ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉTIENNE GOURSAT

Sur un système d'équations aux dérivées partielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 47 (1930), p. 325-357

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1930_3_47__325_0>

SUR

UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR M. E. GOURSAT

Dans deux articles récents (¹), j'ai signalé quelques cas particuliers où une équation de Monge à deux variables indépendantes que l'on peut écrire symboliquement

$$\sum A_{ik} dz_i dz_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

admet une intégrale générale explicite. Dans ce nouveau travail, je considère un système formé de deux équatious de la forme précédente. Le problème de l'intégration est alors d'une nature toute différente, car ce système est équivalent à un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, à deux variables indépendantes et à deux fonctions inconnues, qui se ramène en général (²), de deux façons différentes, à une équation du second ordre. Mais, en tenant compte de la forme spéciale des équations aux dérivées partielles dont il s'agit, cette réduction peut se faire d'une façon beaucoup plus facile que dans le cas général.

1. Soient

$$\Omega_1 = \Sigma A_{ik} dx_i dx_k, \qquad \Omega_2 = \Sigma B_{ik} dx_i dx_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

deux formes de Pfaff du second degré à quatre variables, les coef-

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. LII, 1928, p. 397; t. LIII, 1929, p. 196.

(²) Voir le fascicule VI du *Mémorial des Sciences mathématiques : Le problème de Bäcklund.*

ficients A_{ik}, B_{ik} étant des fonctions quelconques de ces variables. L'intégration du système des deux équations

$$(1) \qquad \Omega_1 = 0, \qquad \Omega_2 = 0,$$

c'est-à-dire la détermination des multiplicités à deux dimensions satisfaisant à ces relations, revient, d'après la définition même des formes symboliques de différentielles, à la recherche de quatre fonctions x_1, x_2, x_3, x_4 de deux variables indépendantes u, v, vérifiant les deux équations

$$(1') \qquad \sum A_{ik} \frac{D(z_i, z_k)}{D(u, v)} = 0, \qquad \sum B_{ik} \frac{D(z_i, z_k)}{D(u, v)} = 0.$$

Si, par exemple, on prend x_1 et x_2 pour variables indépendantes, les équations (1′) forment un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, que l'on peut ramener immédiatement à un système de Bäcklund.

Rappelons d'abord la propriété suivante ([1]). Pour qu'une forme symbolique

$$\Omega = \Sigma a_{ik} dx_i dx_k,$$

où figurent quatre variables et leurs différentielles, soit le produit symbolique de deux formes linéaires de Pfaff, il faut et il suffit que les coefficients a_{ik} vérifient la relation

$$(2) \qquad a_{12}a_{34} + a_{13}a_{42} + a_{14}a_{23} = 0 \qquad (a_{ik} + a_{ki}) = 0.$$

Plus généralement, si ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 sont quatre formes de Pfaff du premier degré, *linéairement distinctes*, la forme

$$\Omega = \Sigma a_{ik} \omega_i \omega_k$$

est le produit symbolique de deux formes linéaires, si les coefficients a_{ik} vérifient la relation (2) et dans ce cas seulement. Cela posé, la forme $\Omega = \lambda_1 \Omega_1 + \lambda_2 \Omega_2$ sera le produit symbolique de deux formes

---

([1]) *Leçons sur le problème de Pfaff*, Chap. III. Je prie le lecteur de se reporter à ce Chapitre pour la démonstration des propriétés des formes symboliques qui seront utilisées.

linéaires de Pfaff, pourvu que les facteurs λ_1, λ_2 vérifient la relation

$$(3)\quad (\lambda_1 A_{12} + \lambda_2 B_{12})(\lambda_1 A_{34} + \lambda_2 B_{34}) + (\lambda_1 A_{13} + \lambda_2 B_{13})(\lambda_1 A_{42} + \lambda_2 B_{42}) + (\lambda_1 A_{14} + \lambda_2 B_{14})(\lambda_1 A_{23} + \lambda_2 B_{23}) = 0,$$

équation du second degré en $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, qui admet deux racines distinctes si les coefficients A_{ik}, B_{ik} ne satisfont à aucune condition particulière.

Nous allons d'abord examiner si cette équation peut se réduire à une identité. S'il en est ainsi, nous pouvons supposer les formes Ω_1 et Ω_2 remplacées par deux produits symboliques

$$\Omega_1 = \omega_1\omega_2, \qquad \Omega_2 = \omega_3\omega_4.$$

Si les quatre formes ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 sont linéairement distinctes, la forme $\lambda_1\omega_1\omega_2 + \lambda_2\omega_3\omega_4$ ne sera un produit symbolique, d'après la condition (2), que si l'on a $\lambda_1\lambda_2 = 0$. Les formes ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 ne peuvent donc être distinctes si l'équation (3) est vérifiée, quels que soient λ_1 et λ_2. Les formes ω_1, ω_2 sont certainement distinctes, sans quoi le produit symbolique $\omega_1\omega_2$ serait nul identiquement, et le système (1) se réduirait à une seule équation. Il en serait de même si ω_3 et ω_4 étaient des combinaisons linéaires de ω_1, ω_2. Le seul cas à examiner est donc celui où ω_1, ω_2, ω_3, par exemple, seraient trois formes de Pfaff linéairement distinctes, tandis que ω_4 serait une combinaison linéaire de celles-là

$$\omega_4 = \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3.$$

On a alors

$$\lambda_1\Omega_1 + \lambda_2\Omega_2 = \lambda_1\omega_1\omega_2 + \lambda_2\alpha_1\omega_3\omega_1 + \lambda_2\alpha_2\omega_3\omega_2,$$

et la condition (2) est toujours vérifiée, quels que soient λ_1, λ_2. Les premiers membres des deux équations $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ s'expriment uniquement au moyen des formes linéaires ω_1, ω_2, ω_3, et l'on vérifie aisément que toute forme

$$\Omega = A_{12}\omega_1\omega_2 + A_{13}\omega_1\omega_3 + A_{23}\omega_2\omega_3$$

est le produit symbolique de deux formes linéaires; en effet, pour que Ω soit le produit de $\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3$ par une autre forme de Pfaff, il faut et il suffit que le produit symbolique $\Omega(\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3)$

soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$A_{12}\alpha_3 + A_{23}\alpha_1 + A_{31}\alpha_2 = 0.$$

Dans ce cas particulier, il est facile de trouver toutes les intégrales du système (1). En effet, les trois équations

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = 0,$$

où figurent quatre variables, forment un système complètement intégrable équivalent à un système $dy_1 = 0$, $dy_2 = 0$, $dy_3 = 0$, les trois formes ω_1, ω_2, ω_3 sont donc des combinaisons linéaires de dy_1, dy_2, dy_3, et le système (1) est de la forme

$$\Sigma A'_{ik}\,dy_i\,dy_k = 0, \qquad \Sigma B'_{ik}\,dy_i\,dy_k = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

On en tire

$$\text{(4)} \qquad \frac{dy_1\,dy_2}{P_3} = \frac{dy_2\,dy_3}{P_1} = \frac{dy_3\,dy_1}{P_2},$$

P_1, P_2, P_3 étant des fonctions de y_1, y_2, y_3, pouvant contenir une autre variable y_4. On satisfait à ces relations en établissant deux relations distinctes entre y_1, y_2, y_3, telles que

$$y_2 = f(y_1), \qquad y_3 = g(y_1).$$

Si l'on peut satisfaire aux équations (4) en établissant une seule relation entre y_1, y_2, y_3, deux de ces variables, y_1 et y_2, par exemple, peuvent être prises pour variables indépendantes, et les relations (4) donnent alors

$$\frac{dy_3}{dy_1} = -\frac{P_1}{P_3}, \qquad \frac{dy_3}{dy_2} = -\frac{P_2}{P_3}.$$

Si la dernière variable y_4 figure dans les seconds membres, l'élimination de y_4 conduira à une équation aux dérivées partielles du premier ordre [1]

$$F\left(y_1, y_2, y_3, \frac{\partial y_3}{\partial y_1}, \frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right) = 0.$$

---

[1] D'une façon générale, l'intégration d'une équation de la forme

$$A_{12}\,dy_1\,dy_2 + A_{23}\,dy_2\,dy_3 + A_{31}\,dy_3\,dy_1 = 0$$

revient à la recherche des surfaces dont le plan tangent passe par la droite de para-

2. Ce cas exceptionnel écarté, l'équation (3) admet deux racines en $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, en général distinctes, et par conséquent on peut ramener le système (1) à la forme

$$(5)\qquad \Omega_1 = \omega_1\omega_2 = 0, \qquad \Omega_2 = \Sigma B_{ik}\,dx_i\,dx_k = 0$$

de deux façons différentes si l'équation (3) a deux racines distinctes, et d'une seule façon si l'équation (3) a une racine double. Dans le cas général, dont nous allons d'abord nous occuper, où l'équation (3) a deux racines distinctes, on peut prendre pour Ω_1 et Ω_2 deux formes décomposables symboliquement en facteurs linéaires, et écrire le système (1) sous la forme

$$(6)\qquad \Omega_1 = \omega_1\omega_2 = 0, \qquad \Omega_2 = \omega_3\omega_4 = 0,$$

ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 étant quatre formes de Pfaff linéairement distinctes. Cette réduction n'exige que la résolution d'une équation du second dégré et des calculs linéaires.

L'intégration du système (6) se ramène elle-même à l'intégration du système de deux équations de Pfaff

$$(7)\qquad \omega_1 + \lambda\omega_2 = 0, \qquad \omega_3 + \mu\omega_4 = 0,$$

---

mètres directeurs A_{12}, A_{23}, A_{31}, c'est-à-dire à l'intégration du système

$$\frac{dy_1}{A_{23}} = \frac{dy_2}{A_{31}} = \frac{dy_3}{A_{12}}.$$

Si l'on a deux équations simultanées de la forme

$$A_{12}\,dy_1\,dy_2 + A_{23}\,dy_2\,dy_3 + A_{31}\,dy_3\,dy_1 = 0,$$
$$B_{12}\,dy_1\,dy_2 + B_{23}\,dy_2\,dy_3 + B_{31}\,dy_3\,dy_1 = 0,$$

les coefficients dépendant d'une autre variable y_4, on satisfait d'abord à ces équations en établissant deux relations arbitraires entre y_1, y_2, y_3. Si y_4 figure dans les coefficients, les calculs du texte montrent qu'il y aura une infinité d'autres solutions, qui s'obtiendront par l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Si y_4 ne figure pas dans les rapports $\frac{P_1}{P_3}$, $\frac{P_2}{P_3}$, il n'y aura de solutions nouvelles que si l'équation

$$P_1\,dy_1 + P_2\,dy_2 + P_3\,dy_3 = 0$$

est complètement intégrale. Si en particulier $P_2 = P_3 = 0$, on satisfait aux équations (4) en posant seulement $dy_1 = 0$, ou $y_1 = C$. L'intégrale générale dépend donc d'une fonction arbitraire de deux variables. On verra un exemple plus loin (n° 10).

à six variables x_1, x_2, x_3, x_4, λ, μ, c'est-à-dire à un problème de Bäcklund particulier. Chacune des équations (7) est une *équation singulière* du système de Pfaff. Prenons le cas général où l'équation $\omega_1 + \lambda\omega_2 = 0$ est de classe *cinq;* cette équation étant mise sous une forme canonique

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

x_1, x_2, x_3, x_4, λ s'exprimant au moyen de x, y, z, p, q, et la seconde des équations (7) devient, en remplaçant dz par $p\,dx + q\,dy$,

$$a_1 dx + a_2 dy + a_3 dp + a_4 dq + \mu(b_1 dx + b_2 dy + b_3 dp + b_4 dq) = 0,$$

les coefficients a_i, b_i ne renfermant que les variables x, y, z, p, q. Ceci suffit pour prouver que l'équation $\omega_1 + \lambda\omega_2 = 0$ est une équation singulière du système de Pfaff, et la résolvante de première espèce correspondante s'obtiendra en éliminant μ entre les deux relations

$$a_1 + a_3 r + a_4 s + \mu(b_1 + b_3 r + b_4 s) = 0,$$
$$a_2 + a_3 s + a_4 t + \mu(b_2 + b_3 s + b_4 t) = 0,$$

On verra de même que l'équation $\omega_3 + \mu\omega_4 = 0$ est la seconde équation singulière du système.

Remarquons aussi que l'on arriverait à la même résolvante en remplaçant dans les équations

$$\omega_3 = a_1 dx + a_2 dy + a_3 dp + a_4 dq = 0,$$
$$\omega_4 = b_1 dx + b_2 dy + b_3 dp + b_4 dq = 0,$$

dp par $r\,dx + s\,dy$, dq par $s\,dx + t\,dy$, et éliminant ensuite le rapport $\frac{dy}{dx}$ entre les deux relations obtenues. Il en résulte que les deux équations précédentes, jointes à la relation $dz = p\,dx + q\,dy$ définissent une des familles de caractéristiques de la résolvante ([1]). On verrait aussi, en se reportant à la théorie du problème de Bäcklund, que les deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ sont des combinaisons linéaires des équations différentielles de l'autre famille de caractéristiques.

3. On peut obtenir ces résolvantes plus aisément que dans le cas général en tenant compte de la forme particulière des équations (7).

([1]) Voir mes *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, n° 28, p. 51.

Considérons d'abord le cas général où le système des deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ n'admet aucune combinaison intégrable. On peut alors, par un changement de variables, ramener la première équation (6) à la forme [1]

$$(8) \qquad (dy_3 - y_2 dy_1)(dy_2 - y_4 dy_1) = 0,$$

y_1, y_2, y_3, y_4 étant quatre fonctions indépendantes de x_1, x_2, x_3, x_4, et cette opération n'exige que la réduction à une forme canonique d'une forme de Pfaff de classe *trois*. Avec les nouvelles variables, le système (1) est remplacé par un système formé de l'équation (8) et d'une nouvelle équation distincte de celle-là

$$(9) \qquad \Sigma C_{ik} dy_i dy_k = 0,$$

où les coefficients C_{ik} sont des fonctions de y_1, y_2, y_3, y_4, mais il n'est pas nécessaire, pour la suite des calculs, de supposer que le premier membre de cette équation (9) est un produit symbolique de deux formes linéaires.

L'équation (8) peut elle-même être remplacée par l'équation de Pfaff

$$(10) \qquad dy_3 - y_2 dy_1 - \lambda(dy_2 - y_4 dy_1) = 0.$$

Pour fixer les idées, nous chercherons les intégrales du système pour lesquelles y_1 et y_2 ne sont liées par aucune relation ; on peut alors les prendre pour variables indépendantes, et la solution générale de l'équation (10) est donnée par les formules

$$(11) \qquad y_3 = f(y_1, y_2), \qquad \lambda = \frac{\partial f}{\partial y_2}, \qquad y_2 - y_4 \frac{\partial f}{\partial y_2} = \frac{\partial f}{\partial y_1}.$$

Pour revenir aux notations habituelles, remplaçons y_1, y_2, y_3 par x, y, z respectivement, $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial y_2}$ par p et q ; la dernière relation (11) donne $y_4 = \frac{y - p}{q}$, tandis que l'équation (9) s'écrit

$$(9') \qquad C_{12} dx\, dy + C_{13} dx\, dz + C_{14} dx\, d\left(\frac{y-p}{q}\right) + C_{23} dy\, dz + C_{24} dy\, d\left(\frac{y-p}{q}\right) + C_{34} dz\, d\left(\frac{y-p}{q}\right) = 0.$$

---

[1] *Leçons sur le problème de Pfaff*, p. 116 et 307.

Remplaçons dans cette équation dz par $p\,dx + q\,dy$, et $d\left(\frac{y-p}{q}\right)$ par

$$-\frac{[qr+(y-p)s]\,dx}{q^2}+\frac{[q(1-s)-(y-p)t]}{q^2}\,dy;$$

en effectuant les produits symboliques indiqués et supprimant le facteur commun $dx\,dy$, on trouve que la fonction $f(x, y)$ doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles du second ordre, linéaire en r, s, t,

$$(12)\quad \mathrm{C}_{12}+\mathrm{C}_{13}q-\mathrm{C}_{23}p+\mathrm{C}_{14}\frac{q(1-s)-(y-p)t}{q^2}+\mathrm{C}_{24}\frac{qr+(y-p)s}{q^2}$$
$$+\mathrm{C}_{34}\left[\frac{pq(1-s)-p(y-p)t+q^2r+q(y-p)s}{q^2}\right]=0$$

qui est une résolvante du système (1).

Remarques. — I. Il est évident *a priori* que l'on aboutirait à la même équation en employant la méthode générale indiquée au numéro précédent lorsque le premier membre de l'équation (9) est décomposable en un produit symbolique de deux formes linéaires. La vérification directe est facile.

II. Pour que l'équation (12) ait ses deux familles de caractéristiques confondues, il faut et il suffit que les coefficients C_{ik} de l'équation (9) vérifient la relation

$$(13)\qquad \mathrm{C}_{24}y_4+\mathrm{C}_{14}+\mathrm{C}_{34}y_2=0;$$

c'est précisément la condition pour que l'équation en λ, obtenue en exprimant que la forme

$$(dy_3-y_2\,dy_1)(dy_2-y_4\,dy_1)+\lambda\Sigma\mathrm{C}_{ik}\,dy_i\,dy_k$$

est le produit symbolique de deux formes linéaires, admette la racine double $\lambda=0$.

Ainsi, lorsque le système (1) peut être ramené à la forme (6), les quatre formes ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 étant linéairement distinctes, le système (7) admet en général deux résolvantes de première espèce pour lesquelles les deux familles de caractéristiques sont distinctes. Lorsque l'équation (3) a une racine double, nous voyons au contraire que l'intégration du système (1) se ramène à l'intégration d'une équation de Monge-Ampère ayant ses deux familles de caractéristiques confondues.

4. Les conclusions précédentes ne s'appliquent qu'aux circonstances les plus générales. Nous passerons rapidement en revue les cas particuliers qui peuvent se présenter. Supposons le système proposé ramené à la forme (5); si les deux équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ admettent une combinaison intégrable et une seule, on peut, par un changement de variables, ramener l'équation $\omega_1\omega_2 = 0$ à la forme

$$\omega_1\omega_2 = dy_1(dy_3 - y_4\,dy_2) = 0, \tag{14}$$

y_1, y_2, y_3, y_4 étant quatre fonctions distinctes de x_1, x_2, x_3, x_4, tandis que la seconde équation du système devient

$$\Sigma C_{ik}\,dy_i\,dy_k = 0. \tag{15}$$

On satisfait encore à l'équation (14) en posant

$$y_1 = x, \qquad y_2 = y, \qquad y_3 = f(x, y), \qquad y_4 = \frac{\partial f}{\partial y} = q.$$

et, en substituant ces expressions dans l'équation (15), on voit que la fonction $f(x, y)$ doit satisfaire à l'équation du second ordre

$$C_{12} + C_{13}q - C_{23}p + C_{14}t - C_{24}s + C_{34}(pt - qs) = 0, \tag{16}$$

pour laquelle une des familles de caractéristiques admet la combinaison intégrable $dx = 0$. Les deux familles de caractéristiques de cette équation seront confondues si l'on a $C_{24} + C_{34}q = 0$, et l'on obtient la même conclusion qu'au numéro précédent.

Supposons enfin que les équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ forment un système complètement intégrable. Par un changement de variables, le système proposé peut alors être ramené à la forme

$$\Omega_1 = dy_1\,dy_2 = 0, \qquad \Omega_2 = \Sigma C_{ik}\,dy_i\,dy_k = 0. \tag{17}$$

La forme $\Omega_1 + \lambda\Omega_2$ est un produit symbolique si λ vérifie l'équation

$$(1 + \lambda C_{12})\lambda C_{34} + \lambda^2(C_{13}C_{42} + C_{14}C_{23}) = 0.$$

Cette équation admet la racine $\lambda = 0$, et une autre racine différente de zéro pourvu que C_{34} ne soit pas nul. Supposons d'abord $C_{34} \neq 0$; le système (17) peut être écrit sous la forme équivalente

$$dy_1\,dy_2 = 0, \qquad \omega_3\,\omega_4 = 0, \tag{17'}$$

les quatre formes linéaires dy_1, dy_2, ω_3, ω_4 étant distinctes.

L'intégration de ce système est équivalente à celle du système de Pfaff

$$dy_2 - \lambda\,dy_1 = 0, \qquad \omega_3 + \mu\,\omega_4 = 0, \tag{18}$$

qui admet une équation singulière de classe trois.

Si la seconde équation $\omega_3 + \mu\omega_4 = 0$ est de classe *cinq*, la résolvante correspondante de première espèce admet une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire. Si cette équation est de classe trois le système (18) est réductible à une forme canonique

$$dy_2 - \lambda\,dy_1 = 0, \qquad dy_3 - \mu\,dy_4 = 0$$

qui s'intègre immédiatement.

Il ne reste plus qu'à traiter le cas d'un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega_1 = dy_1\,dy_2 = 0, \\ \Omega_2 = C_{13}\,dy_1\,dy_3 + C_{14}\,dy_1\,dy_4 + C_{23}\,dy_2\,dy_3 + C_{24}\,dy_2\,dy_4 = 0, \end{array}\right. \tag{19}$$

où l'on a

$$C_{34} = 0, \qquad C_{13}C_{42} + C_{14}C_{23} \neq 0.$$

De la première équation on tire $y_2 = f(y_1)$, et si l'on prend pour variables indépendantes y_1 et y_3, la relation $\Omega_2 = 0$ conduit à une équation différentielle pour déterminer y_4

$$C_{13} + C_{23}\,f'(y_1) + \{C_{14} + C_{24}\,f'(y_1)\}\,\frac{\partial y_4}{\partial y_3} = 0,$$

relation de la forme

$$\frac{\partial y_4}{\partial y_3} = F[y_2, y_3, y_4, f(y_1), f'(y_1)] = 0, \tag{20}$$

qui devra être intégrée en considérant y_1, $f(y_1)$, $f'(y_1)$ comme des constantes. L'intégration introduira une constante que l'on remplacera par une seconde fonction arbitraire de y_1 [1].

---

[1] Ces divers cas particuliers correspondent à des formes canoniques du sys-

5. On peut résumer comme il suit les résultats de la discussion. Si l'équation (3) a deux racines distinctes, le système (1) peut être ramené à la forme

$$\omega_1 \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 \omega_4 = 0,$$

ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 étant quatre formes de Pfaff linéairement distinctes, et l'intégration de ce système est équivalente à celle du système de deux éqnations de Pfaff à six variables

$$(\Sigma) \qquad \omega_1 + \lambda \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 + \mu \omega_4 = 0.$$

Si aucun des systèmes de deux équations

$$(\omega_1 = \omega_2 = 0), \qquad (\omega_3 = \omega_4 = 0)$$

n'admet de combinaison intégrable, le système (Σ) a deux résolvantes de première espèce avec deux systèmes distincts de caractéristiques. Si un des systèmes

$$(\omega_1 = \omega_2 = 0), \qquad (\omega_3 = \omega_4 = 0)$$

admet une combinaison intégrable, il existe une combinaison intégrable pour l'un des systèmes de caractéristiques de chacune des résolvantes. Si un des systèmes est complètement intégrable, sans qu'il en soit de même de l'autre, le système (Σ) possède une seule résolvante de première espèce avec une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire. Si les deux systèmes

$$(\omega_1 = \omega_2 = 0), \qquad (\omega_3 = \omega_4 = 0)$$

admettent chacun une seule combinaison intégrable, il existe aussi une combinaison intégrable pour chacun des systèmes de caractéristiques des deux résolvantes de (Σ). Enfin si les deux systèmes sont l'un et l'autre complètement intégrables, il n'existe pas de résolvantes pour le système (Σ), qui est réductible à une forme canonique et dont l'intégration est immédiate.

Lorsque l'équation (3) a une racine double, il existe en général une

---

tème (17) (voir *Le problème de Bäcklund*). Mais il est aisé de résoudre directement ce système en posant $y_2 = f(y_1)$ et en considérant y_4 comme une fonction de y_2 et de y_3. La seconde équation (17) conduit immédiatement à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.

résolvante et une seule pour laquelle les deux systèmes de caractéristiques sont confondus. Cette résolvante peut elle-même disparaître dans certains cas, où l'intégration est ramenée à celle d'une équation du premier ordre.

6. L'intégration des équations (1) peut, dans certains cas, se ramener d'une autre façon à l'intégration d'une équation de Monge Ampère. Supposons que l'on connaisse une combinaison linéaire de deux formes Ω_1, Ω_2, telle que $\lambda_1\Omega_1 + \lambda_2\Omega_2$, pour laquelle la forme dérivée $(\lambda_1\Omega_1 + \lambda_2\Omega_2)'$ est identiquement nulle. Par un changement de variables, on peut alors remplacer le système (1) par un système équivalent formé des deux équations

$$(21)\qquad \Omega_1 = dp\,dx + dq\,dy = 0,$$

$$(22)\qquad \Omega_2 = A_{12}\,dx\,dy + A_{13}\,dx\,dp + A_{14}\,dx\,dq + A_{23}\,dy\,dp + A_{24}\,dy\,dq + A_{34}\,dp\,dq = 0,$$

où les coefficients A_{ik} sont fonctions des variables x, y, p, q. Remarquons que si l'on remplace Ω_2 par $\Omega_2 - K\Omega_1$, les coefficients A_{13} et A_{24} sont augmentés de K, mais la somme $A_{13} + A_{42}$ n'a pas changé. On peut donc supposer, par exemple, $A_{13} = 0$ ou $A_{24} = 0$ dans l'équation $\Omega_2 = 0$.

Si l'on prend x et y pour variables indépendantes, on peut remplacer l'équation $\Omega_1 = 0$ par l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

z étant une inconnue auxiliaire, et l'on satisfait à cette équation en posant

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y},$$

$f(x, y)$ étant une fonction arbitraire. En remplaçant p et q par ces expressions dans l'équation (22), et en tenant compte des relations

$$dx\,dp = s\,dx\,dy, \qquad dx\,dq = t\,dx\,dy, \qquad dy\,dp = -r\,dx\,dy,$$
$$dy\,dq = -s\,dx\,dy, \qquad dp\,dq = (rt - s^2)\,dx\,dy,$$

il reste, après la suppression du facteur $dx\,dy$, une équation de Monge-Ampère à laquelle doit satisfaire la fonction $f(x, y)$, que nous écrirons, selon la notation d'Ampère,

$$(23)\qquad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

en posant

$$(23')\qquad H = -A_{23}, \qquad 2K = A_{13} + A_{12}, \qquad L = A_{11}, \qquad M = A_{12}, \qquad N = A_{33}.$$

Nous allons calculer comment cette nouvelle résolvante (23) se rattache aux résolvantes déjà étudiées. Avec les nouvelles notations, l'équation (22) s'écrit

$$\Omega_2 = N\,dp\,dq + M\,dx\,dy - H\,dy\,dp + 2K\,dx\,dp + L\,dx\,dq = 0.$$

Pour que la forme $\Omega_2 - \lambda\Omega_1$ soit le produit symbolique de deux formes linéaires, il faut et il suffit que λ soit racine de l'équation

$$(24)\qquad \lambda^2 + 2K\lambda + HL - MN = 0,$$

qui se présente aussi dans la recherche des caractéristiques de l'équation (22). Il est facile de voir comment ces caractéristiques interviennent dans la question. Supposons, pour fixer les idées, que N n'est pas nul, et soient λ_1, λ_2 les deux racines de l'équation (24). Posons

$$\omega_1 = N\,dp + L\,dx + \lambda_1\,dy, \qquad \omega_2 = N\,dq + \lambda_2\,dx + H\,dy,$$
$$\omega_3 = N\,dp + L\,dx + \lambda_2\,dy, \qquad \omega_4 = N\,dq + \lambda_1\,dx + H\,dy;$$

les équations différentielles des deux familles de caractéristiques s'obtiennent en adjoignant à la relation $dz = p\,dx + q\,dy$ les deux équations $\omega_1 = \omega_2 = 0$, ou les deux équations $\omega_3 = \omega_4 = 0$. En tenant compte des formules

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2K, \qquad \lambda_1\lambda_2 = HL - MN,$$

on trouve pour les produits symboliques $\omega_1\omega_2$, $\omega_3\omega_4$ les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\omega_1\omega_2 = {} & N[N\,dp\,dq + H\,dp\,dy + L\,dx\,dq + M\,dx\,dy] \\ & + N[\lambda_2\,dp\,dx + \lambda_1\,dy\,dq],\\ \omega_3\omega_4 = {} & N[N\,dp\,dq + H\,dp\,dy + L\,dx\,dq + M\,dx\,dy] \\ & + N[\lambda_1\,dp\,dx + \lambda_2\,dy\,dq].\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\omega_1\omega_2 - \omega_3\omega_4 = \mathrm{N}(\lambda_2 - \lambda_1)(dp\,dx + dq\,dy) = \mathrm{N}(\lambda_2 - \lambda_1)\Omega_1,$$

$$\begin{aligned}\omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 &= 2\mathrm{N}(\mathrm{N}\,dp\,dq + \mathrm{H}\,dp\,dy + \mathrm{L}\,dx\,dq + \mathrm{M}\,dx\,dy)\\ &\quad - 2\mathrm{NK}(dp\,dx + dy\,dq)\\ &= 2\mathrm{N}[\Omega_2 + 2\mathrm{K}(dp\,dx + dq\,dy)] = 2\mathrm{N}(\Omega_2 + 2\mathrm{K}\Omega_1).\end{aligned}$$

Les produits symboliques $\omega_1\omega_2$ et $\omega_3\omega_4$ sont donc des combinaisons linéaires des formes Ω_1 et Ω_2. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, on ne peut déduire des formes Ω_1, Ω_2 qu'un seul produit symbolique, ce qui est bien d'accord avec les résultats antérieurs.

Si N est nul, on verra de même que les produits symboliques déduits de Ω_1, Ω_2 s'obtiennent aussi en partant des équations différentielles des caractéristiques de l'équation (23).

7. Désignons, pour abréger, par $\mathcal{E}$ l'équation (23), et supposons $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mathrm{N} \neq 0$. L'intégration du système proposé est équivalente à celle du système des deux équations de Pfaff à 6 variables x_1, x_2, x_3, x_4, μ_1, μ_2,

$$(25)\qquad \begin{cases}\mathrm{N}\,dp + \mathrm{L}\,dx + \lambda_1\,dy + \mu_1(\mathrm{N}\,dq + \lambda_2\,dx + \mathrm{H}\,dy) = 0,\\ \mathrm{N}\,dp + \mathrm{L}\,dx + \lambda_2\,dy + \mu_2(\mathrm{N}\,dq + \lambda_1\,dx + \mathrm{H}\,dy) = 0.\end{cases}$$

Soient (E_1), (E_2) les deux résolvantes de première espèce de ce système. Pour obtenir la résolvante (E_1), par exemple, on doit d'abord réduire la première équation (25) à une forme canonique

$$(26)\qquad d\mathrm{Z} - \mathrm{P}\,d\mathrm{X} - \mathrm{Q}\,d\mathrm{Y} = 0,$$

d'où l'on déduit ensuite, en tenant compte de la seconde équation (25), une équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle doit satisfaire la fonction $\mathrm{Z} = \mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$; X, Y, Z, P, Q sont les fonctions de x, y, p, q, μ_1; en éliminant μ_1, on est donc conduit à un système de *quatre* relations entre x, y, p, q, X, Y, Z, P, Q. On passe donc de l'équation $\mathcal{E}$ à l'équation (E_1) par une transformation de Bächlund B_2, puisqu'à une intégrale de $\mathcal{E}$ correspond une solution et une seule des équations (25) et par suite de (E_1), tandis qu'à une intégrale de (E_1) correspondent une infinité d'intégrales de $\mathcal{E}$ dépendant d'une constante arbitraire.

Il en est évidemment de même de la seconde résolvante (E_2) du système (25) et l'on aboutit à la conclusion suivante : *les deux résolvantes de première espèce* (E_1), (E_2) *du système* (25) *peuvent se déduire l'une et l'autre, par une transformation* B_2, *de l'équation* $\mathcal{E}$, *sans que celle-ci soit une résolvante de seconde espèce du même système* ([1]).

Toute équation de Monge-Ampère dont les coefficients ne renferment pas z est une résolvante $\mathcal{E}$ pour un système de la forme (21), (22). Il suffit en effet de prendre pour les coefficients A_{ik} les valeurs données par les formules (23'), qui déterminent seulement la somme $A_{13} + A_{42}$.

Remarque. — Il peut se faire que des équations du système (1) on puisse déduire deux équations distinctes réductibles à la forme

$$dp\,dx + dq\,dy = 0,$$
$$dP\,dX + dQ\,dY = 0,$$

X, Y, P, Q étant des fonctions de x, y, p, q. Chacune de ces équations conduira à une résolvante telle que $\mathcal{E}$, et l'on passera de l'une de ces résolvantes à l'autre par une transformation B_3, définie par quatre relations entre x, y, p, q, X, Y, P, Q, qui peuvent être quelconques.

8. Nous allons appliquer la théorie générale à quelques exemples empruntés à la théorie des congruences de droites. Imaginons que sur chaque droite de l'espace $x = az + p$, $y = bz + q$, on choisisse à volonté deux points I_1, I_2, de coordonnées

$$z_1 = f_1(a, b, p, q), \qquad z_2 = f_2(a, b, p, q),$$

et que l'on veuille déterminer les congruences de droites telles que les points focaux sur chaque droite de la congruence soient précisément les points I_1, I_2 de cette droite. En se reportant à l'article cité ([2]), on voit que le problème revient à l'intégration du système

$$(27) \qquad \begin{cases} \Omega_1 = (dp + f_1\,da)(dq + f_1\,db) = 0, \\ \Omega_2 = (dp + f_2\,da)(dq + f_2\,db) = 0, \end{cases}$$

([1]) Cette propriété s'étend à toute équation de Monge-Ampère qui admet une transformation de contact infinitésimale (voir *Le problème de Bäcklund*, p. 42-43).

([2]) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. LII, n° 9, 1928.

a, b, p, q désignant maintenant quatre fonctions inconnues de deux paramètres, ou du système de Pfaff associé

$$(28)\quad \begin{cases} dq + f_1\,db + \lambda_1(dp + f_1\,da) = 0, \\ dq + f_2\,db + \lambda_2(dp + f_2\,da) = 0, \end{cases}$$

à six variables $a, b, p, q, \lambda_1, \lambda_2$. La formation des résolvantes de ce système n'exige aucune intégration, car la première équation, par exemple, se met immédiatement sous forme canonique

$$d(q + \lambda_1 p) + f_1\,d(b + \lambda_1 a) - (p + af_1)\,d\lambda_1 = 0,$$

et il suffira d'un simple changement de variables pour obtenir la résolvante. Il y aura deux résolvantes de première espèce si $f_1 \neq f_2$. Si $f_2 = f_1$, les deux points focaux sont confondus sur chaque droite; la seconde équation (28) devra être remplacée par la relation

$$2f_1\,da\,db + (da\,dq + dp\,db) = 0.$$

La résolvante est intégrable par la méthode de Monge si les deux équations

$$dp + f_1\,da = 0, \qquad dq + f_1\,db = 0$$

forment un système complètement intégrable, ce qui exige que la fonction f_1 vérifie les conditions

$$(29)\quad \frac{\partial f_1}{\partial a} - f_1\frac{\partial f_1}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial b} - f_1\frac{\partial f_1}{\partial q} = 0.$$

Ces conditions expriment, il est facile de le vérifier, que le point I_1 de coordonnées $(af_1 + p, bf_1 + q, f_1)$ décrit une surface S_1, de sorte que l'un des points focaux sur chaque génératrice de la congruence cherchée est situé sur S_1. Si cette congruence n'est pas composée de tangentes à S_1, le lieu du point I_1 est une courbe Γ_1 de S_1, et la congruence demandée est formée de droites rencontrant la courbe Γ_1. Pour achever de déterminer cette congruence, il reste à exprimer que le second point focal sur chaque droite de la congruence est un point déterminé I_2 de cette droite, ce qui conduit à une équation différentielle du second ordre. On arrive au même résultat par l'application de la méthode générale. Si les conditions (29) sont satisfaites, $dp + f_1\,da$, $dq + f_1\,db$ s'expriment linéairement au moyen de deux différentielles

dy_1, dy_2; en prenant pour variables y_1, y_2, a, b, le système (27) s'écrit

$$dy_1 dy_2 = 0,$$
$$[\alpha_1 dy_1 + \alpha_2 dy_2 + (f_2 - f_1) da][\beta_1 dy_1 + \beta_2 dy_2 + (f_2 - f_1) db] = 0.$$

On tire de la première

$$y_2 = f(y_1), \qquad dy_2 = f'(y_1) dy_1,$$

et la seconde prend la forme

$$A\, dy_1\, db + B\, da\, dy_1 + (f_2 - f_1)\, da\, db,$$

A, B étant des fonctions de y_1, a, b. Si l'on prend a, y_1 pour variables indépendantes, la fonction $b = \varphi(a, y_1)$ est déterminée par l'équation

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial a} - B - (f_2 - f_1) \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 0,$$

dont l'intégration est équivalente à celle d'un système de deux équations différentielles du premier ordre.

Si la fonction f_2 satisfait aussi aux conditions

$$(30) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial a} - f_2 \frac{\partial f_2}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial b} - f_2 \frac{\partial f_2}{\partial q} = 0,$$

le second point focal I_2 est sur une autre surface (S_2), et les équations (27) peuvent être ramenées à une forme canonique qui s'intègre immédiatement

$$dF_1\, dF_2 = 0, \qquad dF_3\, dF_4 = 0,$$

F_1, F_2, F_3, F_4 étant quatre fonctions distinctes de a, b, p, q. La solution générale se compose des congruences dont les génératrices rencontrent deux courbes Γ_1, Γ_2, choisies arbitrairement, l'une sur S_1, l'autre sur S_2. Le problème admet aussi des solutions singulières, que l'on obtient en prenant les congruences de droites tangentes à une des surfaces S_1, S_2 et rencontrant une courbe Γ choisie à volonté sur la seconde surface, ou la congruence formée par les tangentes communes aux deux surfaces.

9. Considérons encore le cas plus général, où les deux équations

$$(31) \qquad dp + f_1\, da = 0, \qquad dq + f_1\, db = 0$$

admettent une seule combinaison intégrable $dF = 0$.

La fonction $F(a, b, p, q)$ doit satisfaire aux deux conditions

$$\frac{\partial F}{\partial a} - f_1 \frac{\partial F}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial b} - f_1 \frac{\partial F}{\partial q} = 0,$$

et, par suite, à l'équation du premier ordre

$$\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial F}{\partial p} = 0. \tag{32}$$

Inversement, si F est une intégrale de cette équation, les équations (31), où l'on prend

$$f_1 = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial a}}{\dfrac{\partial F}{\partial p}} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial b}}{\dfrac{\partial F}{\partial q}}, \tag{33}$$

admettent la combinaison intégrable $dF = 0$. Nous laissons de côté le cas déjà examiné où l'on aurait $f_1 - F = 0$.

La condition (32) a encore une interprétation géométrique simple. Étant donné un complexe de droites défini par la relation $F(a, b, p, q) = 0$, cherchons à quelle condition doit satisfaire la fonction F pour que ce complexe se compose de droites tangentes à une surface S. Nous supposerons que de la condition $F = 0$ on a tiré l'expression de l'un des quatre paramètres au moyen des trois autres, $q = \varphi(a, b, p)$ par exemple. Il faut que l'on puisse choisir pour z une fonction $z = f(a, b, p)$ telle que le point de coordonnées

$$z = f(a, b, p), \qquad x = az + p, \qquad y = bz + q$$

décrive une surface tangente à la droite représentée par les deux dernières équations. Il faut pour cela que tous les déterminants obtenus en prenant trois lignes quelconques du tableau

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial a} \\ \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial b} & \dfrac{\partial z}{\partial b} \\ \dfrac{\partial x}{\partial p} & \dfrac{\partial y}{\partial p} & \dfrac{\partial z}{\partial p} \\ a & b & 1 \end{vmatrix}$$

soient nuls identiquement. En tenant compte des formules

$$\frac{\partial x}{\partial a} = a\frac{\partial z}{\partial a} + z, \qquad \frac{\partial x}{\partial b} = a\frac{\partial z}{\partial b}, \qquad \frac{\partial x}{\partial p} = a\frac{\partial z}{\partial p} + 1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} = b\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial a}, \qquad \frac{\partial y}{\partial b} = b\frac{\partial z}{\partial b} + z + \frac{\partial \varphi}{\partial b}, \qquad \frac{\partial y}{\partial p} = b\frac{\partial z}{\partial p} + \frac{\partial \varphi}{\partial p},$$

ces conditions peuvent être remplacées par les suivantes : tous les déterminants obtenus en prenant trois lignes quelconques du tableau

$$\begin{vmatrix} z & \dfrac{\partial \varphi}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial a} \\ 0 & z + \dfrac{\partial \varphi}{\partial b} & \dfrac{\partial z}{\partial b} \\ 1 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial p} & \dfrac{\partial z}{\partial p} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

doivent être nuls identiquement. En associant successivement la dernière ligne à deux des autres lignes, on voit que z doit satisfaire aux deux conditions

$$z + \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0, \qquad z\frac{\partial \varphi}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0,$$

et par conséquent la fonction $\varphi(a, b, p)$ doit être une intégrale de l'équation aux dérivées partielles de premier ordre

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0. \tag{34}$$

et cette condition est suffisante.

La fonction φ étant définie par la relation $F(a, b, p, q) = 0$, la relation (34) exprime que le premier membre de l'équation (32) est nul en vertu de $F = 0$. Il s'ensuit que lorsque la fonction $F(a, b, p, q)$ est une intégrale de (32), *tous les complexes de droites définies par la relation* $F + C = 0$, *où* C *est une constante arbitraire, sont formés des droites tangentes à une surface.*

Des formules qui donnent la valeur de z, on déduit aussi que le point focal correspondant sur chaque droite est le point de contact de la droite avec l'enveloppe. En résumé, pour obtenir tous les cas où les deux équations

$$dp + f_1\,da = 0, \qquad dq + f_1\,db = 0$$

admettent une seule combinaison intégrable, *on prendra une famille de surfaces* S_1, *dépendant d'une constante arbitraire, et l'on choisira pour* I_1 *sur chaque droite le point où elle est tangente à une surface de cette famille.*

Exemples. — Soit $F = \dfrac{(bp-aq)^2}{a^2+b^2}$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{2b(bp-aq)}{a^2+b^2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = -\frac{2a(bp-aq)}{a^2+b^2},$$
$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{2b(ap+bq)(aq-bp)}{(a^2+b^2)^2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = \frac{2a(ap+bq)(bp-aq)}{(a^2+b^2)^2}.$$

La fonction F satisfait bien à l'équation (32), et la valeur correspondante de f_1 est

$$f_1 = -\frac{ap+bq}{a^2+b^2},$$

c'est la coordonnée z du pied de la perpendiculaire commune à l'axe Oz et à la droite $x = az + p$, $y = bz + q$. L'équation $F = C^2$ définit le complexe des droites tangentes au cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon C. Chaque droite de l'espace est bien tangente à l'un de ces cylindres.

La fonction

$$F = \frac{p^2+q^2+(aq-bp)^2}{a^2+b^2+1}$$

satisfait aussi à l'équation (32), et la relation $F = C^2$ exprime que la droite est tangente à la sphère de rayon C ayant son centre à l'origine.

10. Pour que le plan

$$x - az - p + \lambda(y - bz - q) = 0$$

soit un plan focal, il faut et il suffit que λ soit racine de l'équation symbolique

$$(da + \lambda\, db)(dp + \lambda\, dq) = 0 \tag{35}$$

qui se déduit de l'équation

$$(dp + f\,da)(dq + f\,db) = 0,$$

en permutant a et q, λ et f. On en déduit une suite de conclusions tout à fait analogues aux précédentes. Pour que les deux équations

$$da + \lambda\, db = 0, \qquad dp + \lambda\, dq = 0$$

admettent une combinaison intégrable, les deux équations

$$\frac{\partial F}{\partial b} - \lambda \frac{\partial F}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial q} - \lambda \frac{\partial F}{\partial p} = 0 \tag{36}$$

doivent avoir une intégrale commune qui satisfait évidemment à l'équation (32)

$$\frac{\partial F}{\partial a}\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial b}\frac{\partial F}{\partial p} = 0.$$

De toute intégrale de l'équation (32), on peut donc déduire deux équations symboliques décomposables en facteurs linéaires qui admettent la combinaison intégrale dF

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a} da + \frac{\partial F}{\partial p} dp\right)\left(\frac{\partial F}{\partial b} db + \frac{\partial F}{\partial q} dq\right), \tag{37}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial a} da + \frac{\partial F}{\partial b} db\right)\left(\frac{\partial F}{\partial p} dp + \frac{\partial F}{\partial q} dq\right). \tag{38}$$

L'interprétation géométrique est tout à fait analogue à la précédente. On considère donc une famille de surfaces S dépendant d'un paramètre; si la droite $x = az + p$, $y = bz + q$ est tangente à l'une de ces surfaces en un point M, on prendra pour plan focal le plan tangent en M à cette surface. La recherche des congruences ayant pour plan focal sur chaque génératrice le plan ainsi déterminé conduit à une équation de la forme (38).

Considérons en particulier le système formé par les équations (37) et (38) elles-mêmes, dont l'intégration donne la solution du problème suivant : on considère une famille de surfaces S_1 dépendant d'une constante arbitraire, et à chaque droite de l'espace on fait correspondre le point I_1 où cette droite touche une surface S_1 et le plan P_1 tangent à cette surface au point I_1. Trouver les congruences de droites telles que le point I_1 soit un des points focaux sur chaque génératrice de la congruence et le point P_1 un des plans focaux passant par cette droite ?

Les équations (37) et (38) peuvent encore s'écrire

$$(38')\qquad \begin{cases} dF\left(\dfrac{\partial F}{\partial a}da+\dfrac{\partial F}{\partial b}db\right)=0,\\ dF\left(\dfrac{\partial F}{\partial a}da+\dfrac{\partial F}{\partial p}dp\right)=0,\end{cases}$$

et ne dépendre que des trois formes de Pfaff dF,

$$\frac{\partial F}{\partial a}da+\frac{\partial F}{\partial b}db,\qquad \frac{\partial F}{\partial a}da+\frac{\partial F}{\partial p}dp.$$

Ce système appartient donc à la catégorie étudiée au n° 1. Les trois équations

$$dF=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial a}da+\frac{\partial F}{\partial b}db=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial a}da+\frac{\partial F}{\partial p}dp=0$$

forment un système complétement intégrable; soient $y_1=C_1$, $y_2=C_2$, $y_3=C_3$ trois intégrales premières distinctes (on peut prendre évidemment $y_1=F$) Ce système (38') peut alors s'écrire

$$dy_1(A\,dy_2+B\,dy_3)=0,\qquad dy_1(A'dy_2+B'dy_3)=0,$$

et l'on en déduit

$$dy_1\,dy_2=0,\qquad dy_1\,dy_3=0.$$

On satisfait à ces équations en prenant $y_1=C$, ou, si y_1 n'est pas constant, en posant $y_2=f(y_1)$, $y_3=g(y_1)$, f et g étant des fonctions arbitraires.

En appliquant ce résultat au problème proposé, on est conduit aisément à la solution suivante. On obtient une congruence de droites répondant à la question en prenant pour surface focale une des surfaces S_1, les droites de la congruence étant les tangentes à une famille de courbes choisies arbitrairement sur cette surface. On obtient encore une solution en prenant les congruences de droites qui rencontrent une courbe Γ choisie arbitrairement sur S_1, les droites de la congruence qui passent en un point M de cette courbe étant situées dans le plan tangent à la surface S_1 qui passe par ce point.

Laissant de côté ce cas exceptionnel, on peut se proposer de déterminer une congruence de droites, connaissant les deux points focaux sur chaque génératrice, ou les deux plans focaux passant par chaque génératrice, ou un point focal et un plan focal, ces points focaux ou ces plans focaux étant déterminés comme il vient d'être expliqué. Tous ces problèmes conduisent à l'intégration d'un système de la forme

$$(39) \qquad \Omega_1 = \omega_1\, dy_1 = 0, \qquad \Omega_2 = \omega_2\, dy_2 = 0,$$

ω_1, ω_2 étant deux formes linéaires. D'après un résultat général (n° 5), les deux résolvantes admettent une combinaison intégrable pour les équations différentielles de chaque famille de caractéristiques. On peut donc, par une transformation de contact, les ramener à la forme $s = f(x, y, z, p, q)$. Les relations $y_1 = C_1$, $y_2 = C_2$ définissent aussi des multiplicités intégrales dépendant de deux constantes arbitraires. On peut encore obtenir directement les intégrales intermédiaires de l'équation du second ordre en associant par exemple les deux relations

$$dy_1 = 0, \qquad \Omega_2 = A_{23}\, dy_2\, dy_3 + A_{24}\, dy_2\, dy_4 = 0.$$

On tire de la première $y_1 = C_1$, et, si l'on prend y_3 et y_2 par exemple pour variables indépendantes, la seconde équation devient

$$A_{23} + A_{24} \frac{\partial y_4}{\partial y_3} = 0$$

ou

$$\frac{\partial y_4}{\partial y_3} = F(C_1, y_2, y_3, y_4),$$

et l'on est conduit à une équation différentielle du premier ordre.

Exemples. — I. Supposons que l'on se donne deux familles de surfaces S_1, S_2, dépendant d'un paramètre. Sur chaque droite de l'espace on prend le point I_1 où la droite est tangente à une surface S_1 et le point I_2 où elle est tangente à une surface S_2. La recherche des congruences telles que les deux points focaux sur chaque génératrice soient les points correspondants I_1 et I_2 conduit à un système de la forme (39), dont l'intégration se ramène à celle d'une équation de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$. Les solutions particulières dont il a été question tout à l'heure ont une interprétation géométrique bien facile. On a d'abord les congruences formées des tangentes communes à une surface S_1 et à une surface S_2, qui dépendent de deux constantes arbitraires. Considérons en second lieu une surface particulière S_1 correspondant à une valeur déterminée de la constante C_1. Sur chaque surface S_2, il existe ∞^1 courbes Γ dont les tangentes sont aussi tangentes à S_1, et qui s'obtiennent par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre. Ces courbes Γ dépendent de deux paramètres; prenons ∞^1 de ces courbes arbitrairement de façon à former une surface S'. Les tangentes à ces ∞^1 courbes Γ forment une congruence dont S' est évidemment une surface focale, et dont la seconde surface focale est S_1, puisque toutes les droites de cette congruence sont tangentes à S_1. Les points focaux sur chaque droite sont donc les points I_1 et I_2.

II. Considérons une famille de quadriques homofocales S; une droite quelconque D de l'espace est tangente à deux de ces surfaces aux points I_1, I_2, et les plans tangents P_1, P_2 à ces deux surfaces aux points I_1 et I_2 sont rectangulaires.

Toute congruence ayant pour plans focaux les deux plans P_1, P_2 qui passent par cette droite est donc une congruence de normales. De plus, ces plans focaux sont conjugués par rapport aux quadriques homofocales. La recherche des congruences de normales dont les plans focaux sont conjugués par rapport à une quadrique conduit donc à un système de la forme (39) et par suite à l'intégration d'une équation du second ordre de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$. G. Darboux, qui a étudié ce problème en détail (*Leçons sur la Théorie des Surfaces*, t. II, Livre IV, Chap. XIV) a montré en effet que l'on était ramené à l'intégration de l'équation $(x-y)s = \frac{1}{2}(p-q)$.

11. Considérons encore le cas limite où les surfaces S_1 et S_2 sont rejetées à l'infini. On est alors conduit à déterminer une congruence de droites telles que la direction des deux plans focaux passant par une génératrice ne dépende que de la direction de la droite elle-même. Le système à intégrer est de la forme

$$(dp + f_1\,dq)(da + f_1\,db) = 0, \tag{40}$$

$$(dp + f_2\,dq)(da + f_2\,db) = 0, \tag{41}$$

f_1 et f_2 ne dépendant que de a et b. On peut le remplacer par le système de Pfaff

$$(42)\qquad dp + f_1\,dq = \lambda(da + f_1\,db), \qquad dp + f_2\,dq = \mu(da + f_2\,db),$$

d'où l'on tire, en prenant a et b pour variables indépendantes,

$$\frac{\partial p}{\partial a} + f_1\frac{\partial q}{\partial a} = \lambda, \qquad \frac{\partial p}{\partial b} + f_1\frac{\partial q}{\partial b} = \lambda f_1,$$

et par suite

$$\frac{\partial p}{\partial b} + f_1\frac{dq}{db} = f_1\left(\frac{\partial p}{\partial a} + f_1\frac{\partial q}{\partial a}\right).$$

On a de même

$$\frac{\partial p}{\partial b} + f_2\frac{\partial q}{\partial b} = f_2\left(\frac{\partial p}{\partial a} + f_2\frac{\partial q}{\partial a}\right),$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \frac{\partial q}{\partial b} - (f_1 + f_2)\frac{\partial q}{\partial a}, \qquad \frac{\partial p}{\partial b} = -f_1 f_2\frac{\partial q}{\partial a}$$

et l'élimination de p conduit à la résolvante de seconde espèce du système (42)

$$(43)\qquad \frac{\partial^2 q}{\partial b^2} - (f_1 + f_2)\frac{\partial^2 q}{\partial a\,\partial b} + f_1 f_2\frac{\partial^2 q}{\partial a^2} - \frac{\partial(f_1 + f_2)}{\partial b}\frac{\partial q}{\partial a} + \frac{\partial(f_1 f_2)}{\partial a}\frac{\partial q}{\partial a} = 0.$$

En prenant pour nouvelles variables indépendantes les variables caractéristiques, on obtient finalement une équation de Laplace; or ces variables caractéristiques s'obtiennent précisément en intégrant les deux équations différentielles $da + f_1\,db = 0$, $da + f_2\,db = 0$, ce qui est bien d'accord avec la théorie générale.

La géométrie explique aisément ce résultat. Considérons dans un plan P un réseau (R) de courbes planes

$$(\mathrm{R})\qquad x = f(\alpha, \beta), \qquad y = g(\alpha, \beta),$$

où α et β sont les paramètres des deux familles de courbes, et proposons-nous de trouver dans un plan parallèle un second réseau (R′)

$$(\mathrm{R}')\qquad \mathrm{X} = \mathrm{F}(\alpha, \beta), \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{G}(\alpha, \beta),$$

tels qu'aux points correspondant aux mêmes valeurs (α, β) des paramètres, les tangentes aux courbes (α) et (β) des deux réseaux soient respectivement parallèles. Il faut pour cela que l'on ait

$$\frac{G'_\alpha}{F'_\alpha} = \frac{g'_\alpha}{f'_\alpha}, \qquad \frac{G'_\beta}{F'_\beta} = \frac{g'_\beta}{f'_\beta},$$

ce qui conduit par l'élimination de G à l'équation de Laplace

$$(44) \qquad \left(\frac{g'_\alpha}{f'_\alpha} - \frac{g'_\beta}{f'_\beta}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha\,\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{g'_\alpha}{f'_\alpha}\right)\frac{\partial F}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{g'_\beta}{f'_\beta}\right)\frac{\partial F}{\partial\beta} = 0$$

pour déterminer $F(\alpha, \beta)$. Connaissant deux réseaux de courbes planes satisfaisant aux conditions précédentes, si l'on joint les points des deux plans parallèles correspondant aux mêmes valeurs des paramètres α, β, on a une congruence de droites dont les plans focaux passant par une génératrice sont déterminés par cette génératrice et les tangentes aux deux courbes du réseau qui passent par le point de rencontre de cette génératrice avec le plan P. Il suffit de supposer le plan P rejeté à l'infini pour retrouver le problème dont il est question dans ce paragraphe.

Ce problème intervient dans l'étude de la correspondance par orthogonalité des éléments. Étant donnée une surface (Σ), il résulte en effet d'un théorème de Ribaucour (voir les *Leçons sur la théorie générale des surfaces* de G. Darboux, t. IV, p. 13), et de sa réciproque, que toute surface qui correspond à (Σ) par orthogonalité des éléments est la surface moyenne d'une congruence dont les plans focaux sont déterminés par la construction suivante. Soient G une génératrice quelconque de la congruence, MN une normale à (Σ) parallèle à G. Les plans focaux de la congruence passant par la génératrice G sont perpendiculaires aux tangentes asymptotiques de la surface (Σ) au point M.

Il est clair que c'est là un cas particulier du problème général, et l'on s'explique ainsi pourquoi la solution dépend d'une équation de Laplace.

Remarque. — D'une façon générale, si f ne dépend que de l'un des couples de variables (a, p) ou (b, q), l'une des équations $dp + f\,da = 0$, $dq + f\,db = 0$ est complètement intégrable, et l'on pourrait en déduire des résultats tout à fait analogues au précédent. De même si dans l'équation (35) λ ne dépend que d'un couple de variables (a, b)

ou (p, q), l'une des équations

$$da + \lambda\, db = 0, \qquad dp + \lambda\, dq = 0$$

est complètement intégrable.

Par exemple, si f ne dépend que des variables (a, p), on démontrera aisément que l'intégration de l'équation symbolique

$$(dp + f\, da)(dq + f\, db) = 0$$

revient à la recherche des congruences telles que l'un des points focaux sur chaque génératrice soit le point de contact de cette génératrice avec un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oy, ces cylindres dépendant d'un paramètre arbitraire

$$F(x, z, C) = 0.$$

12. Quand on se propose de déterminer une congruence de normales possédant quelque propriété relative aux points focaux ou aux plans focaux, qui se traduit par une équation symbolique comme celles que nous considérons dans ce travail, on peut prendre pour résolvante l'équation (23) du n° 6. Il faut d'abord ramener à la forme canonique l'équation qui exprime que la congruence est formée de normales à une surface. Si les axes de coordonnées sont rectangulaires, il suffit de poser pour cela

$$a = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}, \qquad b = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}},$$

ce qui donne $\sqrt{a^2 + b^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}}$; on a une congruence de normales si u, v, p, q vérifient l'équation symbolique

$$du\, dp + dv\, dq = 0,$$

dont on obtient la solution générale en posant

$$p = \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial v},$$

f étant une fonction arbitraire des variables u, v. Il est quelquefois préférable d'introduire les variables de O. Bonnet en posant

$$u=\frac{1-\alpha\beta}{\alpha-\beta}, \qquad v=i\frac{1+\alpha\beta}{\alpha-\beta},$$

ce qui donne $1-u^2-v^2=\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\right)^2$, et par suite

$$a=\frac{1-\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \qquad b=i\frac{1+\alpha\beta}{\alpha+\beta}, \qquad \sqrt{1+a^2+b^2}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.$$

Les formules du changement de variables donnent ensuite

$$p=\frac{\partial f}{\partial u}=\ \ \frac{1}{2}\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\left[(\alpha^2+1)\frac{\partial f}{\partial\alpha}+(\beta^2+1)\frac{\partial f}{\partial\beta}\right],$$

$$q=\frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{i}{2}\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\left[(\alpha^2-1)\frac{\partial f}{\partial\alpha}+(\beta^2-1)\frac{\partial f}{\partial\beta}\right].$$

Il suffira de remplacer a, b, p, q par les valeurs précédentes dans l'équation symbolique qui exprime la propriété des congruences que l'on veut obtenir, et d'appliquer les règles du calcul symbolique pour parvenir à l'équation aux dérivées partielles qui détermine la fonction $f(\alpha, \beta)$. Cherchons par exemple les congruences de normales pour lesquelles le milieu des centres de courbure principaux est un point déterminé de chaque droite, ce qui conduit à une équation de la forme

$$da\,dq+dp\,db+\mathrm{F}(a, b, p, q)\,da\,db=0. \tag{45}$$

Des expressions de a, b, p, q, on tire

$$da=-\frac{(1+\beta^2)\,d\alpha+(1+\alpha^2)\,d\beta}{(\alpha+\beta)^2}, \qquad db=i\frac{(\beta^2-1)\,d\alpha+(\alpha^2-1)\,d\beta}{(\alpha+\beta)^2},$$

$$da\,db=2i\frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta)^4}\,d\alpha\,d\beta.$$

On trouve de même, en appliquant les règles de la multiplication symbolique,

$$da\,dq+dp\,db=\frac{4ik}{(\alpha+\beta)^2}(\alpha^2-\beta^2)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial\log k}{\partial\beta}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial\log k}{\partial\alpha}\frac{\partial f}{\partial\beta}\right],$$

où $k=\frac{1}{2}\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}$. L'équation (45) devient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial\log k}{\partial\beta}\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\frac{\partial\log k}{\partial\alpha}\frac{\partial f}{\partial\beta}+\frac{\mathrm{F}}{\alpha^2-\beta^2}=0, \tag{46}$$

et ne renferme qu'une dérivée du second ordre $\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\partial\beta}$. Si F est une fonction linéaire de p et q, $F = A(a, b)p + B(a, b)q + C(a, b)$, on a une équation de Laplace dont les coefficients peuvent être quelconques. Cette équation sera à invariants égaux si l'on a $\frac{\partial A}{\partial b} = \frac{\partial B}{\partial a}$. On peut alors écrire $F = \frac{\partial U}{\partial a}p + \frac{\partial U}{\partial b}q + C$; il existe une infinité de fonctions U pour lesquelles les invariants de l'équation (46) sont nuls, dont la plus simple correspond au cas où l'on se donne la développée moyenne [1].

NOTE.

Dans un article antérieur déjà cité (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. 52, 1928), j'ai montré qu'on pouvait obtenir explicitement les équations générales des congruences telles que les points focaux sur chaque génératrice soient conjugués par rapport à une quadrique. Ce problème peut être considéré comme un cas particulier d'un problème plus général qui admet aussi une solution explicite.

Soit (Σ) une surface non développable. A chaque point M de la surface faisons correspondre une droite D située dans le plan tangent en M à (Σ). Lorsque le point M décrit la surface (Σ), la droite D engendre une congruence. Soient F_1, F_2 les deux points focaux de cette congruence situés sur la droite D. *Comment faut-il prendre la droite* D *pour que ces deux points focaux soient conjugués par rapport aux points de rencontre de* D *avec les asymptotes de l'indicatrice au point* M ?

Si la surface (Σ) est une quadrique, les points de rencontre de D avec les asymptotes de l'indicatrice sont les points de rencontre de D avec cette quadrique, et le problème est identique à celui qui vient d'être rappelé.

Nous supposerons les coordonnées x, y, z d'un point M de (Σ) exprimées au moyen des paramètres α, β des lignes asymptotiques.

---

[1] On peut aussi traiter facilement toutes ces questions en se servant des formules données par G. Darboux dans ses *Leçons sur la théorie des Surfaces* (t. I, 1^{re} édition, p. 245, 2^e édition, p. 297).

Ces fonctions vérifient, comme il est bien connu, les deux relations

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial z}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} \end{vmatrix} = 0;$$

on peut donc déterminer quatre fonctions a, b, a_1, b_1, telles que l'on ait à la fois

$$(47) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} = a\frac{\partial x}{\partial \alpha} + b\frac{\partial x}{\partial \beta}, & \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} = a\frac{\partial y}{\partial \alpha} + b\frac{\partial y}{\partial \beta}, & \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} = a\frac{\partial z}{\partial \alpha} + b\frac{\partial z}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} = a_1\frac{\partial x}{\partial \alpha} + b_1\frac{\partial x}{\partial \beta}, & \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} = a_1\frac{\partial y}{\partial \alpha} + b_1\frac{\partial y}{\partial \beta}, & \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} = a_1\frac{\partial z}{\partial \alpha} + b_1\frac{\partial z}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Une droite D du plan tangent en M à (Σ) est définie par ses deux points d'intersection avec les tangentes asymptotiques, dont on peut écrire les coordonnées

$$(48) \quad \begin{cases} x_1 = x + \lambda\frac{\partial x}{\partial \alpha}, & y_1 = y + \lambda\frac{\partial y}{\partial \alpha}, & z_1 = z + \lambda\frac{\partial z}{\partial \alpha}, \\ x_2 = x + \mu\frac{\partial x}{\partial \beta}, & y_2 = y + \mu\frac{\partial y}{\partial \beta}, & z_2 = z + \mu\frac{\partial z}{\partial \beta}, \end{cases}$$

λ et μ étant deux fonctions quelconques de α, β. Cette droite D est donc représentée par les équations

$$(49) \quad \frac{X - x - \lambda\frac{\partial x}{\partial \alpha}}{X - x - \mu\frac{\partial x}{\partial \beta}} = \frac{Y - y - \lambda\frac{\partial y}{\partial \alpha}}{Y - y - \mu\frac{\partial y}{\partial \beta}} = \frac{Z - z - \lambda\frac{\partial z}{\partial \alpha}}{Z - z - \mu\frac{\partial z}{\partial \beta}} = \rho.$$

Les valeurs de ρ qui correspondent aux deux points focaux sont racines d'une équation du second degré, qui s'écrit sous forme de déterminant

$$\begin{vmatrix} (1-\rho)\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\lambda\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) - \rho\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\mu\frac{\partial x}{\partial \beta}\right), & \dots, \\ (1-\rho)\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\lambda\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) - \rho\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\mu\frac{\partial x}{\partial \beta}\right), & \dots \\ \lambda\frac{\partial x}{\partial \alpha} - \mu\frac{\partial x}{\partial \beta}, & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

la seconde et la troisième colonne se déduisant de la première en y remplaçant x par y, puis par z. En tenant compte des formules (47), ce déterminant peut encore s'écrire

$$\begin{vmatrix} \left(1-\rho+\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha}+\lambda a\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\left(\lambda b-\rho\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}\right)\frac{\partial x}{\partial\beta}-\rho\mu\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}, & \ldots \\ \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}-\rho\mu a_1\right)\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\left(1-\rho-\rho\frac{\partial\mu}{\partial\beta}-\rho\mu b_1\right)\frac{\partial x}{\partial\beta}+\lambda\frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta}, & \ldots \\ \lambda\frac{\partial x}{\partial\alpha}-\mu\frac{\partial x}{\partial\beta}, & \ldots \end{vmatrix}=0.$$

Ce déterminant est la somme de quatre déterminants partiels qui contiennent en facteur le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial\alpha} & \frac{\partial y}{\partial\alpha} & \frac{\partial z}{\partial\alpha} \\ \frac{\partial x}{\partial\beta} & \frac{\partial y}{\partial\beta} & \frac{\partial z}{\partial\beta} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \frac{\partial^2 y}{\partial\alpha\,\partial\beta} & \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha\,\partial\beta} \end{vmatrix};$$

en supprimant ce facteur et en égalant à zéro le coefficient de ρ, on obtient la condition

$$\lambda^2\frac{\partial\mu}{\partial\alpha}-\mu^2\frac{\partial\lambda}{\partial\beta}=0, \tag{50}$$

qui peut encore s'écrire

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\partial\beta}=\frac{\partial\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\partial\alpha}. \tag{51}$$

On en tire immédiatement

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{\partial f}{\partial\alpha},\qquad \frac{1}{\mu}=\frac{\partial f}{\partial\beta}, \tag{52}$$

$f(\alpha, \beta)$ étant une fonction arbitraire de α, β. Il suffit de remplacer λ et μ par ces expressions dans les formules (49) pour avoir les équations de la droite D située dans le plan tangent en M.

Remarque. — L'équation (51) peut s'écrire symboliquement

$$d\left(\frac{1}{\lambda}\right)d\alpha+d\left(\frac{1}{\mu}\right)d\beta=0.$$

ce qui est bien d'accord avec le résultat rappelé au début de ce paragraphe.

La solution analytique précédente peut être remplacée par une construction géométrique simple. En même temps que (Σ), considérons la surface (Σ') représentée par les équations

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = z + \varphi(\alpha, \beta);$$

le plan tangent a pour équation

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z - \varphi \\ \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial z}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \beta} & \dfrac{\partial y}{\partial \beta} & \dfrac{\partial z}{\partial \beta} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta} \end{vmatrix} = 0$$

et il rencontre la tangente asymptotique

$$X = x + \lambda \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \qquad Y = y + \lambda \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \qquad Z = z + \lambda \frac{\partial z}{\partial \alpha},$$

en un point pour lequel on a

$$\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \varphi = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda = \frac{1}{\dfrac{\partial}{\partial \alpha} \log\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)}.$$

Il rencontre de même la seconde tangente asymptotique

$$X = x + \mu \frac{\partial x}{\partial \beta}, \qquad Y = y + \mu \frac{\partial y}{\partial \beta}, \qquad Z = z + \mu \frac{\partial z}{\partial \beta},$$

en un point pour lequel on a $\mu = \dfrac{1}{\dfrac{\partial}{\partial \beta} \log\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)}$. Il suffit de poser $f = \log\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)$ pour retrouver les formules (52). On peut donc énoncer le résultat sous la forme suivante.

On fait correspondre les points de (Σ) *et d'une autre surface arbitraire* (Σ') *qui sont situés sur une parallèle à une direction fixe et l'on prend l'intersection des plans tangents aux points correspondants: On obtient ainsi une congruence telle que les points focaux de chaque génératrice* *soient conjugués par rapport aux points de rencontre de cette génératrice avec les asymptotes de l'indicatrice en* M *à* (Σ), et on les obtient toutes de cette façon.

Les surfaces (Σ), (Σ') jouant le même rôle dans cette construction, les points focaux sont aussi conjugués par rapport aux asymptotes de l'indicatrice à (Σ').

Le problème dont il s'agit étant de nature projective, on peut remplacer cette construction par la suivante; on fait correspondre les points de (Σ) et d'une autre surface arbitraire (Σ') qui sont sur une droite passant par un point fixe, et l'on prend l'intersection des plans tangents aux points correspondants.

En transformant par dualité la proposition qui précède, on obtient le théorème suivant : « On fait correspondre les points M, M' de deux surfaces (Σ), (Σ') de façon que la droite d'intersection des plans tangents en ces deux points soit située dans un plan fixe P. Les droites MM' forment une congruence dont les développables découpent sur (Σ) et (Σ') deux réseaux conjugués. » Cette propriété est bien connue (G. Darboux, t. II, p. 233), mais on voit de plus qu'en prenant arbitrairement la surface (Σ') on obtient toutes les congruences dont les développables découpent sur (Σ) un réseau conjugué.

Inversement, cette dernière propriété peut être démontrée directement, et elle entraîne la proposition que nous avons démontrée d'abord. Soient en effet (Σ) une surface quelconque, (R) un réseau conjugué situé sur cette surface. D'après un théorème bien connu de Peterson, il existe une infinité de surfaces (Σ') sur lesquelles il existe un réseau conjugué (R'), les tangentes aux courbes de (R') étant respectivement parallèles aux tangentes aux courbes du réseau (R), aux points correspondants M, M' des deux surfaces.

Il est clair que la droite MM' engendre une congruence dont les développables découpent les réseaux (R) et (R') sur les surfaces (Σ) et (Σ'). Il suffit d'une transformation par polaires réciproques pour retrouver la première proposition.