Annales scientifiques de l'É.N.S.

J. Favard

Problèmes d'extremums relatifs aux courbes convexes (premier mémoire)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 46 (1929), p. 345-369

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1929_3_46__345_0>

PROBLÈMES D'EXTREMUMS

RELATIFS AUX COURBES CONVEXES

(Premier Mémoire)

PAR M. J. FAVARD

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Grenoble

1. La théorie des courbes planes convexes fermées fournit un grand nombre de problèmes qui, aujourd'hui encore, ne peuvent pas être résolus par l'analyse : les recherches des cercles circonscrit ou inscrits, par exemple, sont des problèmes qu'on sait poser, mais on ne possède pas de méthode générale pour les résoudre. L'inégalité isopérimétrique elle-même n'a été démontrée pour la première fois, que par Weierstrass. Après les recherches de Steiner, on avait abandonné les méthodes géométriques élémentaires pour cette démonstration; M. Bonnesen [1] a montré que l'on pouvait sauver ces méthodes, il en a créé d'autres et la variété des aspects sous lesquels le problème est envisagé et résolu forme un ensemble des plus brillants, que l'analyse peut sans doute donner mais au prix de bien des efforts.

C'est donc au moyen de considérations géométriques que seront obtenus les résultats qui vont suivre.

2. Soit (C) une courbe convexe bornée et fermée, je rappelle que la distance d de deux droites d'appui de (C) parallèles s'appelle une largeur de la courbe; le minimum Δ de la longueur s'appelle l'épaisseur et le maximum le diamètre D de la courbe. Le plus petit cercle, de

(1) M. Bonnesen a exposé ses méthodes dans son Livre : *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes* (Collection de M. Borel; Gauthier-Villars).

rayon R, tel qu'aucun point de (C) ne lui soit extérieur s'appelle le cercle circonscrit de (C) et ce cercle est unique; les rayons des cercles dont aucun point n'est extérieur à (C) ont un maximum r et un cercle, au moins, de rayon r est inscrit à (C); si une courbe a plusieurs cercles inscrits on a $\Delta = 2r$ et les droites d'appui dont la distance est Δ ont chacune un segment en commun avec la frontière de (C).

M. Bonnesen a, de plus, attaché à une courbe (C) une couronne circulaire : c'est, parmi toutes les couronnes dans lesquelles chemine la frontière de (C), celle qui a la plus petite épaisseur; cette couronne minima est unique, les cercles qui la limitent touchent chacun la courbe (C) en deux points au moins et ces points se séparent mutuellement, c'est-à-dire que l'on ne peut pas trouver de droite du plan telle que, d'un côté de cette droite se trouvent les points de contact de la courbe avec le petit cercle de la couronne, et de l'autre les points de contact avec le grand cercle.

Nous désignerons par R et r ($R \geq r$) les rayons des cercles de cette couronne quand la confusion avec les rayons des cercles circonscrit et inscrits ne sera pas à craindre.

3. Soit maintenant L la longueur de la courbe (C) et S sa surface intérieure, considérons une fonction homogène par rapport à l'ensemble des variables L, $\sqrt{S}$, des éléments géométriques linéaires que nous venons d'introduire et supposons de plus que cette fonction est non décroissante par rapport à L et non croissante par rapport à $\sqrt{S}$. On s'est surtout préoccupé de rechercher le minimum de telles fonctions : l'inégalité isopérimétrique classique est un problème de ce genre.

Quant à la recherche de leur maximum il n'existe, à ma connaissance (à part quelques inégalités évidentes), que peu d'exemples d'une telle détermination. Je ne puis citer que la recherche de l'orbiforme de largeur donnée et de surface minimum faite par MM. W. Blaschke et H. Lebesgue [1]; le résultat de M. J. Pál [1] : parmi toutes les courbes convexes de même épaisseur c'est le triangle équilatéral qui a la plus

[1] H. Lebesgue, *Journ. de Liouville*, 8e série, t. 4, 1921, p. 67-96. — W. Blaschke, *Math. Annal.*, t. 76, 1915, p. 504-513. — J. Pál, *Math. Annal.*, t. 83, 1921, p. 311-319.

petite aire :

$$S \geqq \frac{\Delta^2}{\sqrt{3}},$$

et quelques inégalités de M. Kubota [1].

Dans tous ces travaux le résultat a été obtenu par des considérations géométriques.

4. Je me propose ici de rechercher le maximum de certaines fonctions très simples de l'espèce dont je viens de parler; la courbe (C) sera assujettie à certaines conditions qui assureront qu'elle est bornée; l'existence du maximum est alors assurée en vertu d'un théorème de M. Blaschke : de toute suite infinie de courbes convexes fermées et également bornées on peut extraire une suite de courbes qui tendent vers une courbe limite elle-même convexe.

Il faut remarquer cependant que, pour une infinité de figures peut-être, le maximum sera réalisé. A titre d'exemple citons l'inégalité suivante où r désigne le rayon d'un cercle inscrit

$$rL - 2S \leqq 0,$$

et où l'égalité n'a lieu que pour les capuchons du cercle de rayon r, c'est-à-dire pour les figures obtenues en enlevant, d'un nombre quelconque de points extérieurs au cercle, les parties du cercle vues de chacun de ces points et en les remplaçant par les tangentes issues de chacun de ces points, à condition que la nouvelle figure obtenue soit convexe. Si L et r sont données $(L > 2\pi r)$ le cercle a une infinité de capuchons de longueur L.

5. Nous commencerons par résoudre le problème suivant qui est fondamental pour la suite :

Soit ABC un triangle $(\hat{B} \leqq \hat{C})$, parmi tous les arcs convexes BMC qui vont de B à C, dont aucun point n'est extérieur au triangle et qui limitent avec BC une aire donnée (plus petite que l'aire du triangle ABC) quel est celui dont la longueur est la plus grande ?

---

(1) Kubota (Tadahiko), *The Science Reports of Tôhoku*, t. 12, 1923, p. 45-65; *Eine Ungleichheit für die Eilinien* (*Math. Zeitschrift*, t. 20, 1924).

Soit BMC un arc convexe quelconque allant de B à C, M étant le point de cet arc le plus éloigné de BC; une parallèle à BC coupe cet arc en deux points au plus H et K et la droite AC au point K'; nous porterons à partir de K' et à l'intérieur du triangle une longueur

$$H'K' = HK.$$

Lorsque la droite HK se déplace à partir de BC, le point H' décrit un arc convexe BM' non extérieur au triangle ABC et les deux aires

$$BH'M'CB \quad \text{et} \quad BMCB$$

sont les mêmes. Ce dernier point résulte de la construction; quant au fait que l'arc BM' est convexe il se démontre de la façon suivante : soient H_1K_1 et H_2K_2 deux segments découpés par deux parallèles à BC dans l'aire BMC, puisque l'arc est convexe la parallèle à BC équidistante de H_1K_1 et H_2K_2 découpe dans l'aire un segment HK, et l'on a

$$HK \geqq \frac{H_1K_1 + H_2K_2}{2}$$

de là

$$H'K' \geqq \frac{H'_1K'_1 + H'_2K'_2}{2}$$

et cette inégalité démontre notre assertion.

Nous allons montrer maintenant que

$$\text{long. } \widehat{BMC} \leqq \text{long. arc } \widehat{BM'} + \text{long. segment } M'C \tag{1}$$

lorsque

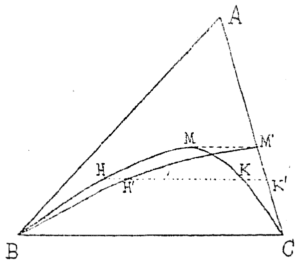
$$\widehat{ABC} \leqq \widehat{ACB}. \tag{2}$$

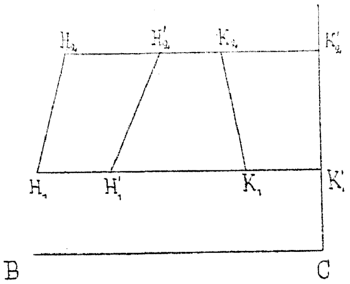
La longueur d'un arc convexe étant la limite des longueurs d'une suite de lignes polygonales convexes qui tendent vers l'arc, il suffit de considérer le cas où l'arc est une ligne polygonale. Supposons donc que la portion de l'arc BMC comprise entre les deux parallèles H_1K_1 et H_2K_2 à BC se compose de deux segments H_1H_2 et K_1K_2 (*voir* figure ci-après), l'opération que nous venons de décrire remplace le trapèze $H_1K_1K_2H_2$ par le trapèze $H'_1K'_1K'_2H'_2$, il suffit alors de vérifier que

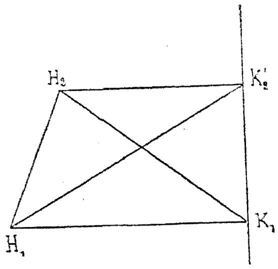
$$H_1H_2 + K_1K_2 \leqq H'_1H'_2 + K'_1K'_2, \tag{3}$$

ce qui est très facile.

Si l'on retranche une même longueur aux deux bases du trapèze $H_1K_1K_2H_2$, ou si l'on fait subir à ce trapèze une translation parallèle à BC, les diverses quantités qui figurent dans (3) ne changent pas. Si







nous supposons, de plus, que H_2K_2 est plus éloigné de BC que H_1K_1, alors $H_2K_2 \leqq H_1K_1$ et nous pouvons nous borner au cas où K_1 et K'_1 coïncident ainsi que H_2 et K_2; il en est alors de même pour H_1 et H'_1 et pour H'_2 et K'_2, et il faut montrer que

$$H_1H_2 + H_2K_1 \leqq H_1K'_2 + K_1K'_2.$$

Or, nous avons supposé que $\widehat{ABC} \leqq \widehat{ACB}$, donc, on a

$$\widehat{H_2H_1K_1} < \widehat{H_1K_1K'_2};$$

de sorte que le symétrique de H_2 par rapport à la médiatrice de H_1K_1 tombe entre H_2 et K'_2, et l'inégalité (3) est démontrée; (1) s'en déduit par passage à la limite.

On voit, de plus, que le signe d'égalité n'est valable dans (1) que si le point M est sur AC ou bien sur AB, mais dans ce dernier cas, il faut aussi $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

De toute façon, par l'opération que nous venons de faire, nous sommes passé de l'arc BMC à un nouvel arc dont la longueur n'est pas plus petite et BM'C comprend le segment de droite M'C, tandis que la parallèle à BC menée par M' est une droite d'appui de cet arc. Si l'arc qui va de B à M' n'est pas le segment BM', nous pouvons recommencer l'opération sur l'arc $\widehat{BM'}$ en considérant cette fois-ci le triangle ABM' et en menant des parallèles au segment BM'; par cette dernière opération, nous passerons d'un arc $\widehat{BM'}$ à un autre arc de longueur certainement plus grande, car on a $\widehat{AM'B} > \widehat{ABM'}$, et le point M′ est le seul point de cet arc situé sur AM′.

On pourra continuer ainsi, et à la limite on obtiendra un arc formé de deux segments de droites, ce que nous énoncerons :

L'arc convexe le plus long, non extérieur au triangle ABC$(\hat{B} \leqq \hat{C})$, *et qui limite avec* BC *une aire donnée, se compose de deux segments de droites* BM *et* MC, *le point étant sur* AC (¹).

Lorsque $\hat{B} = \hat{C}$, on voit qu'il y a deux arcs maxima symétriques par rapport à la médiatrice de BC. La démonstration est aussi valable lorsque le sommet A du triangle ABC est à l'infini. C'est en appliquant ce résultat que nous allons résoudre un certain nombre de problèmes de maximum.

6. Auparavant, je me permets de faire remarquer que la solution du problème inverse du précédent (quel est l'arc dont la longueur est la plus petite?) n'a pas encore été publiée dans le cas général; voici quel est le résultat que j'indique sans démonstration : si l'aire donnée est assez grande, l'arc minimum se compose de deux segments portés par les côtés AB et AC du triangle et d'un arc de cercle tangent à ces deux côtés, si l'aire est assez faible, on obtient un arc de cercle joignant B et C; enfin, comme cas intermédiaire, on a un arc de cercle partant de C tangent à AB et un segment porté par le côté AB.

7. *Problèmes d'extremums dans la couronne minima.* — Soit une courbe (c), dont la couronne minima de centre O et de rayons R et r est donnée; considérons une fonction $f(R, r, L, S)$ homogène par rapport à l'ensemble des variables R, r, L, $\sqrt{S}$, non décroissante par rapport à L et non croissante par rapport à S; on pourra déterminer les

(¹) Le résultat obtenu dans le texte peut être traduit analytiquement comme il suit : Soit $y(x)$ une fonction continue positive et bornée pour $0 \leqq x \leqq 1$, qui satisfait aux conditions

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0$$

et qui possède une dérivée décroissante dans cet intervalle, alors on a extremums des fonctions f les plus simples. Le minimum s'obtient par la méthode de symétrisation de M. Bonnesen ([1]), et l'on pourra faire la recherche du maximum au moyen du résultat que je viens d'établir. Une figure (F) qui fournira le maximum se composera, éventuellement, d'arcs du grand et du petit cercle de la couronne et de lignes polygonales qui chemineront à l'intérieur de cette couronne.

On trouve facilement que le maximum de la longueur et de la surface a lieu pour les figures formées par des arcs du grand cercle et deux tangentes au petit qui se coupent à l'extérieur du grand; le minimum de la longueur et de la surface est réalisé pour les figures limitées par des arcs du petit cercle et deux paires de tangentes à celui-ci issues de deux points du grand cercle.

8. Comme exemple ([2]), je vais faire la recherche du maximum du rapport $\frac{L^2}{S}$; le développement est un peu long mais les résultats sont tous obtenus par la même méthode; on étudie la variation de $\frac{L^2}{S}$ pour une variation de la figure compatible avec les conditions qu'on lui impose.

1° La figure (F), qui fournit le maximum de $\frac{L^2}{S}$, ne comprend pas d'arc du grand cercle.

Supposons qu'une courbe contienne un arc du grand cercle d'angle au centre 2α; 2α peut être supposé assez petit pour que la variation qui consiste à remplacer cet arc par sa corde soit légitime. Après cette opération, les variations subies par L et S sont

$$\Delta L = -2R(\alpha - \sin\alpha),$$
$$\Delta S = -R^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha),$$

d'où la variation du rapport $\frac{L^2}{S} = u$,

$$\Delta u = \frac{L^2R^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) - 4LSR(\alpha - \sin\alpha) + \Delta L^2}{S(S+\Delta S)}.$$

([1]) T. Bonnesen, *Ueber das isoperimetrische Defizit ebener Figuren* (*Math. Ann.*, t. 91, 1924, p. 252).

([2]) J'ai traité un autre exemple dans mon article : *Sur le déficit isopérimétrique maximum dans une couronne circulaire* (*Matematisk Tidsskrift* B. 1929).

Lorsque α est suffisamment petit, cette expression est équivalente à

$$\frac{2}{3}\alpha^3 \frac{LR(LR-S)}{S^2},$$

ce qui est positif, car $2S \leqq LR$.

2° (F) ne comprend pas d'arc du petit cercle.

Si une courbe convexe comprend un arc du petit cercle d'angle au centre 2α, en remplaçant cet arc par les deux tangentes à chacune de ses extrémités, on obtient une nouvelle courbe convexe qui a la même couronne minima que la courbe de départ, et l'on a

$$\Delta L = 2r(\operatorname{tang}\alpha - \alpha),$$
$$\Delta S = r^2(\operatorname{tang}\alpha - \alpha),$$

d'où

$$\Delta u = \frac{(\operatorname{tang}\alpha - \alpha)\{Lr(4S - Lr) + 4r^2(\operatorname{tang}\alpha - \alpha)\}}{S(S+\Delta S)};$$

or, $2S \geqq Lr$, c'est-à-dire que Δu est positif.

La figure (F) est donc un polygone.

3° Le polygone (F) n'a pas deux sommets consécutifs intérieurs à la couronne, à moins que le côté correspondant ne touche le petit cercle.

Soient, en effet, A et B deux sommets consécutifs situés à l'intérieur de la couronne, désignons par $\pi - A$ l'angle en A du polygone ...MABC.... En faisant tourner la droite BA autour de B d'un angle α compté positivement dans le sens où S augmente, on obtient un nouveau polygone ...MA'BC..., le point A' étant sur MA et l'on trouve en désignant par l la longueur de AB,

$$\frac{du}{u} = d\alpha \left\{ \frac{2l \operatorname{tang}\frac{A}{2}}{L} - \frac{l^2}{2S} \right\}.$$

Dans les hypothèses où nous nous sommes placés, on peut prendre $d\alpha$ positif ou négatif; alors si

$$4S \operatorname{tang}\frac{A}{2} \neq lL,$$

on peut faire en sorte que du soit positif, ce qui prouve notre assertion. Par contre, si l'on a

$$4S \operatorname{tang} \frac{A}{2} = lL, \tag{4}$$

un nouveau calcul est nécessaire; si A'B se déduit de AB par une rotation de α, on trouve

$$\Delta u = \frac{\left\{ L + l \left[\frac{\sin A + \sin \alpha}{\sin(A+\alpha)} - 1 \right] \right\}^2}{\left\{ S + l^2 \frac{\sin A \sin \alpha}{\sin(A+\alpha)} \right\}} - \frac{L^2}{S},$$

d'où, en tenant compte de (4),

$$\Delta u = \frac{l^2}{S . \left\{ S + l^2 \frac{\sin A \sin \alpha}{\sin(A+\alpha)} \right\}} \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{A}{2}}{\cos \frac{A+\alpha}{2}} \left\{ L^2 + S \frac{\operatorname{tang}^2 \frac{A}{2}}{\cos \frac{A+\alpha}{2}} \right\},$$

et cette dernière expression montre que Δu est positif.

4° Deux sommets consécutifs du polygone (F) ne sont pas intérieurs à la couronne.

D'après 3°, s'il en était ainsi, on pourrait dire cependant que les deux sommets A et B en question sont tels que le côté AB est tangent au petit cercle en C et que les autres côtés qui partent respectivement de A et B sont aussi tangents à ce cercle aux points T et U. Par une rotation d'un angle α de la tangente ACB du petit cercle autour de O, nous obtenons un nouveau polygone A'B'UMTA'.

Désignons par λ la longueur de la ligne TMU, et par l la longueur de la ligne TABU, par σ l'aire O.TMU et s l'aire O.TABU.

Pour l'opération indiquée, L subit un accroissement $\Delta L = \Delta l$, et l'aire une variation $\Delta S = \Delta s$, et l'on a

$$\Delta s = \frac{r}{2} \Delta l,$$

de sorte que

$$\Delta u = \frac{\Delta l \left\{ 2L^2 \left(\frac{S}{L} - \frac{r}{4} \right) + \Delta l \right\}}{S(S + \Delta S)}.$$

Or, $\frac{S}{L} \geqq \frac{r}{2}$, et par la rotation que nous venons d'effectuer on peut augmenter l, donc u.

5° Le polygone (F) ne peut avoir plus d'un côté non tangent au petit cercle.

D'après 3°, un côté de (F), qui n'est pas tangent au petit cercle, a ses deux sommets sur le grand cercle.

Si un polygone a deux côtés non tangents au petit cercle, dont les sommets sont sur le grand et dont les demi-angles au centre sont a et b, la variation qui consiste à remplacer a par $a + d\alpha$ et b par $b - d\alpha$ est compatible avec les conditions du problème pourvu que $d\alpha$ ne soit pas trop grand.

Si $a \neq b$, on trouve

$$\frac{du}{u\,d\alpha} = \frac{4R(\cos a - \cos b)}{L} - \frac{R^2(\cos 2a - \cos 2b)}{S}.$$

Le second membre de cette égalité n'est jamais nul, car s'il l'était, on devrait avoir

$$\frac{2S}{L} = h + k,$$

en désignant par h et k les distances des deux côtés à O ; si $r \geqq \frac{R}{2}$, cette égalité est manifestement impossible, car on a $2S \leqq LR$; si $r \leqq \frac{R}{2}$, en désignant par u l'angle sous lequel on voit le petit cercle d'un point du grand, on a

$$h + k > 2R\cos u.$$

Or, ici, $u \leqq 60°$, donc, $h + k > R$.

Si $a = b$, en remplaçant a par $a + \alpha$ et b par $b - \alpha$, on trouve

$$\Delta u = \frac{8RLS\sin a(\cos\alpha - 1) - L^2R^2\sin 2a(\cos 2\alpha - 1) + \{4R\sin a(\cos\alpha - 1)\}^2}{S(S + \Delta S)},$$

et, lorsque α est faible, cette expression est équivalente à

$$\Delta u = 2\alpha^2 \sin a \frac{L^2R}{S^2}\left(2R\cos a - \frac{2S}{L}\right);$$

or, d'après ce que nous venons de voir, $\frac{2S}{L} < 2R\cos a$, donc Δu est positif. Dans le premier cas, il suffira de choisir convenablement le signe $d\alpha$ pour obtenir une variation de u positive.

6° Le polygone (F) a un sommet, au plus, intérieur à la couronne.

Si (F) a un sommet A intérieur à la couronne, les deux côtés AB et AC qui partent de ce point sont tangents au petit cercle, et les sommets consécutifs sont sur le grand cercle 3°, et l'on peut supposer que le côté BD du polygone, autre que AB partant de B, est tangent au petit cercle 5°.

Remplaçant alors AB par A'B' symétrique de AB par rapport à la bissectrice de l'angle des deux droites qui portent $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$, on remplace le polygone ...CABD... par le polygone ...CB'A'D... qui a le même périmètre et la même aire que le précédent et dont la couronne minima est aussi la couronne (R, r), car si les points de contact du premier polygone avec les deux cercles de la couronne se séparent, il en est de même pour les points de contact du nouveau polygone.

Par cette opération, nous avons fait « gagner » un rang au sommet intérieur. Si (F) avait deux sommets intérieurs, on voit que, en appliquant cette opération autant de fois que cela serait nécessaire, on pourrait amener ces deux sommets à être consécutifs, car il n'y a qu'un côté du polygone non tangent au petit cercle; mais nous arriverions à une contradiction avec 4°.

7° En définitive, tous les côtés du polygone, sauf un au plus, sont tangents au petit cercle et tous ses sommets, sauf un au plus, sont sur le grand cercle. Le problème est presque entièrement résolu : il ne reste plus qu'à chercher le maximum de

$$\frac{\left(2n\sqrt{R^2-r^2}+2R\sin a+2r\tang b\right)^2}{nr\sqrt{R^2-r^2}+R^2\sin a\cos a+r^2\tang b}$$

avec

$$2\pi-2a-2b=2n\arccos\frac{r}{R}\qquad (n \text{ entier} \geqq 1),$$

et

$$a \leqq \arccos\frac{r}{R},\qquad b \leqq \arccos\frac{r}{R}.$$

En prenant a pour variable, on trouve que l'on peut toujours augmenter u par une variation convenable de signe convenable donnée à a, à moins que

$$2\frac{S}{L} = \frac{R^2\cos 2a - \dfrac{r^2}{\cos^2 b}}{2R\cos a - \dfrac{2r}{\cos^2 b}}.$$

Mais, dans ce cas, en calculant la dérivée seconde de u par rapport à a, on trouve qu'elle a le signe de

$$2L''\frac{S}{L} - S'' + 2L'^2\frac{S}{L^2} > rL'' - S'';$$

or,

$$\begin{aligned} rL'' - S'' &= R^2\sin 2a - Rr\cos a + r^2\frac{\sin b}{\cos^3 b} \\ &= R\sin a(2R\cos a - r) + r^2\frac{\sin b}{\cos^3 b} > 0. \end{aligned}$$

Donc, le maximum ne peut avoir lieu que pour $a = 0$ ou $b = 0$, et l'on trouve qu'il a lieu pour $b = 0$.

Le polygone (F) est donc inscrit au grand cercle, et tous ses côtés, sauf un au plus, touchent le petit. Si π est un multiple de $\operatorname{arc}\cos\frac{r}{R}$, un polygone régulier est inscriptible au grand cercle et circonscriptible au petit; c'est lui qui fournit le maximum de u.

9. Quant aux problèmes de maximum dans la couronne, le premier problème à résoudre serait : Trouver le maximum de L lorsque S est donné [mais compris entre la limite inférieure et la limite supérieure de S dans la couronne (R, r)].

Nous remarquerons d'abord que l'on a toujours

$$L \leq \frac{2S}{r}.$$

Il suit de là que, si S est inférieur à l'aire du polygone circonscrit au petit cercle qui a tous ses sommets, sauf un au plus sur le grand cercle, il sera possible de déterminer des figures convexes circonscrites au petit cercle et d'aire S, et l'on aura

$$\max L = \frac{2S}{r}.$$

Dans le cas général, je n'ai pas réussi à résoudre le problème, mais on montre que la figure qui donnera le maximum de L sera constituée par une ligne polygonale et des arcs du grand cercle; d'un sommet de la ligne polygonale intérieur à la couronne, devra partir un côté au moins tangent au petit cercle.

10. *Problèmes d'extremums dans le cercle circonscrit.* — En désignant par R le rayon du cercle circonscrit à une courbe convexe, si l'on se propose de rechercher le maximum des fonctions $f(R, L, S)$, homogènes par rapport à l'ensemble des variables R, L, $\sqrt{S}$, non décroissantes par rapport à L et non croissantes par rapport à S, le problème fondamental à résoudre est le suivant : La surface S d'une courbe convexe étant donnée, ainsi que son cercle circonscrit de rayon R, trouver le maximum de $L(S \leqq \pi R^2)$.

Ce problème peut être résolu complètement.

Montrons d'abord que la figure correspondante est nécessairement un polygone (P).

Les points de contact du cercle circonscrit à une courbe convexe avec celle-ci sont tels qu'on ne peut pas trouver de droite passant par le centre du cercle et qui laisse ces points dans un demi-plan : c'est dire que s'il n'y a que deux points de contact, ils sont diamétralement opposés; s'il y en a plus de deux, on peut en trouver trois, au moins, qui forment un triangle non obtusangle.

La figure que nous cherchons se compose éventuellement d'arcs du cercle circonscrit et d'arcs qui cheminent à l'intérieur du cercle; pour ces derniers, il est immédiat que ce sont des lignes polygonales :

1° Je dis que ces diverses lignes polygonales doivent avoir leurs sommets sur le cercle.

D'abord il ne peut y avoir deux sommets consécutifs intérieurs au cercle. Soit, par exemple, ABCD la ligne polygonale, A et D étant sur le cercle, et B et C intérieurs; les deux droites AB et CD se coupent dans le demi-plan déterminé par AD qui contient B et C, d'après la propriété des points de contact.

Si la réduction du quadrilatère ABCD, par rapport au triangle déterminé AD, AB et CD, faite comme il a été dit au paragraphe 5, donne un triangle dont le sommet, autre que A et D, n'est pas extérieur au cercle, le résultat est obtenu ; dans le cas contraire, on pourra trouver une droite A′D′ allant d'un point du segment AB à un point du segment CD, et telle que la réduction du quadrilatère A′BCD′ conduise à un triangle dont un sommet est sur le cercle. En tout cas, nous passons d'une ligne polygonale à un autre qui n'a qu'un sommet intérieur au cercle, et la longueur de celle-ci est plus grande que la longueur de celle-là.

Il n'y a pas de sommet intérieur au cercle. Soit C un tel sommet, les sommets consécutifs A et B sont sur le cercle; en menant par C la parallèle à AB, et prenant l'une des intersections C′ de cette parallèle avec le cercle, on a

$$AC' + C'B > AC + CB,$$

car C′ est plus éloigné que C de la médiatrice de AB.

2° La figure cherchée ne peut comprendre d'arc du cercle.

Soit ABC un triangle mixtiligne, AB étant un segment de droite BC un arc de cercle circonscrit; si $\widehat{BC}$ est suffisamment petit, il existe dans l'arc $\widehat{CBA}$ un point B′ tel que

$$\text{aire triangle mixtiligne ABC} = \text{aire triangle rectiligne B}'\text{A};$$

suffit alors de montrer que, dans ces conditions, on a

$$AB + \widehat{CB} < CB' + B'A.$$

Soient α et α', β et β' les demi-angles au centre de AB, $\widehat{BC}$, AB′, B′C respectivement, on a

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' \qquad \left(0 \leqq \alpha, \alpha', \beta', \beta, \beta' \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin\alpha \cos\alpha + \alpha' = \sin\beta \cos\beta + \sin\beta' \cos\beta',$$

et il faut montrer que

$$\sin\alpha + \alpha' < \sin\beta + \sin\beta';$$

ou encore que l'égalité

$$(5)\qquad 2\alpha - \sin 2\alpha = (2\beta - \sin 2\beta) + (2\beta' - \sin 2\beta')$$

entraîne l'inégalité

$$(6)\qquad \alpha - \sin\alpha > (\beta - \sin\beta) + (\beta' - \sin\beta').$$

Considérons l'expression

$$u = (\alpha - \sin\alpha) - (\beta - \sin\beta) - (\beta' - \sin\beta')$$

lorsque α, β, β' sont liés par la relation (5); laissant alors α fixe, faisons varier β de o à α; pour $\beta = 0$, on a $u = 0$, et, d'autre part,

$$\frac{du}{d\beta} = \frac{\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta'}{2}}\left(\cos^2\frac{\beta}{2} - \cos^2\frac{\beta'}{2}\right);$$

donc, la fonction commence par croître avec β à partir de zéro jusqu'à ce que $\beta = \beta'$, puis elle décroît ensuite jusqu'à zéro; l'inégalité (6) est donc démontrée.

3° Montrons maintenant que, parmi trois côtés du polygone (P), deux, au moins, sont égaux.

Nous voulons montrer que lorsque trois côtés d'un polygone inscrit dans un cercle sont inégaux, on peut déterminer un autre polygone de même aire et de périmètre supérieur.

Sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage, on voit que ce problème revient à montrer que l'on peut augmenter la quantité

$$f = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$$

par des variations convenables de α, β, γ sous les conditions

$$\left(0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}\right), \qquad (\alpha + \beta + \gamma \leqq \pi), \qquad (\alpha \neq \beta \neq \gamma),$$

$$\alpha + \beta + \gamma = \text{const.},$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \text{const.}$$

Or, l'extremum de f ne peut être réalisé, dans ce cas, que si deux au moins des quantités α, β, γ sont égales.

4° Le problème est réduit au suivant :

Pour quelles valeurs entières et positives de x et y la fonction

$$x \sin \alpha + y \sin \beta \tag{7}$$

est-elle maximum sous les conditions

$$x\alpha + y\beta = \pi \qquad (\alpha, \beta > 0), \tag{8}$$

$$x \sin 2\alpha + y \sin 2\beta = \frac{2S}{R^2} \qquad (\alpha, \beta > 0). \tag{9}$$

Adjoignons aux deux dernières équations la relation

$$x + y = u \qquad (u > 0). \tag{10}$$

Si u est supposé constant, les équations (8), (9), (10) définissent trois des inconnues x, y, α, β en fonction de la quatrième, lorsque

$$x > 0, \qquad y > 0, \qquad \alpha \neq \beta.$$

Si x croît d'une façon continue, à partir d'une valeur entière jusqu'à la valeur entière consécutive et que y soit plus grand que un, peut-il arriver que α devienne égal à β?

Pour cela, il faudrait que l'on eût

$$u \sin \frac{2\pi}{u} = \frac{2S}{R^2}$$

lorsque u est entier; ce fait ne peut se produire que lorsque S est l'aire d'un polygone régulier de u côtés inscrit dans le cercle; dans ce cas, c'est ce polygone qui donne le maximum de L; si S n'est pas l'aire d'un polygone régulier, l'égalité précédente ne sera jamais réalisée avec u entier.

Peut-il arriver que, au cours de la variation que nous faisons subir à x, l'un des deux angles α ou β (soit α), devienne égal à zéro? On aurait alors

$$\frac{\sin^2 \beta}{2\beta} = \frac{S}{2R^2}.$$

Il y a une valeur de β comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et une seule pour laquelle cette égalité est vérifiée; supposons-là comprise entre $\frac{\pi}{2(n-1)}$

et $\frac{\pi}{2n}$; on doit alors prendre u entier et au moins égal à n pour que les équations (8) et (9) donnent avec x et y entiers des valeurs de α et de β positives, car le polygone régulier de $(n-1)$ côtés à une aire supérieure à celle de tout autre polygone inscrit à $(n-1)$ côtés.

D'autre part, l'extremum de (7) sous les conditions (8), (9), (10), n'a lieu que si $\alpha = \beta$, ou bien lorsque des variables prennent des valeurs limites. Si l'aire donnée S n'est pas celle d'un polygone régulier, il faut donc prendre $y = 1$ et $x = n - 1$, car le maximum ne peut avoir lieu pour x ou y infinis, d'après (3°).

Le polygone (P) a donc n côtés parmi lesquels $n - 1$, au moins, sont égaux entre eux.

11. Nous pouvons maintenant dire que le problème posé au début du n° 10 est résolu, mais, comme on le voit, le maximum de L est une fonction assez compliquée de S et le calcul peut être pénible.

Nous allons cependant donner quelques exemples.

Démontrons que l'on a, par exemple,

$$\text{(11)} \qquad RL - S \leqq 4R^2,$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que si la courbe se réduit à un diamètre ($L = 4R$, $S = 0$).

La figure qui réalise le maximum du premier membre de (11) est à rechercher parmi les polygones inscrits dans le cercle; or, un calcul simple montre que, si l'on remplace deux côtés consécutifs AB et BC d'un tel polygone, qui font entre eux un angle obtus ou droit, par la corde AC, le nouveau polygone ainsi obtenu donne au premier membre de (11) une valeur supérieure à celle obtenue pour le polygone de départ. La figure est donc à rechercher parmi les triangles isoscèles non obtusangles, et l'on parvient ainsi au résultat annoncé.

Remarquons que l'on a aussi

$$RL - kS \leqq 4R^2$$

lorsque $k \geqq 1$.

Lorsque k est plus petit que 1, la question est plus difficile à résoudre. Résolvons d'abord le problème suivant :

« A quelle condition doit satisfaire k pour que la figure pour laquelle le maximum de

$$(12) \qquad \mathrm{RL} - k\mathrm{S}$$

est réalisé, ne contienne pas deux cordes dont la somme des demi-angles au centre soit $u\left(< \frac{\pi}{2}\right)$ lorsque u est donné ? »

Il suffit pour cela que, en posant

$$(13) \qquad \alpha = \beta + \gamma \qquad (\alpha < u;\ \alpha, \beta, \gamma > 0),$$

on ait

$$2\sin\alpha - k\sin\alpha\cos\alpha > 2(\sin\beta + \sin\gamma) - \frac{k}{2}(\sin 2\beta + \sin 2\gamma),$$

ce qui donne

$$k \geqq \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)},$$

inégalité qui doit être vérifiée pour toutes les valeurs de α, β, γ, qui satisfont à (13), ce qui donne

$$k \geqq \frac{1}{1+\cos u}.$$

On voit que, pour $u = \frac{\pi}{2}$, nous sommes conduits à l'inégalité (11); le cas où $\alpha = 0$, $k = \frac{1}{2}$ nous donne la nouvelle inégalité

$$(14) \qquad 2\mathrm{RL} - \mathrm{S} \leqq 3\pi\mathrm{R}^2,$$

le signe d'égalité ne pouvant avoir lieu que si la courbe coïncide avec son cercle circonscrit; on tire de là,

$$2m\mathrm{RL} - \mathrm{S} \leqq (2m-1)\pi\mathrm{R}^2 \qquad (m \geqq 1).$$

Lorsque k est plus grand que $\frac{1}{2}$, on voit facilement que la figure que nous cherchons ne peut pas contenir d'arc du cercle circonscrit, car, en remplaçant cet arc par sa corde, on augmente la quantité (12), du moins lorsque l'arc est suffisamment petit, comme le montre l'inégalité

$$2\sin\theta - k\sin\theta\cos\theta > 2\theta - k\theta \qquad \left(k > \frac{1}{2}\right),$$

valable au moins lorsque θ est faible : c'est une nouvelle démonstration de 2° (§ 10).

Lorsque $k = \frac{1}{1+\cos u}$, la figure qui fournit le maximum de (12) est donc un polygone tel que la somme des demi-angles au centre de deux côtés quelconques n'est pas inférieure à u, tandis que le demi-angle au centre de chaque côté n'est pas supérieur à u, et en raisonnant comme au paragraphe 10, on montre que, parmi trois côtés quelconques de ce polygone, deux, au moins, sont égaux.

De plus, on peut montrer aussi que l'on pourra toujours augmenter (12), si, parmi deux côtés d'un polygone inscrit, l'un, au moins, n'a pas pour demi-angle au centre u. Soient, en effet, α et β les demi-angles au centre de deux côtés, l'extremum de (12) ne peut être réalisé que si

$$2\cos\alpha - k\cos 2\alpha = 2\cos\beta - k\cos 2\beta,$$

c'est-à-dire lorsque $\alpha = \beta$, ou bien

$$1 + \cos u = \cos\alpha + \cos\beta, \tag{15}$$

ou lorsque l'un des deux angles est égal à u ; si deux côtés sont égaux et ont pour demi-angles un centre α, il faut que

$$\cos\alpha \leqq \cos^2\frac{u}{2}.$$

Si deux côtés sont inégaux, et si aucun d'eux n'a pour demi-angle au centre u, on voit, en comparant la dernière inégalité avec (15), que l'on en déduirait $\cos\beta \geqq \cos^2\frac{u}{2}$; donc, il y a seulement un côté de demi-angle au centre β. D'autre part, si (15) est vérifiée, on se rend également compte, par la considération de la dérivée seconde que l'on peut augmenter (12) lorsque $\alpha < u$.

Lorsque u est compris entre $\frac{\pi}{n-1}$ et $\frac{\pi}{n}$ $\left(\frac{\pi}{n-1} > u \geqq \frac{\pi}{n}, n \text{ entier}\right)$, la figure qui réalisera le maximum de (12) sera un polygone à n côtés parmi lesquels $n-1$ au moins seront égaux et ce seront les plus grands :

$$\alpha = u, \qquad \beta = \pi - (n-1)u.$$

Nous avons obtenu ainsi une nouvelle démonstration du résultat du paragraphe 10 plus simple à certains égards que celle-ci, et finalement nous avons [1]

$$(1+\cos u)\,\mathrm{RL}-\mathrm{S} \leqq (n-1)\,\mathrm{R}^2 \sin u\,(2+\cos u)$$
$$+\,\mathrm{R}^2 \sin[\pi-(n-1)u]\,\{2+2\cos u-\cos[\pi-(n-1)u]$$

$$\frac{\pi}{n-1} > u \geqq \frac{\pi}{n} \qquad (n \text{ entier}).$$

En particulier,

$$\left(1+\cos\frac{\pi}{n}\right)\mathrm{RL}-\mathrm{S} \leqq n\,\mathrm{R}^2 \sin\frac{\pi}{n}\left(2+\cos\frac{\pi}{n}\right),$$

l'égalité n'ayant lieu que pour le polygone régulier inscrit à n côtés.

12. *Problèmes d'extremums dans les bandes circonscrites.* — Soit une bande circonscrite à une courbe convexe (C) et de largeur d, et α et γ deux points d'appui des droites qui limitent la bande avec la courbe.

Nous nous proposons d'abord de chercher le maximum de la quantité

$$\mathrm{L}\,d-4\mathrm{S}.$$

Le théorème du paragraphe 5, nous montre que cette quantité ne saurait dépasser celle correspondante à un quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$, dont deux côtés opposés $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ sont sur les deux droites qui limitent la bande; nous désignerons par t la distance $\alpha\gamma$; remarquons, de plus, que

$$\widehat{\beta\alpha\gamma} = \widehat{\alpha\gamma\delta} \geqq \frac{\pi}{2}.$$

Pour un tel quadrilatère, on a

$$\mathrm{L}\,d-4\mathrm{S} = [(\beta\gamma-\alpha\beta)+(\delta\alpha-\gamma\delta)]\,d \leqq 2\,\alpha\gamma.d.$$

Finalement, on a

$$\mathrm{L}\,d-4\mathrm{S} \leqq 2\,t\,d.$$

et le signe d'égalité n'a lieu que si la courbe se réduit au segment $\alpha\gamma$ $(\mathrm{L}=2t, \mathrm{S}=0)$.

Supposons, en particulier, que la largeur d soit égale au diamètre D ou à l'épaisseur Δ de la courbe; dans chacun de ces deux cas, on peut

---

[1] Au moyen de cette inégalité on peut facilement résoudre le problème de couvercle suivant : Quel est le plus petit de tous les cercles circonscrits aux courbes convexes fermées de longueur L et de surface S^2 ?

choisir les points d'appui de telle façon que la droite qui les joint soit perpendiculaire aux droites d'appui, c'est-à-dire que l'on peut prendre $t = D$ ou Δ, et l'on obtient les inégalités

(16) $$LD - 4S \leqq 2D^2,$$

(17) $$L\Delta - 4S \leqq 2\Delta^2.$$

Le signe d'égalité ne peut avoir lieu dans la première que lorsque la courbe se réduit à un segment de longueur $D(L = 2D)$; dans la deuxième, l'égalité ne peut avoir lieu que si $\Delta = 0$.

13. L'inégalité (16) ne devient une égalité que si $S = 0$; nous sommes alors conduits à chercher si l'on ne pourrait pas, dans cette inégalité, remplacer le coefficient de S par un autre plus petit. M. Kubota (*loc. cit.*) a démontré l'inégalité meilleure

(18) $$LD - \frac{4}{\sqrt{3}} S \leqq 2D^2,$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que pour le triangle équilatéral de côté D et pour le segment de droite de longueur D.

Avec notre méthode, la démonstration de cette inégalité ne présente pas de difficulté.

Posons

$$V = LD - \frac{4}{\sqrt{3}} S,$$

et soit $\alpha\beta$ un diamètre de la courbe qui la divise en deux parties de longueurs L_1 et L_2 et d'aire S_1 et S_2 respectivement

$$(L_1 + L_2 = L;\ S_1 + S_2 = S).$$

Les quantités correspondantes à ces deux parties sont

$$V_1 = (L_1 + D)D - \frac{4}{\sqrt{3}} S_1,$$

$$V_2 = (L_2 + D)D - \frac{4}{\sqrt{3}} S_2,$$

et l'on a

$$V_1 + V_2 = V + 2D^2.$$

Si donc, nous démontrons que les quantités V_1 et V_2 sont inférieures à $2D^2$, il en sera de même pour V.

Nous pouvons donc nous borner à considérer le cas où une partie de la frontière de (C) est constituée par un segment de droite de longueur D. Soit (F) une telle figure, elle peut être mise à l'intérieur d'un triangle mixtiligne formé par un segment de longueur D et de deux arcs de cercle de rayons D ayant pour centres chacune des extrémités du segment.

1° La figure (F) qui fournit le maximum de V, se compose éventuellement d'arcs des deux cercles, de cordes de ces arcs et d'un segment de droite joignant un point d'un arc à un point de l'autre.

Les deux derniers points sont immédiats d'après le raisonnement fait bien souvent déjà.

2° La figure (F) ne contient aucun arc de cercle.

En remplaçant, en effet, un arc de demi-angle au centre $\alpha(\leqq 30^\circ)$ par sa corde, V éprouve la variation

$$\begin{aligned}
&D^2\left[2\sin\alpha - 2\alpha - \frac{4}{\sqrt{3}}(\sin\alpha\cos\alpha - \alpha)\right]\\
&\quad = D^2\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)2\alpha - 2\sin\alpha\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\alpha - 1\right)\right]\\
&\quad \geqq D^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\alpha - 1\right)(2\alpha - 2\sin\alpha) > 0.
\end{aligned}$$

Et ce calcul montre aussi pour quelle raison on a pu remplacer le coefficient 4 dans (16) par $\frac{4}{\sqrt{3}}$ dans (18).

3° La figure (F) ne contient pas plus d'une corde de chaque arc de cercle.

En remplaçant, en effet, deux cordes consécutives d'un même arc de cercle et d'angles au centre de α et $\beta(\alpha+\beta\leqq 30^\circ)$ par la corde joignant les extrémités de celles-ci, V éprouve une variation

$$\begin{aligned}
&D^2\left\{2\sin(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha - 2\sin\beta - \frac{2}{\sqrt{3}}[\sin 2(\alpha+\beta) - \sin 2\alpha - \sin 2\beta]\right\}\\
&\quad = 4D^2\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta - \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right]\\
&\quad = 4D^2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right] - 1\right\} > 0.
\end{aligned}$$

4° La figure (F) est donc à rechercher parmi les quadrilatères inscrits dans le triangle mixtiligne dont un des côtés est le côté rectiligne de ce triangle.

Il est évident que V est une fonction symétrique des deux demi-angles au centre des côtés qui sont des cordes des deux arcs de cercle; donc V ne peut être extremum que si ces deux angles sont égaux (dans ce cas, le quadrilatère est un trapèze), ou bien si l'un des deux angles au moins prend une valeur limite, le quadrilatère se réduit alors à un triangle équilatéral ou à un segment, et ces deux derniers cas fournissent le maximum cherché comme le montre un calcul facile.

14. L'inégalité (17) n'est pas la meilleure possible; ici, c'est le deuxième membre que l'on peut certainement remplacer par une quantité inférieure. Je n'ai pas réussi à démontrer l'inégalité suivante que je crois vraie :

$$L\Delta - 4S \leqq \frac{2\Delta^2}{\sqrt{3}}, \tag{19}$$

l'égalité n'ayant lieu que pour le triangle équilatéral de hauteur Δ.

15. Je rappellerai l'inégalité due à M. Blaschke [1]

$$\Delta \leqq 3r,$$

où r désigne le rayon d'un cercle inscrit à la courbe. Il est évident que l'on a d'abord $2r \leqq \Delta$, et l'on sait de plus que, dans le cas où le signe d'égalité n'a pas lieu, on peut trouver un triangle circonscrit à la fois au cercle et à la courbe et les contenant tous deux.

En désignant par a, b, c, les côtés de ce triangle ($a \geqq b \geqq c$), et par h la hauteur relative au côté a ($\Delta \leqq h$), on a

$$ah = (a + b + c)r,$$

d'où

$$\Delta \leqq h = \left(1 + \frac{b+c}{a}\right) r \leqq 3r.$$

(1) *Jahresbericht der Deutschen Math. Ver.*, t. **23**, 1915, p. 369.

On voit, de plus, que l'on aura $\Delta = 3r$ seulement dans le cas où $\Delta = h$, $a = b = c$, c'est-à-dire lorsque la figure sera un triangle équilatéral de hauteur Δ.

De ce résultat, nous tirons l'inégalité

$$\mathrm{L}\Delta - 6\,\mathrm{S} \leqq 3\,\mathrm{L}r - 6\mathrm{S} \leqq 0, \tag{20}$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que lorsque la figure est un triangle équilatéral.

Si l'inégalité (19) était démontrée, on en déduirait l'inégalité (20) au moyen du résultat de M. Pál (§ 3); en tout cas, on a, pour $k \geqq 0$,

$$\mathrm{L}\Delta - (6 + k)\mathrm{S} \leqq - k\frac{\Delta^2}{\sqrt{3}}.$$

16. Je me permets de parler ici de questions de géométrie dans l'espace, analogues à celles auxquelles je viens de faire allusion et relatives aux corps convexes.

Le contour apparent d'un corps convexe d'épaisseur Δ sur un plan quelconque est une courbe convexe d'épaisseur au moins égale à Δ; d'autre part, les points de contact d'une sphère inscrite à un corps convexe avec la frontière du corps ne sont pas tous situés dans un même demi-espace ouvert déterminé par un plan passant par le centre de la sphère. Donc, si tous ces points sont situés dans un même demi-espace fermé déterminé par un plan passant par le centre de la sphère, on a $\Delta \leqq 3r$. Dans le cas contraire, on peut trouver un tétraèdre circonscrit à la fois à la sphère et au corps et les contenant tous les deux.

On démontre alors que la largeur d'un tétraèdre circonscrit à une sphère de rayon r ne saurait dépasser $2\sqrt{3}r$ et qu'elle n'est égale à cette quantité que lorsque le tétraèdre est régulier; en effet, en désignant par h_1, h_2, h_3, h_4 les hauteurs et par d_1, d_2, d_3 les plus courtes distances des trois couples d'arêtes opposées, on sait que

$$\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} = \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{h_3^2} + \frac{1}{h_4^2};$$

d'autre part,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{\Delta^2} \geqq \frac{1}{4r^2}$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que si les quatre hauteurs sont égales entre elles ainsi que les trois plus courtes distances; c'est-à-dire dans le cas où le tétraèdre est régulier.

En désignant par S la surface d'un corps convexe, par V son volume et par Δ son épaisseur et raisonnant comme au paragraphe précédent, on obtient

$$S\Delta - 6\sqrt{3}V \leqq 0, \tag{21}$$

l'égalité n'ayant lieu que pour le tétraèdre régulier dont la distance de deux arêtes opposées est égale à Δ.

17. Pour les problèmes relatifs aux courbes orbiformes, la recherche fondamentale à faire est celle de l'orbiforme passant par quatre points et dont l'aire est minima. Cette recherche a été faite par M. Blaschke (*loc. cit.*); moyennant ce résultat, il est facile de résoudre alors tous les problèmes d'extremums (en petit nombre d'ailleurs) qui se posent à propos des orbiformes.

18. *Problèmes de probabilités et de moyennes.* — En terminant, je désire attirer l'attention sur de nouveaux problèmes de probabilités géométriques ou plutôt de probabilités fonctionnelles.

La difficulté consiste surtout, dans ces sortes de problèmes, dans le choix de la probabilité élémentaire; je ne sais d'ailleurs pas si ce choix peut être fait d'une façon convenable. Cependant, il semble raisonnable de se poser des problèmes comme les suivants :

Quelle est la valeur moyenne de l'aire des orbiformes de largeur donnée ?

Quelle est la probabilité pour que l'épaisseur d'une courbe convexe dont le rayon du cercle inscrit est donné ne dépasse pas une valeur donnée ?

Quelle est la valeur moyenne du rapport $\frac{L^2}{S}$ dans une couronne minima (R, r) donnée ?