W. GONTCHAROFF

Recherches sur les dérivées successives des fonctions analytiques. Généralisation de la série d'Abel

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 47 (1930), p. 1-78

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1930_3_47__1_0>

// ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

RECHERCHES SUR LES DÉRIVÉES SUCCESSIVES DES FONCTIONS ANALYTIQUES

GÉNÉRALISATION DE LA SÉRIE D'ABEL

PAR M. W. GONTCHAROFF

INTRODUCTION.

Le but que je me suis proposé en entreprenant le présent travail est de contribuer à l'étude de la famille des dérivées successives d'une fonction analytique. On ne saurait dire que le sujet soit nouveau. Par l'usage continuel des séries de Taylor, on est familiarisé avec les rapports qui existent entre la nature analytique d'une fonction et la suite des valeurs que les dérivées successives prennent *en un point donné* et qui permettent de former ce qu'on appelle « élément » d'une fonction : c'est le nom de M. Hadamard qui domine les recherches si profondes et poussées si loin qu'on a faites dans cet ordre d'idées. Or, la manière dont les dérivées successives se comportent *dans un domaine* paraît avoir été peu étudiée jusqu'ici. Il est vrai que nombre d'auteurs ont été conduits à s'occuper des propriétés des dérivées d'une fonction réelle indéfiniment dérivable sur un segment fini. Il suffit de nommer M. T. Carleman qui, par sa théorie des fonctions quasi analytiques, a rattaché la possibilité du prolongement à la croissance des maxima absolus des dérivées successives; M. S. Bernstein à qui l'on doit ce fait fondamental qu'une fonction absolument (ou régulièrement) monotone sur un segment y est nécessairement analytique ([1]), ainsi que les développements récents relatifs au même sujet où intervient la loi de succession des signes des dérivées ([2]) : je puis encore citer une petite Note de M. Hadamard ([3]), où l'on trouve des inégalités que vérifient les maxima absolus de trois dérivées. Cependant l'étude directe et explicite de la famille des dérivées successives est à peine commencée. Les résultats inattendus, remarquables par leur simplicité et leur élégance, que M. G. Pòlya a obtenus dans un travail consacré à l'ensemble des zéros de toutes les dérivées successives ([4]), nous laissent pressentir qu'il y a beaucoup de recherches intéressantes à entreprendre en s'engageant dans cette voie.

Dans le Chapitre I de mon travail, j'introduis des séries qu'on pourrait nommer *séries d'Abel généralisées* et que j'appelle tout court *séries* (Σ). Elles paraissent être aussi bien appropriées à l'étude de la famille des dérivées dans un domaine que le sont les séries de Taylor, lorsqu'il s'agit des valeurs que les dérivées prennent en un point donné. Une série (Σ) associée à la suite de points

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

et correspondant à une fonction $f(x)$, procède suivant les polynomes

$$P_n(x) = \int_{x_0}^{x} dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \ldots \int_{x_{n-1}}^{x^{(n-1)}} dx^{(n)}$$

et possède des coefficients respectivement égaux à $f^{(n)}(x_n)$. Une série d'Abel proprement dite est caractérisée par ce fait que les affixes des points X_n forment une progression arithmétique : de telles séries ont été étudiées d'une manière détaillée par Halphen ([5]). Une inégalité fondamentale

$$|P_n(x)| \leqq \frac{1}{n!}\left[|x - x_0| + |x_0 - x_1| + \ldots + |x_{n-2} - x_{n-1}|\right]^n$$

([1]) *Sur les propriétés réelles des fonctions analytiques* (*Math. Ann.*, 1914).

([2]) *Sur les fonctions absolument monotones* (*Acta math.*, t. 52); *Sur quelques propriétés des fonctions régulièrement monotones* (*Communications de la Soc. math. de Kharkoff*, 4e série, t. 2).

([3]) *C. R. des Séances de la Soc. math. de France*, 1914.

([4]) *Ueber die Nullstellen der successiven Derivierten* (*Math. Zeitschrift*, t. 12, 1922).

([5]) *Sur une série d'Abel* (*Œuvres*, t. 2).

permet d'aborder la question de convergence des séries (Σ). En m'appuyant là-dessus, j'établis les conditions pour que toute fonction d'une classe considérée soit développable en une série (Σ). Je passe en revue les fonctions holomorphes dans un cercle de rayon fini (Chap. II), les fonctions entières d'ordre fini non nul (Chap. III) et les fonctions entières d'ordre nul ou infini (Chap. IV), au moins sous la restriction que le module maximum de la fonction considérée, pour $|x|$ croissant indéfiniment, soit comparable à

$$e^{K \log^\sigma |x|} \qquad (K > 0,\ \sigma > 1)$$

ou à

$$e^{e^{K|x|^\sigma}} \qquad (K > 0,\ \sigma > 0).$$

Si, par exemple, une fonction $f(x)$ est supposée analytique au point $x = X$, il suffit que les points x_n convergent vers X et que la série

$$\sum |x_n - x_{n+1}|$$

soit convergente. Si $f(x)$ est une fonction entière d'ordre ρ (fini et non nul) et de degré A ([2]), il suffit que l'on ait

$$(\rho A)^{\frac{1}{\rho}} \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho}}} \sum_{\nu=0}^{n-1} |x_\nu - x_{\nu+1}| < \omega (1+\omega)^{\frac{1}{\rho}-1},$$

où ω est la racine positive de l'équation

$$\omega^\rho e^{\omega+1} = 1.$$

Il en résulte des conséquences importantes qui concernent la distribution des zéros des dérivées successives ou, si l'on veut, la détermination des fonctions par les valeurs des dérivées en une suite de points (généralisation de la propriété classique des séries de puissances). Citons deux propositions particulières : x_n étant *un* zéro de la $n^{\text{ième}}$ dérivée, si la série $\Sigma |x_\nu - x_{\nu+1}|$ est convergente, la fonction admet le point $X = \lim x_n$ comme point singulier essentiel; si tous les points $x_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ sont contenus dans un domaine fini, la

---

([1]) *Voir* les définitions de la page 24.

fonction ne saurait être entière d'ordre inférieur à un, ou d'ordre un et de degré zéro.

La méthode employée permet aussi d'aborder l'étude des fonctions non analytiques indéfiniment dérivables sur un segment, et l'on obtient une relation entre la croissance des maxima absolus des dérivées successives et la densité des zéros (Chap. V).

On trouve, dans le Chapitre VI, une discussion d'un problème d'interpolation relié d'une manière évidente aux séries (Σ) et caractérisé par les équations

$$f^{(n)}(x_n) = C_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

où les C_n sont des constantes, et la fonction $f(x)$ est assujettie à faire partie d'une classe donnée. Dans des conditions assez larges, je construis une solution et je prouve qu'elle est unique.

Le Chapitre VII est consacré à quelques extensions des résultats précédents : il s'agit de borner inférieurement les minima absolus des dérivées successives sur une suite de cercles concentriques, la croissance de la fonction elle-même étant supposée connue. Je passe ensuite à une limitation d'en haut pour la variation du logarithme du module d'une suite partielle de dérivées successives. Les résultats acquis comme suite d'un calcul assez délicat paraissent ne pas atteindre le degré de précision qu'on pourrait attendre. Inversement, en imposant une limitation d'en haut pour les variations du logarithme du module de toutes les dérivées successives, je cherche à préciser la nature analytique de la fonction considérée. Cette dernière recherche, basée sur une inégalité de MM. E. Landau et O. Toeplitz, est élémentaire et conduit à des résultats plus satisfaisants. Dans le Chapitre VIII, je me demande si les propositions relatives à la suite des variations du logarithme du module sont susceptibles d'être transportées dans le domaine réel : en se servant, une fois de plus, des développements en séries (Σ), on parvient à un théorème précisant, en quelque sorte, les résultats de M. Bernstein sur les fonctions régulièrement monotones.

Une certaine partie des résultats de ce travail ont été publiés dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (*Sur les suites de zéros des dérivées successives*, le 7 mai 1928). Une autre note (*Sur la *détermination des fonctions par les zéros de leurs dérivées*, le 27 décembre 1927 ([1]), paraît ne pas être étrangère au sujet traité ici.

En terminant cette introduction, il me reste à exprimer ma reconnaissance très vive et sincère :

A l'International Education Board (actuellement Rockefeller Foundation), dont le soutien généreux me permit de réaliser mon séjour à Paris, où ce travail fut conçu et commencé ;

A M. Paul Montel sous la direction de qui je puis me féliciter d'avoir travaillé, et dont les conseils et les encouragements m'ont été si précieux ;

A mon cher maître M. Serge Bernstein a qui je dois la formation de mon esprit scientifique et qui a tant contribué à tous mes progrès ultérieurs.

CHAPITRE I.

1. *Un problème d'interpolation. Les polynomes* $P_n(x)$. — Étant donnés n nombres complexes

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_{n-1},$$

on construit facilement un polynome $P(x; x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, de degré n par rapport à la variable x, défini par les égalités suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} P^{(m)}(x_m; x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0 & (m = 0, 1, \ldots, n-1), \\ P^{(n)}(x; x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv 1 & ([2]). \end{cases}$$

Pour obtenir $P(x; x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, il suffit d'effectuer successivement n intégrations indéfinies en prenant l'unité comme première fonction à intégrer, et en déterminant les constantes d'intégration de manière que les conditions précédentes soient vérifiées. On trouve ainsi l'expression explicite

$$P(x; x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = \int_{x_0}^{x} dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \ldots \int_{x_{n-1}}^{x^{(n-1)}} dx^{(n)},$$

([1]) *Voir* aussi *Comm. de la Soc. math. de Kharkoff*, 4e série, t. 2, p. 49-56.

([2]) $\varphi^{(m)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre m : $\dfrac{d^m}{dx^m}\varphi(x)$. On considère la fonction elle-même comme la dérivée d'ordre 0.

les chemins d'intégration étant arbitraires. Dans le cas où $n = 0$, on pose, par définition,

$$P(x) \equiv 1.$$

Observons que l'on a identiquement pour $m \leqq n$

$$P^{(m)}(x; x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = P(x; x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{n-1}),$$

d'où l'on déduit

$$(2) \quad P(x; x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ = \int_{x_0}^{x} dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \ldots \int_{x_{m-1}}^{x^{(m-1)}} P(x^{(m)}; x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{n-1})\, dx^{(m)}.$$

En particulier, si $m = 0$, on obtient, en remplaçant n par $n + 1$,

$$(2') \qquad P(x; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \int_{x_0}^{x} P(x; x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx.$$

Nous disons que le système des polynomes $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, définis par les identités

$$P_0(x) \equiv 1, \qquad P_n(x) = n!\, P(x; x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \qquad (n > 0),$$

est *associé* à la suite des points

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

On calcule les polynomes $P_n(x)$ de proche en proche en se servant de la formule (2′) :

$$P_0(x) = 1,$$
$$P_1(x) = x - x_0,$$
$$P_2(x) = (x - x_1)^2 - (x_0 - x_1)^2,$$
$$P_3(x) = (x - x_2)^3 - 3(x_1 - x_2)^2(x - x_0) - (x_0 - x_2)^3,$$
$$P_4(x) = (x - x_3)^4 - 6(x_2 - x_3)^2(x - x_1)^2 \\ - 4(x_1 - x_3)^3(x - x_0) + 6(x_0 - x_1)^2(x_2 - x_3)^2 - (x_0 - x_3)^4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Le polynome $P(x; x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ peut être mis sous la forme d'un déterminant

$$P(x; x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{x}{1!} & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x^n}{n!} \\ 1 & \frac{x_0}{1!} & \frac{x_0^2}{2!} & \cdots & \frac{x_0^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{x_0^n}{n!} \\ 0 & 1 & \frac{x_1}{1!} & \cdots & \frac{x_1^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{x_1^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{x_2^{n-3}}{(n-3)!} & \frac{x_2^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{x_{n-1}}{1!} \end{vmatrix}.$$

Exemples. — 1° Si les points x_n forment une progression arithmétique

$$x_n = a + nt,$$

on vérifie immédiatement que

$$P_n(x) = (x - a)(x - a - nt)^{n-1} \qquad (n \geqq 1).$$

Le cas $t = 0$ nous donne

$$P_n(x) = (x - a)^n.$$

2° Si les points x_n sont en progression géométrique

$$x_n = at^n,$$

les polynomes $P_n(x)$ sont liés par la relation récurrente suivante :

$$P_{n+1}(x) = (n+1)t^n \int_a^x P_n\left(\frac{y}{t}\right) dy.$$

Pour le voir, il faut tenir compte de l'homogénéité

$$P(\lambda x; \lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_{n-1}) = \lambda^n P(x; x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Si $t = -1$, il vient

$$P_{n+1}(x) = (-1)^n (n+1) \int_a^x P_n(-y)\, dy.$$

Les polynomes $P_n(x)$ qu'on obtient dans ce dernier cas sont liés aux polynomes classiques d'Euler $E_n(x)$, définis par l'identité

$$\frac{1}{2}[E_n(x) + E_n(x+1)] = x^n$$

ou, ce qui revient au même, par les formules récurrentes

$$\begin{aligned} E_0(x) &= 1, \\ E_{2n}(x) &= 2n \int_0^x E_{2n-1}(x)\,dx, \\ E_{2n+1}(x) &= (2n+1)\int_{\frac{1}{2}}^x E_{2n}(x)\,dx \quad (^1). \end{aligned}$$

En effet, en raisonnant de proche en proche, on vérifie que

$$P_n(x) = (4a)^n E_n\left(\frac{a-x}{4a}\right)$$

ou

$$P_n(x) = (4a)^n E_n\left(\frac{a+x}{4a}\right),$$

suivant que n est pair ou impair.

2. *Les séries* (Σ). — Dans ce qui suit, nous aurons à étudier des séries procédant suivant les polynomes $P_n(x)$ associés à une certaine suite de points, c'est-à-dire les séries de la forme générale

$$c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots.$$

Supposons qu'une telle série soit uniformément convergente dans un domaine (D), qui est supposé comprendre tous les points x_n de la suite à laquelle les polynomes $P_n(x)$ sont associés. Soit $f(x)$ la somme de la série. En dérivant n fois l'identité

$$f(x) = \sum_0^\infty c_\nu P_\nu(x)$$

et en posant ensuite $x = x_n$, on obtient, en vertu des formules fonda-

---

(1) *Voir* N. E. Nörlund, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, 1924.

mentales (1), les valeurs des coefficients c_n

$$c_0 = f(x_0), \qquad c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_n) \qquad (n \geqq 1),$$

de manière que la fonction $f(x)$ se trouve développée, dans le domaine (D), en la série suivante :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_1) P_1(x) + \frac{1}{2!} f''(x_2) P_2(x) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_n) P_n(x) + \dots.$$

Inversement, une fonction $f(x)$ étant donnée, si elle est holomorphe dans un domaine (D) qui comprend les points $x_n (n = 0, 1, 2, \dots)$, on peut construire une série qui sera dite *série* (Σ) *correspondant à la fonction* $f(x)$ *et procédant suivant les polynomes* $P_n(x)$

$$(\Sigma) \qquad f(x) \sim f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_1) P_1(x) + \frac{1}{2!} f''(x_2) P_2(x) + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_n) P_n(x) + \dots.$$

Rien n'empêche de considérer les séries (Σ) dans un domaine réel à condition que la fonction $f(x)$ y soit indéfiniment dérivable.

Si tous les points de la suite x_n coïncident, la série (Σ) se réduit à celle de Taylor, dont elle représente ainsi une généralisation naturelle.

Si les points x_n sont situés en progression arithmétique $x_n = a + nt$, la série (Σ) prend la forme

$$(3) \qquad \begin{aligned} f(x) \sim f(a) &+ \frac{1}{1!} f'(a+t)(x-a) \\ &+ \frac{1}{2!} f''(a+2t)(x-a)(x-a-2t) \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+nt)(x-a)(x-a-nt)^{n-1} \\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Cette série, introduite par Abel ([1]), a été étudiée par Halphen ([2]). Signalons encore un cas particulier des séries (Σ) où interviennent les polynomes d'Euler. En faisant

$$x_{2n} = a, \qquad x_{2n+1} = -a,$$

on trouve

$$(4) \qquad \begin{aligned} f(x) \sim f(a) &+ \frac{1}{1!} f'(-a) \cdot 4a\, E_1\left(\frac{a+x}{4a}\right) \\ &+ \frac{1}{2!} f''(a) \cdot (4a)^2\, E_2\left(\frac{a-x}{4a}\right) \\ &+ \frac{1}{3!} f'''(-a) \cdot (4a)^3\, E_3\left(\frac{a+x}{4a}\right) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(a) \cdot (4a)^{2n}\, E_{2n}\left(\frac{a-x}{4a}\right) \\ &+ \frac{1}{(2n+1)!} f^{(2n+1)}(-a) \cdot (4a)^{2n+1}\, E_{2n+1}\left(\frac{a+x}{4a}\right) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nous nous proposons d'étudier les séries (Σ) dans toute leur généralité. Une fonction $f(x)$, holomorphe dans tout le plan ou dans une région du plan étant donnée, il s'agit de reconnaître à quelles conditions une suite de points x_n doit être soumise pour que la série (Σ) correspondante soit convergente et ait pour somme $f(x)$. Ou bien, une suite de points x_n étant donnée, quelles sont les fonctions $f(x)$ qui se laissent développer en série (Σ) procédant suivant les polynomes associés $P_n(x)$?

Pour que la série (Σ) correspondant à une fonction $f(x)$ soit convergente et ait pour somme $f(x)$, il est nécessaire et suffisant que le reste $R_n(x)$ défini par la formule

$$(5) \qquad f(x) = \sum_{0}^{n-1} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_\nu)\, P_\nu(x) + R_n(x)$$

tende vers zéro lorsque $n \to \infty$. On vérifie sans peine que $R_n(x)$ peut

---

([1]) N. H. Abel, *Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes* (*Œuvres*, t. 2).

([2]) G. H. Halphen, *Sur une série d'Abel* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 93, p. 1003); *voir* aussi *Œuvres*, t. 2.

être mis sous la forme

$$R_n(x) = \int_{x_0}^{x} dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \dots \int_{x_{n-1}}^{x^{(n-1)}} f^{(n)}(x^{(n)})\, dx^{(n)},$$

3. *Une limite supérieure pour le module des polynomee* $P_n(x)$ *et pour le module du reste de la série* (Σ). — Nous allons considérer l'expression un peu plus générale

$$I = \int_{x_0}^{x} dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \dots \int_{x_{n-1}}^{x^{(n-1)}} F(x^{(n)})\, dx^{(n)}.$$

Soient l_0 le segment rectiligne qui joint les affixes des points x et x_0, l_1 celui qui joint x_0 et x_1, ..., enfin l_{n-1} celui qui joint x_{n-2} et x_{n-1}.

Désignons par L la ligne brisée formée par les segments $l_0, l_1, \dots, l_{n-1}$; elle peut avoir des points multiples ou bien se recouvrir elle-même. Admettons que la fonction $F(x)$ soit holomorphe dans un domaine entourant la ligne L et que l'on y ait

$$|F(x)| \leqq M.$$

On choisit les chemins d'intégration dans l'expression I de manière à suivre le contour brisé L dans le sens des indices décroissants des points x_i. En posant

$$t_i = |x_{n-1} - x_{n-2}| + |x_{n-2} - x_{n-3}| + \dots + |x_{i+1} - x_i| \qquad (i = 0, 1, \dots, n-2),$$
$$t_{n-1} = 0, \qquad t = t_0 + |x - x_0|,$$

et en désignant par $t^{(k)}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ la longueur de la ligne brisée $x_{n-1}x^{(k)}$ (en suivant toujours le contour L), on obtient successivement

$$(1) \qquad |I| \leqq \int_{t_0}^{t} dt' \left| \int_{x_1}^{x'} dx'' \int_{x_2}^{x''} dx''' \dots \int_{x_{n-1}}^{x^{(n-1)}} F(x^{(n)})\, dx^{(n)} \right|,$$

$$(2) \qquad \left| \int_{x_1}^{x'} dx'' \int_{x_2}^{x''} dx''' \dots \int_{x_{n-1}}^{x^{(n-1)}} F(x^{(n)})\, dx^{(n)} \right|$$
$$\leqq \left| \int_{t_1}^{t'} dt'' \int_{x_2}^{x''} dx''' \dots \int_{x_{n-1}}^{x^{(n-1)}} F(x^{(n)})\, dx^{(n)} \right|,$$

. . . . ,

$$\left| \int_{x_{n-1}}^{x^{(n-1)}} F(x^{(n)})\, dx^{(n)} \right| \leqq M \int_{t_{n-1}}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)}.$$

Par conséquent,

$$|I| \leqq M \int_{t_0}^{t} dt' \int_{t_1}^{t'} dt'' \dots \int_{t_{n-1}}^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} = P(t; t_0, t_1, \dots, t_{n-1}).$$

Or, en vertu des inégalités évidentes,

$$t_0 \leqq t' \leqq t, \qquad t_1 \leqq t'' \leqq t', \qquad \dots, \qquad t_{n-1} \leqq t^{(n)} \leqq t^{(n-1)};$$
$$t_{i+1} \leqq t_i \qquad (0 \leqq i \leqq n-2),$$

la dernière intégrale ne saurait qu'augmenter lorsqu'on remplace toutes les limites inférieures d'intégration par $t_{n-1} = 0$, ce qui nous donne

$$|I| \leqq M \int_0^{t} dt' \int_0^{t'} dt'' \dots \int_0^{t^{(n-1)}} dt^{(n)} = M \frac{t^n}{n!}.$$

L'égalité est effectivement atteinte dans le cas où les points $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ sont confondus.

En tenant compte de la signification de t, nous en tirons deux conséquences.

En posant d'abord $F(x) \equiv 1$, on trouve une limitation pour le polynome $P(x; x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$

$$(6) \quad |P(x; x_0, x_1, \dots, x_{n-1})| \leqq \frac{1}{n!} (|x - x_0| + |x_0 - x_1| + \dots + |x_{n-2} - x_{n-1}|)^n$$

ou bien, si l'on pose

$$u_\nu = |x_\nu - x_{\nu+1}| \qquad (\nu \geqq 0),$$

$$s_0 = 0, \qquad s_m = |x_0 - x_1| + |x_1 - x_2| + \dots + |x_{m-1} - x_m| = \sum_{\nu=0}^{m-1} u_\nu \qquad (m \geqq 1),$$

on a

$$(6') \qquad |\bar{P}_n(x)| \leqq (|x - x_0| + s_{n-1})^n \qquad (n \geqq 1),$$

inégalité dont nous aurons besoin.

Ensuite, en posant $F(x) \equiv f^{(n)}(x)$ et en désignant par M_n le maximum du module de $f^{(n)}(x)$ sur la ligne brisée $x x_0 x_1 \dots x_{n-1}$, on obtient

$$(7) \qquad |R_n(x)| \leqq \frac{M_n}{n!} (|x - x_0| + s_{n-1})^n \qquad (n \geqq 1),$$

à condition que la fonction $f(x)$ soit holomorphe dans un domaine entourant la ligne brisée nommée.

CHAPITRE II.

4. *Convergence des séries* (Σ). *Cas où la fonction* $f(x)$ *est holomorphe dans un cercle de rayon fini.*

Théorème I. — *Si : 1° la série* $\Sigma u_\nu \equiv \Sigma |x_\nu - x_{\nu+1}|$ *est convergente, ce qui entraîne nécessairement l'existence de la limite* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = X$, *2° la fonction* $f(x)$ *est holomorphe dans le cercle de centre* X *et de rayon* R, *alors* $f(x)$ *est représentable par la série* (Σ), *cette série étant uniformément convergente dans tout cercle intérieur au cercle d'holomorphie.*

Démonstration. — Soit, pour simplifier, $X = 0$.

Nous allons voir d'abord que la série (Σ) est uniformément convergente dans le cercle $|x| \leqq R'$, où $0 < R' < R$. Soit R'' un nombre tel que $R' < R'' < R$. La série $\Sigma |x_\nu - x_{\nu+1}|$ étant convergente, d'après notre hypothèse, soit

$$\rho_n = \sum_n^\infty |x_\nu - x_{\nu+1}|.$$

On peut assigner un entier N suffisamment grand pour que l'on ait

$$\rho_N < \frac{1}{2}(R'' - R'). \tag{8}$$

Désignons, en général, par $M(\varphi, r)$ le module maximum pour $|x| \leqq r$ de la fonction $\varphi(x)$, cette dernière étant supposée holomorphe dans un cercle de centre origine et de rayon plus grand que r.

L'inégalité suivante, conséquence immédiate de l'intégrale de Cauchy, est bien connue

$$\frac{M(\varphi^{(n)}, r)}{n!} < \frac{M(\varphi, R)}{(R - r)^n} \quad (r < R). \tag{9}$$

Considérons la série qu'on obtient en différentiant N fois la série proposée (Σ). En vertu de l'inégalité précédente ainsi que de l'inégalité (6) du paragraphe 3, on obtient une limitation pour le module du terme général (n étant assez grand pour que l'on ait $|x_n| < R''$ et $n > N$)

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_n)\, P_n^{(N)}(x)\right| \\
&\quad \leqq M(f^{(n)}, |x_n|) \cdot |P(x; x_N, x_{N+1}, \ldots, x_{n-1})| \\
&\quad < (n-N)!\,\frac{M(f^{(N)}, R'')}{(R''-|x_n|)^{n-N}} \\
&\qquad \times \frac{1}{(n-N)!}(|x-x_N| + |x_N - x_{N+1}| + \ldots + |x_{n-2} - x_{n-1}|)^{n-N}.
\end{aligned}$$

Puisque

$$|x - x_N| \leqq |x| + |x_N| \leqq R' + \rho_N$$

et

$$|x_N - x_{N+1}| + \ldots + |x_{n-2} - x_{n-1}| \leqq \rho_N,$$

il vient, en définitive,

$$\left|\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_n)\, P_n^{(N)}(x)\right| \leqq M(f^{(N)}, R'')\left(\frac{R'+2\rho_N}{R''-|x_n|}\right)^{n-N}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, on a $\lim x_n = 0$, donc la racine $n^{\text{ième}}$ du module du terme général considéré a la limite supérieure qui ne dépasse pas $\frac{R'+2\rho_N}{R''}$, et ce nombre, d'après (8), est inférieur à l'unité.

Par conséquent, la convergence uniforme et absolue a lieu dans le cercle $|x| \leqq R'$. On remonte sans difficulté à la série (Σ). Donc, la somme de la série (Σ) est une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle $|x| < R$.

Passons maintenant à la considération du reste de la série qu'on obtient en dérivant N fois la série (Σ), le nombre entier N étant cette fois déterminé de telle manière que l'on ait

$$\rho_N < \frac{R'}{4} \qquad (0 < R' < R).$$

Admettons encore que x se trouve dans le cercle

$$|x| < R'$$

Alors il résulte, d'après le paragraphe 3,

$$|R_n^{(N)}(x)| < \frac{1}{(n-N)!} M\left(f^{(n)}, \frac{R'}{4}\right)(|x - x_N| + \rho_N)^{n-N}$$

$$< \frac{M(f^{(N)}, R')}{\left(R' - \frac{R'}{4}\right)^{n-N}}(|x| + 2\rho_N)^{n-N} \leqq M(f^{(N)}, R')\left(\frac{\frac{R'}{4} + 2\rho_N}{\frac{3}{4}R'}\right)^{n-N}.$$

Le nombre $\dfrac{\frac{R'}{4} + 2\rho_N}{\frac{3}{4}R'}$ étant inférieur à l'unité, on voit que

$$\lim_{n \to \infty} |R_n^{(N)}(x)| = 0.$$

On en conclut $\left(\text{toujours pour } |x| \leqq \frac{R'}{4}\right)$ que

$$\lim_{n \to \infty} |R_n(x)| = 0.$$

Donc, pour $|x| \leqq \frac{R'}{4}$, la série (Σ) a la somme $f(x)$. Or, la somme de cette série étant holomorphe dans le cercle $|x| < R$, la somme est égale à $f(x)$ dans ce cercle entier.

5. *Distribution des zéros des dérivées successives.* — On déduit du théorème I une conséquence intéressante relative aux zéros des dérivées successives : *une fonction* $f(x)$ $(\not\equiv 0)$ *étant holomorphe dans un domaine* (D), *si une suite de points* $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *est déterminée dans* (D), *de telle manière que* x_n *soit un zéro de la* $n^{\text{ième}}$ *dérivée*

$$f^{(n)}(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

la série Σu_n *ne saurait être convergente à moins que la limite* X *des points* x_n *n'appartienne à la frontière du domaine.*

En effet, si le point X était intérieur à (D), la convergence de Σu_n entraînerait la possibilité de développer $f(x)$ en une série (Σ) dans un cercle $|x| < R$, de rayon non nul. Or, tous les termes de cette série étant égaux à zéro, il s'ensuivrait $f(x) \equiv 0$.

En particulier, on obtient pour les fonctions *entières* le résultat suivant : toute série de la forme $\Sigma |x_\nu - x_{\nu-1}|$ (où x_n est un zéro *quelconque* de la $n^{\text{ième}}$ dérivée) est nécessairement divergente.

Considérons, à titre d'exemple, la fonction $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. On a

$$\lim_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0,$$

lorsque x tend vers zéro en passant par les valeurs positives, et ceci quel que soit n. D'autre part, $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe des zéros positifs x_n des dérivées $f^{(n)}(x)\,(n > 2)$ tels que $x_2 > x_3 > \ldots > x_n > \ldots > 0$. On a

$$X = \lim_{n \to \infty} x_n = 0,$$

et c'est un point singulier de la fonction.

On peut encore énoncer la proposition précédente sous la forme suivante : une fonction analytique $f(x)$ est entièrement déterminée par la connaissance des valeurs $f^{(n)}(x_n)\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$, à condition que la série $\Sigma|x_\nu - x_{\nu-1}|$ soit convergente. C'est, évidemment, une généralisation de la propriété classique : Une fonction analytique est entièrement déterminée par un « élément », c'est-à-dire par l'ensemble de valeurs de toutes ses dérivées en un point donné.

Signalons qu'on ne pourrait pas s'attendre à se passer de l'hypothèse de la convergence absolue de la suite $\Sigma(x_\nu - x_{\nu+1})$. C'est ce qui est mis en lumière par des fonctions telles que $\frac{1}{1+x^2}$ ou e^{-x^2}. En effet, dans ces exemples, quel que soit le point réel X, il est possible de déterminer une suite de zéros x_n de manière que les x_n convergent vers X. Or, ici, la convergence de la série $\Sigma(x_\nu - x_{\nu+1})$ n'est pas absolue.

Il est à remarquer, d'autre part, que la série $\Sigma|x_\nu - x_{\nu+1}|$ peut diverger aussi lentement qu'on le veut, et ceci même dans le cas des fonctions entières. Plus précisément, quelle que soit la suite des nombres positifs a_n croissant indéfiniment

$$a_n < a_{n+1}, \qquad \lim_{n \to \infty} a_n = \infty \qquad (n \geq 1),$$

il existe une fonction entière $f(x)$ et une suite correspondante x_n telle que l'on ait

$$\sum^{n} |x_{\nu-1} - x_\nu| < a_n.$$

Construisons une fonction entière réelle qui possède les zéros $a_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ et soit $a_0 = 0$; désignons par a'_n le zéro (ou un des zéros) de $f'(x)$ qui se trouve dans l'intervalle $a_n < x < a_{n+1}$, par a''_n celui des zéros de $f''(x)$ qui se trouve dans l'intervalle $a'_n < x < a'_{n+1}$ et ainsi de suite. En général, on a

$$a_n^{(k)} < a_{n+1}^{(k-1)}.$$

En posant $x_n = a_0^{(n)}$, on obtient $x_{n-1} < x_n$, et d'autre part,

$$x_n = a_0^{(n)} < a_1^{(n-1)} < a_2^{(n-2)} < \ldots < a_n,$$

donc

$$\sum_1^n |x_{\nu-1} - x_\nu| = x_n < a_n.$$

Dans l'exemple précédent, les points x_n n'ont pas de limite finie. Les choses se passent d'une manière différente si les x_n convergent vers une limite finie, Dans ce cas, nous obtenons le théorème suivant :

Théorème II. — *Une fonction $f(x) (\not\equiv 0)$ étant supposée holomorphe dans le cercle $|x - X| < R$, soit x_n un zéro de la $n^{ième}$ dérivée $f^{(n)}(x)$, $|x_n| < R (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Si l'on a :*

1° $$\lim_{n \to \infty} x_n = X,$$

2° $$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, n u_n = L \qquad (u_n = |x_n - x_{n+1}|,\ L > 0),$$

le rayon d'holomorphie au point X est borné

$$R \leqq Le.$$

Par contre, si $f(x) \not\equiv 0$ et que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} x_n = X, \qquad \lim_{n \to \infty} n u_n = 0,$$

la fonction $f(x)$ ne peut être analytique au point $x = X$.

Démonstration. — Soit $X = 0$.

ε étant un nombre positif arbitrairement petit, on a, d'après nos hypothèses, pour les valeurs de l'indice n suffisamment grandes ($n > n_\varepsilon$)

$$(10) \qquad |x_n| < \varepsilon, \qquad u_n < \frac{L+\varepsilon}{n+1}.$$

En vertu des égalités $f^{(n)}(x_n) = 0$, on obtient, n et p étant des entiers positifs quelconques,

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \ldots \int_{x_{n+p-1}}^{x^{(n+p-1)}} f^{(n+p)}(x^{(n+p)})\, dx^{(n+p)}.$$

Dérivons n fois et faisons ensuite $x = 0$,

$$f^{(n)}(0) = \int_{x_n}^{0} dx^{(n+1)} \int_{x_{n+1}}^{x^{(n+1)}} dx^{(n+2)} \ldots \int_{x_{n+p-1}}^{x^{(n+p-1)}} f^{(n+p)}(x^{(n+p)})\, dx^{(n+p)}.$$

Si $n > n_\varepsilon$, la variable $x^{(n+p)}$ sera en module inférieure à ε, et l'application de l'inégalité fondamentale du paragraphe 3 nous donne

$$|f^{(n)}(0)| < \frac{1}{p!} M(f^{(n+p)}, \varepsilon)[|x_n| + u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-2}]^p.$$

Grâce à la seconde des inégalités (10), il vient

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-2} &< (L+\varepsilon)\left(\frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p-1}\right) \\ &< (L+\varepsilon)\log\left(1+\frac{p}{n}\right), \end{aligned}$$

et en tenant compte de la première, on obtient

$$|x_n| + u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p-2} < \varepsilon + (L+\varepsilon)\log\left(1+\frac{p}{n}\right).$$

D'autre part,

$$M(f^{(n+p)}, \varepsilon) < (n+p)!\,\frac{M(f, R-\varepsilon)}{(R-2\varepsilon)^{n+p}}.$$

Par conséquent, il résulte, en posant $M(f, R-\varepsilon) = K$,

$$|f^{(n)}(0)| < K\frac{(n+p)!}{p!}\,\frac{\left[\varepsilon + (L+\varepsilon)\log\left(1+\frac{p}{n}\right)\right]^p}{(R-2\varepsilon)^{n+p}},$$

donc

$$\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}} < K^{\frac{1}{n}}\sqrt[n]{\frac{(n+p)!}{n!\,p!}}\,\frac{\left[\varepsilon + (L+\varepsilon)\log\left(1+\frac{p}{n}\right)\right]^{\frac{p}{n}}}{(R-2\varepsilon)^{1+\frac{p}{n}}}.$$

Faisons dans cette inégalité $p = [\alpha n]$ où α est un nombre positif arbitraire et $[u]$ désigne la partie entière de u.

Si n tend vers l'infini, le second membre aura la limite

$$\frac{(\alpha+1)^{\alpha+1}}{\alpha^\alpha} \frac{[\varepsilon+(\mathrm{L}+\varepsilon)\log(1+\alpha)]^\alpha}{(\mathrm{R}-2\varepsilon)^{1+\alpha}},$$

tandis que le premier aura la limite supérieure

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}} = \frac{1}{\mathrm{R}}.$$

Ainsi obtenons-nous

$$\frac{1}{\mathrm{R}} \leqq \frac{(\alpha+1)^{\alpha+1}}{\alpha^\alpha} \frac{[\varepsilon+(\mathrm{L}+\varepsilon)\log(1+\alpha)]^\alpha}{(\mathrm{R}-2\varepsilon)^{1+\alpha}}.$$

Le nombre ε étant arbitrairement petit, faisons-le tendre vers zéro

$$\frac{1}{\mathrm{R}} \leqq \frac{(\alpha+1)^{\alpha+1}}{\alpha^\alpha} \frac{[\mathrm{L}\log(1+\alpha)]^\alpha}{\mathrm{R}^{1+\alpha}},$$

donc

$$\mathrm{R} \leqq \mathrm{L}(\alpha+1)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \frac{\log(1+\alpha)}{\alpha},$$

Soit, enfin, α tendant vers zéro. On obtient finalement

$$\mathrm{R} \leqq \mathrm{L}e. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

6. *Application à l'étude de l'ensemble des points* (P). — En étudiant l'ensemble E des zéros de toutes les dérivées successives d'une fonction analytique, M. G. Pólya a été conduit à considérer l'ensemble dérivé E′ de l'ensemble E ou, en d'autres termes, l'ensemble de points X au voisinage desquels il existe une infinité de zéros de dérivées successives ([1]).

Nous appellerons de tels points des *points* (P).

Un point (P) $x = \mathrm{X}$ sera dit *régulier* s'il est possible d'assigner une

---

([1]) G. Pólya, *Ueber die Nullstellen der successiven Derivierten* (*Math. Zeitschr.*, Bd 12, 1922).

suite de points $x_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ tels que : 1° x_n soit un zéro de $f^{(n)}(x)$; 2° on ait $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = X$. D'après les résultats de M. Pólya, toute fonction méromorphe non entière ne possède que des points (P) réguliers; la condition nécessaire et suffisante pour que $x = X$ soit un point (P) consiste dans ce cas en ce que le point X soit également éloigné de deux pôles les plus proches. Un exemple des points (P) irréguliers est fourni par $f(x) = \sin x$, $X = K\frac{\pi}{2}$ (K entier).

Soit $x = X$ un point (P) régulier d'une fonction $f(x)$, supposée analytique en ce point. On désignera, dans ce qui suit, par x_n un zéro de $f^{(n)}(x)$ jouissant de la propriété qu'il n'en existe pas d'autres dans le cercle $|x - X| < |x_n - X|$ [x_n est le point X lui-même si $f^{(n)}(x)$ s'y annule]. Faisons correspondre au point X un nombre α, qu'on peut nommer *l'ordre du point* (P), et qui est défini par l'égalité

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{R} \overline{\lim_{n \to \infty}}\, n\,|x_n - X|, \tag{11}$$

où R est le rayon d'holomorphie de la fonction $f(x)$ par rapport au point X [$f(x)$ étant, par hypothèse, une fonction non entière].

Le théorème II nous apprend que *l'ordre d'un point* (P) *ne peut jamais être supérieur à* $2e$. En effet, on a

$$\frac{1}{2e} \leqq \frac{1}{2R} \overline{\lim}\, n\,|x_n - x_{n+1}| \leqq \frac{1}{2R}\left(\overline{\lim}\, n\,|x_n - X| + \overline{\lim}\, n\,|x_{n+1} - X|\right) = \frac{1}{\alpha},$$

donc

$$\alpha \leqq 2e.$$

A titre d'exemple, plaçons-nous dans le cas le plus simple où $f(x)$ est une fonction rationnelle ayant deux pôles, soit

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}, \qquad a > 0.$$

Les points (P) sont tous les points de l'axe réel. Les dérivées $f^{(n)}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ ne possédant que des zéros réels, soient x'_n et x''_n deux zéros consécutifs de $f^{(n)}(x)$ qui comprennent entre eux le point fixe $x = X$, les égalités $x'_n = X$ ou $x''_n = X$ n'étant pas exclues. On trouve facilement

$$x'_n = a \cot \frac{\pi}{n+1} \left(\left[\frac{n+1}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{a}{X} \right] + 1 \right),$$

$$x''_n = a \cot \frac{\pi}{n+1} \left[\frac{n+1}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{a}{X} \right] \quad (^1),$$

donc

$$\delta_n = x''_n - x'_n \sim \frac{\pi}{n} \frac{a^2 + X^2}{a}.$$

En désignant par x_n celui des points x'_n et x''_n qui est plus proche de X, on obtient pour toutes les valeurs de l'indice n,

$$|x_n - X| \leqq \frac{1}{2} \delta_n$$

et, d'autre part, on a pour une infinité de valeurs de l'indice

$$|x_n - X| > (1 - \varepsilon) \frac{1}{2} \delta_n,$$

ε étant positif, arbitrairement petit. Par conséquent, comme R est égal à $\sqrt{a^2 + X^2}$, on a

$$\overline{\lim}\, n\, |x_n - X| = \frac{\pi}{2} \frac{R^2}{a},$$

ou bien, en désignant par φ l'angle sous lequel le segment $(-ai, +ai)$ est vu du point X,

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{R} \overline{\lim}\, n\, |x_n - X| = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \frac{\varphi}{2}}, \qquad \alpha = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Évidemment, l'ordre α est maximum lorsque $X = 0$, $\varphi = \pi$; alors

$$\alpha = \frac{2}{\pi}.$$

---

(1) L'équation $f^{(n)}(x) = 0$ se réduisant à $\left(\frac{x - ai}{x + ai}\right)^{n+1} = 1$, les zéros de $f^{(n)}(x)$ ont la forme $a \cot \frac{\lambda\pi}{n+1}$ (λ entier). Il reste à déterminer λ de telle manière que l'on ait

$$a \cot \frac{(\lambda + 1)\pi}{n+1} < X \leqq a \cot \frac{\lambda\pi}{n+1}.$$

Considérons encore la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x^p + a^p} \qquad (a \neq 0,\ p \text{ entier} > 2),$$

en nous bornant à l'étude du point $X = 0$. Toutes les dérivées dont l'ordre n'est pas multiple de p s'annulent en ce point. Posons

$$f_{m,p}(x) = \frac{(-1)^m}{(mp)!} a^{(m+1)p} f^{(mp)}\left(\frac{ax}{mp}\right).$$

En développant, suivant les puissances croissantes de x, on obtient

$$f_{m,p}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left(1 + \frac{1}{mp}\right)\left(1 + \frac{2}{mp}\right) \cdots \left(1 + \frac{\nu p}{mp}\right) \frac{x^{\nu p}}{(\nu p)!}.$$

Lorsque m tend vers l'infini, la fonction $f_{m,p}(x)$ tend (uniformément par rapport à x dans tout domaine fini) vers

$$\varphi_p(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{\nu p}}{(\nu p)!} = \frac{1}{p}(e^x + e^{\omega_p x} + \ldots + e^{\omega_p^{p-1} x}),$$

où l'on a posé

$$\omega_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}.$$

Or, on s'aperçoit que, par l'identité

$$\varphi_p(x) = E_p(-x^p),$$

que $\varphi_p(x)$ est liée à la fonction bien connue de Mittag-Leffler

$$E_p(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\Gamma(1+\nu p)}.$$

Comme p est un nombre supérieur à 2, tous les zéros de $E_p(x)$ sont négatifs [1], soit $-\lambda_p$ le plus petit, en module, d'entre eux. Alors $\varphi_p(x)$ possède p zéros de la forme

$$\omega_p^m \lambda_p^{\frac{1}{p}} \qquad (m = 0, 1, \ldots, p-1),$$

tandis que d'autres zéros ont leurs modules plus grands que $\lambda_p^{\frac{1}{p}}$.

(1) A. Wiman, *Ueber die Nullstellen der Funktion* $E_\alpha(x)$ (*Acta mathematica*, t. 29, p. 223); aussi G. Pólya, *Bemerkung über Mittag-Lefflerschen Funktionen* $E_\alpha(x)$ (*The Tohoku Math. Journ.*, t. 19, p. 241).

En désignant par $\xi_{m.p}$ celui des zéros de la fonction $f_{m.p}(x)$ qui tend, par exemple, vers $\lambda_p^{\frac{1}{p}}$ lorsque m augmente indéfiniment, on trouve la valeur du zéro correspondant de la dérivée $f^{(mp)}(x)$,

$$x_{mp} = \frac{a\xi_{m.p}}{mp} \sim \frac{a\lambda_p^{\frac{1}{p}}}{mp},$$

donc

$$\lim mp\,|x_{mp}| = a\lambda_p^{\frac{1}{p}}.$$

Finalement, on obtient

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{a}\overline{\lim}\, n\,|x_n| = \lambda_p^{\frac{1}{p}}, \qquad \alpha = \frac{1}{\lambda_p^{\frac{1}{p}}}.$$

Il est facile de limiter λ_p inférieurement. Ce nombre doit satisfaire à l'équation $E_p(-\lambda) = 0$. Or, si $\lambda \leqq p!$, les termes du développement taylorien vont en diminuant en valeur absolue; par conséquent,

$$E_p(-\lambda) > 1 - \frac{\lambda}{p!} \geqq 0,$$

donc

$$\lambda_p > p!$$

Il s'ensuit que l'ordre α est inférieur à $\frac{1}{\sqrt[p]{p!}}$.

Pour $p = 2$, on trouve $\alpha < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,70\ldots$ (nous avons trouvé $\alpha = \frac{2}{\pi} = 0,63\ldots$); pour $p = 3$, on a

$$\alpha < \frac{1}{\sqrt[3]{6}} = 0,55\ldots.$$

Le nombre $\frac{1}{\sqrt[p]{p!}}$ décroît avec $\frac{1}{p}$ et, pour $p \to \infty$, tend vers zéro.

Ce qui précède rend assez probable que, pour les fonctions méromorphes ou même pour les fonctions qui n'ont pas de singularités essentielles sur le cercle d'holomorphie dont le centre est le point considéré $x = X$, $\frac{2}{\pi}$ est la plus grande valeur que puisse effectivement atteindre l'ordre d'un point (P). Il faudrait s'attendre à obtenir des valeurs plus grandes dans le cas où interviendraient des singularités essentielles.

CHAPITRE III.

7. *Croissance des dérivées successives des fonctions entières d'ordre fini. Limitation d'en haut.* — Désignons par $M(F,r)$ le module maximum de la fonction $F(x)$ sur le cercle $|x|\leqq r$, $F(x)$ étant supposée holomorphe dans ce cercle et continue sur la circonférence

$$M(F, r) = \max_{0\leqq\theta<2\pi} |F(re^{i\theta})|. \tag{12}$$

L'ordre ρ de la fonction entière $f(x)$ étant défini par l'égalité

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(f, r)}{\log r}, \tag{13}$$

le nombre A, donné par la formule suivante et qui peut être égal à zéro, fini ou infini,

$$A = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(f, r)}{r^\rho}, \tag{14}$$

sera dit le *degré* de la fonction $f(x)$. On sait que, si l'on pose

$$f(x) = \sum_0^\infty c_\nu x^\nu,$$

la relation

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|} = (Ae\rho)^{\frac{1}{\rho}} \tag{15}$$

est vérifiée, en sorte qu'elle peut servir aussi de définition pour le degré [1].

---

(1) Pour le choix du terme, je suis ici M. S. Bernstein (*Leçons sur les propriétés extrémales*, etc. Gauthiers-Villars, 1926, p. 80). Or, c'est l'expression $p = (Ae\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ que M. Bernstein appelle *degré*.

Nous allons utiliser l'inégalité (9) du paragraphe 4 pour obtenir une limitation d'en haut pour le module maximum de la $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}(x)$ sur le cercle de rayon fixe ou variable $r_n = \alpha n^{\tau}$ $(\alpha > 0, \tau \geqq 0)$, lorsque l'ordre et le degré de la fonction $f(x)$ sont donnés.

Admettons que l'on ait, pour des valeurs de r assez grandes,

$$M(f, r) < e^{Hr^{\sigma}} \qquad (H > 0, \sigma > 0).$$

Alors, il résulte de l'inégalité fondamentale, R étant suffisamment grand et supérieur à r,

$$\log \sqrt[n]{\frac{M(f^{(n)}, r)}{n!}} < \frac{HR^{\sigma}}{n} - \log(R - r),$$

donc, à partir d'une certaine valeur de n, on a

$$(16) \qquad \log \sqrt[n]{\frac{M(f^{(n)}, \alpha n^{\tau})}{n!}} < \frac{HR^{\sigma}}{n} - \log(R - \alpha n^{\tau}),$$

quel que soit R, supposé supérieur à αn^{τ}. Déterminons R de manière que le second membre de l'inégalité précédente soit minimum. La dérivation nous fournit l'équation

$$(17) \qquad R^{\sigma-1}(R - \alpha n^{\tau}) = \frac{n}{H\sigma}.$$

Considérons trois cas : 1° $\tau < \frac{1}{\sigma}$, 2° $\tau = \frac{1}{\sigma}$, 3° $\tau > \frac{1}{\sigma}$.

1° Si $\tau < \frac{1}{\sigma}$, posons

$$x = \frac{\alpha(H\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}}{n^{\frac{1}{\sigma}-\tau}}, \qquad y = \frac{R(H\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}}{n^{\frac{1}{\sigma}}}.$$

Alors notre équation prend la forme

$$y^{\sigma-1}(y - x) = 1.$$

Lorsque $n \to \infty$, x tend vers zéro, et l'on voit immédiatement que y tend vers 1. Par conséquent, lorsque n croît indéfiniment, R croît aussi, et l'on a

$$R \sim \left(\frac{n}{H\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

En substituant cette valeur dans l'inégalité (16), on trouve

$$\log \sqrt[n]{\frac{M(f^{(n)}, \alpha n^{\tau})}{n!}} < -\frac{1}{\sigma}\log n + \log(He\sigma)^{\frac{1}{\sigma}} + \varepsilon_n,$$

où ε_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}\cdot$

Par suite,

$$n^{\frac{1}{\sigma}} \sqrt[n]{\frac{M(f^{(n)}, \alpha n^{\tau})}{n!}} < (1+\varepsilon_n)(He\sigma)^{\frac{1}{\sigma}},$$

donc, si $\tau < \frac{1}{\sigma}$,

(18) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\sigma}} \sqrt[n]{\frac{M(f^{(n)}, \alpha n^{\tau})}{n!}} \leqq (He\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

2° Soit $\tau = \frac{1}{\sigma}\cdot$ Dans ce cas, l'équation (17) se laisse résoudre bien facilement. On en tire

$$R = \lambda n^{\frac{1}{\sigma}},$$

où λ est la racine positive de l'équation

$$\lambda^{\sigma-1}(\lambda - \alpha) = \frac{1}{H\sigma}\cdot$$

Bien entendu, cette racine existe quels que soient les nombres H et σ et elle est supérieure à α. La substitution de la valeur R nous donne

$$\log \sqrt[n]{\frac{M(f^{(n)}, \alpha n^{\tau})}{n!}} < -\frac{1}{\sigma}\log n + H\lambda^{\sigma} - \log(\lambda - \alpha),$$

donc, si $\tau = \frac{1}{\sigma}$,

(19) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\sigma}} \sqrt[n]{\frac{M(f^{(n)}, \alpha n^{\tau})}{n!}} \leqq \frac{e^{H\lambda^{\sigma}}}{\lambda - \alpha} = H\sigma\lambda^{\sigma-1} e^{H\lambda^{\sigma}}.$$

Posons, pour un moment,

$$\mu = H\sigma\lambda^{\sigma-1} e^{H\lambda^{\sigma}}.$$

En considérant λ comme une fonction de α et μ comme une fonction de λ, on obtient

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = \frac{\lambda}{\lambda + (\sigma - 1)(\lambda - \alpha)} = \frac{H\sigma\lambda^\sigma}{H\sigma\lambda^\sigma + \sigma - 1},$$

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = H\sigma\lambda^{\sigma-2} e^{H\lambda^\sigma}(H\sigma\lambda^\sigma + \sigma - 1),$$

donc

$$\frac{d\mu}{d\alpha} = H^2\sigma^2\lambda^{2(\sigma-1)} e^{H\lambda^\sigma} > 0.$$

Puisque, pour $\alpha = 0$, on a

$$\lambda = \left(\frac{1}{H\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, \qquad \mu = (He\sigma)^{\frac{1}{\sigma}},$$

il en résulte que, lorsque α parcourt toutes les valeurs de 0 à ∞, le second membre de (19) croît d'une manière monotone de la valeur $(He\sigma)^{\frac{1}{\sigma}}$ jusqu'à l'infini

3° Si $\tau > \frac{1}{\sigma}$, posons

$$x = \frac{1}{H\sigma\alpha^\sigma n^{\sigma\tau-1}}, \qquad y = \frac{R}{\alpha n^\tau}.$$

L'équation (17) se simplifie :

$$y^{\sigma-1}(y-1) = x.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, x tend vers zéro en parcourant les valeurs positives. On en conclut que y tend vers 1. Comme y se laisse développer en une série de puissances

$$y = 1 + x + \ldots,$$

on obtient la valeur asymptotique de R,

$$R = \alpha n^\tau + \frac{1}{H\sigma\alpha^{\sigma-1} n^{\sigma\tau-\tau-1}} + \ldots,$$

les termes non écrits étant d'ordre $\frac{1}{n^{2(\sigma\tau-1)-\tau}}$. Par conséquent,

$$\log \sqrt[n]{\frac{M(f^{(n)}, \alpha n^\tau)}{n!}} < (1 + \varepsilon_n) H\alpha^\sigma n^{\sigma\tau-1}.$$

donc

$$(20)\qquad \sqrt[n]{\frac{M(f^{(n)}, \alpha n^{\tau})}{n!}} < e^{(1+\varepsilon_n)H\alpha\sigma n^{\sigma\tau-1}},$$

ε_n étant un nombre qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Admettons maintenant que la fonction $f(x)$ soit d'ordre ρ et de degré A. On pourra poser

$$\sigma = \rho, \qquad H = A + \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit. Les inégalités (18-20) nous donnent alors, après qu'on a fait tendre ε vers zéro,

$$(21)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{\frac{M(f^{(n)}, \alpha n^{\tau})}{n!}} \leqq (Ae\rho)^{\frac{1}{\rho}} \qquad \left(\text{si } \tau < \frac{1}{\rho}\right),$$

$$(21')\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{\frac{M\left(f^{(n)}, \alpha n^{\frac{1}{\rho}}\right)}{n!}} \leqq A\rho\lambda^{\rho-1} e^{A\lambda^{\rho}} \qquad \left(\text{si } \tau = \frac{1}{\rho}\right),$$

où λ est la racine positive de l'équation

$$A\lambda^{\rho-1}(\lambda - \alpha) = \frac{1}{\rho},$$

et enfin

$$(21'')\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{n^{\rho\tau-1}} \log \sqrt[n]{\frac{M(f^{(n)}, \alpha n^{\tau})}{n!}} \leqq A\alpha^{\rho} \qquad \left(\text{si } \tau > \frac{1}{\rho}\right).$$

Dans le cas très important où $\rho = 1$, ces formules deviennent

$$(22)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n \sqrt[n]{\frac{M(f^{(n)}, \alpha n^{\tau})}{n!}} \leqq Ae \qquad (\tau < 1),$$

$$(22')\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n \sqrt[n]{\frac{M(f^{(n)}, \alpha n)}{n!}} \leqq A\, e^{1+\alpha A} \qquad (\tau = 1),$$

$$(22'')\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{n^{\tau-1}} \log \sqrt[n]{\frac{M(f^{(n)}, \alpha n^{\tau})}{n!}} \leqq A\alpha\ (^1) \qquad (\tau > 1).$$

(1) L'exemple $f(x) = e^{Ax}$ nous montre que l'égalité est effectivement atteinte dans les relations (22), (22'), (22''). On peut s'assurer qu'elle est atteinte même pour les relations plus générales (21), (21'), 21'') et cela, *pour toutes les fonctions entières d'ordre et de degré fini sans aucune exception* (Voir, à ce sujet, mon article dans le Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, 1930.

8. *Convergence des séries* (Σ). *Cas des fonctions entières d'ordre fini.* — Revenons maintenant au problème que nous nous sommes proposé, celui de développer une fonction $f(x)$ en une série (Σ) procédant suivant les polynomes $P_n(x)$ associés à une suite x_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Après avoir étudié le cas où la série Σu_n est convergente, plaçons-nous dans l'hypothèse contraire et admettons d'abord que les sommes

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} u_\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} |x_\nu - x_{\nu+1}| \tag{23}$$

croissent comme une puissance de n.

THÉORÈME III. — *Si les sommes* s_n, *définies par l'égalité* (23), *satisfont à la condition limite*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{s_n}{n^{\frac{1}{\rho}}} = \tau \qquad (\rho > 0,\ \tau \geqq 0),$$

toute fonction entière d'ordre inférieur à ρ, *ou bien d'ordre* ρ *et de degré* A, *vérifiant l'inégalité*

$$\rho A \tau^\rho < \omega^\rho (1 + \omega)^{1-\rho}, \tag{24}$$

où ω *est la racine positive de l'équation*

$$\omega^\rho e^{\omega+1} = 1, \tag{25}$$

est développable en une série (Σ) *correspondant à la suite de points* x_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$), *la convergence étant absolue et uniforme dans tout domaine fini.*

Démonstration. — Reportons-nous à la limitation du reste de la série (Σ) obtenue à la fin du paragraphe 3.

Supposons que le domaine considéré soit compris dans le cercle $|x| \leqq R$. On a, évidemment, pour des valeurs de n assez grandes,

$$|x - x_0| + s_{n-1} \leqq R + |x_0| + s_{n-1} < R + |x_0| + \left(\tau + \frac{\varepsilon}{2}\right)(n-1)^{\frac{1}{\rho}} < (\tau + \varepsilon) n^{\frac{1}{\rho}},$$

où ε est un nombre positif arbitrairement petit. D'autre part, posons

A cause de l'inégalité évidente

$$|x_m| \leqq |x_0| + |x_1 - x_0| + \ldots + |x_{m-1} - x_m| \leqq |x_0| + s_{n-1}$$
$$(m \leqq n-1),$$

on a

$$\xi_n \leqq |x_0| + s_{n-1}.$$

La ligne brisée $xx_0x_1 \ldots x_{n-1}$ reste dans le cercle de centre origine, dont le rayon, égal ou plus grand des nombres $|x|$ et ξ_n, est, par suite, inférieur à

$$R + \xi_n \leqq R + |x_0| + s_{n-1} < (\tau + \varepsilon) n^{\frac{1}{\rho}}.$$

Si l'ordre de la fonction $f(x)$ est ρ' plus petit que ρ, alors, en vertu de l'inégalité (21), pour des valeurs suffisamment grandes de l'indice n, le module maximum M_n de $f^{(n)}(x)$, sur la ligne brisée considérée, satisfait à l'inégalité

$$M_n < M(f^{(n)}, \xi_n + R) < M\left(f^{(n)}, (\tau + \varepsilon) n^{\frac{1}{\rho}}\right) < n! \left[(1+\varepsilon)\frac{A e \rho'}{n}\right]^{\frac{n}{\rho'}},$$

donc nous aurons

$$|R_n(x)| \leqq \frac{M_n}{n!}(|x - x_0| + s_{n-1})^n < \left[(1+\varepsilon)\frac{(\tau+\varepsilon)(A e \rho')^{\frac{1}{\rho'}}}{n^{\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho}}}\right]^n,$$

d'où il suit que $R_n(x)$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Si l'ordre de $f(x)$ est égal à ρ, il résulte de l'inégalité (21')

(26) $$|R_n(x)| < [(1+\varepsilon)(\tau+\varepsilon) A \rho \lambda^{\rho-1} e^{A\lambda^\rho}]^n, \qquad \text{où } A\lambda^{\rho-1}[\lambda - (\tau+\varepsilon)] = \frac{1}{\rho}.$$

Par conséquent, il suffit que l'on ait

(27) $$\tau A \rho \lambda^{\rho-1} e^{A\lambda^\rho} < 1,$$

avec

(28) $$A\lambda^{\rho-1}(\lambda - \tau) = \frac{1}{\rho},$$

pour que le reste tende uniformément vers zéro, car ε est arbitrairement petit.

Or, à l'aide de (28), on peut écrire l'inégalité (27) sous la forme

$$(A \rho \lambda^\rho - 1) e^{A\lambda^\rho} < 1,$$

ce qui veut dire que $A\rho\lambda^\rho - 1$ est inférieur à la racine ω de l'équation $\omega^\rho e^{\omega+1} = 1$. Or, l'inégalité $A\rho\lambda^\rho - 1 < \omega$ (29) équivaut à (24). En effet,

$$\psi(\omega) = \omega^\rho(1+\omega)^{1-\rho}$$

étant une fonction croissante de l'argument positif ω, on peut écrire, au lieu de (29),

$$\psi(A\rho\lambda^\rho - 1) < \psi(\omega),$$

et l'on a, grâce à (28),

$$\psi(A\rho\lambda^\rho - 1) = (A\rho\lambda^\rho - 1)^\rho (A\rho\lambda^\rho)^{1-\rho} = (A\rho\tau\lambda^{\rho-1})^\rho (A\rho\lambda^\rho)^{1-\rho} = \rho A \tau^\rho.$$

Notre théorème est démontré.

Le cas particulier le plus intéressant est celui de l'ordre *un*. La condition (24) devient

$$A\tau < \omega, \tag{24'}$$

où ω est la racine de l'équation $\omega e^{\omega+1} = 1$. On trouve

$$\omega = 0.278\ldots.$$

Un premier exemple est fourni par la série d'Abel (n° 2). Si

$$x_n = a + nl,$$

on obtient

$$\tau = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_n}{n} = |l|.$$

Une fonction $f(x)$ d'ordre $\rho \leqq 1$ est développable en série d'Abel pourvu que, dans le cas $\rho = 1$, la raison de la progression arithmétique que forment les x_n soit inférieure en module à $\frac{0.278\ldots}{A}$, où A est le degré de $f(x)$. C'est le résultat dû à Halphen.

Supposons encore que l'on ait

$$\tau = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_n}{\sqrt{n}} \qquad (0 \leqq \tau < \infty):$$

le développement sera possible pour toutes les fonctions entières d'ordre $\rho \leqq 2$ à condition que le degré A vérifie l'inégalité

$$(24'') \qquad 2A\tau^2 < \frac{\omega^2}{\omega+1} = 0{,}155\ldots,$$

car, cette fois, ω est égal à $0{,}477\ldots$.

Signalons encore le cas limite suivant du théorème III : si l'on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log s_n}{\log n} = 0,$$

le développement (Σ) a lieu pour toutes les fonctions entières d'ordre fini.

Dans ce qui précède, nous n'avons fait aucune autre hypothèse relative à la suite x_n que celle de la limitation de la croissance des sommes s_n. Or, il peut se faire que la distribution des x_n soit telle que ξ_n croisse moins vite que s_n, le cas où les ξ_n sont bornés n'étant pas exclu.

Les résultats qu'on obtient en limitant la croissance des ξ_n sont un peu plus précis que ceux du théorème précédent.

Complément au théorème III. — *Si, aux hypothèses du théorème III, on ajoute la restriction*

$$(30) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|x_n|}{n^{\frac{1}{\rho}}} = \theta\tau \qquad (0 < \theta < 1),$$

les fonctions entières d'ordre ρ et de degré A admettent le développement (Σ), même dans le cas où l'on a

$$(31) \qquad \rho A(\theta\tau)^\rho < \omega^\rho(\omega+1)^{1-\rho},$$

ω désignant la racine positive de l'équation

$$(32) \qquad \omega^\rho e^{\omega+1} = \theta^\rho.$$

En effet (¹), l'inégalité (26) subsiste dans le cas considéré, λ dési-

---

(¹) Observons que l'on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|x_n|}{n^{\frac{1}{\rho}}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\xi_n}{n^{\frac{1}{\rho}}}.$$

gnant, cette fois, la racine positive de l'équation

$$A\lambda^{\rho-1}[\lambda-(\theta\tau+\varepsilon)]=\frac{1}{\rho}.$$

La condition de convergence (27) a lieu aussi, λ étant donné par

$$A\lambda^{\rho-1}(\lambda-\theta\tau)=\frac{1}{\rho};$$

et elle est équivalente à la suivante

$$(A\rho\lambda^{\rho}-1)e^{A\lambda^{\rho}}<\theta$$

ou bien à

$$A\rho\lambda^{\rho}-1<\omega,$$

ω étant définie par (32). La transformation finale avec la fonction $\psi(\omega)$ nous ramène enfin à (31).

Si θ tend vers zéro, ω, d'après (32), est asymptotiquement égal à $\frac{\theta}{e^{\frac{1}{\rho}}}$, et l'inégalité (31) devient

$$\rho A\tau^{\rho}<\frac{1}{e}. \tag{31'}$$

Aussi, *le cas important où l'on a*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_n|}{n^{\frac{1}{\rho}}}=0 \tag{30'}$$

(c'est-à-dire $\theta=0$), *n'est-il pas exclu, mais l'inégalité* (31) *est remplacée alors par une inégalité plus simple et moins restrictive* (31').

En écrivant (31) sous la forme

$$\rho A\tau^{\rho}<\left(\frac{\omega}{\theta}\right)^{\rho}(\omega+1)^{1-\rho}$$

et, en désignant le second membre par Φ, on trouve

$$\frac{d\Phi}{d\theta}=-\left(\frac{\omega}{\theta}\right)^{\rho+1}\cdot\frac{\rho}{(\omega+1)^{\rho}}<0,$$

et l'on vérifie aisément que Φ croît lorsque θ décroît de 1 jusqu'à 0.

Un exemple, qui correspond au cas $\theta=0$, est fourni par le développement procédant suivant les polynomes d'Euler (4) du n° 2; cette formule est valable pour toutes les fonctions entières d'ordre inférieur ou égal à 1 à condition, toutefois, que, si $\rho = 1$, le degré A satisfasse à l'inégalité

$$A < \frac{1}{e\tau} = \frac{1}{2e|a|}.$$

CHAPITRE IV.

9. *Distribution des zéros des dérivées successives. Les fonctions entières d'ordre fini.* — Le théorème III nous donne des renseignements sur les zéros des dérivées des fonctions entières d'ordre fini.

Une fonction entière $f(x)$ étant d'ordre ρ et de degré A

$$(0 < \rho < \infty, \quad 0 < A < \infty),$$

si une suite de points $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ est déterminée de telle manière que x_n soit un zéro de la $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, on a nécessairement

$$(33) \qquad \tau' = \underline{\lim}_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho}}} \sum_{\nu=0}^{n-1} u_\nu \geqq \frac{\omega(\omega+1)^{\frac{1}{\rho}-1}}{(A\rho)^{\frac{1}{\rho}}} \qquad (u_\nu = |x_\nu - x_{\nu+1}|),$$

où ω est la racine positive de l'équation

$$(25) \qquad \omega^\rho e^{\omega+1} = 1.$$

Si le degré A est égal à zéro, on a même

$$\tau' = \underline{\lim}_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho}}} \sum_{\nu=0}^{n-1} u_\nu = \infty,$$

cette dernière relation étant encore valable pour toutes les fonctions d'ordre inférieur à ρ.

Il est à remarquer que c'est la limite inférieure qui figure dans le premier membre de l'inégalité (33), tandis que c'est la limite supérieure correspondante qui figurait dans l'énoncé du théorème III. Ceci tient à ce que, en vertu des hypothèses $f^{(m)}(x) = 0$ $(m \geqq 0)$, on a

$$f(x) = R_n(x)$$

et, pour faire voir que l'on a $f(x) \equiv 0$, il suffit de démontrer

$$\varliminf_{n \to \infty} | R_n(x) | = 0,$$

et c'est ce qu'on démontre justement en partant de l'inégalité contraire à (33).

D'une manière semblable, on obtient le corollaire suivant du complément au théorème III (p. 32).

Une fonction entière $f(x)$ $(\not\equiv 0)$ étant d'ordre ρ et de degré A $(0 < \rho < \infty, 0 < A < \infty)$ et la signification des x_m et des u_m $(m \geqq 0)$ restant la même que précédemment, l'hypothèse

$$\omega^{\rho}(\omega + 1)^{1-\rho} < \rho A \tau'^{\rho} < \frac{1}{e},$$

où ω est défini par l'équation $\omega^{\rho} e^{\omega+1} = 1$, et où l'on a posé

$$\tau' = \varliminf_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho}}} \sum_{\nu=0}^{n-1} u_{\nu},$$

entraîne la relation

$$\varlimsup_{n \to \infty} \frac{|x_n|}{n^{\frac{1}{\rho}}} \geqq \theta' \tau',$$

θ' étant lié à τ' par le système des équations

$$\rho A (\theta' \tau')^{\rho} = \omega'^{\rho} (\omega' + 1)^{1-\rho},$$
$$\omega'^{\rho} e^{\omega'+1} = \theta'^{\rho}.$$

Voici une conséquence particulière intéressante : *si $f(x)$ est une fonction d'ordre un et de degré A (> 0), il est impossible que toutes les dérivées $f^{(n)}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ possèdent des zéros dans un cercle de rayon R fixe tel que*

$$R < \frac{1}{2eA}.$$

Si $f(x)$ est d'ordre inférieur à un ou d'ordre un et de degré zéro, il est impossible que toutes les dérivées possèdent des zéros dans un domaine fini.

Admettons le contraire. Si chacune des dérivées $f^{(n)}(x)$ possède au moins un zéro x_n dans le cercle de rayon R inférieur à $\frac{1}{2eA}$, on a, évidemment,

$$\tau' \leqq 2R < \frac{1}{Ae},$$

donc

$$A\tau' < \frac{1}{e}.$$

Comme

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_n|}{n^{\frac{1}{\rho}}} = 0.$$

on doit avoir

$$\tau'\theta' = 0,$$

ce qui entraîne

$$\omega' = 0, \qquad \theta' = 0, \qquad \tau' = \frac{1}{Ae},$$

et ceci est une contradiction avec notre hypothèse.

On peut énoncer autrement les propositions de ce paragraphe, par exemple, *une fonction entière quelconque $f(x)$ d'ordre ρ et de degré A est entièrement déterminée par l'ensemble des valeurs $f^{(n)}(x_n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, si la condition*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho}}} \sum_{\nu=0}^{n-1} |x_\nu - x_{\nu+1}| < \frac{\omega(\omega+1)^{\frac{1}{\rho}-1}}{(A\rho)^{\frac{1}{\rho}}}$$

avec $\omega^\rho e^{\omega+1} = 1$ est vérifiée, etc.

Exemples. — 1° Soit

$$f(x) = x e^{Ax} \qquad (A > 0).$$

On trouve

$$f^{(n)}(x) = A^n e^{Ax}\left(x + \frac{n}{A}\right).$$

En posant

$$x_n = -\frac{n}{A},$$

il s'ensuit

et l'inégalité

$$\tau' \geqq \frac{0,278\ldots}{A}$$

est satisfaite.

2° Posons

$$f(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} x^\nu}{\nu!} \qquad (|\alpha| \leqq 1,\ \alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1).$$

On a l'identité immédiate

$$f'(x) = f(\alpha x)$$

donc, en général,

$$f^{(n)}(x) = \alpha^{\frac{n(n-1)}{2}} f(\alpha^n x).$$

Par suite, les zéros de $f(x)$ et de $f^{(n)}(x)$ se correspondent un à un de telle manière que, ξ étant un zéro de $f(x)$, $\xi\alpha^{-n}$ est le zéro homologue de $f^{(n)}(x)$.

Soit

$$\alpha = e^{i\varphi} \qquad (0 < \varphi < 2\pi).$$

Posons

$$x_n = \xi\alpha^{-n} = \xi e^{-in\varphi};$$

alors

$$|x_n - x_{n+1}| = 2|\xi| \sin\frac{\varphi}{2};$$

donc

$$\tau' = 2|\xi| \sin\frac{\varphi}{2}.$$

D'après notre théorème, on a

$$\tau' \geqq \frac{1}{e}$$

ou bien

$$|\xi| \geqq \frac{1}{2e\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

On en conclut que $f(x)$ ne s'annule pas dans le cercle de centre origine et de rayon $\frac{1}{2e\sin\frac{\varphi}{2}}$. Lorsque φ tend vers zéro, ce rayon augmente indéfiniment ainsi qu'il fallait s'y attendre, car $f(x)$ converge alors vers e^x.

3° Considérons $f(x) = e^{-Ax^2}(A > 0)$. Le calcul nous donne

$$e^{Ax^2} \cdot \frac{(-1)^n}{A^n} \cdot \frac{n!}{(2n)!} f^{(2n)}(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{n!}{(n-\nu)!\,(2\nu)!} (2x\sqrt{A})^{2\nu} = \varphi_n(2x\sqrt{An}),$$

où l'on a posé

$$\varphi_n(u) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{\nu-1}{n}\right)\frac{u^{2\nu}}{(2\nu)!}.$$

Or, $\varphi_n(u)$ tend d'une manière uniforme vers $\cos u$ dans tout domaine fini. Par suite, le plus petit zéro de $\varphi_n(u)$ (positif, pour fixer les idées) tend vers le plus petit zéro positif de $\cos u$, c'est-à-dire vers $\frac{\pi}{2}$. Il en résulte que le plus petit zéro positif de $f^{(2n)}(x)$, soit x_{2n}, satisfait à l'égalité asymptotique

$$x_{2n} \sim \frac{\pi}{4\sqrt{An}}.$$

En posant $x_{2n+1} = 0$, on obtient

$$s_{2n+1} \sim s_{2n} = |x_{2n} - x_{2n-1}| + |x_{2n-1} - x_{2n-2}| + \ldots + |x_2 - x_1| \sim$$

$$\sim 2\sum_{1}^{n} x_{2\nu} \sim \pi\sqrt{\frac{n}{A}}.$$

Donc

$$\tau' = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{\sqrt{n}} = \frac{\pi}{\sqrt{2A}},$$

résultat conforme à l'inégalité exigée

$$\tau' \geqq \frac{1}{\sqrt{2Ae}}.$$

4° Soit $f(x) = e^x - e^{zx}$, z étant un nombre tel que $|z| \leqq 1$, $z \neq 1$. (Le cas $|z| > 1$ se ramène à celui que nous envisageons.) On a

$$f^{(n)}(x) = e^x - z^n e^{zx}.$$

Les zéros de $f^{(n)}(x)$ sont compris dans la formule

$$\frac{n \log z + 2\lambda\pi i}{1 - z} \quad (\lambda \text{ entier arbitraire}).$$

Posons

$$x_n = n\frac{\log z}{1-z},$$

la détermination du logarithme étant choisie de telle manière que $|\log z|$ soit le plus petit possible. Comme tous les points x_n sont situés sur la même demi-droite, on obtient

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_n|}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n} = \left|\frac{\log z}{1-z}\right|,$$

d'où il résulte

$$A \geqq A_1 = \omega\left|\frac{1-z}{\log z}\right| \qquad \text{avec } \omega e^{\omega+1} = 1.$$

Déterminons la suite x_n d'une autre manière, en choisissant x_n de sorte que $|x_n|$ soit minimum :

$$x_n = \frac{1}{1-z}\left(n\log z - 2\pi i\left[n\frac{\mathrm{I}\log z}{2\pi}+\frac{1}{2}\right]\right) \quad (^1).$$

On trouve

(34) $$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_n|}{n} = \theta\tau = \frac{\log|z|}{|1-z|}.$$

Calculons τ. On a

$$x_{n+1}-x_n = \frac{\log z - 2\pi i}{1-z} \quad \text{ou} \quad \frac{\log z}{1-z},$$

suivant qu'il existe ou non un nombre entier dans l'intervalle

$$\left(n\frac{\mathrm{I}\log z}{2\pi}+\frac{1}{2},\ (n+1)\frac{\mathrm{I}\log z}{2\pi}+\frac{1}{2}\right).$$

Par conséquent,

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n-1}|x_\nu - x_{\nu+1}| = m\left|\frac{(\log z - 2\pi i)}{1-z}\right| + (n-m)\left|\frac{\log z}{1-z}\right|,$$

où m désigne le nombre des entiers compris dans l'intervalle

$$\left(\frac{1}{2},\ (n+1)\frac{\mathrm{I}\log z}{2\pi}+\frac{1}{2}\right).$$

Puisque

$$m \sim n\frac{\mathrm{I}\log z}{2\pi},$$

(1) On suppose $0 \leqq \mathrm{I}\log z < 2\pi$.

on obtient

$$(35) \qquad \tau = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = \frac{\mathrm{I}\log z}{2\pi}\left|\frac{(\log z - 2\pi i)}{1-z}\right| + \left(1 - \frac{\mathrm{I}\log z}{2\pi}\right)\left|\frac{\log z}{1-z}\right|.$$

Les valeurs de τ et θ étant définies, en fonction de z, par les égalités (34) et (35), on conclut que

$$A \geqq A_2 = \frac{\omega}{\theta\tau},$$

ω étant la racine de l'équation $\omega e^{\omega+1} = \theta$. D'après notre théorie, il faudrait choisir le plus grand des nombres A_1 et A_2.

Poussons notre étude un peu plus loin en supposant que l'on ait $z = e^{i\varphi}(0 < \varphi \leqq \pi)$. On obtient dans ce cas

$$A_1 = \frac{2\omega \sin\frac{\varphi}{2}}{\varphi} \qquad (\text{où } \omega\, e^{\omega+1} = 1),$$

$$A_2 = \frac{2\pi \sin\frac{\varphi}{2}}{e\varphi(2\pi - \varphi)}.$$

On s'assure aisément que, lorsque φ croît de 0 à π, l'expression A_1 décroît de ω à $\frac{2\omega}{\pi}$ et l'expression A_2 croît de $\frac{1}{2e}$ à $\frac{2}{e\pi}$. On a $A_1 > A_2$ ou $A_1 < A_2$ suivant que $\varphi < \varphi^\star$ ou $\varphi > \varphi^\star$, où

$$\varphi^\star = \left(2 - \frac{1}{e\omega}\right)\pi \sim 0{,}68\pi.$$

10. *Convergence des séries* (Σ). *Fonctions entières d'ordre zéro ou infini.* — Passons en revue brièvement l'étude des séries (Σ) dans le cas où les sommes sections $s_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} u_\nu$, supposées indéfiniment croissantes, sont d'un ordre de croissance plus élevé ou moins élevé qu'une puissance quelconque de n. Il suffira de considérer deux cas typiques.

THÉORÈME IV. — *Si l'on a*

$$\overline{\lim} \frac{\log s_n}{\frac{1}{}} = \tau \qquad (\rho > 0,\ \tau \geqq 0),$$

toute fonction entière $f(x)$ d'ordre zéro et satisfaisant à la condition

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,\frac{\log M(f,\,r)}{(\log r)^{1+\rho}}=A \qquad (A \geqq 0)$$

est développable en une série (Σ) correspondant à la suite

$$x_\nu \qquad (\nu=0,\,1,\,2,\,\ldots),$$

la convergence étant absolue et uniforme dans tout domaine fini, pourvu que la relation

$$A\tau^\rho<\frac{\rho^\rho}{(1+\rho)^{1+\rho}} \tag{36}$$

soit vérifiée.

Démonstration. — Comme précédemment, nous partirons de l'inégalité

$$|R_n(x)|<\frac{M(f^{(n)},\,s_n)}{n!}\,s_n^n.$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit, on a, pour n assez grand,

$$s_n<e^{(\tau+\varepsilon)n^{\frac{1}{\rho}}}.$$

En posant, dans l'inégalité fondamentale (9) du n° 4,

$$r=e^{(\tau+\varepsilon)n^{\frac{1}{\rho}}},\qquad R=e^{\left[\frac{n}{(A+\varepsilon)(1+\rho)}\right]^{\frac{1}{\rho}}},$$

ce qui est possible car, en vertu de (36), R est supérieur à r pour des valeurs de n suffisamment grandes, on obtient, en vertu de nos hypothèses,

$$\frac{M(f^{(n)},\,s_n)}{n!}<\frac{e^{(A+\varepsilon)\log^{1+\rho}R}}{(R-r)^n}=\frac{e^{\frac{1}{(A+\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}}\left(\frac{n}{1+\rho}\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}}}}{\Big[\quad\cdots\quad\Big]^n}\sim e^{-\frac{\rho\,n^{\frac{1+\rho}{\rho}}}{(A+\varepsilon)^{\frac{1}{\rho}}(1+\rho)^{\frac{1+\rho}{\rho}}}}$$

Comme ε est arbitrairement petit, la quantité entre parenthèses diffère aussi peu qu'on le veut de

$$\frac{\rho}{A^{\frac{1}{\rho}}(1+\rho)^{\frac{1+\rho}{\rho}}} - \tau \qquad (\text{si } A > 0),$$

et cette dernière quantité, d'après (36), est positive. Il en résulte que ε étant choisi suffisamment petit, le second membre de (37), donc le premier aussi, tend vers zéro. La même conclusion a lieu, si $A = 0$.

Corollaire. — *Si, x_n étant un zéro de la $n^{ième}$ dérivée $f^{(n)}(x)$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{\rho}}} \log \sum_{\nu=0}^{n-1} u_\nu = \tau \qquad (u_\nu = |x_\nu - x_{\nu+1}|,\ \rho > 0,\ \tau \geqq 0),$$

la fonction $f(x)$ supposée non identiquement nulle, jouit de la propriété suivante

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(f, r)}{(\log r)^{1+\rho}} \geqq \frac{\rho^\rho}{(1+\rho)^{1+\rho}} \frac{1}{\tau^\rho} \qquad (\text{si } \tau > 0)$$

ou bien n'est pas entière. Dans le cas où $\tau = 0$, la dernière inégalité doit être remplacée par la suivante

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(f, r)}{(\log r)^{1+\rho}} = \infty.$$

Exemple. — Revenons à la fonction $f(x)$ considérée dans l'exemple (2) du n° 9, en supposant cette fois $|\alpha| < 1$. ξ étant un zéro de $f(x)$, $\xi\alpha^{-n}$ est un zéro de $f^{(n)}(x)$. En posant $x_n = \xi\alpha^{-n}$, on obtient

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \log \sum_{\nu=0}^{n-1} u_\nu = \log\left|\frac{1}{\alpha}\right|.$$

Par suite, on doit avoir

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log M(f, r)}{\log^2 r} \geqq \frac{1}{4\log\left|\frac{1}{\alpha}\right|}.$$

THÉORÈME V. — *Si l'on a*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_n}{(\log n)^{\frac{1}{\rho}}} = \tau \qquad (\rho > 0,\ \tau \geqq 0),$$

toute fonction entière $f(x)$ satisfaisant à la condition

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(f, r)}{r^\rho} = A \qquad (A \geqq 0)$$

est développable en série (Σ) correspondant à la suite

$$x_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

la convergence étant uniforme dans tout domaine fini, pourvu que la relation

(38) $$A\tau^\rho < \frac{1}{(e+1)^\rho}$$

soit vérifiée.

COMPLÉMENT. — *Si l'on adjoint, aux hypothèses du théorème précédent, la condition*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|x_n|}{\log^{\frac{1}{\rho}} n} = \theta\tau \qquad (0 \leqq \theta < 1),$$

la relation (38) *peut être remplacée par une relation moins restrictive*

(39) $$A\tau^\rho < \frac{1}{(e+\theta)^\rho}.$$

Démonstration. — Comme le théorème V n'est que le cas limite du complément, lorsque $\theta = 1$, il suffira de démontrer le complément.

On a, pour n suffisamment grand,

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n!} M\left[f^{(n)}, (\theta\tau + \varepsilon)\log^{\frac{1}{\rho}} n\right] (\tau+\varepsilon)^n (\log n)^{\frac{n}{\rho}},$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit. Posons, dans l'inégalité (9) du n° 4,

$$r = (\theta\tau + \varepsilon)\log^{\frac{1}{\rho}} n, \qquad R = \left(\frac{\log n}{A+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

[ce qui est possible grâce à (39)]; nous obtenons comme plus haut

$$\frac{1}{n!}\mathrm{M}\left[f^{(n)}, (\theta\tau+\varepsilon)(\log n)^{\frac{1}{\rho}}\right] < \frac{e^{e^{(\mathrm{A}+\varepsilon)\mathrm{R}^{\rho}}}}{\left[\mathrm{R}-(\theta\tau+\varepsilon)(\log n)^{\frac{1}{\rho}}\right]^{n}} =$$

$$= \left[\frac{e}{\left(\frac{1}{\mathrm{A}+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho}}-(\theta\tau+\varepsilon)}\right]^{n}\frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{\rho}}}.$$

Il en résulte

$$|\mathrm{R}_n(x)| < \left[\frac{e(\tau+\varepsilon)}{\left(\frac{1}{\mathrm{A}+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\rho}}-(\theta\tau+\varepsilon)}\right]^{n}.$$

D'après (39), on peut choisir ε tellement petit que la quantité entre parenthèses soit inférieure à l'unité, et le reste $\mathrm{R}_n(x)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Corollaire. — *Si x_n étant un zéro de la $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}(x)$, on a*

$$(40)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log^{\frac{1}{\rho}} n}\sum_{\nu=0}^{n+1} u_\nu = \tau \qquad (u_\nu = |x_\nu - x_{\nu+1}|,\ \rho>0,\ \tau\geqq 0),$$

la fonction $f(x)$, supposée non identiquement nulle, jouit de la propriété suivante

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log \mathrm{M}(f, r)}{r^{\rho}} \geqq \left[\frac{1}{(e+1)\tau}\right]^{\rho} \qquad (\text{si } \tau>0)$$

ou bien n'est pas entière. Dans le cas où $\tau=0$, la dernière inégalité doit être remplacée par

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log \mathrm{M}(f, r)}{r^{\rho}} = \infty.$$

Si l'on joint à (40) la condition

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{|x_n|}{\log^{\frac{1}{\rho}} n} = \theta\tau \qquad (0\leqq\theta<1),$$

on obtient une inégalité plus restrictive

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log \mathrm{M}(f, r)}{r^{\rho}} \geqq \left[\frac{1}{(e+\theta)\tau}\right]^{\rho}.$$

Il paraît y avoir peu d'intérêt à poursuivre l'étude de la convergence des séries (Σ) en admettant que les sommes s_n croissent de plus en plus rapidement ou de plus en plus lentement, ou bien en caractérisant l'ordre de croissance des s_n par des relations asymptotiques plus précises que celles dont on s'est servi dans les théorèmes III-V.

Ce qui précède suffit pour énoncer ce fait général : plus faible est la croissance des sommes s_n, plus vaste est la classe des fonctions qui admettent le développement (Σ) correspondant.

11. *Remarque sur le choix des points x_n.* — Dans les théorèmes III-V rien n'était supposé sur la distribution des points x_n dans le plan, sauf la restriction relative à la croissance des sommes s_n. D'autre part, la fonction $f(x)$ était soumise à la seule limitation concernant la croissance. Ces deux conditions remplies, la fonction $f(x)$ admet le développement (Σ) correspondant. Or, si une fonction $f(x)$ étant donnée, on choisit convenablement les points x_n, le développement peut avoir lieu avec des hypothèses beaucoup moins restrictives que celles de nos théorèmes. Quelques exemples suffiront pour le faire voir.

D'après le théorème III, toute fonction entière d'ordre 1 et de degré 1 est développable en une série (Σ) pourvu que l'on ait

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_n}{n} < \omega = 0,278\ldots.$$

Soit, en particulier, $f(x) = \sin x$. On choisira tous les points x_n *réels*. On a sur l'axe réel, pour toutes les valeurs de n,

$$\left| \frac{d^n}{dx^n} \sin x \right| \leqq 1.$$

C'est pourquoi, il s'ensuit

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n!} s_n^n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{e s_n}{n} \right)^n.$$

Il suffit d'avoir

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_n}{n} < \frac{1}{e} = 0,367\ldots$$

pour que le développement soit possible.

L'exemple suivant est dû à Halphen et concerne les séries d'Abel.

Soit $x_n = nt (n = 0, 1, 2, \ldots)$, $f(x) = e^x$. Ainsi que le théorème III nous l'a appris, le développement

$$(\Sigma) \qquad e^x = 1 + \sum_1^{\infty} e^{nt} \frac{x(x-nt)^{n-1}}{n!}$$

est valable dans tout le plan de la variable x, si le paramètre t remplit la condition $|t| < \omega$. Or, le module du $n^{\text{ième}}$ terme de la série précédente étant asymptotiquement égal à

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{x}{t} e^{-\frac{x}{t}} \right| \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} (|t| e^{\mathcal{R}t+1})^n \qquad (t \neq 0),$$

on s'assure directement que la série est divergente ou convergente suivant que l'expression

$$T = |t| e^{\mathcal{R}t+1}$$

est supérieure ou inférieure à 1. Remarquons en passant qu'il y a divergence pour $t = \omega + \varepsilon$, quelque petit que soit $\varepsilon > 0$, de manière que, sans introduire d'hypothèses particulières, le théorème III nous donne une borne exacte pour le degré de la fonction à développer, au moins dans le cas où $\rho = 1$. La région du plan définie par l'inégalité $T = 1$ est formée de deux parties dont la première $(\mathcal{A})$ correspondant à

$$\mathcal{R}t \geqq -1$$

a l'aspect d'une boucle entourant l'origine, tandis que la seconde $(\mathcal{B})$, qui correspond à $\mathcal{R}t \leqq -1$, s'étend à l'infini; elles n'ont qu'un seul point $x = -1$ commun. En désignant par $\mathcal{F}(x, t)$ la somme de la série dans le second membre de (Σ), on s'assure que $\mathcal{F}(x, t)$ est une fonction holomorphe des deux variables x et t tant que t reste compris dans un des domaines $(\mathcal{A})$ ou $(\mathcal{B})$. Comme $\mathcal{F}(x, t)$ se réduit à e^x dans le cercle $|t| < \omega$ qui fait partie du domaine $(\mathcal{A})$, on doit avoir

$$\mathcal{F}(x, t) = e^x$$

dans tout le domaine $(\mathcal{A})$. Par conséquent, le développement (Σ) a lieu dans tout ce domaine.

CHAPITRE V.

12. *Fonctions indéfiniment dérivables sur un segment. Distribution des zéros des dérivées successives.* — Il a été établi (n° 4) que, si une fonction est analytique au point $x = X$, aucune suite de zéros des dérivées successives $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ ne peut converger vers le point considéré sans que la série $\Sigma|x_\nu - x_{\nu+1}|$ soit divergente. Or, même dans le cas où la fonction n'est pas analytique (toutes les données étant, cette fois, supposées réelles), notre méthode permet quelquefois d'obtenir certains renseignements sur la distribution des zéros x_n. La proposition suivante nous en présentera un exemple.

THÉORÈME. VI. — *Soit $f(x)$ une fonction d'une variable réelle x, définie dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$, où elle est indéfiniment dérivable. Désignons par M_n le maximum du module de la $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}(x)$ dans l'intervalle considéré. Soit, d'autre part, $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ une suite de zéros des dérivées successives convergeant vers un point X $(a < X < b)$; la série $\Sigma|x_\nu - x_{\nu+1}| = \Sigma u_\nu$ est supposée convergente et l'on pose*

$$\rho_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} u_\nu.$$

Si $\varphi(n)$ est une fonction croissante de l'indice n, jouissant des propriétés

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log \varphi[(1+k)n]}{\log \varphi(n)} = 1 \qquad (k > 0),$$

alors l'hypothèse

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \sqrt[n]{\dfrac{M_n}{n!}}}{\log \varphi(n)} = \sigma \qquad (\sigma \geqq 0)$$

entraîne la conséquence

$$\underline{\lim} \frac{\log \dfrac{1}{\rho_n}}{\log \varphi(n)} \leqq \sigma.$$

Démonstration. — De la formule

$$f^{(n)}(X)=\int_{x_n}^{X}dx^{(n+1)}\int_{x_{n+1}}^{x^{(n+1)}}dx^{(n+2)}\ldots\int_{x_{n+p-1}}^{x^{(n+p-1)}}f^{(n+p)}(x^{(n+p)})\,dx^{(n+p)},$$

on déduit

$$|f^{(n)}(X)|\leqq\frac{1}{p!}M_{n+p}\left(|X-x_n|+\sum_{\nu=n}^{n+p-2}|x_\nu-x_{\nu+1}|\right)^p<\frac{1}{p!}M_{n+p}(2\rho_n)^p;$$

donc

$$(41)\qquad \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(X)|}{n!}}\leqq\sqrt[n]{\frac{(n+p)!}{n!\,p!}}\left[\frac{M_{n+p}}{(n+p)!}\right]^{\frac{1}{n}}(2\rho_n)^{\frac{p}{n}}=ABC.$$

Soit, par impossible,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\frac{1}{\rho_n}}{\log\varphi(n)}=\tau>\sigma.$$

Désignons par k un entier tel que

$$(42)\qquad k>\frac{\sigma}{\tau-\sigma}$$

et posons, dans (41), $p=kn$. On trouve alors, si n augmente indéfiniment,

$$\lim A=\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}.$$

D'autre part,

$$B<\varphi(n+p)^{(\sigma+\varepsilon)\left(1+\frac{p}{n}\right)}=e^{(\sigma+\varepsilon)(1+k)\log\varphi[(1+k)n]};$$

$$C<\left[\frac{2}{\varphi(n)^{\tau-\varepsilon}}\right]^{\frac{p}{n}}=2^k e^{-k(\tau-\varepsilon)\log\varphi(n)}.$$

Par conséquent,

$$(43)\qquad ABC<K\,e^{-k(\tau-\varepsilon)\log\varphi(n)\left[1-\frac{(\sigma+\varepsilon)(1+k)}{(\tau-\varepsilon)k}\,\frac{\log\varphi[(1+k)n]}{\log\varphi(n)}\right]}.$$

Lorsque n croît indéfiniment, la quantité entre parenthèses tend vers $1-\frac{(\sigma+\varepsilon)(1+k)}{(\tau-\varepsilon)k}$. Si l'on choisit ε suffisamment petit, cette expression, d'après (42), est positive. Il en résulte que le second membre, donc le premier, de l'inégalité (43) est infiniment petit avec $\frac{1}{n}$. Donc, en vertu de (41),

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(X)|}{n!}} = 0.$$

Or, ceci est incompatible avec l'hypothèse $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = X$ (théorème I). Par suite, notre proposition est établie.

A titre d'exemple, considérons la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ dans l'intervalle $(-1 \leqq x \leqq 0)$; on pose $f^{(n)}(0) = 0\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$. On trouve

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{m=1}^{n} \frac{n!\,(n-1)!}{m!\,(m-1)!\,(n-m)!}\,\frac{1}{x^{n+m}}\,e^{\frac{1}{x}}.$$

x étant un nombre négatif, on a

$$\left|\frac{1}{x^{n+m}}\right| e^{\frac{1}{x}} \leqq \left(\frac{n+m}{e}\right)^{n+m} < (n+m)!.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(x)| &< \sum_{m=1}^{n} \frac{n!\,(n-1)!\,(n+m)!}{m!\,(m-1)!\,(n-m)!} \\
&= n! \sum_{m=1}^{n} \frac{(n+m)!}{m!}\,\frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!} \\
&< n! \sum_{m=1}^{n} \frac{(2n)!}{n!}\,\frac{(n-1)!}{(m-1)!\,(n-m)!} \qquad = (2n)!\,2^{n-1};
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{M_n}{n!} < 2^{n-1}\,\frac{(2n)!}{n!},$$

d'où l'on obtient enfin

$$\sqrt[n]{\frac{M_n}{n!}} < \frac{8n}{e} \quad [1].$$

D'après notre théorème, l'inégalité

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{\log \sqrt[n]{\frac{M_n}{n!}}}{\log n} = 1$$

---

[1] Observons que l'on a, d'autre part, $\sqrt[n]{\frac{M_n}{n!}} \geqq \frac{n}{e}$. En effet, h étant un nombre

entraine

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log \frac{1}{\rho_n}}{\log n} \leqq 1,$$

où l'on entend par x_n le plus petit, en module, zéro négatif de la $n^{\text{ième}}$ dérivée, ou bien

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log \frac{1}{|x_n|}}{\log n} \leqq 1 \qquad (\textit{voir } \text{n}^\circ\ 5).$$

Autrement dit, il existe une infinité de valeurs de l'indice n telles que

$$|x_n| > \frac{1}{n^{1+\varepsilon}},$$

quelque petit que soit le nombre positif ε.

CHAPITRE VI.

13. *Les séries générales procédant suivant les polynomes* $P_n(x)$. — Soit une suite de points $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, et $P_n(x)(n = 0, 1, 2, \ldots)$, les polynomes associés à cette suite. Nous allons rechercher sous quelles conditions une série de la forme

$$(44) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

est convergente et quelle est la nature de la fonction qu'elle représente.

Observons d'abord que, x et y étant deux nombres non négatifs,

---

tel que $0 < h < 1$, l'application de la formule de Taylor nous donne

$$f(-h) = \frac{1}{n!}(-h)^n f^{(n)}(-\theta h) \qquad (0 < \theta < 1),$$

donc

$$\frac{M_n}{n!} \geqq \frac{1}{n!}|f^{(n)}(-\theta h)| = \frac{1}{h^n} e^{-\frac{1}{h}}.$$

En posant $h = \frac{1}{n}$, on obtient l'inégalité cherchée.

l'inégalité

$$(x+y)^n \leqq \alpha^{n-1}x^n + \beta^{n-1}y^n \qquad (\alpha, \beta > 1) \tag{45}$$

a toujours lieu, si α et β vérifient l'équation

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

On le démontre bien facilement en déterminant le maximum de la fonction de $t (t > 0)$

$$\psi(t) = \frac{(1+t)^n}{\mu^{n-1}+t^n} \qquad (\mu > 0).$$

A l'aide de la dérivée

$$\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = n \frac{\mu^{n-1} - t^{n-1}}{(\mu^{n-1}+t^n)(1+t)},$$

on s'assure que le maximum de $\psi(t)$ est atteint pour $t = \mu$ et est égal à $\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)^{n-1}$ de manière que l'on a, pour toutes les valeurs positives de t,

$$\frac{(1+t)^n}{\mu^{n-1}+t^n} \leqq \left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)^{n-1}.$$

Il suffira de poser

$$t = \frac{y}{x}, \qquad \mu = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \frac{\mu+1}{\mu} = \beta$$

pour obtenir l'inégalité proposée.

Occupons-nous maintenant de la série (44). En s'appuyant sur l'inégalité (6') du n° 3 ainsi que sur la relation (45), on obtient

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)\right| &\leqq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| |P_n(x)| < |c_0| + \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| (s_n + r_0)^n \\ &< |c_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| (\alpha_n^{n-1} s_n^n + \beta_n^{n-1} r_0^n) \\ &< |c_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \alpha_n^n s_n^n + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \beta_n^n r_0^n, \end{aligned} \tag{46}$$

où l'on a posé

$$r_0 = |x - x_0|, \qquad s_n = \sum^{n-1} u_\nu,$$

et α_n et β_n sont des nombres réels supérieurs à 1, vérifiant l'égalité

$$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=1 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots). \tag{47}$$

Élucidons d'abord le cas où la série Σu_ν est convergente. Soit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{X},$$

et posons

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-\mathrm{X})^n,$$

en désignant par R le rayon de convergence de cette dernière série.

Écrivons l'inégalité (46) pour la série qu'on obtient en différentiant m fois la série (44)

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} c_n \mathrm{P}_n^{(m)}(x)\right| < |c_m| + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!}|c_n|\alpha_n^n s_{n,m}^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!}|c_n|\beta_n^n r_m^n, \tag{48}$$

où l'on a posé

$$r_m = |x - x_m|, \qquad s_{n,m}=\sum_{\nu=m}^{n-1} u_\nu.$$

Soit ε positif arbitrairement petit. On peut choisir m suffisamment grand pour que l'on ait $s_{n,m}<\varepsilon$ quel que soit $n(>m)$. Si l'on pose encore

$$\alpha_n = \frac{\mathrm{R}-\varepsilon}{\varepsilon} \qquad (n \geqq m+1),$$

la première des séries dans le second membre de (48) sera convergente. D'après (47), on trouve les valeurs de β_n

$$\beta_n = \frac{\mathrm{R}-\varepsilon}{\mathrm{R}-2\varepsilon} \qquad (n \geqq m+1).$$

En tenant compte de ce que l'on a, dans l'hypothèse $|x-\mathrm{X}|\leqq \mathrm{R}'$,

$$r_m \leqq |x-\mathrm{X}| + |x_m - \mathrm{X}| < \mathrm{R}'+\varepsilon,$$

on voit que la seconde série dans le second membre de (48) sera aussi convergente dans le cercle $|x - X| \leqq R'$, pourvu que l'on ait

$$\frac{R - \varepsilon}{R - 2\varepsilon}(R' + \varepsilon) < R.$$

Comme, par un choix convenable de ε, la différence $R - R'$ peut être rendue aussi petite qu'on le veut, il est évident que la somme de la série (48) est une fonction holomorphe dans le cercle $|x - X| < R$.

Soit $f(x)$ la somme de la série (44). Si $\varphi(x)$ est une fonction entière, $f(x)$ l'est aussi. De plus, l'application de l'inégalité (46) nous fait voir que l'on a, quelque petit que soit ε, pourvu que $|x| = r$ soit suffisamment grand,

$$M(f, r) < M[\varphi, (1 + \varepsilon) r],$$

de sorte que la croissance de $f(x)$ est à peu près la même que celle de $\varphi(x)$.

Passons au cas où $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \infty$, et admettons pour simplifier $x_0 = 0$, donc $r_0 = r$. Faisons l'hypothèse que la série

$$\sum |c_n| s_n^n$$

est convergente ([1]). Alors, $\lambda_n (n \geqq 0)$ étant une suite de nombres positifs plus grands que un, si la série

$$\sum \lambda_n |c_n| s_n^n$$

est encore convergente, on a nécessairement

$$M(f, r) < K + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \left(\frac{r}{1 - \frac{1}{\sqrt[n]{\lambda_n}}} \right)^n, \tag{49}$$

où K est un nombre constant. Pour le voir, il suffit de faire dans l'iné-

---

([1]) D'ailleurs l'hypothèse contraire n'est pas incompatible avec la convergence de la série (44). Par exemple, ω étant la racine positive de l'équation $\omega e^{\omega + 1} = 1$, la série (44) est convergente uniformément dans tout domaine fini, si $c_n = \dfrac{e^{n\omega}}{n!}$, $x_n = n\omega$, sans que la série $\Sigma |c_n| s_n^n$ soit convergente.

galité (48)

$$\alpha_n = \sqrt[n]{\lambda_n},$$

donc

$$\beta_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt[n]{\lambda_n}}}.$$

Lorsque la série dans le second membre de (49) est convergente (au moins dans un cercle de centre origine), on obtient une limitation de croissance pour la fonction $f(x)$.

Considérons, par exemple, la série, procédant suivant les polynomes d'Abel

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(x-n)^{n-1}}{n^{n+2}\, e^{n^\alpha}} \qquad (0 < \alpha < 1).$$

En posant $\lambda_n = e^{n^\alpha}$, on obtient une série convergente

$$\sum \lambda_n |c_n| s_n^n = \sum \frac{1}{n^2};$$

par conséquent,

$$M(f, r) < K + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{n+2}\, e^{n^\alpha}} \left(\frac{r}{1 - e^{-\frac{1}{n^{1-\alpha}}}} \right)^n,$$

et un calcul facile nous montre que $f(x)$ est une fonction entière d'ordre $\rho = \frac{1}{\alpha}$ et de degré fini.

Mais le seul cas qui nous intéresse dans ce qui suit est celui où l'on a

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, s_n \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda < 1.$$

Alors, on peut poser

$$\lambda_n = \left(\frac{1}{\lambda + \varepsilon} \right)^n,$$

ε étant un nombre arbitrairement petit, et l'on obtient

$$M(f, r) < K + \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \left(\frac{r}{1 - \lambda - \varepsilon} \right)^n.$$

En d'autres termes, on a, pour des valeurs suffisamment grandes de r,

$$(50) \qquad M(f, r) < M\left[\varphi, \left(\frac{1}{1-\lambda} + \varepsilon \right) r \right].$$

En particulier, admettons

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{s_n}{n^\sigma} = \tau, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|} = (\Lambda e \rho)^{\frac{1}{\rho}} \qquad (\sigma, \rho > 0;\ \tau, \Lambda \geqq 0).$$

Si $\sigma = \frac{1}{\rho}$, on a

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} s_n \sqrt[n]{|c_n|} = 0,$$

donc

$$\mathrm{M}(f, r) < \mathrm{M}[\varphi, (1+\varepsilon)r],$$

de sorte que l'ordre et le degré de $f(x)$ ne sauraient surpasser ceux de $f(x)$. Si $\sigma = \frac{1}{\rho}$, on a

$$\lambda = \varlimsup_{n\to\infty} s_n \sqrt[n]{|c_n|} = \tau(\Lambda e \rho)^{\frac{1}{\rho}};$$

par suite, à condition que cette quantité soit inférieure à 1,

$$\mathrm{M}(f, r) < \mathrm{M}\left[\varphi, \frac{1+\varepsilon}{1-\tau(\Lambda e\rho)^{\frac{1}{\rho}}} r\right],$$

donc l'ordre de $f(x)$ est égal à celui de $\varphi(x)$, c'est-à-dire à ρ, tandis que le degré de $f(x)$ est inférieur ou égal à

$$\frac{\Lambda}{\left[1-\tau(\Lambda e\rho)^{\frac{1}{\rho}}\right]^{\rho}}.$$

On peut résumer les résultats essentiels de l'étude précédente sous la forme du

Théorème VII. — *Soit* $\mathrm{P}_n(x)(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *le système des polynomes associés à une suite donnée* $x_0, x_1, x_2, \ldots$. *Posons*

$$u_\nu = |x_\nu - x_{\nu+1}|, \qquad s_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} u_\nu \qquad (n \geqq 1).$$

Soit, d'autre part, $c_0, c_1, c_2, \ldots$ *une suite de nombres complexes. Désignons par* $f(x)$ *et par* $\varphi(x)$ *les sommes des séries* $\sum_0^\infty c_n \mathrm{P}_n(x)$ *et* $\sum^\infty c_n x^n$ *tant qu'elles sont convergentes.*

1° *Si la suite des s_n est bornée, le rayon d'holomorphie de la fonction $f(x)$ au point $x = X = \lim x_n$ ne peut être inférieur à celui de la fonction $\varphi(x)$; si $\varphi(x)$ est une fonction entière, on a la relation*

$$M(f, r) < M[\varphi(1+\varepsilon)r] \qquad (r > r_\varepsilon) \tag{51}$$

quelque petit que soit ε.

2° *En nous plaçant dans l'hypothèse $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \infty$, supposons que l'on ait*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, s_n \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda < 1.$$

La fonction $\varphi(x)$ étant dans ce cas nécessairement entière, la fonction $f(x)$ l'est aussi et la relation (50) est satisfaite.

3° *Si $\varphi(x)$ est d'ordre fini ρ et de degré A, l'ordre de $f(x)$ est inférieur ou égal à ρ, le degré de $f(x)$ dans ce dernier cas ne dépassant pas $\dfrac{A}{(1-\lambda)^\rho}$.*

14. *Un problème d'interpolation transcendant. Existence et unicité de la solution.* — Proposons-nous de déterminer une fonction satisfaisant à une infinité de relations

$$f^{(n)}(x_n) = n!\, c_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{52}$$

où c_n et x_n sont deux suites de nombres données.

Le cas classique bien connu est celui où l'on a $x_n = X\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$. On sait que, pour qu'il existe une solution analytique au point $x = X$, il est nécessaire que les constantes c_n satisfassent à la condition limite

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_n|} < \infty; \tag{53}$$

cette condition supposée vérifiée, une solution est donnée par la série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

et c'est la seule qui soit analytique au point $x = X$; il existe cependant une infinité de solutions qui ne sont pas analytiques.

Les choses se passent d'une manière analogue dans le cas général. Il suffira, pour s'en convaincre, de considérer des hypothèses particulières qui paraissent les plus importantes.

THÉORÈME VIII *a*. — *Admettons que l'on ait* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \mathrm{X}$. *La condition nécessaire de l'existence d'une fonction analytique au point* $x = \mathrm{X}$ *et satisfaisant aux égalités* (52) *consiste en ce que l'inégalité* (53) *soit vérifiée. Si, de plus, la série* Σu_n *est convergente, cette condition est aussi suffisante. Alors, il n'y a qu'une seule solution du problème posé et elle est donnée par la série*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathrm{P}_n(x), \tag{54}$$

les polynomes $\mathrm{P}_n(x)$ *étant associés à la suite* $x_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$. *La fonction* $f(x)$ *est holomorphe dans le cercle* $|x - \mathrm{X}| < \mathrm{R}$ *avec*

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Démonstration. — Soit $\mathrm{X} = 0$. La nécessité de l'inégalité (53) est une conséquence de l'inégalité fondamentale (9) du paragraphe 4. Désignons par ρ le rayon d'un cercle $|x| \leqq \rho$ dans lequel une solution $f(x)$ reste holomorphe et bornée. On obtient, si n est suffisamment grand,

$$|c_n| = \left| \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!} \right| \leqq \frac{1}{n!} \mathrm{M}(f^{(n)}, |x_n|) < \frac{\mathrm{M}(f, \rho)}{|\rho - |x_n||^n},$$

donc

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} \leqq \frac{1}{\rho}.$$

Inversement, supposons que la condition (53) soit remplie. Alors, la fonction

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - \mathrm{X})^n$$

est holomorphe dans un cercle $|x| < \mathrm{R}$, donc, en vertu du théorème VII, 1°, la série (54), qui donne une solution formelle de notre problème, est convergente dans ce même cercle et converge uniformément dans tout domaine intérieur. Par suite, $f(x)$ est holomorphe pour $|x| < \mathrm{R}$. En vertu du théorème I la solution est unique.

Il n'est pas douteux qu'il existe des fonctions qui satisfont aux équations (52) sans être analytiques au point $x = X$, mais, bien entendu, notre procédé de construction ne permet pas de les obtenir.

L'autre éventualité à considérer est caractérisée par le fait que les sommes s_n croissent comme une puissance de n. On fera une hypothèse restrictive sur les nombres $c_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ qui remplacera l'inégalité (53) du cas considéré tout à l'heure, et l'on se proposera de trouver une solution de notre problème dans la classe des fonctions entières de croissance convenablement limitée, ce qui remplacera l'analyticité.

Théorème VIII *b*. — *Posons*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_n}{n^{\frac{1}{\rho}}} = \tau, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|x_n|}{n^{\frac{1}{\rho}}} = \theta\tau, \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|} = K,$$

où ρ, τ, θ, K *sont des nombres réels tels que*

$$\rho > 0, \qquad \tau \geqq 0, \qquad 0 \leqq \theta \leqq 1, \qquad K \geqq 0.$$

1° *Si* $\tau = 0$, *la condition nécessaire et suffisante, pour qu'il existe une fonction entière d'ordre* ρ *et de degré* $A(\geqq 0)$ (¹), *qui vérifie les équations* (52), *est*

$$K \leqq (A e \rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

La solution du problème est fournie par la série

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \tag{54}$$

et elle est unique.

2° *Si* $\tau > 0$, *la condition nécessaire pour que le problème précédent soit résoluble prend la forme*

$$K \leqq K_1,$$

et la condition suffisante sera

$$K < K_2, \tag{55}$$

(¹) On considère ici les fonctions d'ordre inférieur à ρ comme étant d'ordre ρ et de degré zéro.

où

$$K_1 = A\rho\lambda^{\rho-1} e^{A\lambda^\rho},$$

λ étant défini par l'équation

$$(56) \qquad A\lambda^{\rho-1}(\lambda - \theta\tau) = \frac{1}{\rho}$$

et

$$K_2 = \frac{(Ae\rho)^{\frac{1}{\rho}}}{1 + \tau(Ae\rho)^{\frac{1}{\rho}}}.$$

La solution qu'on trouve dans l'hypothèse (55) a toujours la forme (54). La condition d'unicité est

$$\rho A(\theta\tau)^\rho < \omega^\rho(\omega + 1)^{1-\rho},$$

ω étant la racine positive de l'équation $\omega^\rho e^{\omega+1} = \theta^\rho$.

Démonstration. — On s'assure d'abord que $K_1 \geqq K_2$. En effet, on déduit de (56)

$$A\lambda^\rho \geqq \frac{1}{\rho},$$

donc

$$\lambda \geqq \left(\frac{1}{A\rho}\right)^{\frac{1}{\rho}},$$

et, par suite,

$$K_1 \geqq (Ae\rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

D'autre part, évidemment,

$$K_2 \leqq (Ae\rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Le cas 1° s'obtenant par le passage à la limite du cas 2°, il suffira de se placer dans l'hypothèse $\tau > 0$. On trouve immédiatement

$$|c_n| = \left|\frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}\right| \leqq \frac{1}{n!} M\left[f^{(n)}, (\theta\tau + \varepsilon)n^{\frac{1}{\rho}}\right],$$

donc, d'après (21'),

$$K = \overline{\lim_{n \to \infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|} \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!} M\left[f^{(n)}, (\theta\tau + \varepsilon)n^{\frac{1}{\rho}}\right]} \leqq A\rho\lambda^{-1} e^{A\lambda^\rho},$$

λ étant la racine de l'équation

$$A\lambda^{\rho-1}(\lambda - \theta\tau - \varepsilon) = \frac{1}{\rho}.$$

Comme ε est arbitrairement petit, l'égalité (56) en résulte.

Admettons, d'autre part, que l'on ait l'inégalité (55). Il en résulte

$$(55') \qquad K < \frac{1}{\tau}.$$

Alors, il vient

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, s_n \sqrt[n]{|c_n|} \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{s_n}{n^{\frac{1}{\rho}}} \cdot \overline{\lim_{n \to \infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|c_n|} = \tau K < 1,$$

donc, en vertu du théorème VII, 3°, la série (54) est convergente et sa somme $f(x)$ est une fonction entière d'ordre ρ et de degré ne dépassant pas

$$\frac{K^\rho}{e\rho(1 - K\tau)^\rho}.$$

Or, en vertu de (55), cette dernière quantité est inférieure ou égale à A.

En ce qui concerne la condition d'unicité, elle a été obtenue dans les n^{os} 8 et 9).

Exemples. — 1° Soit à déterminer une fonction entière d'ordre 1 vérifiant les équations

$$f^{(2n)}(1) = \alpha^{2n}, \qquad f^{(2n+1)}(-1) = \alpha^{2n+1}.$$

On trouve

$$\rho = 1, \qquad \tau = 2, \qquad \theta = 0, \qquad K = e|\alpha|.$$

La condition $K \leqq K_1$ se réduit à $A \geqq |\alpha|$, donc le degré de la fonction cherchée ne peut être inférieur à $|\alpha|$. Le développement formel (*voir* n° 2),

$$f(x) \sim 1 + \frac{4\alpha}{1!} E_1\left(\frac{1+x}{4}\right) + \frac{(4\alpha)^2}{2!} E_2\left(\frac{1-x}{4}\right) + \frac{(4\alpha)^3}{3!} E_3\left(\frac{1+x}{4}\right) + \ldots$$

est certainement convergent dans tout le plan de x si $|\alpha| < \frac{1}{2e}$, et la somme $f(x)$ est alors une fonction entière d'ordre 1 et de degré $\leqq \frac{|\alpha|}{1 - 2e|\alpha|}$.

Lorsque $|\alpha| \leqq \frac{1}{4e}$, on peut affirmer que $f(x)$ est une solution de degré minimum.

2° Considérons le système des équations

$$f^{(n)}(\sqrt{n}) = n^{\frac{n}{3}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ici, on a

$$\rho = \frac{3}{2}, \qquad \tau = 0, \qquad K = e.$$

La série

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} n^{\frac{n}{3}} \frac{P_n(x)}{n!},$$

où $P_n(x)\,(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sont les polynomes associés à la suite de nombres $\sqrt{n}$, résout le problème. C'est une fonction entière d'ordre $\frac{3}{2}$ et de degré $\leqq \frac{2}{3}\sqrt{e}$, et c'est la seule solution du problème parmi les fonctions entières d'ordre 2 et de degré $\leqq \frac{\omega^2}{2(1+\omega)}$, où ω est défini par l'équation $\omega^2 e^{\omega+1} = 1$.

3° Reprenons l'exemple du n° 12 et proposons-nous de résoudre le système

$$f^{(n)}(nt) = e^{nt} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Si $T = |t| e^{\mathcal{R}t+1} < 1$, on trouve une solution

$$(57) \qquad f_t(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{nt} \frac{x(x - nt)^{n-1}}{n!},$$

qui est une fonction entière d'ordre 1 et dont le degré ne dépasse pas

$$A = \frac{e^{\mathcal{R}t}}{1 - T}.$$

Or, dans la boucle $(\mathcal{A})$ (*voir* le paragraphe 12), $f_t(x)$ est égale à e^x, donc le degré s'abaisse effectivement jusqu'à 1. D'autre part, dans le domaine $(\mathcal{B})$, $f_t(x)$ est certainement différente de e^x car, lorsque t va à l'infini par valeurs négatives, la quantité A tend vers zéro. On détermine la fonction $f_t(x)$ dans ce cas par un artifice [1]. La variable t' étant assujettie à rester dans le domaine $(\mathfrak{A})$ et la variable t dans le domaine $(\mathfrak{B})$, on établit une correspondance biunivoque entre les points de ces deux domaines par la relation

$$t'e^{t'} = te^{t}. \tag{58}$$

Ceci fait, on a

$$f_t(tx) = 1 + \sum_1^{\infty} (te^t)^n \frac{x(x-n)^{n-1}}{n!} = 1 + \sum_1^{\infty} (t'e^{t'})^n \frac{x(x-n)^{n-1}}{n!} = f_{t'}(t'x).$$

Comme il est démontré que, pour t' compris dans $(\mathfrak{A})$, on a

$$f_{t'}(t'x) = e^{t'x},$$

on doit avoir, pour t compris dans $(\mathfrak{B})$,

$$f_t(tx) = e^{t'x},$$

donc

$$f_t(x) = e^{\frac{t'}{t}x}.$$

On voit bien que le degré $\left|\frac{t'}{t}\right|$ de la fonction $f_t(x)$ tend vers zéro lorsque $t \to -\infty$.

Nous avons trouvé deux solutions différentes de notre problème d'interpolation. Or, en abordant directement les équations (52) et en cherchant à en obtenir une solution sous la forme d'une fonction exponentielle

$$f(x) = e^{zx},$$

on serait conduit à considérer une infinité de solutions

$$f_\nu(x) = e^{z_\nu x} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

les paramètres z_ν étant définis par l'équation transcendante

$$ze^{zt} = e^{t}.$$

---

(1) *Voir* G. Pólya *u.* G. Szegö, *Aufgaben u. Lehrsätze aus der Analysis*, I, n° 260, p. 135.

Des combinaisons linéaires

$$f(x) = \Sigma \lambda_\nu e^{\xi_\nu x}$$

seraient encore des solutions.

La contribution essentielle que nous apportons à l'étude de cet exemple classique consiste dans le fait qu'il n'existe qu'une seule solution du problème posé qui soit d'ordre un et de degré inférieur à $\frac{\omega}{|t|}$, où ω est défini par l'équation $\omega e^{\omega+1} = 1$. On en conclut que la série (57) donne certainement la solution, pour ainsi dire la moins croissante dans le cercle $|t| < \omega$ et, d'autre part, dans le domaine $|t'| < \omega$, image du cercle précédent que fournit la transformation (58). Pour des valeurs de t qui correspondent aux points se trouvant en dehors des domaines $(\mathcal{A})$ et $(\mathcal{B})$, il faudrait chercher la solution la moins croissante sous des formes autres que la série d'Abel (57).

4° Considérons enfin le système des équations

$$f(0) = 0, \qquad f^{n}(tn) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+nt)^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots;\ t \neq 0).$$

On a

$$\rho = 1, \qquad \tau = |t|, \qquad \theta = 1, \qquad K = \frac{1}{|t|}.$$

Malgré que l'on ait $K\tau = 1$, la série

$$(59) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+nt)^n} \frac{x(x-nt)^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(nt-x)} \left(\frac{1-\frac{x}{nt}}{1+\frac{1}{nt}} \right)^n$$

est uniformément convergente dans tout domaine, et sa somme $f(x)$, comme on s'assure facilement, est une fonction entière d'ordre 1 et de degré ne dépassant pas $\frac{1}{|t|}$. Ce dernier nombre étant supérieur à $\frac{\omega}{|t|}$, notre méthode ne permet pas de conclure immédiatement que $f(x)$ est la solution la moins croissante. Il est intéressant de signaler que $\log(1+x)$ est encore une solution du problème considéré. Dans son Mémoire, Abel a affirmé que la somme de la série (59) est égale à $\log(1+x)$, à quoi elle se réduit en réalité lorsqu'on fait $t = 0$.

CHAPITRE VII.

15. *Les modules minima des dérivées successives.* — $F(x)$ étant une fonction holomorphe dans le cercle $|x| \leqq R (R \geqq 0)$, on désignera par $m(F, R)$ le module minimum de cette fonction dans le cercle considéré

$$m(F, R) = \min_{\rho \leqq R} |F(\rho e^{i\theta})|.$$

Si $0 \leqq r \leqq R$, on a, évidemment,

$$m(F, r) \geqq m(F, R).$$

Théorème IX *a*. — *Si $f(x)$ est une fonction analytique au point $x = 0$ et possédant en ce point le rayon d'holomorphie* R, *on a*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{m(f^{(n)}, r_n)}{n!}} \geqq \frac{1}{R},$$

pourvu que la série Σr_n soit convergente.

Démonstration. — Soit x_n un point tel que

$$|x_n| \leqq r_n, \qquad |f^{(n)}(x_n)| = m(f^{(n)}, r_n).$$

Comme la série $\Sigma |x_\nu - x_{\nu+1}|$ est aussi convergente, la fonction $f(x)$ est développable en série (Σ) procédant suivant les polynomes $P_n(x)$ associés à la suite $x_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$, la série étant convergente à l'intérieur du cercle $|x| < R$ (théorème I). Les coefficients c_n de cette série ayant les valeurs

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!},$$

on a

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{\frac{m(f^{(n)}, r_n)}{n!}}.$$

Si, par impossible, cette limite était inférieure à $\frac{1}{R}$, la somme de la série, c'est-à-dire la fonction $f(x)$ aurait au point $x = 0$ un rayon d'holomorphie supérieur à R (théorème VII), ce qui est contraire à l'hypothèse.

Puisqu'on déduit immédiatement de l'inégalité fondamentale (9) du paragraphe 4,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{\mathrm{M}(f^{(n)}, r_n)}{n!}} \leqq \frac{1}{\mathrm{R}},$$

à la seule condition $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, on obtient ce corollaire : $f(x)$ étant une fonction analytique au point O et y possédant le rayon d'holomorphie R, on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x_n)|}{n!}} = \frac{1}{\mathrm{R}},$$

pourvu que la série $\Sigma|x_n|$ soit convergente. En particulier, si $f(x)$ est une fonction entière, l'égalité précédente est remplacée par la suivante :

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x_n)|}{n!}} = 0.$$

THÉORÈME IX *b*. — *Si $f(x)$ est une fonction entière d'ordre $\rho(>0)$ et de degré exact $\mathrm{A}(>0)$, on a*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{\frac{m\left(f^{(n)}, \alpha n^{\frac{1}{\rho}-1}\right)}{n!}} \geqq \frac{(\mathrm{A}e\rho)^{\frac{1}{\rho}}}{1+2\alpha\rho(\mathrm{A}e\rho)^{\frac{1}{\rho}}},$$

pourvu que α vérifie l'inégalité

$$(60) \qquad \alpha < \frac{1}{2\rho}\cdot(\mathrm{A}e\rho)^{-\frac{1}{\rho}}.$$

Démonstration. — Supposons, par impossible, que l'inégalité (60) étant satisfaite, on ait en même temps

$$(61) \qquad \mathrm{K} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}}\sqrt[n]{\frac{m\left(f^{(n)}, \alpha n^{\frac{1}{\rho}-1}\right)}{n!}} < \frac{(\mathrm{A}e\rho)^{\frac{1}{\rho}}}{1+2\alpha\rho(\mathrm{A}e\rho)^{\frac{1}{\rho}}}.$$

Soit x_n un point tel que

$$|x_n| \leqq \alpha n^{\frac{1}{\rho}-1}, \qquad |f^{(n)}(x_n)| = m\left(f^{(n)}, \alpha n^{\frac{1}{\rho}-1}\right),$$

on trouve

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n-1}|x_\nu - x_{\nu+1}| \leqq \sum_{\nu=0}^{n-1}(|x_\nu| + |x_{\nu+1}|) \leqq 2\alpha\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\frac{1}{\rho}-1} \sim 2\alpha\rho n^{\frac{1}{\rho}},$$

donc

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{s_n}{n^{\frac{1}{\rho}}} \leqq 2\alpha\rho. \tag{62}$$

L'hypothèse (31′) du paragraphe 8,

$$\rho A \tau^{\rho} < \frac{1}{e}$$

étant vérifiée lorsqu'on pose $\tau = 2\alpha\rho$, en vertu de (60), la fonction $f(x)$ est développable en série (Σ) procédant suivant les polynomes $P_n(x)$ associés à la suite x_n,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(x_n) \frac{P_n(x)}{n!}.$$

Il en résulte

$$|f(x)| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |f^{(n)}(x_n)| \left|\frac{P_n(x)}{n!}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} m\left(f^{(n)}, \alpha n^{\frac{1}{\rho}-1}\right) \frac{|P_n(x)|}{n!}.$$

Puisque l'on obtient, à l'aide de (61) et (62),

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} s_n \sqrt[n]{\frac{m\left(f^{(n)}, \alpha n^{\frac{1}{\rho}-1}\right)}{n!}} \leqq 2\alpha\rho \overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{\frac{m\left(f^{(n)}, \alpha n^{\frac{1}{\rho}-1}\right)}{n!}} = 2\alpha\rho K < 1,$$

le théorème VII, 2°, nous montre que $f(x)$ est entière d'ordre ρ et de degré inférieur ou égal à

$$\frac{K^{\rho}}{e\rho(1 - 2\alpha\rho K)^{\rho}}.$$

Or, d'après (61), cette dernière quantité est inférieure à A, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que le degré de $f(x)$ est égal à A.

Faisons remarquer un cas particulier du théorème IX : si $\tau < \frac{1}{\rho} - 1$, on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{\frac{m(f^{(n)}, \alpha n^{\tau})}{n!}} \geqq (Ae\rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Plus généralement, si $\lim \varepsilon_n = 0$, on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{\frac{m\left(f^{(n)}, \varepsilon_n n^{\frac{1}{\rho}-1}\right)}{n!}} \geqq (Ae\rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

On déduit de cette inégalité, à l'aide de l'inégalité (21) du paragraphe 7, la relation suivante qui paraît intéressante : si les points $x_n (n = 0, 1, 2, \ldots)$ jouissent de la propriété

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{n^{\frac{1}{\rho} - 1}} = 0,$$

on a

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(x_n)|}{n!}} = (\mathrm{A} e \rho)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{63}$$

Il est encore à noter que, dans le théorème IX b, l'exposant $\frac{1}{\rho} - 1$ ne peut être remplacé par un nombre plus grand, ainsi que le fait voir l'exemple $f(x) = e^x$, ni le coefficient α ne peut croître indéfiniment avec n, ce que montre l'exemple

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Par contre, il n'est pas exclu que la borne (60), qui impose une limitation à la croissance de α ne soit pas précise.

Le théorème IX b présente une extension de la proposition suivante, qui est une conséquence du théorème III : si, $f(x)$ étant une fonction d'ordre ρ et de degré A, x_n est un zéro de la $n^{\text{ième}}$ dérivée, il est impossible que l'on ait

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{|x_n|}{n^{\frac{1}{\rho} - 1}} < \frac{1}{2\rho} (\mathrm{A} e \rho)^{-\frac{1}{\rho}}.$$

Il est naturel de juxtaposer le théorème IX b au fait bien connu suivant : si l'on a

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, n^{\frac{1}{\sigma}} \sqrt[n]{\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}} \leqq \mathrm{K},$$

la fonction $f(x)$ est entière d'ordre σ et de degré inférieur ou égal à $\frac{\mathrm{K}^\sigma}{e\sigma}$, ou bien elle n'est pas analytique au point $x = 0$. D'une manière semblable, on déduit de notre théorème : si l'on a

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, n^{\frac{1}{\sigma}} \sqrt[n]{\frac{m\left(f^{(n)}, \alpha n^{\frac{1}{\rho} - 1}\right)}{n!}} \leqq \mathrm{K} \qquad (\sigma \geqq \rho),$$

la fonction $f(x)$ est entière d'ordre σ et de degré inférieur ou égal à $\frac{K^\sigma}{e\sigma}$, ou bien elle n'est pas entière d'ordre ρ et de degré fini A satisfaisant à (60).

On pourrait obtenir des résultats analogues pour les fonctions entières d'ordre nul ou infini.

16. *La variation du logarithme du module des dérivées successives dans une suite de cercles.* — Soient R un nombre positif et F une fonction réelle d'une variable complexe x et qui est définie et continue en chaque point du cercle $|x| \leqq R$. Nous appellerons *variation* V(F, R) de F dans le cercle $|x| \leqq R$ la différence entre le maximum et le minimum de F dans ce cercle :

$$V(F, R) = \max_{|x| \leqq R} F - \min_{|x| \leqq R} F.$$

L'inégalité $r < R$ entraîne, évidemment,

$$V(F, r) \leqq V(F, R).$$

Dans ce qui suit, on posera

$$F = \log |f(x)|,$$

où $f(x)$ est une fonction analytique.

Théorème X*a*. — *Si $f(x)$ est une fonction holomorphe au voisinage du point $x = 0$, on a*

$$(64) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} V(\log|f^{(n)}|, r_n) = 0,$$

pourvu que la série Σr_n soit convergente.

Démonstration. — Soit, contrairement à l'hypothèse,

$$\frac{1}{n} V(\log|f^{(n)}|, r_n) > \delta > 0.$$

Il s'ensuit

$$\log M(f^{(n)}, r_n) - \log m(f^{(n)}, r_n) > n\delta,$$

donc

$$\sqrt[n]{\frac{m(f^{(n)}, r_n)}{n!}} < e^{-\delta} \sqrt[n]{\frac{M(f^{(n)}, r_n)}{n!}}$$

ou bien

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{m(f^{(n)}, r_n)}{n!}} \leq e^{-\delta} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{\mathrm{M}(f^{(n)}, r_n)}{n!}}.$$

Les deux limites supérieures étant, d'après le théorème IX *a* (p. 64), positives et égales entre elles, cette inégalité est impossible.

Théorème X*b*. — *Si $f(x)$ est une fonction entière d'ordre fini $\rho\,(>0)$ et de degré* A, *on a*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \mathrm{V}\left(\log f^{(n)}, \alpha n^{\frac{1}{\rho}-1}\right) \leq \log\left[1+2\alpha\rho(\mathrm{A}e\rho)^{\frac{1}{\rho}}\right], \tag{65}$$

à condition que l'on ait

$$\alpha < \frac{1}{2\rho} \cdot (\mathrm{A}e\rho)^{-\frac{1}{\rho}}. \tag{66}$$

Démonstration. — Admettons, par impossible,

$$\frac{1}{n} \mathrm{V}\left(\log|f^{(n)}|, \alpha n^{\frac{1}{\rho}-1}\right) > \delta > \log\left[1+2\alpha\rho(\mathrm{A}e\rho)^{\frac{1}{\rho}}\right]. \tag{67}$$

Alors, on obtient

$$\log \mathrm{M}\left(f^{(n)}, \alpha n^{\frac{1}{\rho}-1}\right) - \log m\left(f^{(n)}, \alpha n^{\frac{1}{\rho}-1}\right) > n\delta$$

ou bien

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{m\left(f^{(n)}, \alpha n^{\frac{1}{\rho}-1}\right)}{n!}} < e^{-\delta} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{\mathrm{M}\left(f^{(n)}, \alpha n^{\frac{1}{\rho}-1}\right)}{n!}}.$$

Comme la limite supérieure du premier membre est supérieure ou égale à $\dfrac{(\mathrm{A}e\rho)^{\frac{1}{\rho}}}{1+2\alpha\rho(\mathrm{A}e\rho)^{\frac{1}{\rho}}}$ (théorème IX *b*), tandis que celle du second membre est plus petite que $(\mathrm{A}e\rho)^{\frac{1}{\rho}}$ (§ 7), on a

$$\frac{(\mathrm{A}e\rho)^{\frac{1}{\rho}}}{1+2\alpha\rho(\mathrm{A}e\rho)^{\frac{1}{\rho}}} \leq e^{-\delta}(\mathrm{A}e\rho)^{\frac{1}{\rho}},$$

ce qui contredit l'inégalité (67).

Remarque. — On ne pourrait pas s'attendre à remplacer la limite inférieure dans l'énoncé des théorèmes X par la limite supérieure. En effet, une infinité de dérivées, mais certainement pas toutes, peuvent s'annuler dans les cercles considérés.

17. D'après les théorèmes précédents, la nature analytique d'une fonction $f(x)$ étant connue, on sait limiter, dans certains cas, la croissance d'une suite partielle des variations

$$V_n = V_n(\log|f^{(n)}|, r_n). \tag{68}$$

Ici, je me propose d'étudier la question inverse, de caractère plus élémentaire : les variations V_n étant données ($n = 0, 1, 2, \ldots$), qu'est-ce qu'on peut en conclure au sujet de la fonction $f(x)$?

Il est naturel de s'appuyer sur une inégalité qu'on trouve dans un article de MM. E. Landau et O. Tœplitz [1], et qui, avec nos notations, se laisse écrire de la manière suivante :

$$|F'(0)| \leqq \frac{2}{\pi R} V(\mathcal{R}F, R), \tag{69}$$

où $\mathcal{R}F$ est la partie réelle de F et la fonction $F(x)$ est supposée holomorphe dans le cercle $|x| \leqq R$. Si l'on admet que $F(x)$ ne s'y annule pas, on peut remplacer $F(x)$ par $\log F(x)$, et l'on obtient

$$\left|\frac{F'(0)}{F(0)}\right| \leqq \frac{2}{\pi R} V(\log|F|, R). \tag{70}$$

Soit $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ une fonction, holomorphe dans une suite de cercles $|x| \leqq r_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), et telle qu'aucune des dérivées $f^{(n)}(x)$ ne s'annule dans le cercle correspondant; introduisons les quantités V_n définies par la formule (68). L'inégalité (70), où l'on écrit $f^{(n)}(x)$ au lieu de $F(x)$, et l'on pose $R = r_n$, nous donne

$$(n+1)\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \leqq \frac{2}{\pi}\frac{V_n}{r_n}.$$

On en tire, en multipliant,

$$|c_n| \leqq |c_0| \frac{g_n^n}{n!},$$

[1] *Arch. der Mathematik und Physik*, 3e série, t. 11, p. 302.

où g_n est défini par l'égalité

$$g_n = \frac{2}{\pi}\sqrt[n]{\frac{N_0 N_1 \ldots N_{n-1}}{r_0 r_1 \ldots r_{n-1}}}.$$

Il en résulte le théorème suivant :

THÉORÈME XI. — *Si l'on a*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{\sigma} g_n = B \qquad (\sigma > -1,\ B \geqq 0),$$

la fonction $f(x)$ est entière d'ordre $\rho = \frac{1}{\sigma+1}$ et de degré A satisfaisant à l'inégalité

$$A \leqq (\sigma+1)\left(\frac{B}{e^{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma+1}}.$$

Si l'on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{g_n}{n} = B \qquad (B \geqq 0),$$

la fonction $f(x)$ est holomorphe dans le cercle $|x| < R$, où R est égal à $\frac{1}{Be}$ (pour $B > 0$) ou est arbitrairement grand (pour $B = 0$).

Pour la démonstration, il suffit de se reporter à la relation (15) du paragraphe 7.

CHAPITRE VIII.

18. *Variation du logarithme du module dans le domaine réel.* — Il y a lieu de se demander si les résultats du paragraphe précédent subsistent lorsqu'on se place dans le cas d'un domaine réel. Bornons-nous à considérer un segment fini et fixe, soit $0 \leqq x \leqq 1$.

A ce sujet, nous allons établir préalablement une inégalité que vérifient les valeurs absolues minima des dérivées successives d'une fonction réelle $f(x)$, supposée régulièrement monotone dans cet intervalle, c'est-à-dire telle qu'aucune de ses dérivées successives n'y change de signe.

Appelons (C_k) la classe des polynomes $P_k(x)$ de la forme

$$P_k(x) = \int_{x_0}^{x} dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \ldots \int_{x_{k-1}}^{x^{k-1}} dx^k,$$

où les nombres $x_i (0 \leqq i \leqq k-1)$ sont assujettis à ne prendre que deux valeurs : 0 et 1. Je dis que $P_k(x)$ étant un polynome de la classe (C_k), l'une des inégalités

$$(71) \qquad |P_k(x)| \geqq \frac{x^k}{k!} \quad \text{ou} \quad |P_k(x)| \geqq \frac{(1-x)^k}{k!}$$

est satisfaite pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$. Cela est évident pour $k=1$, car alors, la classe des polynomes considérés se réduit à deux : x et $1-x$. Procédons de proche en proche.

Admettons que notre assertion soit démontrée pour $k=n-1$. On obtient

$$|P_n(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} P_{n-1}(x)\, dx \right|,$$

où $P_{n-1}(x)$ est un polynome de la classe (C_{n-1}). En vertu des inégalités (71), il en résulte l'une des inégalités

$$\left| P_n(x) = \right| \int_{x_0}^{x} |P_{n-1}(x)|\, dx \left| \geqq \right| \int_{x_0}^{x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\, dx \left| \text{ ou } \geqq \right| \int_{x_0}^{x} \frac{(1-x)^{n-1}}{(n-1)!}\, dx \bigg|.$$

Le nombre x_0 pouvant être égal à 0 ou à 1, il faut que l'une au moins des quatre inégalités

$$(72) \qquad \begin{cases} |P_n(x)| \geqq \dfrac{x^n}{n!}, & |P_n(x)| \geqq \dfrac{1-x^n}{n!}, \\ |P_n(x)| \geqq \dfrac{(1-x)^n}{n!}, & |P_n(x)| \geqq \dfrac{1-(1-x)^n}{n!} \end{cases}$$

soit satisfaite. Or, en vertu de la relation

$$x^n + (1-x)^n \leqq [x + (1-x)]^n = 1,$$

la seconde et la quatrième des inégalités (72) entraînent respectivement la troisième et la première. Il en résulte notre proposition pour $k=n$, donc pour toutes les valeurs de k En particulier, si $x_0 = 0$, la seconde des inégalités (71) ne peut être satisfaite ; par conséquent, c'est la première qui a lieu. En y posant $x=1$, on obtient

$$(73) \qquad |P_k(1)| \geqq \frac{1}{k!}.$$

Soient maintenant M_n le maximum et m_n le minimum de $|f^{(n)}(x)|$

dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$; désignons par ε_n le nombre $+1$ ou -1, suivant que l'on a $f^{(n)}(x) \geqq 0$ ou $f^{(n)}(x) \leqq 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Appelons x_n le point où $|f^{(n)}(x)|$ atteint sa valeur minimum m_n, de sorte que l'on a

$$f^{(n)}(x_n) = \varepsilon_n m_n.$$

Évidemment, x_n est égal à 0 ou à 1, suivant que $\varepsilon_n \varepsilon_{n+1}$ est égal à $+1$ ou à -1. Grâce à cette remarque, on s'aperçoit que le nombre des unités dans la suite

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_{k-1}$$

est égal au nombre des changements de signes dans la suite

$$\varepsilon_0, \quad \varepsilon_1, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{k-1}, \quad \varepsilon_k.$$

Soit α_k ce nombre. Observons que l'on a

$$(74) \qquad (-1)^{\alpha_k} \varepsilon_0 \varepsilon_k = 1.$$

Nous allons nous servir de la formule (5) du paragraphe 2, en désignant par $P_\nu(x)$ les polynomes associés à la suite x_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$). Soit, pour fixer les idées, $x_0 = 0$, $\varepsilon_0 = +1$; on posera dans la formule (5) x égal à 1. Puisque

$$f(1) = M_0,$$

on obtient

$$(75) \qquad M_0 = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k m_k P_k(1) + R_{n+1}(1),$$

où l'on a

$$P_k(1) = \int_0^1 dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \ldots \int_{x_{k-1}}^{x^{(k-1)}} dx^{(k)},$$

$$R_{n+1}(1) = \int_0^1 dx' \int_{x_1}^{x'} dx'' \ldots \int_{x_n}^{x^{(n)}} f^{(n+1)}(x^{(n+1)})\, dx^{(n+1)}.$$

Si l'on intervertit les limites d'intégration dans l'expression $P_k(1)$, toutes les fois que la limite inférieure est égale à 1, le signe sera changé α_k fois et le résultat sera positif; donc

$$P_k(1) = (-1)^{\alpha_k} |P_k(1)| \qquad (k \leqq n),$$

et, d'une manière analogue,

$$R_{n+1}(1) = (-1)^{\alpha_{n+1}} \varepsilon_{n+1} |R_{n+1}(1)|.$$

La substitution dans la formule (75) nous donne

$$M_0 = \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{\alpha_k} \varepsilon_k m_k |P_k(1)| + (-1)^{\alpha_{n+1}} \varepsilon_{n+1} |R_{n+1}(1)|.$$

En vertu de (74) et de (73), on en déduit

$$M_0 = \sum_{k=0}^{n} m_k |P_k(1)| + |R_{n+1}(1)| \geqq \sum_{k=0}^{n} m_k |P_k(1)| \geqq \sum_{k=0}^{n} \frac{m_k}{k!}.$$

Lorsque n augmente indéfiniment, cette inégalité donne, à la limite,

(76) $$M_0 \geqq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!}.$$

Il est facile de vérifier que le signe d'égalité n'intervient que pour les fonctions absolument monotones, c'est-à-dire telles que l'on ait

$$\varepsilon_n \varepsilon_{n+2} = +1 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

La relation (76) étant établie, posons, en admettant $m_n > 0$,

(77) $$M_n \leqq (1 + \alpha_n) m_n \qquad (\alpha_n > 0),$$

de sorte que la variation V_n du logarithme du module de la dérivée $f^{(n)}(x)$ est inférieure ou égale à $\log(1 + \alpha_n)$. Nous supposons que les nombres α_n sont connus et nous essaierons d'en tirer des conséquences relatives à la fonction $f(x)$.

En appliquant l'inégalité (76) aux dérivées de tous les ordres $n \geqq 0$, on obtient le système d'inégalités

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_{n+k}}{k!} \leqq M_n \leqq (1 + \alpha_n) m_n,$$

d'où il suit

(78) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_{n+k}}{k!} \leqq \alpha_n m_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ceci donne une limitation pour chacun des nombres m_n. On déduit, en effet, de (78),

$$
(79)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{m_1}{1!}+\frac{m_2}{2!}+\frac{m_3}{3!}+\ldots+\frac{m_{n-1}}{(n-1)!}+\frac{m_n}{n!}\leqq \alpha_0 m_0,\\
&-\alpha_1 m_1+\frac{m_2}{1!}+\frac{m_3}{2!}+\ldots+\frac{m_{n-1}}{(n-2)!}+\frac{m_n}{(n-1)!}\leqq 0,\\
&\qquad -\alpha_2 m_2+\frac{m_3}{1!}+\ldots+\frac{m_{n-1}}{(n-3)!}+\frac{m_n}{(n-2)!}\leqq 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\qquad\qquad\qquad -\alpha_{n-1} m_{n-1}+\frac{m_n}{1!}\leqq 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Soit

$$
A_n=\begin{vmatrix}
\frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \frac{1}{3!} & \ldots & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{n!}\\
-\alpha_1 & \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \ldots & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!}\\
0 & -\alpha_2 & \frac{1}{1!} & \ldots & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!}\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & 0 & \ldots & -\alpha_{n-1} & \frac{1}{1!}
\end{vmatrix}.
$$

Le complément algébrique de l'élément qui se trouve à l'intersection de la $h^{\text{ième}}$ ligne et de la dernière colonne est égal à

$$A_{h-1}\alpha_h\alpha_{h+1}\ldots\alpha_{n-1}.$$

En développant A_n, suivant les éléments de la dernière colonne, on obtient

$$
(80)\quad A_n=\frac{1}{1!}A_{n-1}+\frac{1}{2!}A_{n-2}\alpha_{n-1}+\frac{1}{3!}A_{n-3}\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}+\ldots
+\frac{1}{(n-1)!}A_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}+\frac{1}{n!}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}.
$$

Un raisonnement par induction nous assure que chacun des déterminants A_n, ainsi que les compléments algébriques des éléments de la dernière colonne sont positifs. En multipliant les inégalités du système (79) par ces compléments algébriques et en les ajoutant ensuite, on obtient

$$A_n m_n\leqq \alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}m_0,$$

donc

$$
(81)\quad M_n\leqq(1+\alpha_n)m_n\leqq\frac{\alpha_0\alpha_1\ldots\alpha_{n-1}(\alpha_n+1)}{A_n}m_0.
$$

Cette inégalité va nous permettre de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME XII. — *Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable sur le segment $0 \leqq x \leqq 1$, et telle qu'aucune de ses dérivées ne s'y annule. Soient M_n le maximum et m_n le minimum de $|f^{(n)}(x)|$ dans l'intervalle considéré et V_n le logarithme du quotient $\frac{M_n}{m_n}$.*

La relation

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, n^\sigma V_n = B \qquad (\sigma > -1,\ B \geqq 0) \tag{82}$$

entraîne que $f(x)$ est une fonction entière d'ordre $\rho = \frac{1}{\sigma+1}$, et dont le degré A vérifie l'inégalité

$$A \leqq (\sigma+1) B^{\frac{1}{\sigma+1}}.$$

Démonstration. — Soit ε un nombre positif arbitrairement petit; posons

$$B' = B + \varepsilon, \qquad B'' = B + 2\varepsilon.$$

D'après (82), on a, pour les valeurs de n suffisamment grandes,

$$V_n < \frac{B'}{n^\sigma},$$

donc

$$e^{V_n} - 1 < e^{\frac{B'}{n^\sigma}} - 1. \tag{83}$$

Je dis que, lorsque n augmente indéfiniment, l'inégalité

$$e^{\frac{B'}{n^\sigma}} - 1 < \left(\frac{B'' e^\sigma}{n^\sigma}\right)^n \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu!}\left[\frac{(n-\nu)^\sigma}{B'' e^\sigma}\right]^{n-\nu} \tag{84}$$

finit par avoir lieu.

Pour s'en assurer, nous considérerons trois cas :

1° $\sigma > 0$. Le premier membre de (84) est asymptotiquement égal à $\frac{B'}{n^\sigma}$. Or, le premier terme seul de la somme qui est au second membre se réduit à

$$B'' e^\sigma \left[\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\right]^\sigma = B'' e^\sigma \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n\sigma} \frac{1}{(n-1)^\sigma} \sim \frac{B''}{n^\sigma}.$$

Puisque $B' < B''$, l'inégalité (84) est démontrée.

2° $\sigma < 0$. L'inégalité (84) prend la forme évidente

$$e^{B''} - 1 < \sum_{\nu=1}^{n} \frac{B''^{\nu}}{\nu!}.$$

3° $-1 < \sigma < 0$. En posant $\sigma = -\tau\,(0 < \tau < 1)$, on écrit l'inégalité (84) de la manière suivante :

$$e^{B''n^{\tau}} < 1 + \sum_{\nu=1}^{n} u_{\nu},$$

où

$$u_{\nu} = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{B''n^{\tau}}{e^{\tau}}\right)^{\nu}\left(1 + \frac{\nu}{n-\nu}\right)^{n\tau}\left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^{\nu\tau}.$$

Calculons la valeur asymptotique du terme qui correspond à

$$\nu = [B''n^{\tau}] = k.$$

On trouve

$$\log u_k = \log\frac{1}{k!}\left(\frac{B''n^{\tau}}{e^{\tau}}\right)^{k} + n\tau\log\left(1 + \frac{k}{n-k}\right) + k\tau\log\left(1 - \frac{k}{n}\right),$$

$$\log\frac{1}{k!}\left(\frac{B''n^{\tau}}{e^{\tau}}\right)^{k} \sim (1-\tau)k, \qquad n\tau\log\left(1 + \frac{k}{n-k}\right) \sim \tau k,$$

$$k\tau\log\left(1 - \frac{k}{n}\right) \sim -\tau\frac{k^2}{n}.$$

Par conséquent,

$$\log u_k \sim k \sim B''n^{\tau},$$

donc, pour $n \to \infty$, on a

$$B''n^{\tau} < \log u_k < \log\left(1 + \sum_{1}^{n} u_{\nu}\right),$$

et l'inégalité (84) est vérifiée dans tous les cas.

En vertu de (83) et (84), on voit que l'inégalité (77) est satisfaite (au moins pour des valeurs de n suffisamment grandes), à condition de poser

$$\alpha_n = \left(\frac{B''e^{\sigma}}{n^{\sigma}}\right)^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu!}\left|\frac{(n-\nu)^{\sigma}}{B''e^{\sigma}}\right|^{n-\nu}. \tag{85}$$

En faisant, dans la relation récurrente (80), la transformation

$$A_n = \beta_n \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n,$$

on obtient

$$\alpha_n \beta_n = \frac{\beta_{n-1}}{1!} + \frac{\beta_{n-2}}{2!} + \ldots + \frac{\beta_1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \qquad (n \geqq 1).$$

Cette dernière formule permet de calculer les nombres α_n lorsque les β_n sont donnés et inversement. On voit immédiatement que, dans le cas où les α_n sont définis par (85), les valeurs de β_n sont

$$\beta_n = \left(\frac{n^\sigma}{B'' e^\sigma}\right)^n,$$

donc

$$A_n = \left(\frac{n^\sigma}{B'' e^\sigma}\right)^n \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n,$$

et l'inégalité (81) nous donne enfin

$$M_n \leqq m_0 \alpha_0 \frac{\alpha_n + 1}{\alpha_n} \left(\frac{B'' e^\sigma}{n^\sigma}\right)^n,$$

d'où l'on déduit

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\, n^{\sigma+1} \sqrt[n]{\frac{M_n}{n!}} \leqq B'' e^{\sigma+1}.$$

Comme il est possible de faire tendre ε vers zéro, on remplacera dans cette inégalité B'' par B, et notre théorème sera prouvé.

Exemple. — On trouve, pour $f(x) = e^{Ax}$ $(A > 0)$,

$$M_n = A^n e^A, \qquad m_n = A^n, \qquad A_n = A, \qquad \sigma = 0, \qquad B = A, \qquad \rho = 1,$$

on a donc l'égalité

$$A = (\sigma + 1) B^{\frac{1}{\sigma+1}}.$$

On pourrait encore étudier le cas plus délicat où l'on a $\sigma = -1$, ce qui conduirait à des fonctions holomorphes dans un domaine entourant le segment $(0, 1)$.