ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL MONTEL

Sur les fonctions d'une variable réelle qui admettent un théorème d'addition algébrique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 48 (1931), p. 65-94

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1931_3_48__65_0>

SUR LES

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

QUI ADMETTENT UN THÉOREME D'ADDITION ALGÉBRIQUE

PAR M. PAUL MONTEL

1. On dit qu'une fonction $f(x)$ possède un théorème d'addition algébrique lorsque x, y et $x+y$ appartenant au domaine d'existence de cette fonction, les nombres $f(x)$, $f(y)$, $f(x+y)$ sont liés par la relation

$$F[f(x), f(y), f(x+y)] = 0, \tag{1}$$

dans laquelle F désigne un polynome de trois variables.

Weierstrass a démontré dans son enseignement que, si $f(x)$ désigne une fonction analytique de la variable complexe x, qui vérifie la relation (1), $f(x)$ est, ou bien une fonction algébrique de x, ou bien une fonction algébrique de e^{mx}, m désignant une constante, ou bien une fonction algébrique de la fonction elliptique $\wp x$. Nous désignerons de telles fonctions par l'expression « fonctions W » et, plus particulièrement, fonctions W de première, de seconde ou de troisième espèce, suivant que $f(x)$ est une fonction algébrique de x, de e^{mx} ou de $\wp x$. Lorsque $f(x)$ est une fonction uniforme, c'est une fonction rationnelle de x, de e^{mx} ou de $\wp x$. Des démonstrations de ce théorème de Weierstrass ont été publiées par M. Phragmén [1] et par M. Kœbe [2].

[1] *Sur un théorème concernant les fonctions elliptiques* (*Acta mathematica*, Bd 7, 1885, p. 33-42).

[2] *Ueber diejenigen analytischen Funktionen eines Arguments welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen, und die endlich-vieldeutig umkehr-*

M. Picard en a donné une, particulièrement simple, dans son enseignement ([1]).

2. Proposons-nous de déterminer la nature des solutions de l'équation (1) lorsqu'on ne suppose plus que la fonction $f(x)$ soit analytique, et qu'on se borne aux fonctions continues de la variable réelle x. En d'autres termes, la fonction $f(x)$ étant définie dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq a$, dans quels cas pourra-t-elle vérifier une relation d'addition algébrique de la forme (1), lorsque x, y et $x+y$ appartiennent à l'intervalle $(0, a)$?

Nous allons voir que le résultat est encore le même : *la fonction $f(x)$ doit être une fonction* W. L'équation (1) ne peut admettre que des solutions analytiques. On peut considérer cette équation comme une équation aux différences finies; elle ne possède, comme l'équation différentielle correspondante

$$F[f(x), f'(x)] = 0,$$

que des solutions analytiques.

Il importe de remarquer dès maintenant que la fonction $f(x)$ ne représentera pas la même fonction analytique dans tout l'intervalle $(0, a)$, de même que l'on peut obtenir une solution de l'équation différentielle qui soit une fonction continue formée de morceaux analytiques.

L'intervalle $(0, a)$ pourra être partagé en un nombre fini d'intervalles partiels dans chacun desquels $f(x)$ coïncidera avec une fonction W toujours de la même espèce : plus précisément, si $f_0(x)$ désigne la fonction analytique avec laquelle coïncide $f(x)$ dans l'un des intervalles, les fonctions analytiques qui représenteront $f(x)$ dans les autres intervalles seront de la forme $f_0(x+C)$, C désignant une constante qui varie avec l'intervalle considéré.

---

baren Abelschen Intégrale (*Mathematische Abhandlungen H. A. Schwarz zu seinem fünzigjährigen Doctorjubiläum gewidmet*, 1914, p. 192-214).

([1]) E. Picard, *Leçons sur quelques équations fonctionnelles* (Paris, Gauthier-Villars et C^{ie}, 1928, p. 64-75).

Ce résultat avait aussi été obtenu par M. J. F. Ritt ([1]), et le même problème avait été abordé par M. H. Petrini ([2]), mais dans des conditions particulières : M. Petrini suppose que la fonction $f(x)$ est uniforme dans une région et continue en un point de cette région, et, d'autre part, que le polynome F n'admet pas certaines transformations singulières en lui-même qui ne sont pas précisées.

Dans ce travail, nous donnerons, en particulier, une démonstration nouvelle du résultat de M. Ritt. Nous étudierons les formes que peut prendre le polynome F pour que la solution soit une fonction analytique unique. Nous examinerons en détail le cas où le polynome F est du premier degré par rapport à une des variables : dans ce cas, toutes les formes possibles de F peuvent être aisément déterminées. Enfin, nous aborderons l'étude d'un système de deux équations fonctionnelles à deux fonctions inconnues. Les principaux résultats de ce Mémoire ont été présentés à l'Académie des Sciences, dans une Note du 12 mars 1928.

3. Considérons l'équation

$$F[f(x), f(y), f(x+y)] = 0, \tag{1}$$

dans laquelle nous poserons

$$X = f(x), \quad Y = f(y), \quad Z = f(x+y);$$

nous supposerons que F(X, Y, Z) est un polynome irréductible en X, Y, Z. La fonction $f(x)$ est supposée continue dans l'intervalle $(0, a)$. Nous nous proposons de montrer que $f(x)$ est formée d'un nombre fini de morceaux analytiques.

Il est facile de former des exemples de fonctions continues du type précédent vérifiant une équation de la forme (1). Par exemple, la

---

([1]) J. F. Ritt, *Real functions with algebraic addition theorems* (*Transactions of the american Mathematical Society*, vol. XXIX, 1927, p. 361-368).

([2]) H. Petrini, *Ueber Funktionen die ein algebraisches Additionstheorem besitzen* (*Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Forhandlingar*, 1901, Arg. 58, p. 297-305). Je dois cette référence à une communication obligeante de M. J. F. Ritt.

fonction $|x|$, formée au moyen des fonctions analytiques x et $-x$ vérifie l'équation

$$(X^2+Y^2-Z^2)^2-4X^2Y^2=0,$$

mais cette équation n'est pas irréductible et se décompose en quatre équations

$$Z=\pm X\pm Y.$$

Si l'on considère l'équation irréductible vérifiée par $\sin x$:

$$(X^2+Y^2-Z^2)^2-4X^2Y^2(1-Z^2)=0,$$

elle est aussi vérifiée évidemment par la fonction $|\sin x|$, formée des deux fonctions analytiques $\sin x$ et $-\sin x$ (¹).

4. Montrons d'abord que la fonction $f(x)$, si elle ne se réduit pas à une constante, ne prend qu'un nombre fini de fois chacune de ses valeurs. Le cas où $f(x)$ est une constante sera toujours écarté.

D'abord, $f(x)$ ne prend qu'un nombre fini de fois la valeur $f(0)$ lorsque x est voisin de zéro. Dans le cas contraire, on pourrait, en effet, trouver une suite de nombres positifs

$$h_1,\quad h_2,\quad \ldots,\quad h_n,\quad \ldots$$

ayant pour limite zéro et tels que $f(h_n)=f(0)$. Soit x_0, une valeur arbitraire intérieure à l'intervalle $(0,a)$. L'équation

$$F[X,f(0),Z]=0 \tag{2}$$

n'est pas une identité, sinon F, divisible par $Y-f(0)$, ne serait pas irréductible. Si pour $X=X_0=f(x_0)$, l'équation en Z devenait une identité, le polynome $F[X,f(0),Z]$ serait divisible par $X-X_0$, ce qui ne peut se produire qu'un nombre fini de fois pour des valeurs k_1, $k_2, \ldots, k_p$ de X.

Supposons d'abord que ces valeurs n'existent pas; quel que soit x_0, l'équation

$$F[X_0,f(0),Z]=0$$

(¹) *Cf.* Ritt, *loc. cit.* p. 361.

définit un nombre fini de valeurs de Z; or on a, quel que soit n,

$$F[f(x_0), f(h_n), f(x_0+h_n)] = 0$$

et $f(h_n) = f(0)$. Donc, une infinité des nombres $f(x_0+h_n)$ sont égaux entre eux, donc à $f(x_0)$, puisque $f(x)$ est continue en x_0. La fonction $f(x)$ prend, au voisinage de tout point x_0, une infinité de fois la valeur $f(x_0)$ pour des valeurs de x supérieures à x_0. Il en résulte que $f(x)$ est constant. En effet, si $f(x)$ n'était pas constant, il existerait deux valeurs x_1, x_2, intérieures à l'intervalle et telles que $f(x_1)$ et $f(x_2)$ soient différents. Supposons

$$f(x_1) < f(x_2),$$

et soit AB la corde qui joint les deux points de la courbe d'abscisses x_1 et x_2. Si $f(x)$ a, dans l'intervalle (x_1, x_2), des points au-dessous de AB, soit C, celui qui est le plus éloigné de cette corde. Au point C, la courbe est, dans le voisinage, située au-dessus de la parallèle à AB menée par C, donc il n'y a pas de points de la courbe à droite de C sur un petit segment parallèle à l'axe des x issu de ce point. Si tout l'arc AB est au-dessus de la corde, alors il n'y a pas de points de la courbe à droite de A sur un petit segment parallèle à l'axe des x issu de ce point. On raisonnerait d'une manière analogue si $f(x_1)$ était supérieur à $f(x_2)$. Donc, puisque $f(x)$ prend une infinité de fois, à droite de x, chacune de ses valeurs, c'est que $f(x)$ est une constante (¹).

Supposons maintenant qu'il existe une seule valeur k de X pour laquelle l'équation (2) soit une identité; désignons par E l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $f(x) = k$. Soit x_0 une valeur de l'intervalle $(0, a)$. Si x_0 appartient à E, on a $f(x_0) = k$. Si x_0 n'appartient pas à E, il est intérieur à un intervalle contigu à E dont les extrémités x_1 et x_2 sont des points de E, puisque E est fermé, la fonc-

(¹) Nous venons de démontrer en même temps une proposition connue : si les nombres dérivés à droite d'une fonction $f(x)$ ne sont jamais de même signe, la fonction est une constante (*cf.* H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 2ᵉ édition, Paris, Gauthier-Villars et Cⁱᵉ, 1928, p. 77).

tion $f(x)$ étant continue. Dans l'intervalle (x_1, x_2), $f(x)$ est constant comme le montre le raisonnement précédent, et comme

$$f(x_1) = f(x_2) = k,$$

on a aussi $f(x_0) = k$; $f(x)$ serait donc aussi constant.

En raisonnant de proche en proche, on étend le résultat au cas où il existe deux, trois, etc., p valeurs de X transformant l'équation (2) en identité.

Je dis maintenant que $f(x)$ ne peut prendre une infinité de fois la même valeur, différente de $f(0)$. Dans le cas contraire, il existerait une infinité de valeurs x_n ayant pour limite unique une valeur x_0 et telles que

$$f(x_n) = f(x_0) = X_0,$$

quel que soit n. L'équation

$$F[X_0, Y, Z] = 0$$

n'est pas une identité en Y et Z, sinon F serait divisible par $X - X_0$. Elle peut être une identité en Z, pour certaines valeurs de Y en nombre fini. Mais on peut toujours trouver un intervalle $(0, \delta)$ assez petit pour que $Y = f(y)$ ne prenne aucune de ces valeurs si l'on a

$$0 < y \leqq \delta,$$

puisque, dans le voisinage de zéro, $f(y)$ ne prend qu'un nombre fini de fois la même valeur : cela est évident, à cause de la continuité, si cette valeur n'est pas $f(0)$, et cela résulte de ce que nous venons d'établir, si cette valeur est $f(0)$. Soit y une valeur de cet intervalle, distincte de zéro. L'équation

$$F[f(x_n), f(y), f(x_n + y)] = 0$$

montre que, pour tout point x de l'intervalle $(x_0, x_0 + \delta)$, $f(x)$ prend à droite de x une infinité de fois sa valeur en ce point; donc $f(x)$ est égal à la constante $f(x_0)$ dans cet intervalle. En recommençant le raisonnement pour le point $x_0 + \delta$, on voit que $f(x)$ est constant dans l'intervalle $(x_0, x_0 + 2\delta)$; et ainsi de suite. Donc $f(x) = f(x_0)$ dans l'intervalle (x_0, a). En partant de l'équation

$$F[f(x_n - y), f(y), f(x_n)] = 0,$$

on démontrerait de la même manière que $f(x)$ est constant dans l'intervalle $(0, x_0)$, donc $f(x)$ est une constante.

La proposition énoncée est établie : $f(x)$ *ne prend qu'un nombre fini de fois chacune de ses valeurs;* en particulier, $f(x)$ ne peut être constant dans aucun intervalle.

5. Nous pouvons maintenant établir que la fonction $f(x)$ possède une dérivée dans un intervalle intérieur à $(0, a)$.

L'équation en Z

$$F(X, Y, Z) = 0$$

n'admet pas une racine multiple quels que soient X et Y, sinon les polynomes F et $\frac{\partial F}{\partial Z}$ admettraient un diviseur commun de degré non nul et F ne serait pas irréductible. Il peut arriver que, pour certaines valeurs X' de X, l'équation en Z ait une racine multiple quel que soit Y, mais ces valeurs X' sont en nombre fini. A ces valeurs X' peuvent correspondre des valeurs x', en nombre fini, telles que

$$f(x') = X'.$$

Pour une valeur x_0, distincte des valeurs x', l'équation en Z

$$F(X_0, Y, Z) = 0,$$

dans laquelle $X_0 = f(x_0)$ est distincte d'une valeur X', ne peut avoir de racine multiple que pour des valeurs Y' de y, en nombre fini. A ces valeurs Y' peuvent correspondre des valeurs y', en nombre fini, telles que $f(y') = Y'$.

Prenons une valeur y_0, distincte des y'; l'équation en Z

$$F(X_0, Y_0, Z) = 0$$

a toutes ses racines distinctes et il en est de même si x et y demeurent voisins de x_0 et y_0. Il existe donc des nombres positifs h et k assez petits pour que, quels que soient x et y vérifiant les inégalités

$$|x - x_0| < h, \qquad |y - y_0| < k,$$

l'équation en Z

$$F(X, Y, Z) = 0$$

ait toutes ses racines distinctes : l'une d'elles est $f(x+y)$.

Faisons le changement de variable

$$u = \mathrm{Y} - f(y_0),$$

les mêmes résultats sont applicables à l'équation correspondante

$$\mathrm{F}[\mathrm{X}, f(y_0) + u, \mathrm{Z}] = \mathrm{G}(\mathrm{X}, u, \mathrm{Z}) = 0.$$

En particulier, l'équation en Z

$$\mathrm{G}(\mathrm{X}_0, u, \mathrm{Z}) = 0$$

admet des racines distinctes pour u voisin de zéro : une de ces racines est $f(x_0 + y)$ et admet le développement

$$f(x_0 + y) = \mathrm{C}(\mathrm{X}_0) + \mathrm{A}(\mathrm{X}_0)u^p + \mathrm{B}(\mathrm{X}_0)u^{p+1} + \ldots.$$

Ce développement est valable pour $|u|$ assez petit et lorsqu'on remplace X_0 par une valeur voisine X : on peut supposer h assez petit pour que le développement soit valable en remplaçant X_0 par $\mathrm{X} = f(x)$, pourvu que $|x - x_0|$ soit inférieur à h. Les fonctions $\mathrm{A}(\mathrm{X})$, $\mathrm{B}(\mathrm{X})$, $\mathrm{C}(\mathrm{X})$, ... sont des fonctions algébriques de X, p est un entier, et l'on a $\mathrm{A}(\mathrm{X}_0) \neq 0$. D'ailleurs $\mathrm{C}(\mathrm{X}_0) = f(x_0 + y_0)$; les autres racines ont des développements analogues, mais les termes constants sont tous différents de $f(x_0 + y_0)$.

Donnons à x une valeur voisine de x_0, on aura

$$f(x + y) = \mathrm{C}(\mathrm{X}) + \mathrm{A}(\mathrm{X})u^p + \mathrm{B}(\mathrm{X})u^{p+1} + \ldots.$$

En effet, $f(x + y)$ est donné par un des développements déduits des précédents en remplaçant X_0 par X; mais, si x est voisin de x_0, $f(x + y)$ doit être voisin de $f(x_0 + y)$ et en particulier, $f(x + y_0)$ doit être voisin de $f(x_0 + y_0)$; or, cela ne peut arriver que si l'on prend le développement commençant par $\mathrm{C}(\mathrm{X})$. D'ailleurs $\mathrm{C}(\mathrm{X}) = f(x + y_0)$.

On peut donc écrire

$$f(x + y) - f(x + y_0) = u^p[\mathrm{A}(\mathrm{X}) + \mathrm{B}(\mathrm{X})u + \ldots],$$
$$f(x_0 + y) - f(x_0 + y_0) = u^p[\mathrm{A}(\mathrm{X}_0) + \mathrm{B}(\mathrm{X}_0)u + \ldots];$$

les seconds membres sont des fonctions continues de x et y, voisins respectivement de x_0 et y_0 : on en déduit

$$\frac{f(x+y)-f(x+y_0)}{f(x_0+y)-f(x_0+y_0)}=\frac{A(X)}{A(X_0)}+\varepsilon,$$

ε étant infiniment petit avec $y-y_0$. $A(X_0)$ n'étant pas nul, nous supposerons h assez petit pour que $A(X)$ ait le signe de $A(X_0)$. Posons

$$f(x+y_0)=\varphi(x),$$
$$y-y_0=\eta,$$

on pourra écrire

$$\frac{\varphi(x+\eta)-\varphi(x)}{\varphi(x_0+\eta)-\varphi(x_0)}=\frac{A[f(x)]}{A[f(x_0)]}+\varepsilon,$$

ε étant infiniment petit avec η.

Soit λ_0 un nombre dérivé de $\varphi(x)$, au point x_0, obtenu en donnant à η la suite des valeurs $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ tendant vers zéro.

De l'égalité

$$(3)\qquad \frac{\varphi(x+h_n)-\varphi(x)}{h_n}=\frac{\varphi(x_0+h_n)-\varphi(x_0)}{h_n}\left[\frac{A[f(x)]}{A[f(x_0)]}+\varepsilon\right],$$

on déduit que l'un des nombres dérivés λ de $\varphi(x)$ est donné par l'équation

$$\lambda=\lambda_0\frac{A[f(x)]}{A[f(x_0)]}.$$

Je dis que λ_0 est nécessairement fini; en effet, si l'on avait par exemple $\lambda_0=-\infty$, λ serait égal à $-\infty$, quel que soit x dans l'intervalle (x_0-h, x_0+h). Cela est impossible, comme on le voit en reprenant le raisonnement de la page 69 : en l'un des points A ou C tous les nombres dérivés sont bornés inférieurement. Puisque λ_0 est fini, l'équation précédente montre que λ est une fonction continue de x : on en conclut aussitôt que $\varphi(x)$ admet une dérivée en tout point de l'intervalle (¹).

On peut le vérifier aisément : l'égalité (3) montre que le rapport $\frac{\varphi(x+h_n)-\varphi(x)}{h_n}$ est borné quel que soit n et quel que soit x dans

(¹) *Cf.* H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 2ᵉ édition. Paris, Gauthier-Villars et Cᶦᵉ, 1928, p. 74.

l'intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$ ou (x_1, x_2). En appliquant un théorème classique de M. Lebesgue sur l'intégration terme à terme des suites convergentes bornées, on aura

$$(4) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{x_1}^{x} \frac{\varphi(x+h_n) - \varphi(x)}{h_n} dx = \int_{x_1}^{x} \lambda \, dx.$$

Soit $\Phi(x)$ une primitive de $\varphi(x)$, on peut écrire

$$\int_{x_1}^{x} \varphi(x+h_n)\, dx = \int_{x_1+h_n}^{x+h_n} \varphi(x)\, dx = \Phi(x+h_n) - \Phi(x_1+h_n),$$

$$\int_{x_1}^{x} \varphi(x)\, dx = \Phi(x) - \Phi(x_1).$$

Le premier membre de (4) peut donc s'écrire

$$\frac{\Phi(x+h_n) - \Phi(x)}{h_n} - \frac{\Phi(x_1+h_n) - \Phi(x_1)}{h_n};$$

il a pour limite

$$\varphi(x) - \varphi(x_1)$$

quand n croît indéfiniment. Donc

$$\varphi(x) - \varphi(x_1) = \int_{x_1}^{x} \lambda \, dx.$$

Cette dernière égalité montre que λ est la dérivée $\varphi'(x)$ de $\varphi(x)$ dans l'intervalle (x_1, x_2). Donc, $f(x+y_0)$ a une dérivée continue dans l'intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$ ou, en d'autres termes, $f(x)$ a une dérivée continue dans l'intervalle $(x_0 + y_0 - h, x_0 + y_0 + h)$.

6. Nous pouvons maintenant montrer que $f(x)$ est analytique. D'abord, $f(x)$ est analytique dans l'intervalle précédent, car $\varphi(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$\varphi'(x) = \lambda_0 \frac{\Lambda[f(x)]}{\Lambda[f(x_0)]}$$

ou

$$f'(x+y_0) = \mathfrak{A}[f(x)],$$

$\mathfrak{A}[f(x)]$ désignant une fonction algébrique de son argument. On peut encore écrire

$$f'(x) = \mathcal{A}[f(x - y_0)],$$

la variable x parcourant l'intervalle (x_1, x_2).

Si l'on considère maintenant l'équation

$$F[f(x - y_0), f(y_0), f(x)] = 0,$$

on peut supposer que les nombres x_0, y_0, ont été choisis de façon que $F(X, Y_0, X_0)$ ne soit pas identiquement nul. En effet, le polynome en $X : F(X, Y, X_0)$, ne peut être identiquement nul que pour certaines valeurs de Y en nombre fini auxquelles correspondent des valeurs y'' de y en nombre fini. Il suffit de prendre y_0 différent à la fois des valeurs y'' et des valeurs y' introduites à la page 71. On peut alors résoudre en $f(x - y_0)$ l'équation précédente si h est assez petit et l'on obtient :

$$f(x - y_0) = \mathcal{B}[f(x)],$$

$\mathcal{B}[f(x)]$ désignant une fonction algébrique de $f(x)$, et par suite,

$$f'(x) = \mathcal{A}\{\mathcal{B}[f(x)]\} = \mathcal{C}[f(x)], \tag{5}$$

$\mathcal{C}[f(x)]$ désignant encore une fonction algébrique.

Puisque $f(x)$ vérifie l'équation différentielle (5), qu'on peut mettre sous la forme

$$H[f(x), f'(x)] = 0,$$

H désignant un polynome, on voit que $f(x)$ est analytique dans l'intervalle (x_1, x_2).

Soit maintenant $(x_1, x_1 + l)$ un intervalle intérieur à (x_1, x_2) :

$$x_1 < x_1 + l \leqq x_2.$$

L'équation

$$F[f(x), f(l), f(x + l)] = 0, \tag{6}$$

dans laquelle x varie de x_1 à $x_1 + l$, peut avoir, quel que soit x, des racines multiples en $Z = f(x + l)$. Cela ne peut arriver que pour des valeurs Y' de $Y = f(y)$ en nombre fini, auxquelles peuvent correspondre des valeurs y' en nombre fini, nous supposerons que le nombre l est différent de toute valeur y' : on voit qu'on peut prendre l aussi voisin qu'on le veut de $x_2 - x_1$.

Le nombre l étant ainsi choisi, l'équation (6) ne peut avoir de racine multiple en Z ou être une identité en Z pour que certaines valeurs X' de X en nombre fini, auxquelles peuvent correspondre des valeurs x', en nombre fini, contenues dans l'intervalle $(x_1, x_1 + l)$ et telles que $f(x') = X'$. Ces valeurs partagent cet intervalle en un nombre fini d'intervalles partiels.

Soit (x'_1, x'_2) l'un d'eux; lorsque x varie dans cet intervalle, l'équation (6), résolue en $f(x+l)$, donne pour $f(x+l)$ une fonction analytique régulière de $f(x)$. Mais $f(x)$ est régulière en x, donc $f(x+l)$ est analytique et régulière en x. Donc, dans l'intervalle $(x'_1 + l, x'_2 + l)$, la fonction $f(x)$ est analytique. Les valeurs de $f(x)$ forment donc des fonctions analytiques dans les intervalles, en nombre fini, obtenus en partageant l'intervalle $(x_1 + l,\ x_1 + 2l)$ au moyen des points $x' + l$.

En répétant le même raisonnement pour le nouvel intervalle $(x_1, x_1 + 2l)$, on passera à l'intervalle $(x_1, x_1 + 3l)$, etc.; on atteindra le point a au bout d'un nombre fini d'opérations.

L'équation

$$F[f(x-l), f(l), f(x)] = 0$$

permet de même d'atteindre les intervalles $(x_1 - l,\ x_1)$, puis $(x_1 - 2l,\ x_1)$, etc.; jusqu'au point o. Au total, on aura partagé l'intervalle $(0, a)$ en un nombre fini p d'intervalles partiels dans chacun desquels $f(x)$ est analytique et régulière. Chacune de ces fonctions est une fonction W : donc $f(x)$ est composé de fonctions W, en nombre fini.

7. Soient

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_p(x)$$

les différentes fonctions analytiques avec lesquelles coïncide $f(x)$ dans chacun des p intervalles partiels. Je dis que, à l'intérieur de chaque intervalle, la fonction correspondante vérifie une même équation différentielle.

Considérons en effet la relation

$$F[f_i(x), f_1(y), f_i(x+y)] = 0, \tag{7}$$

dans laquelle x est supposé dans l'intervalle relatif à $f_i(x)$ et y assez petit pour être situé dans le premier intervalle, relatif à $f_1(x)$, et pour que $x+y$ soit dans l'intervalle de $f_i(x)$. En différentiant par rapport à x et à y, on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial X} f'_i(x) + \frac{\partial F}{\partial Z} f'_i(x+y) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y} f'_1(y) + \frac{\partial F}{\partial Z} f'_i(x+y) = 0. \tag{9}$$

L'élimination de $f_i(x+y)$, $f'_i(x+y)$, entre les équations (7), (8), (9), conduit à une relation dans laquelle nous donnerons à y une valeur fixe, o par exemple. Soit

$$H[f'_i(x), f_i(x)] = 0$$

la relation obtenue, dans laquelle H désigne un polynome. On pourra faire le même calcul pour chaque fonction $f_i(x)$; donc, chacune de ces fonctions appartient à une solution de l'équation différentielle

$$H[f'(x), f(x)] = 0$$

dont l'intégrale générale est de la forme $f(x+C)$, C désignant une constante. Les fonctions $f_i(x)$ sont donc de la forme

$$f(x+C_1), \quad f(x+C_2), \quad \ldots, \quad f(x+C_p),$$

$C_1, C_2, \ldots, C_p$ désignant des constantes [1].

En particulier, on voit que les fonctions $f_i(x)$ sont des fonctions W, toutes de même espèce. On peut d'ailleurs le voir directement, en remarquant que $f_i(x)$ et $f_1(x)$ sont liés par une relation algébrique.

Réciproquement, étant donnée une fonction W, on peut se proposer de déterminer des intervalles et des constantes de manière à obtenir une fonction de variable réelle possédant un théorème d'addition algébrique. Ce problème n'est pas entièrement résolu. On trouvera, dans le Mémoire cité de M. Ritt, des conditions nécessaires auxquelles doivent satisfaire les fonctions $f_i(x)$.

8. Soit $(0, \alpha)$ l'intervalle correspondant à la fonction analytique $f_1(x)$. Supposons $\alpha < a$, de façon que $f(x)$ soit égal, lorsque x est

---

(1) *Cf.* Ritt, *loc. cit.*, p. 367.

supérieur à α, à une fonction analytique différente $f_2(x)$. Considérons l'équation

$$F[f_1(x), f_1(y), f(x+y)] = 0, \tag{10}$$

vérifiée par la fonction f lorsque x et y sont dans l'intervalle $(0, \alpha)$. Supposons qu'il existe deux valeurs x_0, y_0 intérieures à cet intervalle, vérifiant

$$x_0 + y_0 = \alpha$$

et telles que

$$\frac{\partial F[f_1(x_0), f_1(y_0), f(\alpha)]}{\partial Z}$$

soit différent de zéro. Alors, l'équation (10) définit $f(x)$ dans le voisinage de α comme une fonction analytique régulière de $f_1(x)$ ou de $f_1(y)$. Si, par exemple, on laisse y fixe et égal à y_0, on voit que $f(x)$ est analytique et régulière en x autour de α, puisque $f_1(x)$ est régulière autour de x_0. Or, pour $x < x_0$, $f(x)$ coïncide avec $f_1(x)$, et pour $x > x_0$, $f(x)$ coïncide avec $f_2(x)$; donc $f_2(x)$ est le prolongement analytique de $f_1(x)$ et α n'est pas la limite de l'intervalle dans lequel $f(x)$ coïncide avec $f_1(x)$.

Pour qu'il puisse exister des fonctions $f_i(x)$ distinctes, il faut que, quels que soient les nombres x_0 et y_0 dont la somme est α, la dérivée $\frac{\partial F}{\partial Z}$ soit toujours nulle.

Cette dérivée doit être nulle, pour les valeurs X, Y, Z, définies par les égalités

$$X = f(x), \qquad Y = f(\alpha - x), \qquad Z = f(\alpha).$$

Considérons la surface algébrique (S) représentée par l'équation

$$F(X, Y, Z) = 0;$$

comme $f(x)$ n'est constant dans aucun intervalle, les relations précédentes définissent une courbe plane (L), située sur (S), en chacun des points de laquelle le plan tangent est perpendiculaire au plan des XY, si le point est simple. En d'autres termes, la surface (S) possède une courbe (L) située dans un plan parallèle au plan des XY, qui est une courbe multiple de la surface ou une courbe du contour apparent correspondant à la direction OZ.

On peut ajouter que la courbe (L) est nécessairement multiple si la dérivée de $f(x)$ reste finie au point α. En effet, on a, au point α,

$$\frac{\partial F}{\partial X} f'(x_0) + \frac{\partial F}{\partial Z} f'(\alpha) = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial Y} f'(y_0) + \frac{\partial F}{\partial Z} f'(\alpha) = 0.$$

Comme $f'(\alpha)$ est fini et $\frac{\partial F}{\partial Z}$ nul, on doit avoir $\frac{\partial F}{\partial X} = \frac{\partial F}{\partial Y} = 0$, sauf peut-être aux points x_0 ou y_0 en lesquels $f'(x)$ est nul. Mais les points où cette dérivée n'est pas nulle sont denses dans tout intervalle; donc les dérivées $\frac{\partial F}{\partial X}$ et $\frac{\partial F}{\partial Y}$ sont nulles en tous les points de (L). On verrait de même que la surface (S) possède une courbe (L′) située dans un plan parallèle au plan des YZ qui est, ou bien une courbe multiple, ou bien une courbe du contour apparent correspondant à OX. Et l'on obtient aussi une troisième courbe (L″) jouant le même rôle par rapport au plan des ZX; de plus, les trois plans sont équidistants de l'origine si les axes sont rectangulaires.

Démontrons par exemple l'existence de la courbe (L′). L'équation

$$F[f(x-y), f_1(y), f_2(x)] = 0 \tag{11}$$

est vérifiée par f, lorsque y est dans l'intervalle $(0, \alpha)$ et x dans l'intervalle (α, β) correspondant à $f_2(x)$. Soient x_0, y_0 deux nombres tels que

$$x_0 - y_0 = \alpha,$$

pour lesquels

$$\frac{\partial F}{\partial X}[f(\alpha), f_1(y_0), f_2(x_0)]$$

soit différent de zéro. L'équation (11) définit alors $f(x)$ comme une fonction analytique autour de α : on le voit par un raisonnement tout à fait semblable au précédent. Donc, si α est un point de séparation de deux intervalles, on doit avoir $\frac{\partial F}{\partial X} = 0$, en tous les points de la courbe (L′) :

$$X = f(\alpha), \qquad Y = f(x-\alpha), \qquad Z = f(x).$$

Le plan tangent est parallèle à OX en tous les points de cette courbe à moins que (L′) ne soit une courbe multiple, ce qui aura nécessairement lieu lorsque la dérivée de $f(x)$ est finie au point α. Par exemple, pour la fonction $f(x) = |\sin x|$, la relation

$$(X^2 + Y^2 - Z^2)^2 - 4X^2Y^2(1 - Z^2) = 0$$

représente une surface admettant la bissectrice

$$X = Y = Z$$

comme axe ternaire. Les sections par les plans de coordonnées sont des droites doubles; en particulier, le plan des XY donne les droites

$$Y = \pm X, \qquad Z = 0.$$

Les limites α des intervalles doivent vérifier l'équation

$$f(\alpha) = 0 :$$

ce sont les nombres $k\pi$.

En résumé, *pour que $f(x)$ soit formé de plusieurs fonctions analytiques, il est nécessaire que la surface* (S) *possède trois courbes situées dans des plans* P, P′, P″, *équidistants de l'origine et parallèles aux plans de coordonnées, et que ces courbes soient multiples ou des courbes de contours apparents de la surface.*

Dans le cas contraire, $f(x)$ est une fonction analytique W unique.

En particulier, $f(x)$ est une fonction analytique unique lorsque le polynome F(X, Y, Z) est du premier degré par rapport à une des variables.

9. Examinons quelques cas particuliers. Soit la relation

$$f(x \pm y) = \mathcal{R}[f(x), f(y)], \tag{11}$$

$\mathcal{R}$ désignant une fraction rationnelle. Nous dirons qu'une fonction continue $f(x)$ admet un théorème d'addition ou de soustraction rationnelle lorsque cette fonction vérifie la relation précédente avec le signe plus ou le signe moins.

Toute fonction analytique vérifiant la relation (11) est uniforme : il suffit de reprendre un raisonnement de M. Phragmén (1). Prenons par

(1) Phragmén, *loc. cit.*

exemple la relation

$$f(x+y) = \mathcal{R}[f(x), f(y)] \tag{12}$$

et marquons, dans le plan complexe, les points critiques α de $f(x)$, ainsi que les points $\alpha + y_0$; x_0, y_0 étant deux points en lesquels $f(x)$ est régulière. Traçons un lacet partant de $x_0 + y_0$ et y revenant, composé d'un arc L parcouru deux fois et d'un petit cercle dont le centre est le point critique α_0, l'arc L ne passant par aucun point d'affixe $y_0 + \alpha$, α désignant un point critique arbitraire. Lorsque $x + y_0$ parcourt la ligne L de $x_0 + y_0$ à $x' + y_0$, x' étant voisin de α_0, le point x décrit une courbe L' allant de x_0 à x' et ne rencontrant aucun point α. Partons de x_0, y_0, en donnant à $f(x_0 + y_0)$ une détermination qui varie quand on décrit le lacet autour de α_0. Laissant y fixe en y_0, faisons décrire à x l'arc L', $x + y_0$ vient en $x' + y_0$ et décrit L ; à ce moment, laissons x fixe en x', faisons décrire à y un petit cercle tel que $x' + y$ décrive le petit cercle tracé autour de α_0; on peut supposer le cercle décrit par y assez petit pour qu'il ne contienne aucun point α; ensuite, y étant revenu à y_0, laissons y fixe et ramenons x en x_0 sur la ligne L', le point $x + y$ décrit la ligne L et revient en $x_0 + y_0$.

Les déterminations de $f(x_0)$ et $f(y_0)$ n'ont pas changé puisque les chemins fermés décrits par x et y n'enferment aucun point critique ; mais la détermination de $f(x_0 + y_0)$ a changé; or, par continuité, elle doit être égale à $[\mathcal{R} f(x_0), f(y_0)]$, ce qui est impossible. La fonction $f(x)$ n'a donc aucun point critique.

Je dis que c'est une fonction W de première ou de seconde espèce. Si elle était de troisième espèce, ce serait une fonction rationnelle de $\wp x$. De l'égalité (12), on tire

$$f(x+y) - f(x) = [f(y) - f(0)]\, \mathcal{R}_1[f(x), f(y)],$$

$\mathcal{R}_1$ désignant une fraction rationnelle; on en déduit

$$f'(x) = \mathcal{R}_2[f(x)],$$

$\mathcal{R}_2$ étant une fraction rationnelle. Or, si l'on avait

$$f(x) = \mathcal{R}_3(\wp x),$$

$\mathcal{R}_3$ désignant une fraction rationnelle, l'équation différentielle deviendrait

$$\mathcal{R}'_3(px)p'x = \mathcal{R}_2[\mathcal{R}_2(px)] = \mathcal{R}_4(px),$$

$\mathcal{R}_4$ désignant une fraction rationnelle; $\mathcal{R}'_3$ n'est pas identiquement nul, puisque $f(x)$ n'est pas une constante. L'équation précédente donnerait pour $p'x$ une fonction rationnelle de px, ce qui est impossible, puisque px est une fonction paire. Même résultat en prenant $f(x-y)$.

Ainsi, $f(x)$ est une fonction rationnelle de x ou de e^{mx}. Examinons d'abord le premier cas. Soit

$$\mathcal{R}[f(x), f(y)] = \frac{P(X, Y)}{Q(X, Y)}$$

et

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)},$$

P, Q, A, B désignant des polynomes. Nous supposons irréductibles les fractions $\frac{P}{Q}$ et $\frac{A}{B}$. En substituant dans l'équation (12), on voit que P et Q doivent être du premier degré en X et Y, sinon l'identité

$$A(x+y)Q - B(x+y)P = 0$$

entraînerait que P et Q ont un facteur commun, polynome en X et Y. On a donc

$$Z = \frac{a\,XY + b\,X + c\,Y + d}{a'XY + b'X + c'Y + d'}.$$

Ainsi, la relation (11) est du premier degré par rapport à chacune de ses variables. Le même résultat subsiste pour une fonction de deuxième espèce. Donc, *lorsqu'une fonction admet un théorème d'addition rationnelle, elle admet aussi un théorème de soustraction rationnelle, et réciproquement.*

D'autre part, la surface représentée par cette équation ne peut admettre les particularités indiquées au paragraphe 8. Donc, *la solution est formée par une fonction analytique unique.*

Nous pouvons alors nous borner à l'équation (12). Dans ce cas, la symétrie en x et y exige que l'on ait

$$Z = \frac{aXY + b\,(X+Y) + d}{a'XY + b'(X+Y) + d'}. \tag{13}$$

Supposons d'abord que $f(x)$ soit rationnel en x ; en remplaçant au besoin f par $\frac{1}{f}$ ou f par f — const., on peut supposer que le degré de B est inférieur au degré p de A. Alors, en identifiant, P contiendrait un terme de degré $2p$ en (x, y), irréductible si a n'est pas nul, et Q aussi, si a' n'est pas nul. Or, dans Z, les deux termes sont de degré p. On en déduirait, comme précédemment, que P et Q ont un facteur commun. Donc $a = a' = 0$. Il vient

$$Z = \frac{b(X + Y) + d}{b'(X + Y) + d'},$$

en remplaçant $f(x)$ par $f(x) - f(0)$, l'équation ne change pas de forme et l'on a $X(0) = 0$. Faisons alors $y = 0$ dans l'équation, il vient

$$X = \frac{bX + d}{b'X + d'},$$

d'où $b' = 0$, $b = d'$, $d = 0$, et l'équation se réduit à

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

dont la solution est Cx. On en déduit que la solution de la première équation est une fonction homographique de x.

Supposons maintenant que $f(x)$ soit une fonction rationnelle de e^{mx}, posons

$$e^{mx} = \xi, \qquad e^{my} = \eta,$$

d'où

$$e^{m(x+y)} = \xi\eta;$$

on a alors

$$f(x) = \frac{A(\xi)}{B(\xi)},$$

et la considération des degrés en ξ seul montre que, dans l'équation (13), a' est nul. Comme on peut encore supposer que $f(0) = 0$, on aura

$$Z = aXY + X + Y$$

et, en remplaçant $f(x)$ par $af(x)$, si $a \neq 0$,

$$Z = XY + X + Y.$$

Si a était nul, $f(x)$ serait rationnel en x et non en e^{mx}.

La dernière équation s'écrit

$$1+f(x+y)=[1+f(x)][1+f(y)]$$

ou

$$g(x+y)=g(x)g(y),$$

en posant $g(x)=1+f(x)$.

$g(x)$ est donc de la forme Ce^{mx} et la solution de l'équation est une fonction homographique de e^{mx}.

Si $f(x)$ admet un théorème d'addition ou de soustraction rationnelle, il en est de même de toute fonction homographique de f, à coefficients constants.

On peut aussi remplacer x par une fonction linéaire de x. Donc :

Toute fonction continue qui admet un théorème d'addition ou de soustraction rationnelle est égale à x ou à e^{mx}, à une substitution homographique près, à coefficients constants.

On aurait pu obtenir les mêmes résultats en formant l'équation différentielle que vérifie $f(x)$. Cette équation est de la forme

$$f'(x)=\mathcal{R}[f(x)],$$

$\mathcal{R}$ étant une fraction rationnelle. Il suffit alors de déterminer toutes les formes de $\mathcal{R}$ pour lesquelles cette équation a une intégrale générale uniforme [1].

Ainsi, toutes les relations d'addition rationnelle se déduisent des relations

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$
$$f(x+y)=f(x)f(y),$$

par une transformation homographique à coefficients constants.

10. Examinons plus particulièrement le cas où la fonction rationnelle se réduit à un polynome : nous dirons qu'une fonction vérifiant l'équation

$$f(x\pm y)=\mathrm{P}[f(x),f(y)], \tag{14}$$

P désignant un polynome, admet un théorème d'addition ou de soustraction entière.

---

(1) *Voir*, par exemple, Ed. Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, 4e édition, Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1924, p. 540.

D'abord, si $f(x)$ est une fonction homographique de x, elle ne peut avoir aucun pôle α, car, en prenant pour x et y deux valeurs vérifiant l'égalité

$$x \pm y = \alpha$$

et dont aucune n'est égale à α, le premier membre de l'équation (14) aurait une valeur infinie, tandis que le second aurait une valeur finie : donc $f(x)$ est une fonction linéaire de x.

Si $f(x)$ est une fonction homographique de $e^{mx} = \xi$, elle ne peut avoir aucun pôle α différent de zéro, sinon, en prenant pour x et y deux nombres vérifiant l'égalité

$$e^{m(x \pm y)} = \alpha,$$

et dont aucun n'est nul, on arriverait à la même contradiction. Si α est nul, $f(x)$ est une fonction linéaire de e^{-mx}; s'il n'y a pas de pôle, c'est une fonction linéaire de e^{mx}. Donc, $f(x)$ ne peut être qu'une fonction linéaire d'une exponentielle. Mais cela n'est pas possible dans le cas où l'on a

$$f(x-y) = \mathrm{P}[f(x), f(y)],$$

car on aurait une égalité de la forme

$$e^{m(x-y)} = \mathrm{P}_1[e^{mx}, e^{my}],$$

évidemment impossible puisque le second membre peut s'annuler. En résumé :

Toute fonction continue qui admet un théorème d'addition entière est égale à x ou à e^x, à des substitutions linéaires près, sur la fonction et sur la variable.

Toute fonction continue qui admet un théorème de soustraction entière est une fonction linéaire de x.

On peut obtenir ce dernier résultat d'une autre manière qui en permettra l'extension ; on a

$$f(x-y) - f(0) = [f(x) - f(y)]\,\mathrm{P}_2[f(x), f(y)],$$

P_2 désignant un polynome; on en déduit, en faisant tendre y vers x,

$$f'(0) = f'(x)\,\mathrm{P}_2[f(x), f(0)]$$

ou

$$dx = P_3[f]\,df,$$

P_3 désignant un polynome en f. Donc x est un polynome en f, et comme la fonction inverse $f(x)$ est uniforme, x est du premier degré en f. Donc f est linéaire en x.

11. Appliquons la même méthode au cas où $P(X, Y)$ désigne une fonction entière de X de genre fini quel que soit Y, et réciproquement.

On démontre aisément, par la même méthode qu'au paragraphe 5, que $f(x)$ admet une dérivée.

On a encore les égalités précédentes, P_2 et P_3 désignant maintenant des fonctions entières de genre fini. Donc, x est une fonction entière de f de genre fini, que nous désignerons par $\varphi(f)$. L'égalité

$$f(x-y) = P[f(x), f(y)]$$

entraine

$$x - y = \varphi\{P[f(x), f(y)]\}.$$

Laissons y fixe, nous aurons

$$\varphi(f) - y = \varphi\{P[f, f(y)]\}.$$

Le premier membre est une fonction entière de f, de genre fini ; le second est une fonction entière d'une fonction entière. D'après un théorème de M. Pólya [1], cela ne peut arriver que dans deux cas : ou bien P est un polynome, hypothèse déjà examinée ; ou bien φ est d'ordre zéro, et P, dont l'ordre ne dépasse pas celui de φ, est aussi d'ordre nul en X, et aussi en Y. $f(x)$ est une fonction uniforme, inverse d'une fonction entière φ, de genre zéro, dont la dérivée s'annule nécessairement, à moins que cette fonction ne se réduise à une fonction linéaire de f. Alors f est linéaire en x, et P se réduit à un polynome du premier degré. Ainsi :

Toute fonction continue vérifiant l'égalité

$$f(x-y) = P[f(x), f(y)],$$

---

(1) Pólya, *On an integral function of an integral function* (*Journal of the London Mathematical Society*, vol. 1, Part 1, 1925).

dans laquelle P *désigne une fonction entière de genre fini, est nécessairement une fonction linéaire de* x.

12. La méthode que nous avons employée et qui repose sur les propriétés des nombres dérivés peut être appliquée à des équations fonctionnelles autres que celles définissant un théorème d'addition algébrique.

Prenons par exemple l'équation de Poisson [1]

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

On voit que $f(0)$ doit être égal à *un* et que f est paire. On peut écrire

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f(x)-f(x-h)}{h}=2f(x)\frac{f(h)-1}{h}.$$

Soit $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro et tels que la fraction du second membre ait une limite λ_0 finie ou infinie. Supposons que cette limite ne soit pas nulle et laissons x dans un intervalle où $f(x)$ ne change pas de signe. Alors, si par exemple λ_0 et $f(x)$ sont positifs, toute limite du premier membre est positive, x restant fixe et h prenant la suite infinie de valeurs h_n. Or, si $f(x)$ n'est pas la constante *un*, soit AB une corde de la courbe représentative : si la courbe a des points au-dessus de AB, soit C, le point le plus éloigné de AB ; en C, toute limite du premier membre serait négative ou nulle. Donc, la courbe est toujours au-dessous de chacune de ses cordes : c'est une fonction convexe. Dans ce cas, le premier membre aurait pour limite zéro, sauf peut-être pour une suite dénombrable de points. Donc λ_0 est nul.

Formons alors le rapport

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=2f(x)\frac{f(h)-1}{h^2}.$$

Soit $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ une suite de nombres positifs tendant vers zéro tels que la fraction du second membre ait une limite μ_0 finie ou infinie. Supposons encore μ_0 et $f(x)$ positifs dans l'intervalle consi-

---

[1] *Cf.* E. Picard, *loc. cit.*, p. 6.

déré. Pour aucune valeur x de cet intervalle, on ne peut avoir

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)<0$$

lorsque h est assez petit. Par conséquent, la courbe n'a aucun point au-dessus d'une corde quelconque AB. La fonction est convexe : elle admet en chaque point une dérivée puisque, λ_0 étant nul, en tout point la dérivée à droite est égale à la dérivée à gauche. Cette dérivée est une fonction croissante, donc continue, puisqu'une fonction dérivée prend toutes les valeurs comprises entre deux des valeurs qu'elle prend. Or, le premier membre peut s'écrire

$$\frac{f'(x+\theta h)-f'(x-\theta h)}{h} \qquad (0<\theta<1),$$

et, comme il y a des points dans tout intervalle où une fonction continue croissante $f'(x)$ admet une dérivée $f''(x)$, on voit que μ_0 est fini.

Nous pouvons alors intégrer terme à terme comme nous l'avons fait au paragraphe 6, en donnant à h la suite de valeurs h_n. On peut écrire

$$\lim_{h_n=0}\int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{v}\frac{f(u+h_n)+f(u-h_n)-2f(u)}{h_n^2}\,du\,dv=2\mu_0\int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{v}f(u)\,du\,dv.$$

Soient $\Phi(x)$ une primitive de $f(x)$ et $\mathcal{F}(x)$ une primitive de $\Phi(x)$. Le premier membre s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{F}(x+h_n)+\mathcal{F}(x-h_n)-2\mathcal{F}(x)}{h_n^2}&-\frac{\mathcal{F}(x_1+h_n)+\mathcal{F}(x_1-h_n)-2\mathcal{F}(x_1)}{h_n^2}\\&-\frac{\Phi(x_1+h_n)+\Phi(x_1-h_n)-2\Phi(x_1)}{h_n^2}(x-x_1)\end{aligned}$$

et, si x_1 a été choisi de façon que $f(x)$ ait en ce point une dérivée première, ce qui est toujours possible, cette expression a pour limite

$$2f(x)-2f(x_1)-2(x-x_1)f'(x_1).$$

Donc

$$f(x)=f(x_1)+(x-x_1)f'(x_1)+\mu_0\int_{x_1}^{x}\int_{x_1}^{v}f(u)\,du\,dv.$$

D'où l'on déduit, en tout point,

$$f''(x)=\mu_0 f(x).$$

Donc, la solution générale est $f(x) = \cos ax$, ou $f(x) = \operatorname{ch} ax$; si μ_0 est nul, on a la solution évidente $f(x) = 1$.

13. La même méthode s'applique à l'équation fonctionnelle :

$$f(x)f(y-z) + f(y)f(z-x) + f(z)f(x-y) = 0.$$

En faisant $x = y = z$, on trouve $f(0) = 0$. En faisant $x = y$ et $z = 0$, il vient

$$f(x) + f(-x) = 0.$$

Donc f est une fonction impaire. Posons $z = -y$, l'équation peut s'écrire :

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x)\frac{f(2y)}{f(y)},$$

et, comme $f(x)$ est supposée continue, on voit que

$$\lim_{y=0} \frac{f(2y)}{f(y)} = 2.$$

Il suffit alors d'écrire

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) = 2f(x)\left[\frac{f(2h)}{2f(h)} - 1\right],$$

et de raisonner comme au paragraphe précédent pour s'assurer que $f(x)$ vérifie la même équation différentielle

$$f''(x) = \mu_0 f(x).$$

On en déduit que la solution générale est $f(x) = \sin ax$, ou $f(x) = \operatorname{sh} ax$, ou $f(x) = x$, à une constante multiplicative près.

14. L'équation fonctionnelle de Poisson se relie à celle de Moutard (¹) et au problème de déterminer deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ vérifiant l'équation

$$f(x+y)\varphi(x-y) + f(x-y)\varphi(x+y) = 2f(x)f(y)\varphi(x)\varphi(y).$$

On obtient l'équation de Poisson lorsque $\varphi(x)$ est la constante *un*.

(¹) MOUTARD, Note au livre de Poncelet : *Applications d'analyse et de géométrie*, t. I, p. 509-535, Paris, Mallet-Bachelier, 1862.

On voit immédiatement que si $f_0(x)$, $\varphi_0(x)$ forment un système de solutions, il en est de même de

$$f(x) = f_0(x)\, e^{bx^2+c}, \qquad \varphi(x) = \varphi_0(x)\, e^{bx^2+c},$$

quelles que soient les constantes b et c; en prenant $\varphi_0(x) = 1$ et $f_0(x)$ égal à $\cos ax$ ou $\operatorname{ch} ax$, on obtient un premier groupe de solutions analytiques. Moutard a montré que les autres solutions régulières sont les fonctions thêta de Jacobi.

En suivant la même marche que dans les paragraphes précédents, on voit aisément que si l'une des fonctions est analytique, l'autre l'est aussi; que si l'une des fonctions a des dérivées jusqu'à l'ordre p, il en est de même de la seconde.

15. Certains résultats obtenus dans les paragraphes précédents peuvent être étendus aux systèmes de fonctions admettant un théorème d'addition algébrique, problème à rapprocher des travaux de Poincaré et de M. Picard sur les fonctions méromorphes qui admettent un théorème de multiplication.

Nous dirons que le système des deux fonctions continues $f(x)$, $g(x)$ admet un théorème d'addition algébrique si, x, y et $x+y$ appartenant aux intervalles où elles sont définies, elles vérifient deux équations de la forme

$$\begin{gathered} \mathrm{F}[f(x+y),\, g(x+y),\, f(x),\, g(x),\, f(y),\, g(y)] = 0, \\ \mathrm{F}_1[f(x+y),\, g(x+y),\, f(x),\, g(x),\, f(y),\, g(y)] = 0, \end{gathered}$$

F et F_1 désignant des polynomes à six variables. On peut évidemment supposer que F ne contienne pas $g(x+y)$ et que F_1 ne contienne pas $f(x+y)$.

Bornons-nous au cas où ces polynomes sont du premier degré en $f(x+y)$, $g(x+y)$, on pourra écrire

$$(15) \qquad \begin{cases} f(x+y) = \mathrm{G}[f(x),\, g(x),\, f(y),\, g(y)], \\ g(x+y) = \mathrm{G}_1[f(x),\, g(x),\, f(y),\, g(y)], \end{cases}$$

G et G_1 étant des polynomes à quatre variables. Comme on peut remplacer $f(x)$ et $g(x)$ par $f(x) - f(0)$ et $g(x) - g(0)$, on pourra supposer que les fonctions f et g s'annulent avec la variable. On déduit des équations précédentes, en posant

$$f(x) = X, \quad g(x) = X_1, \quad f(y) = Y, \quad g(y) = Y_1,$$
$$f(x+y) - f(x) = H(X, X_1, Y, Y_1),$$
$$g(x+y) - g(x) = H_1(X, X_1, Y, Y_1),$$

H et H_1 étant des polynomes qui s'annulent quels que soient X et X_1 lorsque $Y = Y_1 = 0$. Le polynome H, par exemple, peut se mettre sous la forme

$$Y P(X, X_1, Y, Y_1) + Y_1 P_1(X, X_1, Y, Y_1);$$

supposons d'abord que $P(X, X_1, 0, 0)$ et $P_1(X, X_1, 0, 0)$ ne soient pas identiquement nuls. Nous pouvons écrire

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{Y(h)}{h} P(X, X_1, Y, Y_1) + \frac{Y_1(h)}{h} P_1(X, X_1, Y, Y_1).$$

Soit $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ une suite infinie de nombres positifs ayant pour limite zéro et tels que $\frac{Y(h)}{h}$ et $\frac{Y_1(h)}{h}$ aient des limites λ_0 et μ_0.

Le premier membre a, dans les mêmes conditions, une limite λ. Si un seul des nombres λ_0 et μ_0 est infini, comme P et P_1 ne sont pas nuls quels que soient X et X_1, λ aurait, dans un intervalle, une valeur infinie toujours de même signe. En effet, supposons λ_0 infini et μ_0 fini. $P(X, X_1, 0, 0)$ ne peut être nul quel que soit x quand on remplace X et X_1 par $f(x)$ et $g(x)$, sinon la relation

$$P[f(x), g(x), 0, 0] = 0,$$

résoluble en $f(x)$ ou en $g(x)$, puisque P n'est pas identiquement nul, nous permettrait d'être ramenés au cas d'une équation unique relative à $f(x)$ ou à $g(x)$, c'est-à-dire au problème traité précédemment. Nous pouvons donc trouver un intervalle dans lequel $P[f(x), g(x), 0, 0]$ ne s'annule pas. Dans cet intervalle, λ est infini toujours de même signe, ce que nous savons être impossible.

Supposons maintenant que λ_0 et μ_0 soient tous deux infinis. On peut choisir la suite h_n de façon que le rapport $\frac{Y_1(h_n)}{Y(h_n)}$, ou son inverse, ait une limite finie ρ. L'égalité

$$\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} = \frac{Y(h_n)}{h_n}\left[P(X, X_1, Y, Y_1) + \frac{Y_1(h_n)}{Y(h_n)} P_1(X, X_1, Y, Y_1)\right]$$

montre que λ serait infini toujours de même signe dans un intervalle, à moins que le polynome

$$P(X, X_1, o, o) + \rho P_1(X, X_1, o, o)$$

ne soit identiquement nul.

Si $\rho = o$, cela n'est pas possible, par hypothèse.

Si ρ n'est pas nul, nous pouvons remplacer les fonctions f et g par des combinaisons linéaires et prendre par exemple

$$f = \varphi,$$
$$g = \rho\varphi + \psi.$$

Alors

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{\varphi(h)}{h}[P + \rho P_1] + \frac{\psi(h)}{h} P_1,$$

et nous sommes ramenés au cas exclu par hypothèse.

Donc λ_0 et μ_0 sont finis; on en déduit que λ est une fonction continue de x et, par conséquent, que $f(x)$ admet une dérivée $f'(x)$.

Dans le cas où l'un des polynomes $P(X, X_1, o, o)$ ou $P_1(X, X_1, o, o)$ est identiquement nul, on a par exemple

$$P(X, X_1, Y, Y_1) = YQ + Y_1Q_1,$$

Q et Q_1 étant des polynomes en X, X_1, Y, Y_1 que nous supposerons d'abord non identiquement nuls pour $Y = Y_1 = o$. On aura

$$f(x+y) - f(x) = Y^2Q + YY_1Q_1 + Y_1P_1.$$

On pourra reprendre le raisonnement précédent, mais il sera nécessaire d'introduire les limites de $\frac{Y}{\sqrt{|h|}}$ ou de $\frac{Y_1}{Y_2}$. Le résultat sera le même, aucune des limites introduites ne pourra être infinie. On passerait ensuite au cas où Q ou bien Q_1 s'annule identiquement pour $Y = Y_1 = o$.

Ainsi $f(x)$ et $g(x)$ ont des dérivées $f'(x)$ et $g'(x)$, et ces dérivées vérifient des équations de la forme

$$f'(x) = K[f(x), g(x)],$$
$$g'(x) = K_1[f(x), g(x)],$$

K et K_1 étant des polynomes de deux variables. On en conclut que f et g sont des fonctions analytiques de x. D'ailleurs, les équations (15) montrent que $f(x)$ est représenté par la même fonction analytique dans tout l'intervalle considéré; et il en est de même pour $g(x)$. Enfin le raisonnement du paragraphe 9 montrerait que ces fonctions sont uniformes.

Il serait intéressant de caractériser, dans le cas d'un système de deux fonctions, la nature des fonctions qui admettent un théorème d'addition algébrique.

16. Prenons comme exemple le système suivant :

$$f(x+y) = f(x)\,g(y) + f(y)\,g(x),$$
$$g(x+y) = g(x)\,g(y) - f(x)\,f(y).$$

Si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions continues vérifiant ce système, elles sont nécessairement analytiques. On en déduit aussitôt, en posant $g'(0) = a$, $f'(0) = b$,

$$f'(x) = a\,f(x) + b\,g(x),$$
$$g'(x) = a\,g(x) - b\,f(x).$$

Par conséquent, f et g vérifient l'équation

$$f'' - 2af' + (a^2 + b^2)f = 0,$$

d'où l'on déduit

$$f(x) = e^{ax}\sin bx, \qquad g(x) = e^{ax}\cos bx,$$

a et b désignant deux constantes arbitraires (¹).

17. Nous avons toujours supposé que les fonctions considérées, vérifiant un théorème d'addition algébrique, étaient continues. Si l'on abandonne cette condition, on peut obtenir des solutions non analytiques comme l'ont montré les études faites sur l'équation simple

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (^2).$$

(¹) M. J. Mollerup a étudié un système analogue : *En trigonomtrisk-axiomatisk Undersgelse* (*Særtryk af matematisk Tidsskrift*, A, 1927, p. 24-33).

(²) *Voir* H. Lebesgue, *Sur les transformations ponctuelles transformant les plans en plans, etc.* (*Atti della Accademia reale delle Scienze di Torino*, vol. XLII, mars 1907).

D'autre part, Darboux a démontré, à propos de cette même équation, que si l'on suppose ou bien que la fonction a le signe de x ou bien que la fonction est bornée supérieurement ou inférieurement autour d'un seul point, la solution est nécessairement analytique ([1]). Il en est certainement de même dans des cas plus étendus. Il serait intéressant d'introduire d'une manière générale des conditions, moins restrictives que la continuité, qui entraîneraient l'analyticité des solutions.

([1]) G. Darboux, *Sur le théorème fondamental de la géométrie projective* (*Math. Annalen*, Bd XVII, 1880, p. 55-61). *Voir* aussi E. Picard, *loc. cit.*, p. 2.