Ξ, $\omega(X)\, N(X, \Xi)$ *est la solution élémentaire principale.*

Si $c < 0$, la fonction $G(X, \Xi)$, qui est infinie *positive* quand X tend vers Ξ, n'est nulle part négative, puisqu'elle ne peut atteindre de minimum négatif; le résultat est encore vrai si $c \leqq 0$ (d, I, 7, p. 204). L'intégrale étendue à tout l'espace

$$\varpi(\Xi) = \int^{(m)} G(A, \Xi)\, \rho(A)\, dV_A,$$

où ρ est positif, borné et lipschitzien, est donc certainement positive. Montrons que ses dérivées sont lipschitziennes d'exposant h. Ces dérivées existent certainement; l'une d'elles est

$$\frac{\partial \varpi}{d\xi_\alpha} = \int^{(m)} \frac{\partial G}{\partial \xi_\alpha}(A, \Xi)\, \rho(A)\, dV_A.$$

Or si $p > m+5$ et que $G(A,\Xi) = H(A,\Xi;p) + u(A,\Xi)$, on a

$$\frac{\partial G}{\partial \xi_\alpha}(A,\Xi) = \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha}(A,\Xi;p) + \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha}(A,\Xi),$$

le dernier terme étant lipschitzien d'exposant h par rapport à l'ensemble des deux points. Il est évident que $\int^{(m)} \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha}(A,\Xi)\rho(A)\,dV_A$ est lipschitzien d'exposant h. Ensuite il en est de même de

$$\int^{(m)} \frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha}(A,\Xi;\,o)\,\rho(A)\,dV_A,$$

car si l'on fait porter la dérivation sur $D(\Xi)$ ou sur l'un des $A_{\beta,\gamma}(\Xi)$, on a le produit d'une dérivée de ces fonctions par une intégrale ayant une dérivée bornée, et les autres termes de la dérivation conduisent à des intégrales lipschitziennes d'exposant quelconque inférieur à 1. On a ensuite

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\int^{(m)} \rho(X)\int^{(m)} H(X,A;o)\,K(A,\Xi)\,dV_A\,dV_X\\ = \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\int^{(m)} K(A,\Xi)\int^{(m)} H(X,A;o)\,\rho(X)\,dV_X\,dV_A;\end{aligned}$$

or si $\int^{(m)} H(X,A;o)\rho(X)\,dV_X = \rho_1(A)$, cette fonction ρ_1 a ses dérivées lipschitziennes d'exposant h (on vient de le voir); alors

$$\begin{aligned}\int^{(m)} K(A,\Xi)\,\rho_1(A)\,dV_A = \int^{(m)} & \Sigma_{\beta,\gamma}[a_{\beta,\gamma}(A) - a_{\beta,\gamma}(\Xi)]\frac{\partial^2 H(A,\Xi;o)}{\partial a_\beta\,\partial a_\gamma}\rho_1(A)\,dV_A\\ &+ \int^{(m)} \Sigma_\beta\, b_\beta(A)\frac{\partial H(A,\Xi;o)}{\partial a_\beta}\rho_1(A)\,dV_A\\ &+ \int^{(m)} [c(A) + g^2]\,H(A,\Xi;o)\,\rho_1(A)\,dV_A.\end{aligned}$$

Or (I, 4, 6)

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\int^{(m)} [a_{\beta,\gamma}(A) - a_{\beta,\gamma}(\Xi)]\frac{\partial^2 H(A,\Xi;o)}{\partial a_\beta\,\partial a_\gamma}\rho_1(A)\,dV_A\\ &\quad= \int^{(m)} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left\{[a_{\beta,\gamma}(A) - a_{\beta,\gamma}(\Xi)]\frac{\partial^2 H(A,\Xi;o)}{\partial a_\beta\,\partial a_\gamma}\right\}[\rho_1(A) - \rho_1(\Xi)]\,dV_A\\ &\qquad+ \rho_1(\Xi)\int^{(m)}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} + \frac{\partial}{\partial a_\alpha}\right)\left\{[a_{\beta,\gamma}(A) - a_{\beta,\gamma}(\Xi)]\frac{\partial^2 H(A,\Xi;o)}{\partial a_\beta\,\partial a_\gamma}\right\}dV_A,\end{aligned}$$

et (I, 8, 9) le second membre est lipschitzien d'exposant h.

Les mêmes règles s'appliquent à

$$\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \int^{(m)} b_\beta(\mathrm{A}) \frac{\partial \mathrm{H}(\mathrm{A}, \Xi; \mathrm{o})}{\partial a_\beta} \rho_1(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}.$$

Enfin les dérivées du dernier terme sont lipschitziennes d'exposant quelconque inférieur à 1.

Donc les dérivées de $\int^{(m)}\int^{(m)} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; \mathrm{o})\, \mathrm{K}(\mathrm{A}, \Xi)\, \rho(\mathrm{X})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}\, d\mathrm{V}_\mathrm{X}$ sont lipschitziennes d'exposant h.

Ensuite si l'on a prouvé que les dérivées de

$$\int^{(m)} \mathrm{K}^{(n-1)}(\mathrm{A}, \Xi) \int^{(m)} \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; \mathrm{o})\, \rho(\mathrm{X})\, d\mathrm{V}_\mathrm{X}\, d\mathrm{V}_\mathrm{A} = \rho_n(\Xi)$$

sont lipschitziennes d'exposant h, on a à prouver la même chose en accroissant n d'une unité, ce qui revient à le prouver pour

$$\int^{(m)} \mathrm{K}(\mathrm{A}, \Xi)\, \rho_n(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}:$$

cela résulte donc de ce qui vient d'être dit.

Donc les dérivées de $\varpi(\Xi)$ sont lipschitziennes d'exposant h.

Soit maintenant (d, I, 7, p. 204)

$$\mathrm{Q}(t) = t^3(10 - 15t + 6t^2),$$

de sorte que $\mathrm{Q}(1) = 1$, $\mathrm{Q}(0) = \mathrm{Q}'(0) = \mathrm{Q}''(0) = \mathrm{Q}'(1) = \mathrm{Q}''_1 = 0$ et que $\mathrm{Q}(t) + \mathrm{Q}(1-t) = 1$. Nous prendrons un nombre positif R assujetti seulement à être assez grand, et nous poserons

$$\omega(\mathrm{X}) = \begin{cases} \varpi(\mathrm{X}) \quad \text{pour} \quad \mathrm{L}(\mathrm{O}, \mathrm{X}) < \mathrm{R}; \\ \mathrm{Q}\left[2 - \dfrac{\mathrm{L}(\mathrm{O}, \mathrm{X})}{\mathrm{R}}\right] \varpi(\mathrm{X}) + \mathrm{Q}\left[\dfrac{\mathrm{L}(\mathrm{O}, \mathrm{X})}{\mathrm{R}} - 1\right] \quad \text{pour} \quad \mathrm{R} \leqq \mathrm{L}(\mathrm{O}, \mathrm{X}) \leqq 2\mathrm{R}; \\ 1 \quad \text{pour} \quad \mathrm{L}(\mathrm{O}, \mathrm{X}) > 2\mathrm{R}. \end{cases}$$

Dans tout l'espace, les dérivées de cette fonction ω existent et sont lipschitziennes d'exposant h; cette fonction ω est partout positive. Si R est assez grand, les dérivées secondes de $\varpi(\mathrm{X})$ sont continues pour $\mathrm{L}(\mathrm{O}, \mathrm{X}) \geqq \mathrm{R}$, l'équation se réduisant alors à celle du paragraphe 2; nous remarquerons que les dérivées premières et secondes de ω, pour $\mathrm{L}(\mathrm{O}, \mathrm{X}) \geqq \mathrm{R}$, sont aussi petites qu'on veut si R est assez grand.

Soit maintenant $G(X, \Xi) = \omega(\Xi) N(X, \Xi)$; je dis que si R est assez grand, les dérivées secondes de N relativement à Ξ existent et que

$$(2) \quad \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}(\Xi) \frac{\partial^2 N}{\partial \xi_\alpha\, \partial \xi_\beta} - \Sigma_\alpha \left[b_\alpha(\Xi) - \frac{2}{\omega(\Xi)} \Sigma_\beta \frac{\partial (a_{\alpha,\beta}\,\omega)}{\partial \xi_\beta} \right] \frac{\partial N}{\partial \xi_\alpha} + c_1 N = 0,$$

c_1 étant une fonction négative et lipschitzienne d'exposant h, se réduisant à $-g^2$ pour $L(O, X) > 2R$; je dis même que la solution élémentaire principale de cette équation, relativement à Ξ, est $\omega(X) N(X, \Xi)$. Pour le voir, choisissons des fonctions $a'_{\alpha,\beta}$ se réduisant à des polynomes pour $L(O, X) < R$ et aux mêmes constantes que les $a_{\alpha,\beta}$ correspondants dans le reste de l'espace, et telles que les valeurs absolues des $a_{\alpha,\beta} - a'_{\alpha,\beta}$ et de leurs dérivées, et le coefficient lipschitzien de celles-ci pour l'exposant $\frac{h}{2}$, soient partout moindres qu'un nombre donné ε (*d*, III, 1, p. 216). De même les b'_α et c' se réduiront à des polynomes pour $L(O, X) < R$ et les $b'_\alpha - b_\alpha$ et $c' - c$ seront nuls pour $L(O, X) > R$; enfin les valeurs absolues des $b'_\alpha - b_\alpha$ et de $c' - c$ et leurs coefficients lipschitziens pour l'exposant $\frac{h}{2}$ seront partout inférieurs à ε; de plus c' devra être partout négatif ou nul, ce qui est évidemment possible. Si alors on fait sur l'équation

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, a'_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha\, b'_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c' u = 0,$$

qui est du type elliptique si ε est assez petit, les calculs que nous venons de faire sur l'équation donnée, la proposition se vérifie, car alors $G'(X, \Xi)$, solution élémentaire principale de cette équation, est aussi, relativement à Ξ, la solution élémentaire principale de l'équation adjointe $\mathcal{G}' u = 0$; la fonction

$$w'(\Xi) = \int^{(m)} G'(A, \Xi)\, \rho(A)\, dV_A$$

ayant ses dérivées secondes lipschitziennes, celles de ω', obtenu en remplaçant w par w' dans l'expression de ω, le sont aussi, et par suite si

$$G'(X, \Xi) = \omega'(\Xi)\, N'(X, \Xi),$$

on a

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, a'_{\alpha,\beta}(\Xi) \frac{\partial^2 N'}{\partial \xi_\alpha\, \partial \xi_\beta} - \Sigma_\alpha \left[b'_\alpha(\Xi) - \frac{2}{\omega'(\Xi)} \Sigma_\beta \frac{\partial (a'_{\alpha,\beta}\,\omega)}{\partial \xi_\beta} \right] \frac{\partial N'}{\partial \xi_\alpha} + c'_1 N' = 0,$$

avec

$$c'_1 = \frac{\mathcal{G}'\omega'}{\omega'};$$

on remarque que, d'après ce qui précède, c'_1 est partout négatif puisque, pour $L(O, \Xi) < R$, $c'_1 = -\frac{\rho}{\omega'}$; il est évident que $\omega'(X)N'(X, \Xi)$ est, relativement à Ξ, la solution élémentaire principale de cette équation.

Il s'agit maintenant de faire tendre ε vers zéro et de montrer que la propriété se conserve à la limite. Or si ε est assez petit et que nous nommions pour un instant $H'(X, \Xi; p)$ et $K'^{(p)}(X, \Xi)$ les fonctions analogues à $H(X, \Xi; p)$ et à $K^{(p)}(X, \Xi)$, mais relatives aux coefficients $a'_{\alpha,\beta}$, b'_α, c', on peut poser

$$G(X, \Xi) = G'(X, \Xi) - H'(X, \Xi; p) + H(X, \Xi; p) - u(X, \Xi);$$

en formant $\mathcal{F} u(X, \Xi) = \Omega(X, \Xi)$, on constate (*voir b*, V, th. 2, p. 202) que, si p est assez grand et ε assez petit,

$$|\Omega(X, \Xi)| < \eta \exp.[-\mu L(O, X) - \mu L(O, \Xi)],$$

où μ est une constante connue et où η est donné arbitrairement, et l'on a une limitation semblable pour les $\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_\alpha}$. Si η est choisi assez petit, on aura donc une fonction $\rho(X, \Xi)$ et une seule telle que

$$\rho(X, \Xi) - \int^{(m)} \rho(A, \Xi)\,\Omega(X, A)\,dV_A = \Omega(X, \Xi);$$

cette fonction et ses dérivées relatives à Ξ ont une limitation

$$O\{\eta \exp[-\mu L(O, X) - \mu L(O, \Xi)]\};$$

or (*b*, V, th. 2, p. 207) $u(X, \Xi)$ s'en déduit par la formule

$$u(X, \Xi) = -\int^{(m)} \rho(A, \Xi)[G'(X, A) - H'(X, A; p) + H(X, A; p)]\,dV_A,$$

d'où résulte aussitôt que u et ses dérivées relatives à X et à Ξ sont aussi petits qu'on veut.

On en déduit que les valeurs absolues de $w' - w$ et de ses dérivées sont aussi petites qu'on veut; ces dérivées ont d'ailleurs un coefficient lipschitzien borné. Dans la région $L(O, \Xi) > R$, $\Omega(X, \Xi)$ ne diffère de zéro que si $L(O, X) < R$; ses dérivées secondes relatives à Ξ existent et sont aussi petites qu'on veut et il en est de même successivement de celles de $\rho(X, \Xi)$, de $u(X, \Xi)$ et de $\omega(\Xi) - \omega'(\Xi)$; les coefficients lipschitziens de toutes ces dérivées secondes sont d'ailleurs bornés. De là résulte que les coefficients de l'équation en N' tendent uniformément vers ceux de l'équation (2), pourvu seulement que

$$c_1(\Xi) = -\frac{\rho(\Xi)}{\omega(\Xi)} \quad \text{pour} \quad L(O, \Xi) < R$$

et que $c_1 = \frac{\mathcal{G}\omega}{\omega}$ dans le reste de l'espace, où $\mathcal{G}$ existe; les coefficients lipschitziens de ces coefficients, ainsi que ceux des dérivées des $a'_{\alpha,\beta}$, sont bornés dans leur ensemble; on peut dire aussi, en réduisant l'exposant lipschitzien, que ces coefficients lipschitziens sont infiniment petits avec ε. Il en résulte que $N' - N$ est infiniment petit avec ε.

Mais un raisonnement tout semblable, avec interversion des rôles de X et de Ξ, prouve alors que la solution élémentaire principale de l'équation en N', c'est-à-dire $\omega'(X)N'(X, \Xi)$, tend vers la solution élémentaire principale de l'équation (2); cette solution est donc $\omega(X)N(X, \Xi)$, et le théorème en résulte.

19. *Manière dont se comportent les dérivées de* $N(X, \Xi)$. — On peut écrire évidemment, en donnant à $F(r)$ la signification déjà dite (§ 2),

$$N(X, \Xi) = \frac{1}{\omega(\Xi)\sqrt{D(\Xi)}} F\left[\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta)}\right] + O[L^{3-m}(X, \Xi)] \qquad (m > 3)$$

et aussi

$$N(X, \Xi) = \frac{1}{\omega(X)\sqrt{D(X)}} F\left[\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(X)(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta)}\right] + O[L^{3-m}(X, \Xi)] \qquad (m > 3).$$

Si $m = 3$, le terme complémentaire est $O\left[\log \frac{L_0}{L(X, \Xi)}\right]$ dès que $L(X, \Xi)$ est assez petit; si $m = 2$, il est $O(1)$. Le terme complémentaire et ses dérivées jusqu'au troisième ordre (pourvu qu'il y ait au plus deux dérivations relatives à X et une par rapport à Ξ), dans la première formule, se comportent comme

$$\frac{1}{\omega(\Xi)}[H(X, \Xi; p) - H(X, \Xi; 0)]$$

et les dérivées correspondantes; on peut en dire autant de la seconde formule, après échange des rôles de X et de Ξ.

A l'aide d'une des deux formules, on déduit de là que

$$\frac{\partial N}{\partial x_\alpha}(X, \Xi) = O[L^{1-m}(X, \Xi)] \qquad (m \geqq 2),$$

$$\frac{\partial N}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial N}{\partial \xi_\alpha} = \begin{cases} O[L^{2-m}(X, \Xi)] & (m > 2), \\ o[L^{-\lambda}(X, \Xi)] & (m = 2,\ \lambda > 0), \end{cases}$$

λ étant positif quelconque dans le dernier résultat. Sur la première formule, on voit de plus que

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} = O[L^{-m}(X, \Xi)],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\right)\frac{\partial N}{\partial \xi_\beta} = O[L^{1-m}(X, \Xi)] \qquad (m \geqq 2),$$

et, sur la seconde, que

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \xi_\alpha\, \partial \xi_\beta} = O[L^{-m}(X, \Xi)],$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\right)\frac{\partial N}{\partial x_\beta} = O[L^{1-m}(X, \Xi)] \qquad (m \geqq 2).$$

De plus,

$$\frac{\partial^3 N}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta\, \partial \xi_\gamma} = O[L^{-m-1}(X, \Xi)],$$

$$\frac{\partial^3 N}{\partial \xi_\alpha\, \partial \xi_\beta\, \partial x_\gamma} = O[L^{-m-1}(X, \Xi)] \qquad (m \geqq 2).$$

Écrivons de façon plus développée une de ces expressions :

$$\frac{\partial^3 N}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta\, \partial \xi_\gamma} = \frac{-1}{\omega(\Xi)\sqrt{D(\Xi)}}\,\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}\left\{\frac{\Sigma_\delta A_{\gamma,\delta}(\Xi)(x_\delta - \xi_\delta)}{\sqrt{\Sigma_{\delta,\varepsilon} A_{\delta,\varepsilon}(\Xi)(x_\delta - \xi_\delta)(x_\varepsilon - \xi_\varepsilon)}} \times F'\left[\sqrt{\Sigma_{\delta,\varepsilon} A_{\delta,\varepsilon}(\Xi)(x_\gamma - \xi_\delta)(x_\varepsilon - \xi_\varepsilon)}\right]\right\}$$

$$+ O[L^{-m}(X, \Xi)],$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{\partial^3 N}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta\, \partial \xi_\gamma} = \frac{1}{\omega(A)\sqrt{D(A)}} \frac{\partial^3}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta\, \partial \xi_\gamma}$$
$$\times F\left[\sqrt{\Sigma_{\delta,\varepsilon} A_{\delta,\varepsilon}(A)(x_\delta - \xi_\delta)(x_\varepsilon - \xi_\varepsilon)}\right] + O[L^{-m}(X, \Xi)],$$

à condition de mettre A en Ξ *après* la dérivation; on a une expression analogue pour $\frac{\partial^3 N}{\partial \xi_\alpha\, \partial x_\beta\, \partial \xi_\gamma}$, et, en ajoutant, on voit que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\right) \frac{\partial^2 N}{\partial x_\beta\, \partial \xi_\gamma} = O[L^{-m}(X, \Xi)] \qquad (m \geqq 2).$$

De même

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial N}{\partial x_\beta} + \frac{\partial N}{\partial \xi_\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} \frac{1}{\omega(\Xi)\sqrt{D(\Xi)}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} F\left[\sqrt{\Sigma_{\gamma,\delta} A_{\gamma,\delta}(\Xi)(x_\gamma - \xi_\gamma)(x_\delta - \xi_\delta)}\right]$$
$$+ \frac{1}{\omega(\Xi)\sqrt{D(\Xi)}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left\{ \frac{\Sigma_{\gamma,\delta} \frac{\partial A_{\gamma,\delta}}{\partial \xi_\beta}(x_\gamma - \xi_\gamma)(x_\delta - \xi_\delta)}{\sqrt{\Sigma_{\gamma,\delta} A_{\gamma,\delta}(\Xi)(x_\gamma - \xi_\gamma)(x_\delta - \xi_\delta)}} \times F'\left[\sqrt{\Sigma_{\gamma,\delta} A_{\gamma,\delta}(\Xi)(x_\gamma - \xi_\gamma)(x_\delta - \xi_\delta)}\right] \right\}$$
$$+ O[L^{1+h-m}(X, \Xi)],$$

formule où l'on a appliqué au terme final un théorème antérieur (b, II, th. 6, p. 156). Une formule analogue a lieu pour $\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left(\frac{\partial N}{\partial x_\beta} + \frac{\partial N}{\partial \xi_\beta}\right)$. En ajoutant, on constate que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\right)\left(\frac{\partial N}{\partial x_\beta} + \frac{\partial N}{\partial \xi_\beta}\right) = O[L^{1+h-m}(X, \Xi)].$$

20. *Rappel d'un résultat antérieur.* — D'une façon analogue, on a démontré (d, I, 7, p. 203 à 205) le résultat suivant :

Si, en plus des hypothèses du paragraphe 11, *les dérivées d'ordre* $q \geqq 2$ *des* $a_{\alpha,\beta}$, *d'ordre* $q - 1$ *des* b_α *et d'ordre* $q - 2$ *de* c *existent et sont lipschitziennes d'exposant* h, *on a*

$$G(X, \Xi) = \omega(X)\, \omega_1(\Xi)\, N(X, \Xi),$$

où ω et ω_1 sont des fonctions positives, bornées, dont les dérivées d'ordre q existent et sont lipschitziennes d'exposant h et où X peut être dérivé jusqu'à $2q+1$ fois, dont $q+1$ fois au plus par rapport aux coordonnées de chaque point.

A l'énoncé antérieur, nous avons ajouté ici l'indication de l'exposant lipschitzien des dérivées d'ordre q de ω et de ω_1, qui se vérifie immédiatement (IV, 5).

21. *Potentiels généralisés.* — Les fonctions $H(X, \Xi; p)$ et $G(X, \Xi)$ se prêtent à la définition d'expressions généralisant les potentiels ordinaires; nous l'avons déjà vu (§ 5) à propos d'une équation particulière. Plus généralement, les intégrales

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\rho(A)\,dV, \qquad \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A)\sigma(A)\,dS_A,$$
$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\sigma(A)\,dS_A,$$

où G est la solution élémentaire principale d'une équation quelconque remplissant les hypothèses du paragraphe 11, seront nommées *potentiel de domaine*, *potentiel de simple couche*, *potentiel de double couche*. Les fonctions ρ et σ seront nommées densités de ces potentiels. Il nous arrivera aussi de remplacer G par d'autres fonctions; cela nous est déjà arrivé (§ 9).

CHAPITRE VI.

EXTENSION DES FORMULES DE GREEN.

1. Théorème fondamental. — *Si, outre les hypothèses qui assurent l'existence de la solution élémentaire principale* (V, 11), *les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ existent et sont lipschitziennes d'exposant h, h étant aussi l'exposant lipschitzien des b_α et de c; si d'autre part les dérivées secondes d'une fonction $u(X)$ existent et sont bornées dans un domaine borné ouvert $\mathcal{D}$, dont la frontière $\mathcal{S}$ a en chaque point un hyperplan tangent*

variant de façon continue (II, 1), *on a* (¹)

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\,\mathcal{F}u(A)\,dV_A$$
$$= \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [G(X, A)\,\Theta u(A) - u(A)\,ZG(X, A)]\,dS_A - \theta(X)\,u(X),$$

avec $\theta(X) = 1$ *dans* $\mathcal{D}$, $= 0$ *hors de* $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, $= \frac{1}{2}$ *sur* $\mathcal{S}$.

Si nous ajoutions aux hypothèses que les dérivées des $b_\alpha - \Sigma_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}$ existent et sont lipschitziennes, ce résultat n'aurait rien de nouveau, car on pourrait se servir de l'équation adjointe (V, 15); il suffirait alors d'appliquer une formule de Green (II, 5) aux fonctions $u(A)$ et $G(X, A)$, et au domaine $\mathcal{D}$, d'où l'on exclut, s'il y a lieu, une hypersphère infiniment petite de centre X.

Dans nos hypothèses actuelles, approchons des $a_{\alpha,\beta}$, des b_α et de c par les mêmes fonctions qui nous ont servi au chapitre précédent (V, 18). Si $G'(X, \Xi)$ est la solution élémentaire principale de

$$\mathcal{F}'v = \Sigma_{\alpha,\beta}\, a'_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha\, b'_\alpha \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} + c'v = 0,$$

on aura donc, en distinguant par un accent tout ce qui se rapporte à cette équation,

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G'(X, A)\,\mathcal{F}'u(A)\,dV_A$$
$$= \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [G'(X, A)\,\Theta' u(A) - u(A)\,ZG'(X, A)]\,dS_A - \theta(X)\,u(X).$$

Faisons tendre ε vers zéro. Nous avons déjà vu (V, 18) que $G' - G$ et ses dérivées tendent vers zéro, pourvu que $L(X, \Xi)$ reste supérieur à un nombre positif fixe; mais la démonstration va plus loin : en reprenant un raisonnement antérieur (*a*, II, 24, p. 83 à 86), on en conclut notamment que

$$L^{m+k-2}(X, \Xi)[G'(X, \Xi) - G(X, \Xi)] \qquad \text{et} \qquad L^{m+k-1}(X, \Xi)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(G' - G)$$

(¹) Les intégrales sont prises au sens de M. Lebesgue.

tendent uniformément vers zéro avec ε. En faisant tendre ε vers zéro, on en déduit immédiatement la formule annoncée si X n'est pas sur $\mathcal{S}$; si X est sur $\mathcal{S}$, le résultat se déduit de la discontinuité de

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, u(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}$$

au passage de $\mathcal{S}$ (*voir* par exemple *b*, III, p. 160 à 171, ou ci-après VIII, 2) [1].

2. *Autre forme du même théorème.* — Supposons qu'on ait une fonction χ telle que l'équation

$$\mathcal{F}u - \chi u = 0$$

remplisse les conditions qui étaient imposées ci-dessus à l'équation $\mathcal{F}u = 0$; de plus χ doit être nul hors d'un certain domaine borné; cette fonction χ est d'ailleurs bornée dans tout l'espace; elle est continue dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ et elle peut avoir ailleurs des discontinuités, mais, d'après les hypothèses faites, $c-\chi$ est lipschitzien et négatif ou nul. Si $\mathrm{G}(\mathrm{X}, \Xi)$ est la solution élémentaire principale de $\mathcal{F}u = \chi u$, le théorème fondamental s'écrit aussi

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}}^{(m)} &\mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})[\mathcal{F}u(\mathrm{A}) - \chi(\mathrm{A})\, u(\mathrm{A})]\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}} \\ &= \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [\mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, \Theta u(\mathrm{A}) - u(\mathrm{A})\, \mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})]\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}} - \theta(\mathrm{X})\, u(\mathrm{X}).\end{aligned}$$

3. *Cas particulier.* — Considérons deux opérations $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ telles que, dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, on ait $\mathcal{F}u = \mathcal{F}'u$ quel que soit u. Nous avons aussi deux fonctions χ et χ' telles que $\mathcal{F}$ et χ d'une part, $\mathcal{F}'$ et χ' d'autre part, remplissent les hypothèses ci-dessus. Soient $\mathrm{G}(\mathrm{X}, \Xi)$ et $\mathrm{G}'(\mathrm{X}, \Xi)$ les solutions élémentaires principales de $\mathcal{F}u - \chi u = 0$ et de $\mathcal{F}'u - \chi' u = 0$ respectivement. Appliquons ce qui précède en remplaçant $u(\mathrm{X})$ par $\mathrm{G}'(\mathrm{X}, \Xi)$ et $\mathcal{F}u$ par $\mathcal{F}'u - \chi' u$ et en excluant de $\mathcal{D}$

---

[1] On déduira de là que l'équation intégrale de (V, 4) a toujours au moins une solution dans nos présentes hypothèses; on pourrait même étendre ce résultat aux hypothèses (V, 11) générales.

une hypersphère infiniment petite de centre Ξ; on a

$$(1)\qquad \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)[\chi'(A)-\chi(A)]G'(A, \Xi)\,dV_A$$
$$= \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [G(X, A)\,\Theta G'(A, \Xi) - G'(A, \Xi)\,ZG(X, A)]\,dS_A$$
$$+ \theta(\Xi)\,G(X, \Xi) - \theta(X)\,G'(X, \Xi),$$

pourvu seulement que X et Ξ soient différents.

4. Théorème. — *Si les hypothèses du paragraphe 1 sont satisfaites et si l'on a une fonction $f(A)$, continue dans $\mathcal{D}$, et telle que, quel que soit X dans $\mathcal{D}$,*

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\,f(A)\,dV_A = 0,$$

la fonction f est identiquement nulle dans $\mathcal{D}$.

Si f était supposé lipschitzien, le résultat serait évident. Avec nos hypothèses, nous prenons arbitrairement un domaine ouvert $\mathcal{D}'$, de frontière $\mathcal{S}'$, tel que $\mathcal{D}' + \mathcal{S}'$ soit intérieur à $\mathcal{D}$; on assujettit en outre $\mathcal{S}'$ à avoir en chaque point un hyperplan tangent variant de façon continue (II, 1). Dans l'identité donnée, remplaçons A par Ξ et X par A; nous en déduisons

$$\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} \Big[G(X, A)\,\Theta \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(A, \Xi)\,f(\Xi)\,dV_\Xi$$
$$- ZG(X, A)\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(A, \Xi)\,f(\Xi)\,dV_\Xi\Big]\,dS_A = 0.$$

Or l'opération Θ peut être permutée avec l'intégration d'ordre m. D'autre part, si X appartient à $\mathcal{D}'$,

$$\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} G(X, A)\int_{\mathcal{D}}^{(m)} \Theta G(A, \Xi)\,f(\Xi)\,dV_\Xi\,dS_A$$
$$= \int_{\mathcal{D}}^{(m)} f(\Xi)\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} G(X, A)\,\Theta G(A, \Xi)\,dS_A\,dV_\Xi;$$

en effet si, dans les deux membres, nous retranchons de $\mathcal{D}$ la région comprise entre deux hypersurfaces infiniment voisines de $\mathcal{S}'$, de façon à exclure tous les points Ξ assez voisins de $\mathcal{S}'$, l'identité a lieu; or les quantités ainsi retranchées des deux membres sont infiniment petites; c'est évident pour le premier membre et, pour le second, cela résulte de ce que, pour X fixe intérieur à $\mathcal{D}'$ et Ξ variable dans $\mathcal{D}$, l'intégrale

$$\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} G(X, A)\,\Theta G(A, \Xi)\, dS_A$$

est bornée, puisque $G(X, A)$ est continu; notre identité a donc lieu. Deux autres intégrations se permutent sans difficulté, ce qui donne

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} f(\Xi) \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} [G(X, A)\,\Theta G(A, \Xi) - G(A, \Xi)\, ZG(X, A)]\, dS_A\, dV_\Xi = 0,$$

ou, d'après (1) où χ et χ' sont nuls,

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} [1 - \theta'(\Xi)]\, G(X, \Xi) f(\Xi)\, dV_\Xi = 0,$$

avec $\theta'(\Xi) = 1$ dans $\mathcal{D}'$, $= 0$ hors de $\mathcal{D}' + \mathcal{S}'$. Ceci entraîne

$$\int_{\mathcal{D}'}^{(m)} G(X, \Xi) f(\Xi)\, dV_\Xi = 0.$$

Il en résulte immédiatement l'identité $f = 0$ dans $\mathcal{D}$, car si, en un point, f n'est pas nul, son signe sera constant dans une hypersphère assez petite comprenant ce point, et comme $G(X, \Xi)$ est positif pour Ξ voisin de X, le résultat précédent serait contredit [1].

5. Théorème. — *Si, avec les mêmes hypothèses sur $\mathcal{F}$, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{S}$, on suppose qu'on a identiquement dans $\mathcal{D}$*

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(A, \Xi) f(A)\, dV_A = 0,$$

et si f est continu, f est identiquement nul dans $\mathcal{D}$.

Il suffit, pour le voir, d'échanger les rôles des deux points dans ce

---

[1] Si f n'est pas continu, on peut dire que f est nul sauf peut-être aux points où il n'est pas continu.

qui précède; c'est possible, car il n'est nulle part question de dérivées secondes.

6. Théorème. — *Plaçons-nous dans l'hypothèse du paragraphe 2 pour $\mathcal{F}$ et pour χ; considérons une fonction f continue dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, et une fonction u dont les dérivées sont continues dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, et qui satisfont, par l'hypothèse, à l'identité*

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)[f(A) - \chi(A)\,u(A)]\,dV_A$$
$$= \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [G(X, A)\,\Theta u(A) - u(A)\,ZG(X, A)]\,dS_A - u(X),$$

quel que soit X dans $\mathcal{D}$. Alors, si le domaine ouvert $\mathcal{D}'$ et sa frontière $\mathcal{S}'$ sont intérieurs à $\mathcal{D}$, et si X est intérieur à $\mathcal{D}'$, l'identité ci-dessus a encore lieu en remplaçant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{S}$ par $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{S}'$; si X est hors de $\mathcal{D}' + \mathcal{S}'$, le dernier terme disparaît (1).

Soit encore $\theta'(X) = 1$ dans $\mathcal{D}'$, $= 0$ hors de $\mathcal{D}' + \mathcal{S}'$. D'après l'identité donnée, on a

$$\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} [G(X, A)\,\Theta u(A) - u(A)\,ZG(X, A)]\,dS_A$$
$$= \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} \Big\{ G(X, A) \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta[G(A, \Xi)\,\Theta u(\Xi) - u(\Xi)\,ZG(A, \Xi)]\,dS_\Xi$$
$$- ZG(X, A) \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [G(A, \Xi)\,\Theta u(\Xi) - u(\Xi)\,ZG(A, \Xi)]\,dS_\Xi \Big\}\,dS_A$$
$$- \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} \int_{\mathcal{D}}^{(m)} [G(X, A)\,\Theta G(A, \Xi) - G(A, \Xi)\,ZG(X, A)]$$
$$\times [f(\Xi) - \chi(\Xi)\,u(\Xi)]\,dV_\Xi\,dS_A.$$

On peut changer l'ordre des intégrations dans les intégrales superposées du second membre [*voir* ci-dessus (§ 4) la seule permutation dont la légitimité ne soit pas évidente]. En utilisant l'identité (1), qui

(1) Tout subsiste si l'on suppose seulement que f et χ, et par suite c, sont *bornés* et *mesurables* (au lieu de *continus*).

donne

$$\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} [G(X, A)\,\Theta G(A, \Xi) - G(A, \Xi)\,ZG(X, A)]\,dS_A$$
$$= [\theta'(X) - \theta'(\Xi)]\,G(X, \Xi),$$

le second membre devient

$$\theta'(X)\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [G(X, \Xi)\,\Theta u(\Xi) - u(\Xi)\,ZG(X, \Xi)]\,dS_\Xi$$
$$-\int_{\mathcal{D}}^{(m)} [\theta'(X) - \theta'(\Xi)]\,G(X, \Xi)\,[f(\Xi) - \chi(\Xi)\,u(\Xi)]\,dV_\Xi$$
$$= \int_{\mathcal{D}'}^{(m)} G(X, A)\,[f(A) - \chi(A)\,u(A)]\,dV_A + \theta'(X)\,u(X),$$

ce que nous voulions démontrer.

7. Théorème. — *Supposons que $\mathcal{F}$ et χ remplissent les hypothèses du paragraphe 2. Considérons une fonction g, continue dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, et une fonction v dont toutes les dérivées sont continues dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, et qui satisfont pour Ξ quelconque dans $\mathcal{D}$, à l'identité*

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} [\chi(A)\,v(A) - g(A)]\,G(A, \Xi)\,dV_A$$
$$= \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [v(A)\,\Theta G(A, \Xi) - G(A, \Xi)\,Zv(A)]\,dS_A + v(\Xi).$$

Alors si le domaine ouvert $\mathcal{D}'$ et sa frontière $\mathcal{S}'$ appartiennent à $\mathcal{D}$, et si Ξ appartient à $\mathcal{D}'$, l'identité subsiste si l'on remplace $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{S}$ par $\mathcal{S}'$; le dernier terme disparaît si Ξ est hors de $\mathcal{D}' + \mathcal{S}'$ (1).

La démonstration consiste à échanger les rôles des deux points dans celle du précédent théorème, car les dérivées secondes n'interviennent pas.

8. Théorème. — *Supposons que $\mathcal{F}$, χ, f, u, g et v remplissent les hypothèses des deux précédents théorèmes ; soit $\mathcal{D}'$ un domaine ouvert compris*

(1) *Voir* la note précédente, g remplaçant f.

dans $\mathcal{D}$ et dont la frontière $\mathcal{S}'$ peut en partie coïncider avec $\mathcal{S}$. Je dis que

$$(2)\qquad \int_{\mathcal{D}'}^{(m)} (vf - ug)\, dV = \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} (v\Theta u - uZv)\, dS$$

(on suppose que $\mathcal{S}'$ satisfait aux hypothèses de II, 1) [1].

Plaçons-nous d'abord dans le cas où $\mathcal{S}'$ est intérieur à $\mathcal{D}$. D'après l'hypothèse,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} (v\Theta u - uZv)\, dS \\
&= \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \{\Theta u(\Xi)[G(A,\Xi)Zv(A) - v(A)\Theta G(A,\Xi)] \\
&\qquad\qquad - u(\Xi)[ZG(A,\Xi)\, Zv(A) - v(A)\, Z\Theta G(A,\Xi)]\}\, dS_A\, dS_\Xi \\
&\quad + \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} \int_{\mathcal{D}}^{(m)} [\Theta u(\Xi)\, G(A,\Xi) - u(\Xi)\, ZG(A,\Xi)] \\
&\quad \times [\chi(A)\, v(A) - g(A)]\, dV_A\, dS_\Xi.
\end{aligned}$$

Comme plus haut, on constate qu'on peut changer l'ordre des intégrations; le second membre devient ainsi

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} \{[G(A,\Xi)\,\Theta u(\Xi) - u(\Xi)\, ZG(A,\Xi)]\, Zv(A) \\
&\qquad\qquad - [\Theta G(A,\Xi)\,\Theta u(\Xi) - u(\Xi)\,\Theta ZG(A,\Xi)]\, v(A)\}\, dS_\Xi\, dS_A \\
&\quad + \int_{\mathcal{D}}^{(m)} [\chi(A)\, v(A) - g(A)] \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} [G(A,\Xi)\,\Theta u(\Xi) - u(\Xi)\, ZG(A,\Xi)]\, dS_\Xi\, dV_A
\end{aligned}$$

ou (§ 6)

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \int_{\mathcal{D}'}^{(m)} [G(A,\Xi)\, Zv(A) - v(A)\,\Theta G(A,\Xi)][f(\Xi) - \chi(\Xi)\, u(\Xi)]\, dV_\Xi\, dS_A \\
&\quad + \int_{\mathcal{D}}^{(m)} [\chi(A)\, v(A) - g(A)] \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(A,\Xi)[f(\Xi) - \chi(\Xi)\, u(\Xi)]\, dV_\Xi\, dV_A \\
&\quad + \int_{\mathcal{D}'}^{(m)} [\chi(A)\, v(A) - g(A)]\, u(A)\, dV_A.
\end{aligned}$$

Permutons de nouveau les intégrations du premier terme; en tenant

---

[1] *Voir* les deux notes précédentes.

compte de l'hypothèse, cela devient

$$\begin{aligned}
&\int_{\varpi'}^{(m)} v(\Xi)[f(\Xi)-\chi(\Xi)\,u(\Xi)]\,dV_\Xi \\
&\quad+\int_{\varpi'}^{(m)}[f(\Xi)-\chi(\Xi)\,u(\Xi)]\int_{\varpi}^{(m)}[g(\mathrm{A})-\chi(\mathrm{A})\,v(\mathrm{A})]\,\mathrm{G}(\mathrm{A},\Xi)\,dV_\mathrm{A}\,dV_\Xi \\
&\quad+\int_{\varpi}^{(m)}[\chi(\mathrm{A})\,v(\mathrm{A})-g(\mathrm{A})]\int_{\varpi'}^{(m)}[f(\Xi)-\chi(\Xi)\,u(\Xi)]\,\mathrm{G}(\mathrm{A},\Xi)\,dV_\Xi\,dV_\mathrm{A} \\
&\quad+\int_{\varpi'}^{(m)}[\chi(\mathrm{A})\,v(\mathrm{A})-g(\mathrm{A})]\,u(\mathrm{A})\,dV_\mathrm{A}=\int_{\varpi'}^{(m)}(vf-ug)\,dV\,;
\end{aligned}$$

le théorème est donc alors vérifié.

Si $\mathcal{S}'$ coïncide partiellement avec $\mathcal{S}$, on remplace $\mathcal{S}'$ par une hypersurface infiniment voisine, les hyperplans tangents en deux points correspondants tendant à être parallèles; un passage à la limite achève la démonstration.

9. *Cas où l'équation adjointe existe.* — En plus des hypothèses du paragraphe 2 pour $\mathcal{F}$ et pour χ, supposons que les dérivées des $b_\alpha-\Sigma_\beta\dfrac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}$ existent et sont continues. Alors l'opération adjointe

$$\mathrm{G}v=\Sigma_{\alpha,\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(a_{\alpha,\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\beta}\right)-\Sigma_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\left(b_\alpha-\Sigma_\beta\frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}\right)v\right]+cv$$

existe et satisfait aux mêmes hypothèses que $\mathcal{F}$. Nous continuerons à nommer $\mathrm{G}(\mathrm{X},\Xi)$ la solution élémentaire principale de $\mathcal{F}u-\chi u=0$. D'autre part nous choisirons une fonction χ', nulle hors d'un certain domaine borné, et telle que

$$c-\Sigma_\alpha\left(b_\alpha-\Sigma_\beta\frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}\right)-\chi'$$

soit négatif ou nul et lipschitzien dans tout l'espace, et nous nommons $\mathrm{G}'(\mathrm{X},\Xi)$ une fonction qui, relativement à Ξ, soit la solution élémentaire principale de $\mathcal{G}v-\chi'v=0$.

Une formule de Green (II, 5) prouve immédiatement que

$$\begin{aligned}
&\int_{\varpi}^{(m)}\mathrm{G}'(\mathrm{X},\mathrm{A})[\chi(\mathrm{A})-\chi'(\mathrm{A})]\,\mathrm{G}(\mathrm{A},\Xi)\,dV_\mathrm{A} \\
&\quad=\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}[\mathrm{G}'(\mathrm{X},\mathrm{A})\,\Theta\,\mathrm{G}(\mathrm{A},\Xi)-\mathrm{G}(\mathrm{A},\Xi)\,\mathrm{Z}\mathrm{G}'(\mathrm{X},\mathrm{A})]\,d\mathrm{S}_\mathrm{A} \\
&\qquad+\theta(\Xi)\,\mathrm{G}'(\mathrm{X},\Xi)-\theta(\mathrm{X})\,\mathrm{G}(\mathrm{X},\Xi),
\end{aligned}$$

θ ayant toujours la même signification (§ 1). *Je dis de plus que*

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)[\chi'(A) - \chi(A)]\, G'(A, \Xi)\, dV_A$$
$$= \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [G(X, A)\,\Theta G'(A, \Xi) - G'(A, \Xi)\, Z G(X, A)]\, dS_A$$
$$+ \vartheta(\Xi)\, G(X, \Xi) - \vartheta(X)\, G'(X, \Xi).$$

En effet, si les $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(b_\alpha - \Sigma_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}\right)$ étaient non seulement continus mais lipschitziens, v aurait, dans $\mathcal{G}v - \chi v$, un coefficient lipschitzien, et, par suite $G(X, \Xi)$ serait, relativement à Ξ, solution élémentaire principale de $\mathcal{G}v - \chi v = 0$: nous serions dans un cas particulier du paragraphe 3. Pour étendre le résultat à nos hypothèses, il suffit d'introduire les mêmes fonctions $a'_{\alpha,\beta}$, b'_α, c' qu'au paragraphe 1, avec la condition supplémentaire que les valeurs absolues des dérivées des différences

$$b_\alpha - b'_\alpha - \Sigma_\beta \frac{\partial(a_{\alpha,\beta} - a'_{\alpha,\beta})}{\partial x_\beta}$$

soient aussi inférieures à ε. Un passage à la limite tout pareil à celui du paragraphe 1 donne alors le résultat.

10. *Remarque. — Si les hypothèses des paragraphes* 3 *et* 6 *sont satisfaites, il résulte du paragraphe* 8 *que l'identité du paragraphe* 6 *a encore lieu en remplaçant* G *et* χ *respectivement par* G' *et* χ'. *Si en outre les hypothèses du paragraphe* 9 *sont satisfaites, on peut aussi remplacer* G *et* χ *par les fonctions* G' *et* χ' *du paragraphe* 9.

On peut compléter de la même façon la proposition du paragraphe 7, *en échangeant dans ce qui précède les rôles des deux points.*

On voit donc que, malgré l'arbitraire que présentent G et χ quand on donne $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{D}$ (puisqu'on peut alors le prolonger d'une infinité de façons hors de $\mathcal{D}$), les identités des paragraphes 6 et 7, considérées comme conditions imposées à u et à v, ne dépendent pas du choix fait pour χ et pour G. Une interprétation de ces conditions se trouve aisément (V, 18) si c est lipschitzien.

11. Théorème. — *Pour que la fonction*

$$u(X) = -\int^{(m)} G(X, A)\rho(A)\,dV_A$$

(l'intégrale est étendue à tout l'espace), *où ρ est une fonction continue bornée, satisfasse à l'identité du paragraphe* 6 [1], *il faut et il suffit qu'on ait dans $\mathcal{D}$*

$$\rho(X) - \chi(X)\int^{(m)} G(X, A)\rho(A)\,dV_A = f(X).$$

En effet, il faut et il suffit que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\left[f(A) + \chi(A)\int^{(m)} G(A, \Xi)\rho(\Xi)\,dV_\Xi\right]dV_A \\ = -\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}\int^{(m)}[G(X, A)\,\Theta G(A, \Xi) - G(A, \Xi)\,ZG(X, A)]\,\rho(\Xi)\,dV_\Xi\,dS_A \\ + \int^{(m)} G(X, A)\rho(A)\,dV_A.\end{aligned}$$

Or les intégrations peuvent se permuter, toujours pour les mêmes raisons, ce qui change le second membre, d'après le paragraphe 3, en

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\rho(A)\,dV_A.$$

Notre condition nécessaire et suffisante devient donc

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\left[f(A) - \rho(A) + \chi(A)\int^{(m)} G(A, \Xi)\rho(\Xi)\,dV_\Xi\right]dV_A = 0,$$

c'est-à-dire (§ 4) ce qui était annoncé.

12. Théorème. — *Pour que la fonction*

$$v(\Xi) = -\int^{(m)} G(A, \Xi)\rho(A)\,dV_A.$$

où ρ est une fonction continue bornée, satisfasse à la condition du para-

---

[1] Avec f continu.

graphe 7 [1], *il faut et il suffit qu'on ait dans* $\mathcal{D}$

$$\rho(\Xi) - \int^{(m)} G(A, \Xi)\,\rho(A)\,dV_A = g(\Xi).$$

Démonstration semblable à celle du théorème précédent.

13. *Notations.* — Si $G(X, \Xi)$ est la solution élémentaire principale de $\mathcal{F} u = \chi u$, nous poserons, dans toute la suite de ce travail,

$$G^{(1)} = G_1 = G, \qquad G^{(n)}(X, \Xi) = \int^{(m)} G(X, A)\,\chi(A)\,G^{(n-1)}(A, \Xi)\,dV_A \qquad (n > 1),$$
$$G_p(X, \Xi) = G_{p-1}(X, \Xi) + G^{(p)}(X, \Xi) \qquad (p > 1),$$

les intégrales étant étendues à tout l'espace.

On voit immédiatement que

$$\mathcal{F} G_p(X, \Xi) = \chi(X)\,G^{(p)}(X, \Xi).$$

14. *Sur une identité.* — Dans l'identité du paragraphe 3, prenons $G' = G$, $\chi' = \chi$; changeons X en A', multiplions par

$$G^{(n-1)}(X, A')\,\chi(A')\,dV_{A'}$$

et intégrons dans tout l'espace. On a

$$\int^{(m)} G^{(n-1)}(X, A')\,\chi(A') \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(A, \Xi)\,\mathrm{Z}G(A', A)\,dS_A\,dV_{A'}$$
$$= \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(A, \Xi)\,\mathrm{Z}G^{(n)}(X, A)\,dS_A,$$

car on voit toujours de même que les intégrales peuvent se permuter; une autre permutation se faisant sans difficulté, on en conclut

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [G^{(n)}(X, A)\,\Theta G(A, \Xi) - G(A, \Xi)\,\mathrm{Z}G^{(n)}(X, A)]\,dS_A$$
$$= \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G^{(n-1)}(X, A)\,\chi(A)\,G(A, \Xi)\,dV_A - \theta(\Xi)\,G^{(n)}(X, \Xi).$$

---

(1) Avec g continu.

Par suite

$$(3)\quad \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [G_p(X, A)\,\Theta G(A, \Xi) - G(A, \Xi)\,Z G_p(X, A)]\,dS_A$$
$$= \theta(X)\,G(X, \Xi) - \theta(\Xi)\,G_p(X, \Xi) + \int_{\varpi}^{(m-1)} G_{p-1}(X, A)\,\chi(A)\,G(A, \Xi)\,dV_A.$$

On prouverait de même que

$$(4)\quad \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [G(X, A)\,\Theta G_p(A, \Xi) - G_p(A, \Xi)\,Z G(X, A)]\,dS_A$$
$$= \theta(X)\,G_p(X, \Xi) - \theta(\Xi)\,G(X, \Xi) - \int_{\varpi}^{(m-1)} G(X, A)\,\chi(A)\,G_{p-1}(A, \Xi)\,dV_A.$$

15. Théorème. — *Avec les hypothèses du paragraphe 2 et en supposant $\sigma(A)$ continu, les fonctions*

$$u(X) = -\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G_p(X, A)\,\sigma(A)\,dS_A,$$
$$v(\Xi) = -\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G_p(A, \Xi)\,\sigma(A)\,dS_A$$

satisfont aux identités

$$(5)\quad \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [G(X, A)\,\Theta u(A) - u(A)\,Z G(X, A)]\,dS_A$$
$$= -\int_{\varpi}^{(m)} G(X, A)\,\chi(A)\left[\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G^{(p)}(A, \Xi)\,\sigma(\Xi)\,dS_\Xi + u(A)\right] dV_A$$
$$+ \theta(X)\,u(X),$$

$$(6)\quad \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [v(A)\,\Theta G(A, \Xi) - G(A, \Xi)\,Z v(A)]\,dS_A$$
$$= \int_{\varpi}^{(m)} G(A, \Xi)\,\chi(A)\left[\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G^{(p)}(X, A)\,\sigma(X)\,dS_X + v(A)\right] dV_A$$
$$- \theta(\Xi)\,u(\Xi).$$

Pour démontrer, par exemple, l'identité (5), nous considérons un domaine ϖ' intérieur à ϖ ainsi que sa frontière $\mathcal{S}'$, qui est infiniment voisine de $\mathcal{S}$, l'angle des normales aux points correspondants étant infiniment petit. On a

$$(7)\quad \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} [G(X, A)\Theta u(A) - u(A) ZG(X, A)] \, dS_A$$
$$= -\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [G(X, A)\Theta G_p(A, \Xi)$$
$$- G_p(A, \Xi) ZG(X, A)] \sigma(\Xi) \, dS_\Xi \, dS_A;$$

échangeons les deux intégrations (tout est continu) et appliquons l'identité (4); le second membre devient

$$\theta'(X) u(X) + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(\Xi) \int_{\mathcal{D}'}^{(m)} G(X, A) \chi(A) G_{p-1}(A, \Xi) \, dV_A \, dS_\Xi,$$

avec $\theta'(X) = 1$ dans $\mathcal{D}'$, $= 0$ hors de $\mathcal{D}' + \mathcal{S}'$. A la limite, après une nouvelle permutation des intégrations, nous avons bien (5) (*voir* III, 4, et ci-après, VII, 3) ([1]); cela subsiste si $p = 1$.

16. Théorème. — *Avec les mêmes hypothèses* ([2]), *et $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{D}'$ ayant, ainsi que θ', le même sens que dans la démonstration précédente, les fonctions*

$$u(X) = -\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG_p(X, A) \sigma(A) \, dS_A,$$
$$v(\Xi) = -\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G_p(A, \Xi) \sigma(A) \, dS_A$$

satisfont aux identités

$$\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} [G(X, A)\Theta u(A) - u(A) ZG(X, A)] \, dS_A$$
$$= -\int_{\mathcal{D}'}^{(m)} G'(X, A) \chi(A) \left[\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG^{(p)}(A, \Xi) \sigma(\Xi) \, dS_\Xi + u(A)\right] dV_A$$
$$+ \theta'(X) u(X),$$
$$\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} [v(A)\Theta G(A, \Xi) - G(A, \Xi) Z v(A)] \, dS_A$$
$$= \int_{\mathcal{D}'}^{(m)} G(A, \Xi) \chi(A) \left[\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta G^{(p)}(X, A) \sigma(X) \, dS_X + v(A)\right] dV_A - \theta'(\Xi) v(\Xi).$$

Même démonstration.

([1]) L'identité (7) a lieu si σ est seulement supposé borné et mesurable.

([2]) σ peut être seulement borné et mesurable.

CHAPITRE VII.

LE POTENTIEL DE SIMPLE COUCHE ET SES DÉRIVÉES.

1. *Préliminaires.* — Dans ce qui suit, il sera question du potentiel de simple couche

$$u(X) = \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} G(X, A)\,\sigma(A)\,dS_A$$

et de ses dérivées, au point de vue de la continuité et des conditions de Lipschitz, quand le point X peut venir sur $\mathfrak{S}$. On ne fait sur l'opération $\mathcal{F}$ que les hypothèses les plus générales données plus haut (V, 11) pour assurer l'existence de la solution élémentaire principale $G(X, \Xi)$; c'est seulement à la fin du Chapitre (§ 7) qu'on fera une hypothèse plus restrictive.

En dehors de $\mathfrak{S}$, les dérivées secondes de u sont continues en tout point. Au point de vue qui nous occupe ici, on peut donc ajouter à $\mathfrak{S}$ ou en retrancher ce qu'on veut, pourvu que la distance de X aux parties ainsi ajoutées ou retranchées reste supérieure à un nombre positif fixe.

Nous profiterons de cela pour nous placer dans le cas où $\mathfrak{S}$, satisfaisant aux hypothèses déjà dites (II, 1), est la frontière d'un domaine borné et ouvert $\mathcal{D}$; les ϖ_α seront toujours les cosinus directeurs de la normale dirigée vers l'extérieur de $\mathcal{D}$.

Si l'on avait à appliquer les résultats à une portion de multiplicité $\mathfrak{S}$ ayant une frontière $\mathcal{C}$, il faudrait se rappeler que ces résultats ne sont valables que pourvu que X reste à une distance de $\mathcal{C}$ supérieure à un minimum positif fixe.

2. *Caractère lipschitzien du potentiel.* — On voit immédiatement (I, 1) que le potentiel est lipschitzien, d'exposant quelconque inférieur à 1, dans tout l'espace, pourvu que σ soit continu ou même seulement borné et mesurable.

3. *Continuité et discontinuité de Θu.* — En plus des hypothèses

ci-dessus (§ 1), supposons que les dérivées des coordonnées des points de $\mathcal{S}$, par rapport aux paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$ employés, soient fonctions lipschitziennes de ces paramètres, et cela pour chacune des représentations paramétriques utilisées, sur toute l'étendue de $\mathcal{S}$. Nous supposons d'autre part que la fonction ψ, qui intervient dans l'opération Θ (II, 1) est continue, ainsi que la densité σ. Le procédé déjà indiqué (III, 4) permet de définir Θu pour les points X suffisamment voisins de $\mathcal{S}$. Il résulte alors immédiatement des considérations du passage cité (III, 4) que, si X tend vers un point de $\mathcal{S}$ en restant dans $\mathcal{D}$, Θu tend vers une limite qui est

$$\frac{\sigma(\mathrm{X})}{2} + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, \sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}},$$

où X représente le point limite situé sur $\mathcal{S}$; si au contraire X tend vers ce point limite en restant hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, la limite est

$$-\frac{\sigma(\mathrm{X})}{2} + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, \sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}.$$

Partout ailleurs que sur $\mathcal{S}$, Θu est continu. Chacune des deux limites précédentes est aussi une fonction continue du point X de $\mathcal{S}$.

4. *Condition de Lipschitz pour la densité.* — Soit $h < 1$ l'exposant lipschitzien des $a_{\alpha,\beta}$, des b_α de c, et aussi celui des dérivées des coordonnées des points de $\mathcal{S}$. Nous supposerons en outre que ψ est lipschitzien d'exposant h relativement à $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$. Supposons enfin qu'une des valeurs limites de Θu dont on vient de donner l'expression, soit lipschitzienne d'exposant h relativement à $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$. Je dis alors que *$\sigma$ est lipschitzien d'exposant h.*

La valeur limite dont on a parlé, a l'une des expressions

$$\Theta u = \pm \frac{\sigma(\mathrm{X})}{2} + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, \sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}};$$

la proposition sera démontrée si nous prouvons que

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, \sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}$$

est lipschitzien d'exposant h par rapport aux paramètres $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ du point X.

σ peut être considéré comme solution d'une équation de Fredholm dont le noyau $\Theta G(X, A)$ vaut $O[L^{1+h-m}(X, A)]$ et est continu pour $X \neq A$; σ est donc continu (même si cette équation de Fredholm a d'autres solutions) (¹).

Décomposons l'intégrale en plusieurs termes.

Le terme

$$(1) \qquad \psi(X) \int_{S}^{(m-1)} G(X, A)\, \sigma(A)\, dS_A = \psi(X)\, u(X)$$

est lipschitzien d'exposant h (§ 2).

Soit maintenant

$$G(X, A) = H(X, A; o) + J(X, A),$$

$H(X, A; o)$ ayant, par exemple, la définition du Chapitre V (§ 4). Il est évident (I, 1) que

$$(2) \qquad a_{\alpha,\beta}(X)\, \varpi_\alpha(X) \int_{S}^{(m-1)} \frac{\partial J}{\partial x_\beta}(X, A)\, \sigma(A)\, dS_A$$

est lipschitzien d'exposant h, car $J(X, A) = O[L^{2+h-m}(X, A)]$, ses dérivées par rapport à X sont $O[L^{1+h-m}(X, A)]$, et ses dérivées secondes par rapport à X sont $O[L^{h-m}(X, A)]$.

Les termes

$$(3) \qquad \int_{S}^{(m-1)} \frac{\partial H(X, A; o)}{\partial x_\beta} [a_{\alpha,\beta}(X)\, \varpi_\alpha(X) - a_{\alpha,\beta}(A)\, \varpi_\alpha(A)]\, \sigma(A)\, dS_A$$

sont lipschitziens d'exposant quelconque inférieur à h (I, 10).

Nous avons maintenant les termes

$$(4) \qquad \int_{S}^{(m-1)} \Sigma_{\alpha,\beta} \frac{\partial H(X, A; o)}{\partial x_\beta} a_{\alpha,\beta}(A)\, \varpi_\alpha(A)\, \sigma(A)\, dS_A$$
$$= \int_{S}^{(m-1)} F'\left[\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(A)\,(x_\alpha - a_\alpha)\,(x_\beta - a_\beta)}\right]$$
$$\times \frac{\Sigma_\alpha (x_\alpha - a_\alpha)\, \varpi_\alpha(A)}{\sqrt{\Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(A)\,(x_\alpha - a_\alpha)\,(x_\beta - a_\beta)}} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}}\, dS_A.$$

(¹) Au reste, l'expression des limites de Θu suppose la continuité de σ; on voit que toute solution de l'équation de Fredholm convient.

Introduisons les paramètres $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ de X et $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$ de A et posons

$$L(S, T) = \sqrt{\Sigma_\alpha (s_\alpha - t_\alpha)^2};$$

S et T représentent X et A repérés dans ce système. On constate facilement (b, IV, p. 171 à 175) que, X étant sur $\mathfrak{S}$,

$$\Sigma_\alpha (x_\alpha - a_\alpha)\, \varpi_\alpha(A)\, dS_A = O[L^{1+h}(S, T)]\, d(t_1, \ldots, t_{m-1}),$$

les dérivées du premier facteur par rapport à S étant $O[L^h(S, T)]$. Donc (I, 1) la dernière intégrale est lipschitzienne d'exposant h.

Donc σ est lipschitzien d'exposant quelconque inférieur à h.

Mais alors (I, 8) les termes (3) sont lipschitziens d'exposant h; en effet, si nous étendons l'intégrale

$$\int^{(m-1)} \frac{\partial H(X, A; 0)}{\partial x_\beta}\, \sigma(A)\, dS_A$$

à la région $L(S, T) > \delta > 0$, on va voir que cette intégrale est bornée quand δ varie. Il résulte des hypothèses sur $\mathfrak{S}$ que, si T parcourt la frontière de la région qui admet la représentation paramétrique adoptée, on peut supposer que $L(S, T)$ ne tombe pas au-dessous d'un certain minimum positif, dépendant de $\mathfrak{S}$ et de l'ensemble des représentations paramétriques adoptées; on supprimera la partie de $\mathfrak{S}$ à laquelle ne convient pas la représentation considérée. Et il suffit de borner notre intégrale quand δ est inférieur à ce minimum. Or

$$dS_A = \lambda(A)\, d(t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}),$$

où λ est lipschitzien d'exposant h. L'intégrale

$$\int^{(m-1)} \frac{\partial H}{\partial x_\beta}(X, A; 0)[\sigma(A)\lambda(A) - \sigma(X)\lambda(X)]\, d(t_1, \ldots, t_{m-1})$$

est bornée comme portant sur $O[L^{k-m}(S, T)]$, $1 < k < 1 + h$. De même

$$\sigma(X)\lambda(X) \int^{(m-1)} \left[\frac{\partial H(X, A; 0)}{\partial x_\beta} + \frac{\partial H(A, X; 0)}{\partial a_\beta}\right] d(t_1, \ldots, t_{m-1})$$

porte sur $O[L^{1+h-m}(S, T)]$ et est borné. Or

$$\frac{\partial H(A, X; 0)}{\partial a_\beta} = \sum_\gamma \frac{\partial t_\gamma}{\partial a_\beta} \frac{\partial}{\partial t_\gamma} H(A, X; 0);$$

en retranchant de là le produit de ΘH par une fonction lipschitzienne, on fait disparaître la dérivée par rapport à t_m; les autres dérivées ont des coefficients lipschitziens et par suite donnent des intégrales bornées (I, 9); le terme en ΘH donne aussi une intégrale bornée (a, II, 21, p. 73 à 76). Les termes (3) sont donc bien lipschitziens d'exposant h.

Donc σ est lipschitzien d'exposant h.

Considérons comme variables les valeurs données de Θu sur $\mathfrak{S}$, et supposons que la valeur absolue du noyau résolvant admette une limitation connue

$$O\,[L^{1+h-m}(X, A)].$$

Soit M une limite supérieure de la valeur absolue de Θu et de son coefficient lipschitzien pour un exposant $k \leqq h$, k pouvant être aussi petit qu'on veut. Alors $\sigma = O(M)$, la constante impliquée dans o étant indépendante de M et de k. Les termes (1) admettent, relativement à l'exposant lipschitzien k, un coefficient O(M). Les termes (2) ont, pour le même exposant, également un coefficient O(M). Il en est de même pour les termes (4). Pour les termes (3), si $k < h$, on peut prendre un coefficient $O\left(\frac{M}{h-k}\right)$ $\left(\text{I, 7; le maximum de } x^\alpha \log\frac{L_0}{x}, \text{ pour } 0 < x < L_0, \text{ est } \frac{L_0^\alpha}{\alpha e}\right)$; donc alors σ est lipschitzien d'exposant k et de coefficient $O\left(\frac{M}{h-k}\right)$. Si $k = h$, les calculs ci-dessus donnent évidemment un coefficient O(M); cela s'appliquerait aussi au cas où $k < h$, mais peu nous importera.

5. *Condition de Lipschitz pour les dérivées du potentiel. — Si les $a_{\alpha,\beta}$, les b_α, c, les dérivées des coordonnées des points de $\mathfrak{S}$ et σ sont lipschitziens d'exposant h < 1, les dérivées de u coïncident dans $\mathcal{D}$ avec une fonction lipschitzienne d'exposant h; de même, hors de $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$, elles coïncident avec une fonction lipschitzienne d'exposant h.*

Il n'y a lieu à démonstration que pour les points dont la distance à $\mathfrak{S}$ est inférieure à un maximum fixe. D'ailleurs si (V, 4)

$$G(X, A) = H(X, A; o) + J(X, A),$$

les dérivées premières et secondes de J sont respectivement

$$O[L^{1+h-m}(X, A)] \quad \text{et} \quad O[L^{h-m}(X, A)].$$

Donc les dérivées de $\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} J(X, A)\sigma(A)\, ds_A$ existent et sont lipschitziennes d'exposant h (I, 1).

La fonction

$$(5) \qquad \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \frac{\partial H(X, A; o)}{\partial x_\alpha}[\sigma(A) - \sigma(X)]\, dS_A$$

est aussi lipschitzienne d'exposant h comme on le voit par un raisonnement fait dans la démonstration du théorème précédent.

Il reste à examiner

$$\sigma(X) \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \frac{\partial H(X, A; o)}{\partial x_\alpha}\, dS_A,$$

où l'on peut laisser de côté le premier facteur, puisqu'il est lipschitzien d'exposant h.

Introduisons les paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$ des points de $\mathfrak{S}$; on ne restreint rien en supprimant la partie de $\mathfrak{S}$ qui n'admet pas cette représentation et en admettant que la distance de X à la frontière de la partie $\mathfrak{S}_1$ que nous conservons dans $\mathfrak{S}$, est supérieure à un minimum positif fixe. Introduisons, par les procédés déjà indiqués (III, 4), la variable t_m et soient $s_1, s_2, \ldots, s_m$ les valeurs de ces paramètres pour X. On a

$$dS_A = \lambda(A)\, d(t_1, \ldots, t_{m-1}).$$

Posons

$$a'_{\gamma,\delta}(S) = \Sigma_{\varepsilon,\zeta}\, a_{\varepsilon,\zeta}(X) \frac{\partial s_\gamma}{\partial x_\varepsilon} \frac{\partial s_\delta}{\partial x_\zeta}.$$

Soit $A'_{\gamma,\delta}$ le quotient par le déterminant D' des $a'_{\gamma,\delta}$ du mineur de $a'_{\gamma,\delta}$ dans ce déterminant; on a

$$A'_{\gamma,\delta} = \Sigma_{\varepsilon,\zeta}\, A_{\varepsilon,\zeta} \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial s_\gamma} \frac{\partial x_\zeta}{\partial s_\delta},$$

car, en prenant cela comme définition, cela entraîne

$$\Sigma_\gamma\, a'_{\gamma,\delta} A'_{\gamma,\varepsilon} = 0 \text{ si } \delta \neq \varepsilon, \quad = 1 \text{ si } \delta = \varepsilon.$$

On a

$$x_\gamma - a_\gamma = \Sigma_\delta (s_\delta - t_\delta) \frac{\partial a_\gamma}{\partial t_\delta} + \mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h}(\mathrm{S}, \mathrm{T})],$$

$$\frac{\partial}{\partial s_\varepsilon}\left[x_\gamma - a_\gamma - \Sigma_\delta (s_\delta - t_\delta) \frac{\partial a_\gamma}{\partial t_\delta}\right] = \frac{\partial x_\gamma}{\partial s_\varepsilon} - \frac{\partial a_\gamma}{\partial t_\varepsilon} = \mathrm{O}[\mathrm{L}^h(\mathrm{S}, \mathrm{T})].$$

Par suite

$$\Sigma_{\gamma,\delta} \mathrm{A}_{\gamma,\delta}(\mathrm{A})(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta) - \Sigma_{\gamma,\delta} \mathrm{A}'_{\gamma,\delta}(\mathrm{T})(s_\gamma - t_\gamma)(s_\delta - t_\delta) + \mathrm{O}[\mathrm{L}^{2+h}(\mathrm{S},\mathrm{T})],$$

et les dérivées du dernier terme par rapport à S valent $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h}(\mathrm{S}, \mathrm{T})]$ et sont continues pour $\mathrm{S} \neq \mathrm{T}$.

Soit

$$\mathrm{H}'(\mathrm{S}, \mathrm{T}; 0) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}'(\mathrm{T})}} \mathrm{F}\left[\sqrt{\Sigma_{\gamma,\delta} \mathrm{A}'_{\gamma,\delta}(\mathrm{T})(s_\gamma - t_\gamma)(s_\delta - t_\delta)}\right].$$

On a, si le sens $(t_1, t_2, \ldots, t_{m-1})$ de $\mathfrak{S}$ correspond au sens $(x_1, \ldots, x_m)$ de $\mathcal{D}$, ce qui entraîne que le déterminant fonctionnel a le signe de

$$(-1)^{m-1} \quad (a, \text{I}, 4, \text{ p. } 9),$$

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0) + (-1)^m \frac{d(t_1, \ldots, t_m)}{d(a_1, \ldots, a_m)} \mathrm{H}'(\mathrm{S}, \mathrm{T}; 0) = \mathrm{O}[\mathrm{L}^{2+h-m}(\mathrm{S}, \mathrm{T})],$$

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\left[\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0) + (-1)^m \frac{d(t_1, \ldots, t_m)}{d(a_1, \ldots, a_m)} \mathrm{H}'(\mathrm{S}, \mathrm{T}; 0)\right] = \mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h-m}(\mathrm{S}, \mathrm{T})]$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

ces fonctions étant continues pour $\mathrm{S} \neq \mathrm{T}$. De plus

$$\Sigma_\beta \mathrm{A}_{\alpha,\beta}(\mathrm{A})(x_\beta - a_\beta) = \Sigma_{\gamma,\delta} \mathrm{A}'_{\gamma,\delta}(\mathrm{T}) \frac{\partial t_\delta}{\partial a_\alpha}(s_\gamma - t_\gamma) + \mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h}(\mathrm{S}, \mathrm{T})],$$

les dérivées du dernier terme par rapport à S étant $\mathrm{O}[\mathrm{L}^h(\mathrm{S}, \mathrm{T})]$. Donc

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_\alpha}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0) + (-1)^m \frac{d(t_1, \ldots, t_m)}{d(a_1, \ldots, a_m)} \sum_\beta \frac{\partial t_\beta}{\partial a_\alpha} \frac{\partial \mathrm{H}'}{\partial s_\beta}(\mathrm{S}, \mathrm{T}; 0) = \mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h-m}(\mathrm{S}, \mathrm{T})]$$

et les dérivées par rapport à S du premier membre valent

$$\mathrm{O}[\mathrm{L}^{h-m}(\mathrm{S}, \mathrm{T})];$$

toutes ces fonctions sont continues pour $\mathrm{S} \neq \mathrm{T}$.

Donc (I, 1)

$$\int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \frac{\partial H}{\partial x_\alpha}(X, A; 0)\, dS_A + (-1)^m \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \frac{d(t_1, \ldots, t_m)}{d(a_1, \ldots, a_m)}$$
$$\times \lambda(A) \sum\nolimits_\beta \frac{\partial t_\beta}{\partial a_\alpha} \frac{\partial H'}{\partial s_\beta}(S, T; 0)\, d(t_1, \ldots, t_{m-1})$$

est lipschitzien d'exposant h. En prenant $\lambda(X)$ égal à la valeur de $\lambda(A)$ au point $(s_1, \ldots, s_{m-1}, 0)$ de $\mathcal{S}$, l'intégrale

$$\int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \left[\frac{d(t_1, \ldots, t_m)}{d(a_1, \ldots, a_m)} \lambda(A) \frac{dt_\beta}{da_\alpha} - \frac{d(s_1, \ldots, s_m)}{d(x_1, \ldots, x_m)} \lambda(X) \frac{\partial s_\beta}{\partial x_\alpha}\right]$$
$$\times \frac{\partial H'}{\partial s_\beta}(S, T; 0)\, d(t_1, \ldots, t_{m-1})$$

est aussi lipschitzienne d'exposant h : c'est en réalité le même raisonnement que pour (5). En laissant de côté des facteurs lipschitziens d'exposant h, nous sommes ramenés aux intégrales

$$\int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \frac{\partial H'}{\partial s_\beta}(S, T; 0)\, d(t_1, \ldots, t_{m-1}) \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, m).$$

Or on va voir que

$$\int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \left[\frac{\partial H'(S, T; 0)}{\partial s_\beta} + \frac{\partial H'(T, S; 0)}{\partial t_\beta}\right] d(t_1, \ldots, t_{m-1}) \tag{6}$$

est lipschitzien d'exposant h. Tout d'abord le théorème (I, 7) s'applique, les $A'_{\gamma,\delta}(S)$ et $D'(S)$ jouant le rôle des $w_n(X)$ du théorème et λ étant égal à 1. La dérivée par rapport à $D'(S)$ est le produit d'une fonction bornée de S par

$$\frac{\partial}{\partial t_\beta} F\left[\sqrt{\Sigma_{\gamma,\delta} A'_{\gamma,\delta}(S)(s_\gamma - t_\gamma)(s_\delta - t_\delta)}\right];$$

si $\beta \neq m$, l'intégrale correspondante, étendue à la partie de $\mathcal{S}_1$ définie par $L(S, T) > \rho > 0$, est bornée quand ρ varie (I, 9). La dérivée par rapport à $A'_{\gamma,\delta}(S)$ est

$$\frac{\partial}{\partial t_\beta} \frac{(s_\gamma - t_\gamma)(s_\delta - t_\delta)}{\sqrt{\Sigma_{\varepsilon,\zeta} A'_{\varepsilon,\zeta}(S)(s_\varepsilon - t_\varepsilon)(s_\zeta - t_\zeta)}} F'\left[\sqrt{\Sigma_{\varepsilon,\zeta} A'_{\varepsilon,\zeta}(S)(s_\varepsilon - t_\varepsilon)(s_\zeta - t_\zeta)}\right] \quad (\gamma \neq \delta),$$

ou la moitié si $\gamma = \delta$; l'intégrale est donc encore bornée si $\beta \neq m$. Si $\beta = m$, on remarque que

$$(7)\quad \Sigma_\beta\, a'_{m,\beta}(S)\frac{\partial}{\partial t_\beta}F\left[\sqrt{A'_{\gamma,\delta}(S)(s_\gamma - t_\gamma)(s_\delta - t_\delta)}\right]$$
$$= \frac{s_m}{\sqrt{\Sigma_{\gamma,\delta}A'_{\gamma,\delta}(S)(s_\gamma - t_\gamma)(s_\delta - t_\delta)}}F'\left[\sqrt{\Sigma_{\gamma,\delta}A'_{\gamma,\delta}(S)(s_\gamma - t_\gamma)(s_\delta - t_\delta)}\right];$$

c'est le produit de s_m par une fonction $O[L^{-m}(S, T)]$, et par suite (a, II, 21, p. 73 à 76) son intégrale est bornée. L'intégrale

$$\int^{(m-1)}\frac{\partial}{\partial t_m}F\left[\sqrt{\Sigma_{\gamma,\delta}A'_{\gamma,\delta}(S)(s_\gamma - t_\gamma)(s_\delta - t_\delta)}\right]d(t_1, \ldots, t_{m-1}),$$

étendue à $L(S, T) > \rho > 0$, est donc bornée quand ρ varie. Dérivons maintenant par rapport à $A'_{\gamma,\delta}(S)$ les deux membres de (7); nous devons considérer les $a'_{m,\beta}$ comme des fonctions de $A'_{\gamma,\delta}$ définies par les relations

$$\Sigma_\beta\, a'_{m,\beta}A'_{\beta,\gamma} = 0 \text{ si } \gamma \neq m, \quad = 1 \text{ si } \gamma = m,$$

qui donnent, comme dérivée de $a'_{m,\beta}$ par rapport à $A'_{\gamma,\delta}$,

$$-a'_{m,\gamma}a'_{\beta,\delta} - a'_{m,\delta}a'_{\beta,\gamma} \quad \text{si } \gamma \neq \delta,$$

et la moitié de cette expression si $\gamma = \delta$. On trouve ainsi que

$$\Sigma_\beta\, a'_{m,\beta}(S)\frac{\partial}{\partial t_\beta}\left\{\frac{(s_\gamma - t_\gamma)(s_\delta - t_\delta)}{\sqrt{\Sigma_{\varepsilon,\zeta}A'_{\varepsilon,\zeta}(S)(s_\varepsilon - t_\varepsilon)(s_\zeta - t_\zeta)}}F'\left[\sqrt{\Sigma_{\varepsilon,\zeta}A'_{\varepsilon,\zeta}(S)(s_\varepsilon - t_\varepsilon)(s_\zeta - t_\zeta)}\right]\right\}$$

est la somme de termes dont les uns ont, d'après ce qui précède, une intégrale bornée quand ρ varie; d'autres ont la même propriété parce qu'ils sont les produits de s_m par une fonction $O[L^{-m}(S, T)]$, d'autres enfin parce qu'ils valent $O[L^{2-m}(S, T)]$, L'intégrale (6) est donc bien lipschitzienne d'exposant h.

Restent donc les intégrales

$$\int_{\mathfrak{S}_1}^{(m-1)}\frac{\partial H'(T, S; 0)}{\partial t_\beta}d(t_1, \ldots, t_{m-1}).$$

Si $\beta \neq m$, la formule de Green les remplace par des intégrales étendues à la frontière de $\mathfrak{S}_1$; elles sont donc bien lipschitziennes d'exposant h. Si $\beta = m$, la partie principale de H' conduit à une intégrale lipschitzienne d'exposant h comme on le voit en remplaçant $\mathfrak{S}_1$ par la frontière d'un domaine borné et s_m par $\Sigma_\alpha(s_\alpha - t_\alpha)\varpi'_\alpha(\mathrm{T})$ (a, II, 18, p. 70). Les autres termes de H' donnent une intégrale qui admet, par rapport aux $\mathrm{A}'_{\varepsilon,\zeta}(\mathrm{S})(\varepsilon, \zeta = 1, 2, \ldots, m)$ des dérivées continues; d'autre part, si l'on remplace les $\mathrm{A}'_{\varepsilon,\zeta}(\mathrm{S})$ par des constantes, cette intégrale est lipschitzienne d'exposant quelconque inférieur à 1; ces autres termes de H' donnent donc une intégrale lipschitzienne d'exposant h.

Les dérivées de u sont donc bien lipschitziennes d'exposant h.

Si l'on considère $\mathcal{S}$ comme fixe, ainsi que les $a_{\alpha,\beta}$, les b_α, c (ou tout au moins des limites supérieures de leurs valeurs absolues et de leurs coefficients lipschitziens pour l'exposant h et une limite inférieure positive du déterminant des $a_{\alpha,\beta}$, ainsi que le nombre $g > 0$ et le domaine hors duquel

$$\mathcal{F}u = \sum_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u;$$

pour abréger, on passe ici sur des considérations de continuité analogues à celles qu'on trouvera plus loin, VIII, 7, XIV, 2, 5), et si σ est variable, nommons M une limite supérieure de $|\sigma|$ et de son coefficient lipschitzien pour l'exposant $k \leqq h$; alors une limite supérieure de l'intégrale $\int^{(m-1)} \frac{\partial \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)}{\partial x_\alpha} ds_\mathrm{A}$, étendue à $\mathrm{L}(\mathrm{S}, \mathrm{T}) > \rho > 0$, est $\mathrm{O}(1)$ dans notre hypothèse; le coefficient lipschitzien de

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{\partial \mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0)}{\partial x_\alpha} [\sigma(\mathrm{A}) - \sigma(\mathrm{X})]\, d\mathrm{S}_\mathrm{A},$$

pour l'expression k, est donc $\mathrm{O}\left(\frac{\mathrm{M}}{k}\right)$ (I, 8, 9) et il en est de même du coefficient lipschitzien des dérivées de u.

6. *Généralisation.* — Considérons maintenant la fonction

$$u(\mathrm{X}) = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{G}_p(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, \sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A}.$$

Elle diffère de celle que nous avons considérée, par les termes

$$\sum_{n=2}^{p} \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{G}^{(n)}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, \sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$
$$= \sum_{n=2}^{p} \int^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, \chi(\mathrm{A}) \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{G}^{(n-1)}(\mathrm{A}, \Xi)\, \sigma(\Xi)\, d\mathrm{S}_\Xi\, d\mathrm{V}_\mathrm{A};$$

les dérivées de cette somme sont donc lipschitziennes d'exposant quelconque inférieur à 1 et cela suffit à prouver que les propriétés précédentes (§ 2 à 5) ont lieu aussi pour la nouvelle fonction u.

7. *Autre sorte de potentiel.* — En plus des hypothèses générales (V, 11) qui suffisent à assurer l'existence de $G(X, \Xi)$, faisons celle que les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ existent et sont lipschitziennes d'exposant $h < 1$; h est aussi l'exposant lipschitzien des b_α et de c. Considérons la fonction

$$u(\Xi) = \int_S^{(m-1)} G(A, \Xi)\,\sigma(A)\,dS_A,$$

que nous nommons aussi un potentiel de simple couche. En introduisant (V, 18) une certaine fonction $\omega(\Xi)$ bornée positive dont les dérivées sont lipschitziennes d'exposant h, on a

$$u(\Xi) = \omega(\Xi) \int_S^{(m-1)} \left[\frac{\omega(A)}{\omega(\Xi)} G(A, \Xi)\right] \frac{\sigma(A)}{\omega(A)}\,dS_A,$$

le facteur entre crochets étant, relativement à Ξ, la solution élémentaire principale d'une équation remplissant les hypothèses du début du chapitre, nous voyons sans calcul que tous les résultats précédents (§ 2 à 5) s'appliquent et qu'ils s'appliquent aussi à la fonction

$$\int_S^{(m-1)} G_p(A, \Xi)\,\sigma(A)\,dS_A\,;$$

toutefois il convient, dans la nouvelle forme de la proposition du paragraphe 4, de remplacer l'opération Θ par l'opération Z.

CHAPITRE VIII.

LE POTENTIEL DE DOUBLE COUCHE ET SES DÉRIVÉES.

1. *Préliminaires.* — On va s'occuper du potentiel de double couche

$$u(X) = \int_S^{(m-1)} ZG(X, A)\,\sigma(A)\,dS_A$$

et de ses dérivées, au point de vue de la continuité et des conditions de Lipschitz. Pour des raisons identiques à celles du chapitre précédent (VII, 1), nous nous bornons au cas où $\mathcal{S}$ est la frontière d'un domaine borné et ouvert $\mathcal{D}$; la normale à $\mathcal{S}$ sera dirigée vers l'extérieur de $\mathcal{D}$. Si l'on prenait pour $\mathcal{S}$ une multiplicité ayant une frontière, on pourrait appliquer les résultats à condition que la distance de X à cette frontière restât supérieure à un minimum positif fixe.

2. *Continuité et discontinuité du potentiel.* — Supposons que les conditions (V, 11) soient remplies et que les b_α, c et les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ soient lipschitziens d'exposant $h < 1$. Pour ce qui regarde $\mathcal{S}$, supposons remplies les hypothèses (II, 1) et qu'en outre les dérivées des coordonnées des points de $\mathcal{S}$ soient lipschitziennes d'exposant h. Enfin supposons que σ soit continu. *Le potentiel u coïncide dans $\mathcal{D}$ avec une fonction continue dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$; il coïncide hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ avec une fonction continue en tout point n'appartenant pas à $\mathcal{D}$. Sa limite, quand* X *vient sur $\mathcal{S}$ par points de $\mathcal{D}$, est*

$$-\frac{\sigma(X)}{2} + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\sigma(A)\, dS_A;$$

si X *vient sur $\mathcal{S}$ par points n'appartenant pas à $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, la limite est*

$$\frac{\sigma(X)}{2} + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\sigma(A)\, dS_A.$$

Tout cela résulte de (VII, 3) en remarquant que

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [\Theta G(X, A) + ZG(X, A)]\sigma(A)\, dS_A$$

porte sur $O[L^{2-m}(X, A)]$ et est par suite continu.

3. *Condition de Lipschitz pour la densité. — Si une des deux valeurs limites prises par u sur $\mathcal{S}$ est fonction lipschitzienne des paramètres s_1, s_2, ..., s_m du point* X *de $\mathcal{S}$, avec l'exposant $k < 1$, σ est lipschitzien d'exposant k.*

En effet la relation

$$\pm\frac{\sigma(X)}{2} + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\sigma(A)\, dS_A = u(X)$$

est une équation de Fredholm en σ; le noyau est continu pour $X \neq A$ et vaut $O[L^{1+h-m}(X, A)]$; le second membre est continu (et même lipschitzien) : donc σ est continu [1]. Mais les dérivées du noyau relativement à $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ existent et sont continues pour $X \neq A$, et valent $O[L^{h-m}(X, A)]$; donc (I, 1) l'intégrale est lipschitzienne d'exposant h; par suite σ est lipschitzien d'exposant égal au plus petit des nombres h et k. Si $k \leqq h$, le théorème se vérifie donc.

Soit maintenant p l'entier tel que $ph \leqq k < (p+1)h\,(p \geqq 1)$. Nous allons prouver que si σ est lipschitzien d'exposant $nh\,(n \leqq p)$, il est lipschitzien d'exposant égal au plus petit des nombres k et $(n+1)h$; joint à ce qui précède, cela achèvera notre démonstration. Or (VI, 1)

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\, dS_A = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, A)\, \psi(A)\, dS_A - \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\, c(A)\, dV_A - \frac{1}{2}.$$

Le premier membre est donc lipschitzien d'exposant quelconque inférieur à 1 (VII, 2). Donc (I, 2) l'intégrale

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\, \sigma(A)\, dS_A$$

est lipschitzienne d'exposant $(n+1)h$ si $(n+1)h < 1$, d'exposant quelconque inférieur à 1 dans le cas contraire. Notre proposition en résulte.

Supposons que la valeur absolue de la résolvante de Fredholm ait une limitation $O[L^{1+h-m}(X, A)]$. Soit d'autre part M une limite supérieure de la valeur absolue de u et de son coefficient lipschitzien pour l'exposant k. Regardons comme fixes des limites supérieures des valeurs absolues des $a_{\alpha,\beta}$, des b_α, de c, des dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ et des coefficients lipschitziens de toutes ces fonctions pour l'exposant fixe h, et une limite inférieure positive du déterminant des $a_{\alpha,\beta}$; g est fixe ainsi que le domaine borné hors duquel les coefficients de $\mathcal{F}$ sont constants; $\mathcal{S}$ est aussi donné fixe; mais regardons k et M comme variables. Les coefficients lipschitziens de l'intégrale pour les coefficients $nh \leqq k$ sont trouvés successivement égaux à $O(M)$, et le coefficient lipschitzien de σ pour l'exposant k est $O\left(\frac{M}{1-k}\right)$.

---

[1] Même remarque qu'au passage analogue de (VII, 4).

4. *Condition de Lipschitz pour le potentiel.* — *Si, outre les hypothèses du paragraphe 2, σ est lipschitzien d'exposant $k < 1$, u est lipschitzien d'exposant k dans $\mathcal{D}$, et l'est aussi hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$.*

Un procédé déjà indiqué (III, 4) permet d'adjoindre aux paramètres $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ des points de $\mathcal{S}$ un paramètre s_m, de façon à pouvoir repérer à l'aide de ces paramètres les points X suffisamment voisins de $\mathcal{S}$. Il suffit de faire notre démonstration si X est dans ce voisinage de $\mathcal{S}$; nous supposerons de plus qu'il appartient, par exemple, à $\mathcal{D}$.

Définissons $\sigma(X)$ hors de $\mathcal{S}$ comme indépendant de s_m quand on l'exprime à l'aide des paramètres ; c'est une fonction lipschitzienne d'exposant k. Soit $\mathcal{S}''$ la région de $\mathcal{S}$ telle que $L(X, A) < 2L(X, Y)$, X et Y étant deux points de $\mathcal{D}$, et soit $\mathcal{S}'$ le reste de $\mathcal{S}$. On a

$$\begin{aligned} u(X) - u(Y) = & \int_{\mathcal{S}''}^{(m-1)} ZG(X, A)[\sigma(A) - \sigma(X)]\, dS_A \\ & - \int_{\mathcal{S}''}^{(m-1)} ZG(Y, A)[\sigma(A) - \sigma(Y)]\, dS_A \\ & + [\sigma(X) - \sigma(Y)] \int_{\mathcal{S}''}^{(m-1)} ZG(Y, A)\, dS_A \\ & + \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} [ZG(X, A) - ZG(Y, A)][\sigma(A) - \sigma(X)]\, dS_A \\ & + \sigma(X) \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [ZG(X, A) - ZG(Y, A)]\, dS_A. \end{aligned}$$

Or il résulte de raisonnements antérieurs (*a*, II, 21, p. 73 à 76) que l'intégrale $\int^{(m-1)} |ZG(X, A)|\, dS_A$, étendue à une partie $\mathcal{S}_1$ de $\mathcal{S}$, est bornée quand $\mathcal{S}_1$ et X varient. Regardons comme fixes les coefficients de l'équation, ou du moins h et les limitations indiquées ci-dessus (§ 3) ; soit M une limite supérieure de σ et de son coefficient lipschitzien pour l'exposant k. Alors les trois intégrales étendues à $\mathcal{S}''$ sont $O[ML^k(X, Y)]$. Celle qui est étendue à $\mathcal{S}'$ est $O\left[\frac{M}{1-k} L^k(X, Y)\right]$ (même raisonnement que pour I, 2). Enfin la dernière est $O[ML^k(X, Y)]$. Donc

$$u(X) - u(Y) = O\left[\frac{M}{1-k} L^k(X, Y)\right].$$

5. *Conditions de Lipschitz pour les dérivées de $s_m u$.* — *Si, aux hypothèses précédentes, nous joignons celle que $k = h$, les dérivées de $s_m u$ sont lipschitziennes d'exposant h dans $\mathcal{D}$ et le sont aussi hors de $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$* (il ne s'agit, bien entendu, que des points de $\mathcal{D}$ ou de l'extérieur de $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$ pour lesquels on peut employer les paramètres $s_1, s_2, \ldots, s_m$).

En effet, si X est dans $\mathcal{D}$,

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} s_m \mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$
$$= \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} s_m \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, \psi(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A} - \int_{\mathcal{D}}^{(m)} s_m \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, c(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A} - s_m.$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha} \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} s_m \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, \psi(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$
$$= \frac{\partial s_m}{\partial s_\alpha} \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, \psi(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A} + \Sigma_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial s_\alpha} \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} s_m \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_\beta} \psi(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A};$$

les intégrales du second membre sont lipschitziennes d'exposant quelconque inférieur à 1 (I, 4); à cause des coefficients des derniers termes, le premier membre est donc lipschitzien d'exposant h. Mais (I, 4)

$$\frac{\partial}{\partial s_\alpha}(s_m u) = \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial s_\alpha}[s_m \mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})][\sigma(\mathrm{A}) - \sigma(\mathrm{X})]\, d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$
$$+ \sigma(\mathrm{X}) \frac{\partial}{\partial s_\alpha} \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} s_m \mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A};$$

tout se ramène donc (I, 10) à prouver que les intégrales

$$\int^{(m-1)} \mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A}, \quad \int^{(m-1)} s_m \frac{\partial}{\partial x_\beta} \mathrm{ZG}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A},$$

étendues à $\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) > \rho > 0$, sont bornées quand ρ varie. C'est connu pour la première. Quant à la seconde, elle porte sur le produit de s_m par une fonction $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{-m}(\mathrm{X}, \mathrm{A})]$ et par suite (a, II, 21, p. 73 à 76) son intégrale est bornée.

Si $\mathfrak{S}$, $\mathcal{F}$ et ψ sont donnés de façon fixe, et si $|\sigma| < \mathrm{M}$, M étant aussi le coefficient lipschitzien de σ pour l'exposant $k \leq h \leq 1$, on constate que les dérivées de $s_m u$ sont $O\left(\frac{M}{k}\right)$ et que leur coefficient lipschitzien pour l'exposant k est $O\left[\frac{M}{(k_1-k)}\right]$.

6. *Condition de Lipschitz pour les dérivées de la densité. — Si, en plus des hypothèses du paragraphe 2, $\psi(A)$ est lipschitzien d'exposant h, et si les dérivées d'une des valeurs limites de u, quand X vient sur $\mathfrak{S}$, existent et sont lipschitziennes d'exposant h, les dérivées de σ existent et sont lipschitziennes d'exposant h.*

Tout revient à prouver que les dérivées de

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\sigma(A)\, dS_A,$$

quand X appartient à $\mathfrak{S}$, existent et sont lipschitziennes d'exposant h. Or l'identité

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\, dS_A = \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} G(X, A)\psi(A)\, dS_A - \int_{\mathfrak{D}}^{(m)} G(X, A)c(A)\, dV_A - \frac{1}{2}$$

prouve (VII, 5) que les dérivées du premier membre existent et sont lipschitziennes d'exposant h. D'autre part (§3) σ est lipschitzien d'exposant quelconque inférieur à 1. Donc (I, 4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\sigma(A)\, dS_A = \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial s_\alpha} ZG(X, A)[\sigma(A)-\sigma(X)]\, dS_A \\ + \sigma(X)\frac{\partial}{\partial s_\alpha}\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} ZG(X, A)\, dS_A;\end{aligned}$$

en posant $G(X, A) = H(X, A; 0) + J(X, A)$, on vérifie immédiatement en effet que $\frac{\partial}{\partial s_\alpha} ZG(X, A) = O[L^{h-m}(X, A)]$, et par suite les dérivées de σ existent et sont continues. De plus le dernier terme est lipschitzien d'exposant h.

On va voir qu'il en est de même du premier. En remplaçant $\frac{\partial}{\partial s_\alpha}$

par $\sum_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial s_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}$, on se ramène d'une part aux termes

$$\frac{\partial x_\beta}{\partial s_\alpha} \int_S^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \mathrm{ZJ}(\mathrm{X}, \mathrm{A})[\sigma(\mathrm{A}) - \sigma(\mathrm{X})]\, d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$

qui, d'après (I, 7), sont bien lipschitziens d'exposant h; d'autre part, on a à appliquer l'opération $\frac{\partial}{\partial x_\beta}\mathrm{Z}$ à

$$\mathrm{H}(\mathrm{X}, \mathrm{A}; 0) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{D}(\mathrm{A})}} \mathrm{F}\left[\sqrt{\Sigma_{\gamma,\delta} \mathrm{A}_{\gamma,\delta}(\mathrm{A})(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta)}\right];$$

l'opération Z donne un terme ayant $\Sigma_\gamma \varpi_\gamma(\mathrm{A})(x_\gamma - a_\gamma)$ en facteur, et un terme $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{2-m}(\mathrm{X}, \mathrm{A})]$; si la dérivation relative à x_β porte ailleurs que sur le facteur $\Sigma_\gamma \varpi_\gamma(\mathrm{A})(x_\gamma - a_\gamma)$, le résultat est encore lipschitzien d'exposant h (I, 7). Reste enfin l'intégrale

$$\int_S^{(m-1)} \mathrm{F}'\left[\sqrt{\Sigma_{\gamma,\delta} \mathrm{A}_{\gamma,\delta}(\mathrm{A})(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta)}\right] \frac{\Sigma_\gamma \varpi_\gamma(\mathrm{A})\left(\frac{\partial x_\gamma}{\partial s_\alpha} - \frac{\partial a_\gamma}{\partial t_\alpha}\right)}{\sqrt{\Sigma_{\gamma,\delta} \mathrm{A}_{\gamma,\delta}(\mathrm{A})(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta)}} \frac{\sigma(\mathrm{A}) - \sigma(\mathrm{X})}{\sqrt{\mathrm{D}(\mathrm{A})}} d\mathrm{S}_\mathrm{A},$$

car $\Sigma_\gamma \varpi_\gamma(\mathrm{A}) \frac{\partial a_\gamma}{\partial t_\alpha} = 0$; elle est lipschitzienne d'exposant k quelconque inférieur à h d'après (I, 7), le rôle des $w_n(\mathrm{X})$ étant tenu par $\sigma(\mathrm{X})$ et par les $\frac{\partial x_\gamma}{\partial s_\alpha}$; donc les dérivées de σ sont lipschitziennes d'exposant k. Alors à cette dernière intégrale, on va appliquer (I, 8); il suffit de prouver que si l'on étend l'intégrale.

$$\int^{(m-1)} \mathrm{F}'\left[\sqrt{\Sigma_{\gamma,\delta} \mathrm{A}_{\gamma,\delta}(\mathrm{A})(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta)}\right] \times \frac{\sigma(\mathrm{A}) - \sigma(\mathrm{X})}{\sqrt{\Sigma_{\gamma,\delta} \mathrm{A}_{\gamma,\delta}(\mathrm{A})(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta)}} d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$

à la région $\mathrm{L}(\mathrm{S}, \mathrm{T}) > \rho > 0$, cette intégrale est bornée quand ρ varie. Or, en prenant $\sigma(\mathrm{X})$ indépendant de s_m quand on l'exprime à l'aide des paramètres,

$$\sigma(\mathrm{A}) - \sigma(\mathrm{X}) = \Sigma_\gamma (a_\gamma - x_\gamma) \frac{\partial \sigma}{\partial x_\gamma} + \mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+k}(\mathrm{S}, \mathrm{T})],$$

et le dernier terme donne lieu à une intégrale bornée. Mais on peut écrire

$$\Sigma_\gamma(a_\gamma - x_\gamma)\frac{\partial\sigma}{\partial x_\gamma} = \Sigma_{\gamma.\delta}\mu_\delta(\mathrm{A})\mathrm{A}_{\gamma.\delta}(\mathrm{A})(x_\gamma - a_\gamma),$$

les μ_δ étant lipschitziens; cela ramène aux intégrales

$$\int^{(m-1)}\frac{\partial}{\partial x_\varepsilon}\mathrm{F}\left[\sqrt{\Sigma_{\gamma.\delta}\mathrm{A}_{\gamma.\delta}(\mathrm{A})(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta)}\right]d\mathrm{S}_\mathrm{A},$$

qui sont bornées (*voir* VII, 5).

Donc les dérivées de σ sont lipschitziennes d'exposant h.

Regardons comme fixes h, $\mathfrak{S}$, $\mathcal{F}$ et ψ, et comme variable u, dont les dérivées ont leur valeur absolue inférieure à M, ainsi que leurs coefficients lipschitziens pour l'exposant h. Il est alors évident que les dérivées de σ sont O(M) (si l'équation de Fredholm a une solution unique), et que leur coefficient lipschitzien est O(M) pour l'exposant h.

7. *Conditions de Lipschitz pour les dérivées du potentiel. — Si, outre les hypothèses du paragraphe* 4, ψ *est lipschitzien d'exposant h, et si les dérivées de* σ *existent et sont lipschitziennes d'exposant* h, *toutes les dérivées de u existent et coïncident dans* $\mathcal{D}$ *avec une fonction lipschitzienne d'exposant* h; *de même elles existent et coïncident hors de* $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$ *avec une fonction lipschitzienne d'exposant h.*

S'il existe une fonction $\sigma(\mathrm{X})$, à dérivées secondes bornées dans $\mathcal{D}$, qui coïncide sur $\mathfrak{S}$ avec la densité, l'identité

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)}\mathrm{ZG}(\mathrm{X},\mathrm{A})\sigma(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A} = \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)}\mathrm{G}(\mathrm{X},\mathrm{A})\Theta\sigma(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A} - \int_{\mathcal{D}}^{(m)}\mathrm{G}(\mathrm{X},\mathrm{A})\mathcal{F}\sigma(\mathrm{A})\,d\mathrm{V}_\mathrm{A} - \sigma(\mathrm{X}),$$

où X est supposé dans $\mathcal{D}$, et l'identité analogue pour X hors de $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$ (elle se déduit de la précédente en supprimant le dernier terme), suffisent à la démonstration (VII, 5).

Dans le cas général, tant que X est, par exemple, dans $\mathcal{D}$, nous pouvons écrire, en désignant par Ξ un point quelconque assez voisin de $\mathfrak{S}$, et en définissant σ et ψ, au voisinage de $\mathfrak{S}$, par le procédé habituel (III, 4), c'est-à-dire en les faisant dépendre de $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ mais non de s_m,

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{ZG}(\mathrm{X},\mathrm{A})\sigma(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$
$$=\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{\partial \mathrm{ZG}(\mathrm{X},\mathrm{A})}{\partial x_\alpha}\left[\sigma(\mathrm{A})-\sigma(\Xi)-\Sigma_\beta(a_\beta-\xi_\beta)\frac{\partial\sigma(\Xi)}{\partial\xi_\beta}\right]d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$
$$-\sigma(\Xi)\int_{\varpi}^{(m)}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_\alpha}(\mathrm{X},\mathrm{A})\,c(\mathrm{A})\,d\mathrm{V}_\mathrm{A}$$
$$+\sigma(\Xi)\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}\mathrm{G}(\mathrm{X},\mathrm{A})\,\psi(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$
$$+\Sigma_\beta\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_\beta}\left[-\int_{\varpi}^{(m)}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_\alpha}(\mathrm{X},\mathrm{A})\,\mathcal{F}(a_\beta-\xi_\beta)\,d\mathrm{V}_\mathrm{A}\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}\mathrm{G}(\mathrm{X},\mathrm{A})\,\Theta(a_\beta-\xi_\beta)\,d\mathrm{S}_\mathrm{A}-\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right].$$

Cette formule subsiste notamment si Ξ est confondu avec X (il est évident qu'il suffit de considérer les points X assez voisins de $\mathcal{S}$); or, dans ce cas, toutes les intégrales autres que la première restent lipschitziennes d'exposant h quand X tend vers $\mathcal{S}$; en particulier

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}\mathrm{G}(\mathrm{X},\mathrm{A})\,\Theta(a_\beta-\xi_\beta)\,d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$

dépend linéairement de ξ_β et devient donc bien lipschitzien d'exposant h quand on remplace ξ_β par x_β; il en est de même pour tous les termes autres que le premier.

Nous avons donc à considérer seulement la première intégrale,

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}\frac{\partial \mathrm{ZG}(\mathrm{X},\mathrm{A})}{\partial x_\alpha}\left[\sigma(\mathrm{A})-\sigma(\mathrm{X})-\Sigma_\beta(a_\beta-x_\beta)\frac{\partial\sigma(\mathrm{X})}{\partial x_\beta}\right]d\mathrm{S}_\mathrm{A}.$$

Tout d'abord, elle est continue comme portant sur $\mathrm{O}[(\mathrm{L}^{1+h-m}(\mathrm{X},\mathrm{A})]$. Montrons qu'elle est lipschitzienne d'exposant h. Nous pouvons nous borner au cas où les deux points X et Y, pour lesquels nous voulons évaluer la différence, sont assez voisins l'un de l'autre et de $\mathcal{S}$ pour que la même représentation paramétrique $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ convienne pour tous deux; on peut même faire en sorte que la distance de X à la frontière de la région qui admet cette représentation, reste supérieure à un minimum positif fixe. Supprimons toute la partie de $\mathcal{S}$ extérieure à cette région : cela ôte évidemment de l'intégrale une fonction lipschitzienne d'exposant h. Dans la partie conservée de $\mathcal{S}$, soient $\mathcal{S}''$ la région

$$L(X, A) < 2L(X, Y)$$

et $\mathcal{S}'$ la région restante. L'intégrale

$$\int_{\mathcal{S}''}^{(m-1)} \frac{\partial ZG(X, A)}{\partial x_\alpha} \left[\sigma(A) - \sigma(X) - \Sigma_\beta (a_\beta - x_\beta) \frac{\partial \sigma(X)}{\partial x_\beta}\right] dS_A$$

et celle qu'on en déduit en remplaçant X par Y, sont évidemment $O[L^h(X, Y)]$. Reste à intégrer la différence dans $\mathcal{S}'$; cela s'écrit

$$\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} \frac{\partial ZG(X, A)}{\partial x_\alpha} - \left[\frac{\partial ZG(Y, A)}{\partial y_\alpha}\right] \left[\sigma(A) - \sigma(X) - \Sigma_\beta (a_\beta - x_\beta) \frac{\partial \sigma}{\partial x_\beta}\right] dS_A$$
$$+ \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} \frac{\partial ZG(Y, A)}{\partial y_\alpha} \left[\sigma(Y) - \sigma(X) - \Sigma_\beta (y_\beta - x_\beta) \frac{\partial \sigma}{\partial x_\beta} \right.$$
$$\left. - \Sigma_\beta (a_\beta - y_\beta) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \sigma}{\partial y_\beta}\right)\right] dS_A.$$

Or, dans $\mathcal{S}'$, d'après le théorème des accroissements finis,

$$\frac{\partial ZG(X, A)}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial ZG(Y, A)}{\partial y_\alpha} = L(X, Y)\, O(L^{-m-1}(X, A)];$$

l'autre facteur, sous la première intégrale, étant $O[L^{1+h}(X, A)]$, cette intégrale est bien $O[L^h(X, Y)]$ (*voir* la démonstration de *b*, I, th. 1, p. 137). De même

$$\left[\sigma(Y) - \sigma(X) - \Sigma_\beta (y_\beta - x_\beta) \frac{\partial \sigma}{\partial x_\beta}\right] \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} \frac{\partial ZG(Y, A)}{\partial y_\alpha} dS_A = O[L^h(X, Y)].$$

La démonstration sera achevée si nous prouvons que

$$\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} (a_\beta - y_\beta) \frac{\partial ZG(Y, A)}{\partial y_\alpha} dS_A$$

est borné. En remplaçant $G(Y, A)$ par $H(Y, A; 0)$ (V, 4), nous ôtons une intégrale bornée, comme portant sur $O[L^{2-m}(Y, A)]$. Or

$$ZH(Y, A; 0) = O[L^{-m}(Y, A)] \Sigma_\gamma (y_\gamma - a_\gamma) \varpi_\gamma(A)$$

et

$$\Sigma_\gamma(y_\gamma - a_\gamma)\varpi_\gamma(A)\,dS_A$$
$$= \left\{(-1)^{m-1} s_m \frac{d(a_1, \ldots, a_m)}{d(t_1, \ldots, t_m)} + O[L^{1+h}(Y, A)]\right\} d(t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}),$$

S correspondant à Y et T à A; les dérivées du second terme sont $O[L^h(Y, A)]$. On se ramène donc à

$$\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} (a_\beta - y_\beta) \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \{ O[L^{-m}(Y, A)] s_m \} \, dS_A,$$

les dérivées du premier facteur, dans l'accolade, étant $O[L^{-m-1}(Y, A)]$; si donc la dérivation porte sur ce facteur, on a une intégrale bornée comme portant sur $s_m O[L^{-m}(Y, A)]$. Si la dérivation porte sur s_m, nous nous ramenons, en explicitant l'autre facteur et en retranchant une intégrale bornée, à

$$\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} (a_\beta - y_\beta) [\Sigma_{\gamma,\delta} A'_{\gamma,\delta}(S)(t_\gamma - s_\gamma)(t_\delta - s_\delta)]^{-\frac{m}{2}} d(t_1, \ldots, t_{m-1}).$$

Mais on peut aussi remplacer $a_\beta - y_\beta$ par

$$\Sigma_\gamma(t_\gamma - s_\gamma) \frac{\partial y_\beta}{\partial s_\gamma} + O[L^{1+h}(S, T)].$$

Le dernier terme donne une intégrale bornée, et l'on est ramené aux intégrales

$$\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} (t_\varepsilon - s_\varepsilon) [\Sigma_{\gamma,\delta} A'_{\gamma,\delta}(S)(t_\gamma - s_\gamma)(t_\delta - s_\delta)]^{-\frac{m}{2}} d(t_1, \ldots, t_{m-1}).$$

Si $\varepsilon = m$, cette intégrale est bornée comme portant sur $s_m O[L^{-m}(S, T)]$. Si $\varepsilon \neq m$, un raisonnement déjà employé (§ 6) montre qu'elle est encore bornée.

Le théorème est donc démontré.

Regardons comme fixes des limites supérieures des valeurs absolues des $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c, des dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ et des coefficients lipschitziens de toutes ces fonctions pour l'exposant fixe h; une limite inférieure positive du déterminant des $a_{\alpha,\beta}$ sera également considérée comme fixe. $\mathcal{S}$ est donné une fois pour toutes; on a une limitation fixe pour ψ et pour son coefficient lipschitzien relatif à l'exposant h. On regarde aussi comme fixe le domaine hors duquel

$$\mathcal{F}u = \Sigma_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u,$$

g étant positif fixe. Alors la fonction $u(\mathrm{X}, \Xi)$ (V, 11) et celles de ses dérivées de tout ordre dont l'existence est démontrée, ainsi que les coefficients lipschitziens de celles-ci, ont des limitations fixes, comme on s'en assure en vérifiant seulement que le nombre q (V, 11) a un maximum inférieur à 1, car il varie de façon continue si les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c varient en continuant de satisfaire à nos hypothèses, lesquelles sont satisfaites aussi par les fonctions limites (familles de fonctions également continues) (*voir* aussi plus loin, XIV, 5).

On en déduit que si les dérivées de σ sont lipschitziennes d'exposant $k (k \leqq h)$ et de coefficient M, les valeurs absolues de σ et de ses dérivées étant inférieures à M, les dérivées de u sont $\mathrm{O}\left(\frac{\mathrm{M}}{k}\right)$ et leur coefficient lipschitzien pour l'exposant k est $\mathrm{O}\left[\frac{\mathrm{M}}{k(1-k)}\right]$.

8. *Remarque sur* Θu. — Si, des hypothèses précédentes, on supprime celle que ψ est lipschitzien, pour la remplacer par celle de la continuité de ψ, la démonstration ne subsiste pas; on constate immédiatement pourtant sur les formules données, que, dans ce cas, Θu *a une limite continue quand* X *tend vers* $\mathcal{S}$ *par points de* $\mathcal{D}$, *ou quand* X *tend vers* $\mathcal{S}$ *par points n'appartenant pas à* $\mathcal{D} + \mathcal{S}$.

9. *Identité des deux valeurs de* Θu. — *Ces deux valeurs limites sont identiques.*

En effet, d'après les calculs précédents (§ 7), en un point de $\mathcal{S}$ où σ et ses dérivées seraient nuls, les deux valeurs limites correspondant l'une à $\mathcal{D}$, l'autre à l'extérieur de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, sont égales. Dès lors la démonstration donnée plus haut (V, 8) à propos d'un cas particulier peut être exactement reproduite dans le cas actuel.

10. *Généralisation.* — L'intégrale

$$u(\mathrm{X}) = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{Z}\mathrm{G}_p(\mathrm{X}, \mathrm{A})\sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A}$$

ne diffère de celle qui vient d'être étudiée que par un certain nombre de termes

$$\begin{aligned}\int^{(m-1)} & \mathrm{Z}\mathrm{G}^{(n)}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}} \\ &= \int^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\chi(\mathrm{A}) \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{Z}\mathrm{G}^{(n-1)}(\mathrm{A}, \Xi)\sigma(\Xi)\, d\mathrm{S}_{\Xi}\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}} \qquad (n > 1).\end{aligned}$$

La dérivation de cette expression sous le signe $\int$ est possible, et l'on constate que ces dérivées sont lipschitziennes d'exposant quelconque inférieur à 1. Donc tout ce qui a été dit dans ce chapitre s'applique aussi à la nouvelle fonction u.

11. *Autre sorte de potentiel.* — Avec les mêmes hypothèses sur $\mathcal{S}$ et $\mathcal{F}$, nous nommons aussi potentiel de double couche la fonction

$$u(\Xi) = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta \mathrm{G}(\mathrm{A}, \Xi)\sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}.$$

Elle peut s'écrire aussi (V, 18)

$$u(\Xi) = \omega(\Xi) \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta \mathrm{N}(\mathrm{A}, \Xi)\sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}},$$

ou, en introduisant la fonction $\mathrm{G}'(\mathrm{A}, \Xi) = \omega(\mathrm{A})\mathrm{N}(\mathrm{A}, \Xi)$,

$$\begin{aligned}u(\Xi) = \omega(\Xi) & \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta \mathrm{G}'(\mathrm{A}, \Xi) \frac{\sigma(\mathrm{A})}{\omega(\mathrm{A})}\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}} \\ & - \omega(\Xi) \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{G}'(\mathrm{A}, \Xi) \frac{\Theta\omega(\mathrm{A})}{\omega(\mathrm{A})} \sigma(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}},\end{aligned}$$

et comme $\mathrm{G}'(\mathrm{A}, \Xi)$ est, relativement à Ξ, la solution élémentaire principale d'une équation satisfaisant aux mêmes hypothèses que l'équation donnée, on constate que toutes les propositions précédentes s'appliquent, à ceci près qu'il faut remplacer Θu par $\mathrm{Z}u$ dans l'énoncé du paragraphe 9.

CHAPITRE IX.

CONSTRUCTION D'UNE FONCTION ASSUJETTIE SEULEMENT A CERTAINES CONDITIONS A LA FRONTIÈRE.

1. *On donne les valeurs à la frontière.* — Supposons que la frontière $\mathcal{S}$ du domaine borné ouvert $\mathcal{D}$ satisfasse aux hypothèses (II, 1) et en

outre à celle que les dérivées des coordonnées des points de $\mathfrak{S}$ soient lipschitziennes d'exposant h. Proposons-nous de construire une fonction u, lipschitzienne d'exposant $k < 1$ dans $\mathcal{D}$ et qui se réduise sur $\mathfrak{S}$ à une fonction donnée φ lipschitzienne d'exposant k.

Si l'on a déjà formé le paramètre s_m (III, 4), il y a une solution très simple. Soit $0 > s_m \geqq -a$ une région de $\mathcal{D}$ qui peut être repérée à l'aide des paramètres $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}, s_m$ (on suppose $s_m < 0$ dans $\mathcal{D}$). Il suffit de prendre dans cette région

$$u = \frac{\varphi(s_1, s_2, \ldots, s_{m-1})}{a}(s_m + a),$$

et, dans le reste de $\mathcal{D}$, de prendre $u = 0$.

Mais si s_m n'est pas formé, le plus simple est d'assujettir u à l'équation

$$(1) \qquad \Sigma_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u = 0 \qquad (g > 0);$$

u se calcule par la méthode déjà vue (V, 9), avec la simplification que le nombre k du passage cité peut être pris égal à zéro. On constate immédiatement (VIII, 3, 4) que les conditions voulues sont remplies; si M est une limite supérieure de $|\varphi|$ et du coefficient lipschitzien de φ pour l'exposant k, on a $|u| \leqq M$ et le coefficient lipschitzien de u pour l'exposant k est $O\left[\frac{M}{(1-k)^2}\right]$.

2. *On donne les valeurs de u et de sa dérivée normale à la frontière.* — Supposons maintenant qu'il s'agisse de former dans $\mathcal{D}$ une fonction u dont les dérivées soient lipschitziennes d'exposant $k \leqq h < 1$, et qu'on se donne sur $\mathfrak{S}$ les valeurs de u et de toutes ses dérivées. Il faut naturellement que ces valeurs soient compatibles avec le problème, ce qui entraîne que les valeurs données de u aient toutes leurs dérivées lipschitziennes d'exposant k et que les valeurs données des dérivées soient celles qui résultent de la connaissance de u et de la dérivée normale; on peut donc, comme dérivée, se donner seulement la dérivée normale, qui doit être lipschitzienne d'exposant k.

Soit u_1 une fonction prenant sur $\mathfrak{S}$ les valeurs données, et qui soit formée par l'une des méthodes précédentes. Si l'on a pris la première méthode, il est évident que les dérivées de u_1 sont lipschitziennes d'exposant k; si l'on a pris la seconde méthode, cela a encore lieu (VIII, 6, 7). Il s'agit donc de former une fonction u_2, nulle sur $\mathcal{S}$, et telle que, sur $\mathcal{S}$,

$$\frac{du_2}{dn} = \frac{du}{dn} - \frac{du_1}{dn},$$

u étant la fonction cherchée; de plus les dérivées de u_2 doivent être lipschitziennes d'exposant k; on pourra prendre alors $u = u_1 + u_2$. Or, soit $u_2 = s_m(s_m + a)v_2$ pour $0 > s_m > -a$; pour $s_m = -a$, on prendra $v_2 = 0$; sur $\mathcal{S}$, v_2 sera donné par

$$\frac{du_2}{dn} = av_2\frac{ds_m}{dn};$$

enfin assujettissons v_2 à l'équation (1): v_2 est alors connu; dans le reste de $\mathcal{D}$, nous prenons $u_2 = 0$. Cette fonction u_2 jouit des propriétés désirées (VIII, 5).

Si M est une limite supérieure des valeurs absolues des valeurs données de u et de ses dérivées, ainsi que de leurs coefficients lipschitziens pour l'exposant k, on a $|u_1| < M$; les dérivées de u_1 sont

$$O\left[\frac{M}{k^2(1-k)}\right]$$

et leur coefficient lipschitzien est

$$O\left[\frac{M}{k^2(1-k)^2}\right].$$

Alors

$$v_2 = O\left[\frac{M}{k^2(1-k)^2}\right],$$

et les dérivées de $s_m(s_m + a)v_2$ sont

$$O\left[\frac{M}{k^3(1-k)^3}\right],$$

leur coefficient lipschitzien étant

$$O\left[\frac{M}{k^3(1-k)^4}\right].$$

Donc enfin

$$u = O\left[\frac{M}{k^2(1-k)^2}\right], \qquad \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} = O\left[\frac{M}{k^3(1-k)^3}\right],$$

et le coefficient lipschitzien des dérivées est $O\left[\frac{M}{k^3(1-k)^4}\right]$, pour l'exposant k.

(*A suivre.*)