Annales scientifiques de l'É.N.S.

Georges Valiron

Sur les familles normales de fonctions analytiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 47 (1930), p. 79-92
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1930_3_47__79_0>

SUR LES

FAMILLES NORMALES DE FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR M. GEORGES VALIRON

Le but de cette Note est d'apporter quelques compléments à des théorèmes connus, dus à divers auteurs, et concernant les familles normales ou quasi-normales de fonctions analytiques. Elle débute par des propriétés des familles quasi-normales d'ordre fini (n^{os} 1 et 2), continue par une généralisation nouvelle du théorème de Schottky à une classe de fonctions algébroïdes finies (n° 3) et se termine par l'extension aux familles normales générales d'une proposition sur l'oscillation donnée par Fatou, puis par MM. Mandelbrodjt et H. Cartan pour des familles plus particulières (n° 4).

1. On sait qu'étant donnée une famille quasi-normale d'ordre total fini de fonctions $f(z)$ méromorphes dans un domaine D, il existe un nombre N(D′) bornant le nombre des zéros de $f(z) - a$ dans tout domaine D′ complètement intérieur à D pourvu que a ne soit pa fonction limite des fonctions de la famille [si a est infini, il s'agit des pôles de $f(z)$] (¹). Nous considérerons ici une *famille quasi-normale d'ordre fini* q *dans un domaine* D, c'est-à-dire dont les suites convergentes irrégulières possèdent q points irréguliers au plus dans D. En supposant D borné nous montrerons que :

I. *Si* a *n'est pas fonction limite des suites convergentes régulières ou irrégulières de la famille, à* ε *donné et à tout domaine* D′ *complè-*

(¹) Voir le livre de M. Montel : *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques* et le fascicule 38 du *Mémorial des Sciences mathématiques*.

tement intérieur à D *correspond un nombre* N(D′, ε) *tel que, chaque fonction de la famille prend au plus* N(D′, ε) *fois la valeur a dans* D′ *privé de* q *cercles de rayon* ε *(ces cercles dépendent de la fonction envisagée).*

Si D n'est pas borné, on a un énoncé analogue en prenant domaines et cercles exceptionnels sur la sphère de Riemann.

Supposons a infini. Traçons dans D un quadrillage de côtés ε' donné et considérons uniquement les carrés complets ou incomplets formés par les points de ce quadrillage qui appartiennent à D′. Nous dirons que deux des carrés sont adjacents si ces carrés, complétés s'il y a lieu, ont un sommet ou un côté commun. Soit $f(z)$ une fonction de la famille. Marquons le carré (ou l'un des carrés), $C(1, f)$, qui contient le plus de pôles de $f(z)$; puis, parmi les carrés restants et non adjacents à $C(1, f)$, marquons celui qui contient le plus de pôles, soit $C(2, f)$; puis parmi les carrés non adjacents à ceux déjà marqués nous marquons celui qui contient le plus de pôles de $f(z)$, et ainsi de suite. Au bout de $q+1$ opérations nous aurons marqué $q+1$ carrés $C(1, f), \ldots, C(q+1, f)$. Soit $p(f)$ le nombre des pôles contenus dans $C(q+1, f)$. *Si $p(f)$ est borné, la proposition est établie.* Supposons le contraire : il existe une suite de fonctions $f(z, n)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, pour lesquelles $p[f(z; n)] > n$. On peut extraire de cette suite une autre suite pour laquelle les $q+1$ carrés marqués sont les mêmes pour chaque fonction de la suite, puis extraire de cette suite une autre qui converge uniformément dans D privé de q points au plus. Cette suite converge uniformément vers une fonction méromorphe ou vers une constante finie dans l'un au moins des carrés marqués et sur sa frontière, ce qui est impossible puisque dans ce carré le nombre des pôles des fonctions de la suite croît indéfiniment. L'hypothèse que $p(f)$ ne serait pas borné est absurde et la proposition est établie.

Cette proposition peut se compléter par d'autres analogues à celles données par M. Ostrowski pour les familles normales [1]. On peut aussi généraliser la proposition XXI que j'ai donnée dans le Mémorial.

---

[1] *Math. Zeitschrift*, 23, 1925.

Considérons la famille $f(z)$ quasi-normale d'ordre q dans un domaine D et soient a, b, c, d quatre nombres distincts. Examinons les zéros des fonctions

$$f(z)-a, \quad f(z)-b, \quad f(z)-c, \quad f(z)-d.$$

Si D' est complètement intérieur à D nous introduisons le quadrillage précédent et désignons par μ le nombre des carrés entiers ou partiels. Portons notre attention sur le nombre des zéros des quatre fonctions précédentes dans chaque carré (frontière comprise comme ci-dessus), nous avons quatre nombres pour chaque carré. Parmi les 4μ nombres ainsi définis il y en a un qui est supérieur ou égal à tous les autres; s'il est relatif à $f(z)-x$ ($x=a$ ou b ou c ou d), nous marquons x le carré correspondant. Nous recommençons cette opération avec les $4\mu-1$ nombres restants, etc. Au bout de s opérations, nous avons marqué certains carrés, distincts ou confondus, adjacents ou non. Soit alors $\nu(x, s)$ le nombre (aussi grand que possible) des carrés non adjacents qui sont marqués d'une autre lettre que x, et soit $\nu(s)$ le plus petit de ces quatre nombres $\nu(x, s)$. Nous poursuivons nos opérations tant que $\nu(s)$ est inférieur ou égal à q. A ce moment, il existe une lettre x et un groupe de q carrés marqués non adjacents, marqués d'une autre lettre que x et tel que tout carré non adjacent à ceux-ci ne soit marqué que de la lettre x. En outre, si nous marquons encore un carré, il sera marqué d'une lettre y autre que x, contiendra $p(f)$ zéros de $f(z)-y$, et formera avec les q carrés envisagés un système de $q+1$ carrés non adjacents : il existera alors un système de $q+1$ carrés au moins, non adjacents, chacun d'eux contenant au moins $p(f)$ zéros de l'une des trois fonctions

$$f(z)-a, \quad f(z)-b, \quad f(z)-c$$

et trois autres systèmes analogues relatifs aux trois autres groupements de nos quatre fonctions.

Je dis que $p(f)$ est borné. Sinon on pourrait trouver une suite $f(z; n)$ de fonctions de la famille pour laquelle $p[f(z; n)]$ croîtrait indéfiniment et qui convergerait uniformément dans D privé de q points au plus. Ces q points seraient dans q carrés du quadrillage (au sens large), le nombre des points où $f(z; n)$ prendrait l'une des trois valeurs a, b, c ne serait pas borné dans l'un des carrés non adjacents à ceux-ci, la fonction limite serait l'un des nombres a, b, c, par exemple a. Mais alors en utilisant le groupement b, c, d on trouverait que la fonction limite est l'un de ces nombres, d'où une contradiction. Ainsi $p(f)$ est borné, les fonctions $f(z)-y$, $y \neq x$ auront moins de $\mu p(f)$ zéros à l'extérieur des q carrés envisagés et de ceux qui leur sont adjacents. Donc :

II. *Si une famille $f(z)$ est quasi-normale d'ordre q dans un domaine sphérique* D, *à tout système de quatre nombres distincts a, b, c, d, à tout nombre ε donné et à tout domaine* D' *complètement intérieur à* D *correspond un nombre* $N(D', \varepsilon, a, b, c, d)$ *qui limite le nombre des zéros de trois au moins des fonctions*

$$f(z)-a, \quad f(z)-b, \quad f(z)-c, \quad f(z)-d,$$

dans D' *privé de q cercles de rayon ε, cercles qui dépendent de la fonction $f(z)$ envisagée.*

Cette condition nécessaire pour qu'une famille soit quasi-normale d'ordre q n'est pas suffisante. Par exemple, $F(Z)$ étant une fonction entière possédant une infinité de zéros et $F(Z; n)$ le polynome formé par les n premiers termes de son développement de Taylor autour de l'origine, la famille des fractions rationnelles

$$n F\left(\frac{1}{z}; n\right)$$

prend moins de $N(r)$ fois trois valeurs finies à l'extérieur d'un cercle de centre origine et rayon r et n'est pas quasi-normale à l'origine. On voit aisément que les fonctions satisfaisant à la condition donnée dans l'énoncé II jouissent de la propriété suivante : de toute suite de fonctions de la famille on peut en extraire une autre qui converge uniformément dans D privé de points qui n'admettent que q points limites au plus intérieurs à D, ces points exclus formant d'ailleurs une suite dénombrable.

2. Dans l'ordre d'idées précédent on peut obtenir une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille soit quasi-normale d'ordre fini en utilisant l'égale continuité sphérique de M. Ostrowski.

III. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de fonctions $f(z)$ méromorphes dans un domaine sphérique* D *y soit quasi-normale d'ordre q est que, à tout domaine* D′ *complètement intérieur à* D *et à tout système de deux nombres positifs ε, ε' donnés, corresponde un nombre $\eta(D', \varepsilon, \varepsilon')$ tel que, pour toute fonction $f(z)$, on ait*

$$|f(z), f(z')| < \varepsilon,$$

si

$$|z, z'| < \eta(D', \varepsilon, \varepsilon'),$$

dès que z et z' appartiennent à D′ *privé de q cercles de rayon ε'* [*ces cercles dépendent de $f(z)$*].

Montrons que la condition est nécessaire. Considérons sur la sphère un *quadrillage* de côtés $\leqq \varepsilon''$, prenons les carrés ou portions de carrés empiétant sur D′ et définissons toujours de la même façon les carrés adjacents. Soit $f(z)$ une fonction de la famille, elle est méromorphe, donc sphériquement continue dans D′. Si z est dans un des carrés, nous considérons le point z' de D′ tel que la distance sphérique $|f(z), f(z')|$ soit égale à ε et dont la distance sphérique à z est minimum. Si z' n'existe pas, c'est-à-dire si $|f(z), f(z')| < \varepsilon$ quel que soit z' dans D′, nous attribuerons au minimum considéré la valeur π maximum de la distance sphérique de deux points. z se déplaçant dans un carré ou sur sa frontière le minimum en question possède une borne inférieure m. Nous marquons alors le carré dans lequel m est minimum, puis parmi les carrés non adjacents celui où m est minimum, etc. Soit $m(f)$ la valeur de m dans le $(q+1)^{\text{ième}}$ carré marqué. Si les nombres $m(f)$ sont bornés inférieurement, cette borne fournit le nombre $\eta(D', \varepsilon, \varepsilon')$, le lien entre ε'' et ε' dépendant de la réalisation effective du quadrillage de la sphère; la condition est bien nécessaire.

Montrons qu'il est impossible que les nombres $m(f)$ ne soient pas bornés inférieurement. Car, il existerait alors une suite infinie $f(z; n)$ pour laquelle $m[f(z; n)]$ serait inférieur à $\frac{1}{n}$; on pourrait en extraire une autre pour laquelle les carrés marqués pour chaque fonction seraient les mêmes, puis une autre $f(z; n')$ uniformément convergente dans D′ privé de q points au plus. La convergence uniforme vers une fonction méromorphe devrait avoir lieu dans l'un de ces carrés marqués, les $f(z; n')$ devraient y être également continues, ce qui est impossible puisque $m[f(z; n')]$ tend vers zéro.

Montrons que la condition est suffisante. Soit $f(z; n)$ une suite de fonctions de la famille; on peut en extraire une suite également continue donc normale dans D' privé de q cercles de rayon $2\varepsilon'$, puis en extraire une autre $f[z; n(D', \varepsilon')]$ uniformément convergente dans D' privé de q cercles de rayons $3\varepsilon'$. On peut alors prendre une suite de domaines D' et une suite correspondante de nombres ε' tels que D' tende vers D et ε' vers zéro. A chacun correspond une suite $f[z; n(D', \varepsilon')]$ extraite de celle relative au domaine précédent, la suite diagonale converge uniformément dans D privé de q points.

3. G. Rémoundos, puis M. Montel [1] ont étendu les théorèmes de MM. Landau et Schottky aux fonctions algébroïdes dans un cercle; ils ont obtenu des énoncés qui font intervenir les valeurs de toutes les branches au centre du cercle. Il serait nécessaire dans les applications d'avoir des énoncés ne faisant intervenir que la valeur de l'une des branches au centre du cercle. Je n'ai pu parvenir actuellement à un énoncé satisfaisant dans le cas général et me bornerai à établir ici une proposition particulière qui montre bien le genre de résultats que l'on peut rechercher dans cette voie.

Considérons une fonction $u(z)$ algébroïde et finie dans le cercle $|z| < 1$, c'est-à-dire satisfaisant à une équation de la forme

$$u^\nu + u^{\nu-1} f_{\nu-1}(z) + \ldots + f_0(z) = 0,$$

où les $f(z)$ sont des fonctions holomorphes dans le cercle $|z| < 1$. Nous supposerons que $u(z)$ ne prend pas les valeurs 0 et 1 dans ce cercle et que la distance de deux points de ramification (distincts dans le plan simple) est au moins égale à un nombre fixe d. Il s'ensuit que le nombre des points de ramification distincts dans le plan simple est au plus égal à $p = p(d)$. *Nous introduirons la famille des fonctions $u(z)$ de cette espèce dont une des branches a une valeur donnée $u(0)$ à*

---

[1] Rémoundos, *Acta math.*, t. 37, 1914; *Annali di math.*, t. 23, 1914, et *C. R. Acad. Sc.*, t. 170 et 171, 1920; Montel, *loc. cit.*

l'origine. Prolongeons cette branche dans un cercle $|z| < r < 1$, nous obtenons la fonction $u(z)$ *restreinte à ce cercle;* elle peut avoir moins de ν branches. Soit $u(z; n)$ une suite de nos fonctions restreintes au cercle $|z| < r' < 1$, et soit $r < r'$. Si z_0 est un point limite de points de ramification des $u(z; n)$, on peut extraire de cette suite une autre suite dont chaque fonction possède un point de ramification et un seul dans le cercle $|z - z_0| < \alpha$, α étant inférieur à $\frac{1}{4}d$ et à $\frac{r'-r}{3p}$. Si les points de ramification des fonctions de cette nouvelle suite ont un autre point limite z_1, on recommence la même opération. Au bout de p opérations au plus, on arrive à une suite extraite $u(z; n')$ dont les points de ramification appartenant à $|z| < r'$ sont dans p cercles au plus de rayon α, cercles que j'appellerai *cercles exclus,* ces cercles exclus ne se coupent pas et chacun d'eux ne contient qu'un seul point de ramification de chaque fonction. Dans un cercle C appartenant à $|z| < r$ et extérieur aux cercles exclus, chaque branche d'une $u(z; n')$ est holomorphe et ne prend pas les valeurs 0 et 1; l'ensemble de ces branches est normal, on peut en extraire une suite $u(z; n'')$ dont les branches, restreintes à $|z| < r$, convergent uniformément vers une fonction $U(z, C)$ qui est holomorphe dans C ou bien constante, l'infini compris.

On peut recommencer avec la suite de ces branches prolongées dans un cercle C' coupant C et ainsi de suite. Au bout d'un nombre fini d'opérations on arrive à une suite $u(z, n''')$ dont chaque branche ainsi prolongée converge uniformément vers une fonction $U(z)$ dans un domaine D donné aussi voisin que l'on veut du cercle $|z| < r'$ privé des cercles exclus. $U(z)$ est la fonction limite unique des $u(z; n''')$ restreintes à $|z| < r$. Si $U(z)$ est finie et si Γ est une courbe de D entourant un cercle exclu ou un groupe de ces cercles, ces diverses branches des $u(z; n''')$ sont uniformément bornées sur Γ, donc aussi à l'intérieur en vertu du principe du module maximum; en particulier ces branches des $u(z, n''')$ sont bornées dans un cercle $|z| < r''$, r'' étant compris entre r et r'; il en est *a fortiori* de même des branches des $u(z; n''')$ restreintes au cercle $|z| < r$. Si $U(z)$ est la constante infinie, on peut raisonner sur les fonctions $\frac{1}{u(z, n''')}$ et il en résultera que les diverses branches des fonctions $u(z; n''')$ restreintes au cercle $|z| < r$ auront toutes leur module supérieur à un nombre donné arbitrairement grand à partir d'une valeur de n'''. Ceci est impossible puisque l'une des branches de chaque fonction est égale à $u(0)$ pour $z = 0$. La fonction $U(z)$ est nécessairement finie.

Il s'ensuit que les fonctions $u(z)$ de la famille considérée, restreintes à un cercle $|z| < r < 1$, y ont leur module inférieur à un nombre fixe $\theta[u(0), r, d]$. Sinon il existerait une suite de ces fonctions $u(z; n)$ et une suite de points correspondants z_n, $|z_n| \leqq r$, telles que $|u(z_n; n)| > n$ et d'après ce qui précède on pourrait extraire de cette suite prolongée dans un cercle $|z| < r'$, $r' > r$, une autre suite dont les modules convergeraient nécessairement vers l'infini. On arrive ainsi à cette proposition qui généralise le théorème de Schottky :

IV. *Si la fonction algébroïde $u(z)$ à ν branches au plus est partout finie dans le cercle $|z| < 1$, n'y prend pas les valeurs 0 et 1, et si la distance de deux points de ramification est au moins égale à d, les valeurs de $u(z)$ prolongée à partir de $u(0)$ dans le cercle $|z| < r < 1$ vérifient l'inégalité*

$$|u(z)| < \theta[u(0), r, d, \nu],$$

et si $|u(0)| < A$, on a

$$|u(z)| < \theta_1(A, r, d, \nu).$$

L'hypothèse que $u(z)$ ne prend pas les valeurs 0 et 1 peut être remplacée par d'autres assurant comme celle-ci que les suites $u(z; n)$ introduites plus haut sont normales; on pourra supposer par exemple que les $u(z)$ ne s'annulent pas et qu'elles prennent moins de q fois la valeur 1.

L'hypothèse faite sur la distance des points de ramification doit pouvoir être remplacée par celle-ci : le nombre des points de ramification est moindre qu'un nombre donné p [1]. L'exemple

$$\frac{[e^{kz}+1]^{\frac{1}{\nu}} - 1}{-2}$$

met en évidence le fait connu que, dès que le nombre des points de ramification n'est plus borné, l'hypothèse de l'existence de deux

[1] Voir la Note de la page 92.

valeurs exceptionnelles seulement ne suffit plus pour entraîner le théorème de Schottky.

L'énoncé IV fournit des bornes pour les coefficients de l'équation définissant $u(z)$; si la dérivée à l'origine de l'un de ces coefficients $f_j(z)$ est donnée, on pourra énoncer un théorème du genre de celui de M. Landau comme le faisait Rémoundos. Mais supposons que $u'(z)$ soit aussi partout finie, alors elle est aussi bornée par une fonction de $u(0)$, r et d, et il en est aussi de même des coefficients de l'équation algébrique qu'elle vérifie. Si en outre on donne $u'(0) \neq 0$, le module à l'origine de l'un de ces coefficients est borné inférieurement, on peut appliquer à ce coefficient le théorème de Landau. Par suite, *il existe un nombre*

$$R = R[u(0), u'(0), \nu, d],$$

tel que les fonctions algébroïdes à ν branches dont les points de ramification sont à des distances mutuelles au moins égales à d, dont une branche prend la valeur $u(0)$ à l'origine, sa dérivée y étant égale à $u'(0)$ et qui sont finies ainsi que leur dérivée dans le cercle $|z| < R$, y prennent l'une des valeurs 0 ou 1.

Le théorème sur le recouvrement que j'ai déduit du théorème de Schottky ([1]) s'applique aux fonctions algébroïdes à ν branches dont les points de ramification sont à des distances mutuelles supérieures à d : *si $u(0) = 0$, les valeurs couvertes par le point $Z = u(z)$ comprennent le cercle*

$$|Z| < \frac{M(r, u)}{3\theta_1\left[\frac{\pi}{\varepsilon}, \frac{r}{R}, d\right]}, \qquad (r < R),$$

à l'exception au plus d'un cercle vu de l'origine sous l'angle donné ε. $M(r, u)$ désigne le maximum du module des branches de $u(z)$ pour $|z| = r$. Il s'ensuit en particulier que le théorème de M. Hadamard sur la partie réelle s'étend à ce genre de fonctions : si $A(r, u)$ est le maximum de la partie réelle des diverses branches de $u(z)$ pour $|z| = r$, le rapport de $M(r, u)$ à $A(R, u)$ est borné par une fonction de $\frac{r}{R}$ et d (on suppose $r < R$).

([1]) *C. R. Acad. Sc.*, t. 183, 1926.

Enfin on voit aisément que si $u(z)$ est algébroïde finie autour du point à l'infini qui n'est pas simplement point ordinaire ou pôle ou point critique algébrique, et si les points de ramification étant rangés par ordre de modules croissants et z_n étant le $n^{\text{ième}}$ on a

$$\varliminf_{n=\infty} \left| \frac{z_{n+1}-z_n}{z_n} \right| > 0,$$

les théorèmes de M. Julia s'appliquent : *il existe notamment une suite de cercles vus de l'origine sous un angle donné aussi petit que l'on veut et tels que, dans toute suite infinie extraite de celle-ci, $u(z)$ prend une infinité de fois toute valeur sauf une au plus.*

4. Dans sa Thèse ([1]) M. H. Cartan a démontré la proposition suivante :

Si $f(z)$ est holomorphe et de module inférieur à 1 pour $|z| < 1$, à $r < 1$ et à γ donnés correspond un nombre A tel que l'on ait

$$\frac{\log|f(z')|}{\log|f(z)|} < A,$$

pour tout couple de points z, z' appartenant au cercle $|z| < r$ et extérieurs à des cercles dont la somme des rayons est moindre que γ.

On peut obtenir une proposition analogue relative à une fonction méromorphe dans le cercle $|z| < 1$ et appartenant à une famille normale $\mathcal{F}$. Considérons le cercle $|z| < r < 1$. Si dans le cercle

$$2|z| < 1 + r, \quad |f(z)| < 1,$$

le théorème de M. Cartan s'applique : si $M(r)$ et $m(r)$ désignent le maximum et le minimum de $f(z)$ dans le cercle $|z| < r$ et à l'extérieur de cercles dont la somme des rayons est γ, on a

$$M(r) < m(r)^{\alpha}, \tag{1}$$

α qui correspond au nombre $\frac{1}{A}$, A étant le nombre figurant dans

---

([1]) *Annales de l'École Normale*, t. 45, 1928.

l'énoncé de M. Cartan, est inférieur à 1. Si pour

$$2|z| < 1+r, \qquad |f(z)| > 1,$$

on aura dans des conditions analogues

$$\text{(2)} \qquad M(r) < m(r)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Considérons maintenant les fonctions de la famille pour lesquelles il existe à la fois dans le cercle

$$2|z| < 1+r$$

des points où

$$|f(z)| \leqq 1,$$

et des points où

$$|f(z)| \geqq 1.$$

o et ∞ ne peuvent être fonctions limites des suites convergentes de fonctions de cette famille, une fonction de cette famille possède au plus $n(\mathcal{F}, r)$ zéros et pôles dans le cercle

$$2|z| < 1+r.$$

Je dis que si l'on entoure les zéros et les pôles de $f(z)$ contenus dans ce cercle de petits cercles ayant pour centres ces points et pour rayon commun un nombre ε inférieur à $\frac{1}{4}(1-r)$ et tel que

$$n(\mathcal{F}, r)\,\varepsilon < \gamma,$$

dans le domaine $D(f)$ obtenu en retranchant ces petits cercles du cercle $|z| < r$, le rapport $M(r) : m(r)$ est borné par un nombre ne dépendant que de γ, r et $\mathcal{F}$. Sinon il existerait une suite de fonctions $f(z; n)$ pour lesquelles ce rapport tendrait vers l'infini ; on en extrairait une suite $f(z; n')$ uniformément convergente dont la fonction limite $F(z)$ ne serait ni o ni ∞ et dont les zéros ou pôles seraient par suite les points limites de ceux des $f(z; n')$. En entourant les pôles et zéros de $F(z)$ appartenant à

$$|z| < \frac{1}{2}(1+r),$$

de cercles de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ et en excluant ces cercles, on obtiendrait un domaine D qui renfermerait tous les domaines $D[f(z; n')]$ dès que n' serait assez grand. Dans D le rapport du maximum de $|F(z)|$ à son minimum serait borné, et la convergence des $f(z; n')$ étant uniforme, le rapport $M(r) : m(r)$ devrait y être aussi borné pour les $f(z; n')$ de rang assez grand, ce qui contredit l'hypothèse faite. On obtient ainsi la proposition suivante qui généralise un théorème de Fatou (¹) :

V. *Si la fonction $f(z)$ appartient à une famille normale $\mathcal{F}$ de fonctions méromorphes dans $|z| < 1$ n'admettant pas 0 et ∞ pour fonctions limites de ses suites convergentes, à $r < 1$ et à γ donnés correspond un nombre $K(r, \gamma, \mathcal{F})$, tel que, si z et z' appartiennent au cercle $|z| < r$ et sont extérieurs aux cercles de mêmes rayons ayant pour centres les pôles et les zéros de $f(z)$ et pour somme de leurs rayons γ, on a*

$$\left|\frac{f(z)}{f(z')}\right| < K(r, \gamma, \mathcal{F}).$$

En combinant cette proposition avec les conséquences (1) et (2) de celle de M. H. Cartan, on arrive à cet énoncé général :

VI. *Si la fonction $f(z)$ appartient à une famille $\mathcal{F}$ de fonctions méromorphes normale pour $|z| < 1$, à $r < 1$ et γ donnés correspondent un nombre*

$$\alpha = \alpha(r, \gamma),$$

et un nombre

$$K = K(r, \gamma, \mathcal{F}),$$

tels que $M(r)$ et $m(r)$ désignant les maximum et minimum de $|f(z)|$ dans le domaine constitué par le cercle $|z| < 1$ privé de certains cercles dont la somme des rayons est inférieure à γ, on ait

$$M(r) < K\left[m(r)^{\alpha} + m(r)^{\frac{1}{\alpha}}\right].$$

Cet énoncé s'étend évidemment au cas où l'on remplace le cercle

(¹) *Bulletin de la Société math.*, t. 48, 1920, p. 232. On peut comparer cet énoncé à un théorème de M. Ostrowski (*loc. cit.* et *Mémorial*, fasc. 38, th. XXIV). M. H. Cartan à qui j'avais communiqué une démonstration plus compliquée que celle donnée ici de la proposition VI a attiré mon attention sur l'énoncé V dans une lettre de décembre 1928.

$|z| < 1$ par un domaine fini D et le cercle $|z| < r$ par un domaine D′ complètement intérieur à D : à γ donné correspondent

$$K = K(D, D', \gamma, \mathcal{F})$$

et

$$\alpha = \alpha(D, D', \gamma, \mathcal{F}),$$

tels que $M(D')$ et $m(D')$ étant les maximum et minimum de $|f(z)|$ dans D′ privé d'une suite de cercles dont la somme des rayons est au plus γ, on a

$$M(D') < K\left[m(D')^{\alpha} + m(D')^{\frac{1}{\alpha}}\right]. \tag{3}$$

Cette inégalité renseigne sur le module d'une fonction de la famille dans un domaine D″ complètement intérieur à D lorsqu'on suppose son module très petit sur un ensemble convenable. Les fonctions de la famille sont en effet également continues dans D′ complètement intérieur à D mais contenant D″ et sa frontière, leur oscillation sphérique entre deux points z et z' de D′ est moindre qu'un nombre β donné si la distance de ces deux points est moindre qu'un nombre γ qu'il est loisible de supposer inférieur au quart de la plus courte distance des frontières de D′ et D″. Si sur un ensemble de points de D″ qui ne peut être enfermé dans une suite de cercles dont la somme des rayons est γ, le module de $f(z)$ est moindre que $\varepsilon < 1$, (3) montre que l'on aura

$$|f(z)| < 2K\varepsilon^{\alpha} \tag{4}$$

dans D′ privé de cercles dont la somme des rayons est au plus γ. En vertu de l'égale continuité, $|f(z)|$ sera borné, donc inférieur au second membre de (4) dans D″ pourvu que ce second membre, c'est-à-dire ε, soit assez petit. Par suite :

VII. *Si la famille $\mathcal{F}$ est méromorphe et normale dans un domaine borné* D, *si* D′ *est complètement intérieur à* D *et si* γ *est donné arbitrairement petit, il existe trois nombres*

$$\alpha = \alpha(\gamma, D, D', \mathcal{F}),$$
$$k = k(\gamma, D, D', \mathcal{F}),$$

et

$$\varepsilon = \varepsilon(\gamma, D, D', \mathcal{F}),$$

tels que, si le module d'une fonction $f(z)$ de la famille est moindre que $\eta < \varepsilon$ en des points de D *qui ne peuvent être enfermés dans une suite de cercles dont la somme des rayons est* γ, *on a dans tout* D′

$$|f(z)| < k\eta^{\alpha}.$$

En particulier, D, D′ et $\mathcal{F}$ étant donnés ainsi qu'un petit arc de courbe Γ dans D′, il existe un nombre ε ne dépendant que de ces quatre éléments tel que, toute fonction de la famille dont le module est inférieur à ε sur Γ est holomorphe et de module inférieur à 1 dans D′.

Addition au n° 3. — La fonction algébrique définie par

$$u^3 + u^2 az - (1 + az)u + 1 = 0$$

ne prend pas les valeurs 0 et 1 ; ses trois branches sont finies et indépendantes de a pour $z = 0$; les quatre points de ramification tendent vers $z = 0$ lorsque a croît indéfiniment. $|u(z)|$ n'est borné dans aucun cercle $|z| < r$ lorsque a croît indéfiniment. L'hypothèse faite dans l'énoncé IV sur les points de ramification ne peut être remplacée par une autre limitant le nombre de ces points.