ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEORGES VALIRON

# Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et à coefficients constants

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 46 (1929), p. 25-53

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1929_3_46__25_0>

SUR LES SOLUTIONS

DES

# ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

## D'ORDRE INFINI ET A COEFFICIENTS CONSTANTS

PAR M. GEORGES VALIRON.

Je considérerai dans ce qui suit des équations différentielles de la forme

$$(1) \qquad A(y) \equiv y + c_1 y' + \ldots + c_n y^{(n)} + \ldots = 0$$

où les $c_n$ sont des constantes telles que la *fonction génératrice*

$$(2) \qquad f(u) = 1 + c_1 u + \ldots + c_n u^n + \ldots$$

soit une fonction entière satisfaisant à certaines conditions. Il est clair que si $a$ est un zéro d'ordre $\mu$ de (2), $e^{az}Q(z)$, où $Q(z)$ est un polynome de degré $\mu - 1$, est une solution de (1), je dirai que c'est une *solution fondamentale*. Dans un remarquable Mémoire (¹), J. F. Ritt a donné tout d'abord des propriétés générales des solutions de (1) lorsque la fonction génératrice est de genre zéro. Ses résultats ont été complétés récemment par M. Pólya (²) qui a établi que, dès que (2) est du type minimum de l'ordre un, *les solutions analytiques de* (1) *sont des fonctions holomorphes dont le domaine d'existence est convexe.* D'autre part, en faisant l'hypothèse que (2) n'a qu'un nombre fini de zéros multiples et que les modules des zéros sont suffisamment réguliers, M. Ritt a montré qu'une solution quelconque est développable en série de solutions fondamentales dans tout son domaine d'existence.

(¹) *Transactions of the American Math. Soc.*, t. 18, 1927, p. 21-26 et 27-49; *Annals of Math.*, 2ᵉ série, t. 26, 1924, p. 144.

(²) *Göttinger Nachr.*, 1927, p. 187-195.

Il donnait ainsi pour la première fois l'extension du théorème de MM. Fabry et Hadamard sur les séries de Taylor lacunaires au cas des séries de la forme

$$\sum c_n e^{a_n z}:$$

*si* $|a_{n+1} : a_n|$ *satisfait à une certaine condition, la frontière du domaine de convergence de cette série* (domaine qui est convexe) *est une coupure essentielle pour la fonction qu'elle définit.* La démonstration de M. Ritt ne diffère d'ailleurs que par un détail de celle qui fut donnée plus tard d'une façon indépendante par MM. Landau et Carlson (¹), mais la méthode de ces derniers auteurs permet cependant d'aller plus loin.

Je me propose ici d'étendre les résultats de M. Ritt. Je ne supposerai plus que le nombre des zéros multiples de (2) est borné et je ferai des hypothèses moins restrictives sur la fonction génératrice. Tous les résultats de M. Ritt restent valables si l'on suppose seulement que $f(u)$ est du type minimum de l'ordre un (²). Ils se modifient lorsque $f(u)$ est du type moyen de l'ordre un. La méthode que je suivrai est celle de M. Ritt et je m'excuse des nombreux emprunts que je serai obligé de faire à son Mémoire pour rendre plus facile la lecture de ce qui suit (³).

## I.

1. *Domaine de convergence des séries de solutions fondamentales.* — Considérons une série de la forme

$$\sum e^{\lambda_n z} Q_n(z), \tag{3}$$

les nombres réels ou complexes $\lambda_n$ et les degrés $\mu_n$ des polynomes $Q_n(z)$ satisfaisant aux conditions

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\mu_n}{\lambda_n} = 0. \tag{4}$$

---

(¹) *Göttinger Nachr.*, 1921, p. 184-188.

(²) J'ai signalé ce fait à M. Ritt avant la parution du Mémoire de M. Pólya.

(³) Les équations de la forme (1) ont été considérées d'abord par Bourlet (*Annales École Norm.*, 3e série, t. 14, 1897, p. 133-190), puis par F. Schürer (*Verh. der sächs. Gesell. der W.*, t. 70, 1918, p. 185-240).

Nous désignerons par $C_n$ le plus grand module des coefficients de $Q_n(z)$ et nous supposerons que les points $z$ appartiennent à un cercle $|z| < R$, $R > 1$. On a

$$|Q_n(z)| < (\mu_n + 1) C_n R^{\mu_n} \tag{5}$$

tandis qu'en un point $z'$ de la circonférence $|z| = R$, $|Q_n(z')|$ est au moins égal à $C_n$. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ sont les zéros de $Q_n(z)$ intérieurs au cercle $|z| < 2R$, on a

$$|Q_n(z)| > |Q_n(z')| 3^{q-\mu_n} \prod_1^q \left|\frac{z-\alpha_j}{z'-\alpha_j}\right| > 2^{-q} C_n 3^{q-\mu_n} \prod_1^q \left|\frac{z-\alpha_j}{R}\right|.$$

D'après un théorème démontré récemment par M. H. Cartan [1] qui complète un théorème de Boutroux que j'avais utilisé précédemment dans une recherche analogue [2], le dernier produit est supérieur à

$$\left(\frac{\rho_n}{2eR}\right)^q$$

à l'extérieur de cercles dont la somme des rayons est au plus égale à $\rho_n$. On aura à l'extérieur de ces cercles

$$|Q_n(z)| > C_n \left(\frac{\rho_n}{4eR}\right)^{\mu_n}. \tag{6}$$

Les inégalités (5) et (6) ramènent l'étude de la convergence de la série (3) à celle de la série

$$\Sigma\, C_n e^{\lambda_n z} \tag{7}$$

qui a été l'objet de travaux de MM. Ritt et Hille [3]. Lorsque la première condition (4) est réalisée, l'étude de la convergence de (7) se ramène comme dans le cas des séries de Taylor, à la comparaison de

$$C_n |e^{\lambda_n z}| \tag{8}$$

à l'unité. $\mathcal{R}(u)$ désignant la partie réelle de $u$, (8) est égal à 1 sur la

---

(1) *Comptes rendus*, t. 186, 1928, p. 624-625.
(2) *Bulletin de la Soc. math.*, t. 54, 1926, p. 53-68.
(3) *Annals of Math.*, 2e série, t. 26, 1924, p. 261-278.

droite $D_n$

$$\mathcal{R}\left(\frac{-\lambda_n z}{\log C_n}\right) = 1$$

qui est la perpendiculaire menée par le point

$$\nu_n = \frac{\log C_n}{-\lambda_n}$$

au segment (o, $\nu_n$). Désignons par $\delta_n$ la distance algébrique de $z$ à $D_n$, cette distance étant comptée positivement lorsque $z$ se trouve du côté de $D_n$ qui contient le point à l'infini de la direction d'argument — argum. $\lambda_n$. On a

$$C_n|e^{\lambda_n z}| = e^{|\lambda_n|\delta_n}.$$

Cette égalité donne le résultat de M. Hille : si (7) converge en un point $z$, ce point est à une distance négative ou nulle des droites $D_n$ dès que $n > n_0$ ; si un point $z_0$ est à une distance algébrique négative de valeur absolue au moins égale à $\delta > 0$ des droites $D_n$ d'indice supérieur à $n_0$, la série (7) converge absolument et uniformément dans tout cercle $|z - z_0| \leqq \delta' < \delta$. Dans un tel petit cercle la série (3) converge aussi absolument et uniformément en vertu de (5) et de la seconde égalité (4). Le domaine de convergence de (7) s'il existe est le domaine convexe $\Delta$ constitué par les points $z$ qui sont à une distance négative, de valeur absolue supérieure à $\delta(z)$ des droites $D_n$ d'indice supérieur à $n(\delta(z))$. C'est un domaine de convergence absolue pour (3) et (7); dans tout domaine complètement intérieur à $\Delta$ la série (3) comme (7) converge uniformément.

Montrons que (3) ne peut converger dans aucun domaine extérieur à $\Delta$ si $\Delta$ existe et quelconque si $\Delta$ n'existe pas. Soit $\Delta'$ un domaine extérieur à $\Delta$, $\Delta''$ un cercle complètement intérieur à $\Delta'$. *Il existe dans $\Delta''$ ou sur sa circonférence un point $z'$ qui est à une distance positive supérieure à $\delta > 0$ d'une suite infinie de droites $D_n$.* Considérons en effet deux diamètres rectangulaires de $\Delta''$ limités aux points d'intersection avec la circonférence. Si le centre $z$ de $\Delta''$ ne répond pas à la question, il existe une suite infinie de droites $D_n$ dont la distance à $z$ tend vers zéro et l'une des quatre extrémités des diamètres considérés répond alors à la question. On peut extraire de la suite des indices $n$ des droites ainsi obtenues une autre suite dont les indices $n$ croissent assez vite pour qu'il leur corresponde des nombres $\rho_n$ tels que la série formée avec ces nombres converge et que

$$\frac{1}{\lambda_n}\mu_n \log \rho_n$$

tende vers zéro. En introduisant ces nombres $\rho_n$ dans (6) et en tenant compte de ces propriétés, on voit qu'il existe un point dont la distance à $z'$ est moindre que $\frac{1}{2}\delta$ tel que pour les indices $n$ de la suite considérée qui sont assez grands, $n > n(\varepsilon)$, on ait

$$|Q_n(z)| > C_n e^{-\varepsilon|\lambda_n|},$$

$\varepsilon$ étant pris aussi petit que l'on veut. Si en ce point $z$ la série (3) convergeait, ou aurait pour ces $n$

$$|Q_n(z)e^{\lambda_n z}| < 1$$

et par suite

$$|C_n e^{\lambda_n z}| < e^{\varepsilon|\lambda_n|} \tag{9}$$

alors que le premier membre doit être au moins égal à

$$e^{\frac{1}{2}\delta|\lambda_n|}.$$

Ainsi :

I. *Moyennant les conditions* (4) *le seul domaine de convergence de la série* (3) *est le domaine de convergence de* (7). *Dans ce domaine convexe la série converge absolument, elle converge uniformément dans tout domaine complètement intérieur à celui-ci.*

Dès que la seconde condition (4) n'est plus vérifiée, les domaines de convergence de (3) et (7) peuvent être différents. C'est le cas pour

$$\Sigma z^n e^{-nz}.$$

On obtient un résultat plus complet en remplaçant les conditions (4) par la suivante

$$\lim \frac{\mu_n \log n}{\lambda_n} = 0. \tag{10}$$

On peut alors prendre dans (6)

$$\rho_n = \frac{1}{n^2}$$

et l'égalité obtenue a lieu pour toute valeur $z$ extérieure à un ensemble E de mesure linéaire nulle et pour $n > n(z)$. Si $z$ est extérieur à E et si (3) converge en ce point, l'inégalité (9) est vérifiée en ce point si petit que soit $\varepsilon$ pourvu que $n$ soit assez grand. En s'appuyant sur ce lemme :

II. *Si la première condition* (4) *est vérifiée, si* (7) *possède un domaine de convergence* $\Delta$ *et si l'inégalité* (9) *est réalisée en un point* $z$ *pour tout* $\varepsilon$ *positif dès que* $n > n(\varepsilon)$, $z$ *appartient à* $\Delta$ *ou à sa frontière,*

on obtient alors cette proposition qui généralise celle que j'avais donnée dans le Mémoire cité plus haut dans le cas des $\lambda_n$ réels et positifs.

III. *Si la condition* (10) *est vérifiée et si* (7) *possède un domaine de convergence* $\Delta$, *la série* (3) *ne peut converger en dehors de* $\Delta$ *et de sa frontière qu'en les points d'un ensemble de mesure linéaire nulle.*

On démontre le lemme II en considérant un triangle formé par $z$ et par deux points de $\Delta$. Un point intérieur à ce triangle est à une distance négative, de valeur absolue supérieure à un nombre $\delta$, des droites $D_n$ sauf d'un nombre fini d'entre elles.

Le lemme II se généralise au cas où l'inégalité (9) est remplacée par

$$|C_n e^{\lambda_n z}| < e^{|\lambda_n|(K+\varepsilon)}$$

et où le domaine de convergence est limité par une courbe possédant en chaque point une tangente orientée; alors la distance de $z$ à cette courbe est au plus égale à K.

2. *Sur quelques propriétés des fonctions entières.* — Étant donnée une fonction entière (2), on dit avec M. Lindelöf que la fonction est *du type minimum de l'ordre un* lorsque, si petit que soit le nombre positif $\varepsilon$, on a, à partir d'une valeur de $|u|$,

$$|f(u)| < e^{\varepsilon|u|}.$$

La fonction est dite *du type moyen de l'ordre un* lorsqu'il existe un nombre positif $\gamma$ tel que, à partir d'une valeur de $|u|$,

$$|f(u)| < e^{\gamma|u|}.$$

Nous désignerons par $\Gamma$ la borne inférieure des nombres $\gamma$ jouissant de cette propriété; lorsque la fonction est du type minimum $\Gamma$ est nul. On sait que l'on a, à partir d'une valeur $n > n(\varepsilon)$, si petit que soit $\varepsilon$,

$$(11) \qquad |c_n| < \left[\frac{(\Gamma + \frac{1}{2}\varepsilon)e}{n}\right]^n < (\Gamma + \varepsilon)^n \frac{1}{n!}.$$

Supposons que $f(u)$ ait une infinité de zéros et soient $a_1, a_2, \ldots$ ces zéros rangés par ordre de modules non décroissants, chaque zéro étant inscrit un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité. Si $f(u)$ est de genre o ou un, on a

$$(12) \qquad f(u) = \lim_{m=\infty} e^{\beta_m u} \prod_1^m \left(1 - \frac{u}{a_n}\right)$$

en posant

$$\beta_m = \alpha + \sum_1^m \frac{1}{a_n}.$$

M. Lindelöf a donné la condition pour que $f(u)$ soit du type minimum ou moyen : il faut et il suffit que $\beta_m$ et $\frac{m}{a_m}$ tendent vers zéro pour que la fonction soit du type minimum, que ces quantités soient bornées pour que la fonction soit du type moyen [1]. Nous poserons

$$\beta = \overline{\lim_{m=\infty}} |\beta_m|.$$

Lorsque $\beta$ est nul, donc en particulier dans le cas du type minimum, on peut supprimer le facteur exponentiel dans le second membre de (12); lorsque $\beta_m$ a une limite, on peut le remplacer par cette limite dans (12).

Nous désignerons par

$$(13) \qquad f(u; p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

la fonction entière obtenue en divisant $f(u)$ par le polynome

$$P(u; p_1, \ldots, p_n) = \left(1 - \frac{u}{a_{p_1}}\right) \cdots \left(1 - \frac{u}{a_{p_n}}\right)$$

construit avec des zéros de $f(u)$, chacun figurant un nombre de fois

---

[1] *Annales de l'École Norm.*, 3e série, t. 22, 1905, p. 369-395.

au plus égal à son ordre de multiplicité. En se reportant au Mémoire cité de M. Lindelöf, on établira aisément la proposition suivante :

IV. *On a uniformément pour* $|u| > u(\varepsilon)$, *si petit que soit le nombre positif* $\varepsilon$,

$$|f(u; p_1, \ldots, p_n)| < e^{(D+\varepsilon)|u|},$$

D *étant au plus égal au plus grand des nombres* $\beta$ *et* $K'\Gamma$, $K'$ *étant compris entre un et une constante absolue* (D est nul dans le cas du type minimum).

Les coefficients du type taylorien de (13) vérifieront donc des inégalités analogues à (11) mais où $\Gamma$ sera remplacé par D. Il en est de même pour la différence

$$V(u) = f(u; 1 \ldots, m) - e^{\beta_m u} = e^{\beta_m u}[W(u) - 1]$$

où l'on pose

$$W(u) = \prod_{m+1}^{\infty} \left(1 - \frac{u}{a_n}\right) e^{\frac{u}{a_n}}.$$

Supposons que

$$2|u| < |a_m|, \tag{14}$$

on aura

$$\frac{u}{a_n} - \log\left(1 + \frac{u}{a_n}\right) = \theta_n \left|\frac{u}{a_n}\right|^2, \qquad |\theta_n| < 1,$$

donc

$$\log W(u) = \theta(u)|u|^2 \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^2}, \qquad |\theta(u)| < 1.$$

En se reportant encore au Mémoire de M. Lindelöf on établira que

$$\sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^2} < \frac{H}{|a_m|},$$

H étant fini, ce qui montre que le module de $W(u) - 1$ est inférieur à

$$e^{H\left|\frac{u}{a_m}\right|^2} - 1$$

tant que $|u|$ vérifie la condition (14) et que $m$ est assez grand. Par suite, $\varepsilon'$ étant arbitrairement petit, on a

$$|W(u) - 1| < e^{\varepsilon'|u|} - 1$$

si $A|u|$ est inférieur à $\varepsilon'|a_m|$. On déduit de là et des inégalités de Cauchy une limitation du module des coefficients $d'_n$ du développement de $W(u) - 1$ : on a

$$|d'_n| < \varepsilon'^n \left(\frac{e}{n}\right)^n < \varepsilon' \frac{(2\varepsilon')^n}{n!}$$

pour $n = 1, 2, \ldots, n'$ si grand que soit $n'$ pourvu que $m > m(n')$. Il s'ensuit cette proposition qui précise la façon dont $V(u)$ tend vers zéro lorsque $m$ croît indéfiniment.

V. *Si l'on pose*

$$f(u; 1, 2, \ldots, m) - e^{\beta_m u} = \sum_1^{\infty} d_n u^n,$$

*on a*

$$\begin{aligned} |d_n|\, n! &< \varepsilon(\beta + 2\varepsilon)^n \quad \text{si} \quad n < n', \\ |d_n|\, n! &< (D + \varepsilon)^n \quad \text{si} \quad n \geqq n', \end{aligned}$$

*si grand que soit $n'$ et si petit que soit $\varepsilon$ pourvu que $m$ soit assez grand.*

On peut de même préciser les conditions dans lesquelles le second membre de (12) converge vers le premier membre. Il est clair que les $p$ premiers coefficients du second membre de (12) tendent vers ceux de $f(u)$ si $p$ est fixe et si $m$ croît indéfiniment; d'autre part les coefficients de rang supérieur à $n$ sont toujours bornés de la même manière. D'une façon générale :

VI. *Les coefficients de la fonction*

$$f(u) - e^{\left[\beta_m + \frac{1}{a_{m_1}} + \ldots + \frac{1}{a_{m_q}}\right] u} P(u; 1, 2, \ldots, m, m_1, \ldots, m_q) = \sum_1^{\infty} d''_n u^n$$

*vérifient les inégalités*

$$\begin{aligned} |d''_n|\, n! &< \varepsilon \quad \text{si} \quad n < n', \\ |d''_n|\, n! &< (D + \varepsilon)^n \quad \text{si} \quad n \geqq n', \end{aligned}$$

*si grand que soit $n'$ et si petit que soit $\varepsilon$ pourvu que $m$ soit assez grand* (on suppose les $m_j$ supérieurs à $m$).

3. *Minimum du module de certaines fonctions entières en certains points.* — Supposons que la suite $a_n$ des séries de (2) vérifie en outre

la condition suivante : $a_n$ étant supposé d'ordre $\mu_n$

$$a_n = a_{n+1} = \ldots = a_{n+\mu_n-1},$$

on a

$$(15) \qquad |a_{n+\mu_n}| - |a_n| > \mu'_n \omega,$$

$\mu'_n$ étant le plus grand des ordres de multiplicité de $a_n$ et $a_{n+\mu_n}$ et $\omega$ un nombre positif. Soit alors

$$F_n(u) = \prod{}' \left(1 - \frac{u^2}{a_p^2}\right)\mu_p (p \neq n).$$

Le module de la valeur de cette fonction au point $a_n$ est supérieur ou égal au module au point $|a_n| = A_n$ de la fonction dont les zéros $A_p$ vérifient la condition

$$A_{p+1} - A_p > \omega.$$

VII. *On a*

$$|F_n(a_n)| > e^{-(\varepsilon + K)|a_n|}$$

*si petit que soit $\varepsilon$ pourvu que $n$ soit assez grand.* K *est une constante indépendante de $n$ égale à zéro si $\frac{m}{a_m}$ tend vers zéro et au plus égale dans tous les cas au produit de $\Gamma$ par une constante dépendant de $\omega$* (1).

Considérons d'autre part les valeurs au même point $a_n$ de la dérivée logarithmique de $F_n(u)$ et de ses dérivées. On a

$$\frac{F'_n(u)}{F_n(u)} = \sum{}' \frac{2u\mu_p}{u^2 - a_p^2},$$

donc

$$(16) \qquad \left|\frac{F'_n(a_n)}{F_n(a_n)}\right| < 2|a_n| \sum{}' \frac{1}{|A_n^2 - A_p^2|} < 4|a_n| \sum_1^\infty \frac{1}{\omega^2 p^2} = \frac{2\pi^2}{3} \frac{|a_n|}{\omega^2}.$$

De même

$$(-1)^q \left[\frac{F'_n(a_n)}{F_n(a_n)}\right]^{(q)} = q!\, \Sigma' \mu_p \left[\frac{1}{(a_n - a_p)^{q+1}} + \frac{1}{(a_n + a_p)^{q+1}}\right],$$

ce qui donne

$$(17) \qquad \left|\left(\frac{F'_n(a_n)}{F_n(a_n)}\right)^{(q)}\right| < \frac{4\pi^2}{3} \frac{q!}{\omega^{q+1}}.$$

---

(1) C'est un cas particulier du théorème de M. Hadamard sur le minimum du module. Une démonstration très simple est donnée par MM. Landau et Carlson dans le Mémoire cité.

## II.

4. *Propriétés générales des solutions analytiques de* (1). — Nous considérerons d'abord uniquement les solutions analytiques de (1) et reviendrons ensuite au n° 9 sur les solutions non analytiques. Nous dirons qu'une fonction analytique $g(z)$ est solution de (1) dans un domaine $\Delta$ où elle est holomorphe lorsque le premier membre de (1) converge en tout point de $\Delta$ quand on y remplace $y$ par $g(z)$ et a une somme nulle. Les inégalités de Cauchy relatives aux dérivées d'une fonction holomorphe jointes aux inégalités (11) montrent que :

VIII. *Si $g(z)$ est holomorphe pour $|z - z_0| < \Gamma + h$, $h > 0$, la transmutation*

$$A(g) = g(z) + \ldots + c_n g^{(n)}(z) + \ldots$$

*a un sens et définit une fonction holomorphe pour $|z - z_0| < h$* (1).

En outre, si $g(z)$ est holomorphe et de module moindre que M pour $|z - z_0| < \Gamma + h + h'$, $A(g)$ a son module inférieur à $M\theta(h')$ dans le cercle $|z - z_0| < h$, $\theta(h')$ ne dépendant que de $h'$ et de $f(u)$ et non pas de $g(z)$. Donc :

IX. *Si une suite de fonctions holomorphes $g(z; p)$, $p = 1, 2, \ldots$, converge uniformément vers $g(z)$ dans le cercle $|z - z_0| \leqq \Gamma + h$, la suite des fonctions $A(g(z; p))$ converge uniformément vers $A(g(z))$ dans le cercle $|z - z_0| < h$.*

La présence du nombre $\Gamma$ dans ces énoncés n'est pas due à la méthode. Si les $c_n$ vérifient non seulement les conditions (11) mais les conditions de régularité

$$\lim (n! \, |c_n|)^{\frac{1}{n}} = \Gamma, \tag{18}$$

la convergence de (1) dans un domaine $\Delta$ nécessite que $g(z)$ soit holomorphe dans tout cercle de rayon $\Gamma$ ayant pour centre un point de $\Delta$.

---

(1) La transmutation $A(y)$ rentre d'ailleurs dans la catégorie considérée par M. Pólya (*Bull. Soc. math.*, t. 52, 1924, p. 519-532).

La proposition VIII donne de suite la suivante :

X. *Si une fonction $g(z)$ vérifie (1) dans une portion $\Delta$ de son domaine d'existence $\mathcal{D}$, elle vérifie encore (1) en tout point de $\mathcal{D}$ qui peut être joint à un point $\Delta$ par un chemin dont chaque point est centre d'un cercle de rayon supérieur à $\Gamma$ dans lequel $g(z)$ est holomorphe* [1].

Dans le cas où $f(u)$ est du type minimum le domaine de valabilité d'une solution coïncide avec son domaine d'existence, une fonction analytique ne peut fournir qu'une seule solution. Dans le cas du type moyen nous venons de voir que le domaine de valabilité peut être plus petit que le domaine d'existence de cette solution. En outre, une même fonction analytique peut fournir plusieurs solutions. Soit l'équation

$$y + \frac{1}{2}y' + \ldots + \frac{1}{n!}y^{(n-1)} + \ldots = 0, \tag{19}$$

dont les solutions se déduisent de fonctions périodiques : si $k(z)$ est périodique, de période $un$, dans une bande parallèle à l'axe réel et d'épaisseur supérieure à 2, sa dérivée est solution de (19) dans le domaine restreint constitué par les points de la bande qui sont à une distance supérieure à 1 des points singuliers de $k(z)$. On obtient ainsi toutes les solutions de (19). Une fonction de la forme

$$k'(z) = \sum_{1}^{s} \operatorname{séc}^2(\pi z + id_q)$$

fournit $s+1$ solutions différentes si les différences des $d_q$ deux à deux sont assez grandes.

Convenons de désigner par

$$A(y; p_1, \ldots, p_n), \quad B(y; p_1, \ldots, p_n)$$

les transmutations analogues au premier membre de (1) dont les fonctions génératrices sont respectivement

$$f(u; p_1, \ldots, p_n), \quad P(u; p_1, \ldots, p_n).$$

---

[1] Cette proposition énoncée par M. Ritt dans le cas du genre zéro rentre dans celle énoncée par M. Pólya dans le Mémoire qui vient d'être cité.

L'équation

$$B(y; p_1, \ldots, p_n) = 0$$

est une équation d'ordre fini à coefficients constants dont les solutions sont bien connues. En utilisant la proposition VIII et les développements en série on voit que :

XI. *Pourvu que* $g(z)$ *soit holomorphe pour* $|z - z_0| < \Gamma + h$, *on a dans le cercle* $|z - z_0| < h$

$$(20) \qquad \begin{aligned} A(g) &= B[A(g; p_1, \ldots, p_n); p_1, \ldots, p_n] \\ &= A[B(g; p_1, \ldots, p_n); p_1, \ldots, p_n]. \end{aligned}$$

Cette proposition permet de ramener le cas où la fonction (2) n'a qu'un nombre fini de zéros au cas d'une équation d'ordre fini qui se traite de suite ([1]). Nous supposerons dorénavant que $f(u)$ a une infinité de zéros.

Les propositions V et VI entraînent aussi la suivante dans laquelle $\beta_m$ peut être remplacée pas sa limite si cette limite existe.

XII. $g(z)$ *étant holomorphe pour* $|z - z_0| < D + h$, $h > 0$, *et* $\varepsilon$ *arbitraire, on a*

$$(21) \qquad |A[g(z); 1, 2, \ldots, m] - g(z + \beta_m)| < \varepsilon,$$

$$(22) \qquad \left| A[g(z)] - B\left[g\left(z + \beta_m + \frac{1}{a_{m_1}} + \ldots + \frac{1}{a_{m_\lambda}}\right); 1, 2, \ldots, m, m_1, \ldots, m_\lambda\right]\right| < \varepsilon$$

*pour* $|z - z_0| < h' < h$ et $m > N(g, \varepsilon)$.

Considérons une courbe fermée sur laquelle une solution $g(z)$ de (1) est holomorphe autour de chaque point dans un cercle de rayon $D + \beta$ au moins. Le point $z - \beta_m$ décrit aussi une courbe fermée et $g(z - \beta_m)$ est encore solution; donc, d'après (20),

$$A[g(z - \beta_m); 1, 2, \ldots, m]$$

est une fonction uniforme et en vertu de (21) les valeurs de $g(z)$ lorsque le point $z$ décrit la courbe fermée donnée et revient au point

---

([1]) Le raisonnement de Bourlet sur ce point se complète aisément.

de départ diffèrent de moins de $\varepsilon$; elles sont égales puisque $\varepsilon$ est arbitraire. On généralise ainsi le théorème de M. Ritt :

XIII. *Nous supposons que la fonction génératrice est au plus du type moyen de l'ordre un. Il existe un nombre* $\Omega$ *au plus égal à* $D+\beta$ *tel que, si* $g(z)$ *est solution de* (1) *autour de* $z_0$ *et si* $\Delta$ *est le domaine formé par les points qui peuvent être joints à* $z_0$ *par une ligne dont chaque point est centre d'un cercle de rayon* $\Omega$ *dans lequel la branche de* $g(z)$ *issue de* $z_0$ *est holomorphe,* $g(z)$ *est holomorphe dans tout* $\Delta$.

Dans le cas du type minimum $\Omega$ est nul et l'on retrouve le premier résultat de M. Ritt complété par M. Pólya. Lorsque la condition (18) est réalisée, $\Omega$ est au moins égal à $\Gamma$. Si la fonction $f(u)$ est une fonction paire à zéros alignés l'inégalité donnée dans le théorème IV se précise, D y est remplacé par $\Gamma$ et d'autre part $\beta$ est nul, $\Omega$ est au plus égal à $\Gamma$. $\Omega$ est donc égal à $\Gamma$ si cette condition est vérifiée et si (18) a lieu pour les $n$ pairs. Il importerait dans le cas général de remplacer $\Omega$ par le plus petit nombre possible.

5. *Propriétés des solutions déduites du développement en série de solutions fondamentales.* — Supposons que $g(z)$ soit une solution holomorphe pour $|z-z_0|<D+\beta+h$. $z$ appartenant au cercle $|z-z_0|<h$ on peut appliquer (21) au point $z-\beta_m$, on a

$$g(z)=\lim_{m=\infty} A[g(z-\beta_m);1,2,\ldots,m]$$

et d'après (20) le second membre est solution de

$$B(y;1,2,\ldots,m)=0,$$

c'est-à-dire est une somme de termes de la forme

$$e^{a_n z}\,Q_n(z), \tag{23}$$

$Q_n(z)$ étant un polynome dont le degré est l'ordre de multiplicité de la racine $a_n$ de $f(u)$ diminué d'une unité. Comme une suite de telles fonctions entières converge nécessairement dans un domaine simplement connexe, le théorème XII se complète comme suit :

XIV. *Le domaine* $\Delta$ *défini dans l'énoncé* XIII *est simplement connexe* *et dans ce domaine la solution envisagée est la somme d'une série uniformément convergente dont les termes sont des sommes de solutions fondamentales* (23).

Le cas le plus simple est celui où la solution peut être représentée par la somme d'une série simple

$$\sum e^{a_n z} Q_n(z). \tag{24}$$

Mais ce n'est pas le cas général. Il peut se faire qu'une série (24) ne converge en aucun point, mais qu'un simple groupement de termes la rende convergente. C'est le cas pour

$$\sum \left[ e^{4^n + 2^n z} - e^{4^n + (2^n + \varepsilon_n) z} \right] \qquad (\varepsilon_n = e^{-8^n}),$$

qui représente une fonction entière solution d'une équation (1) facile à former. Le cas le plus simple lorsqu'un développement (24) est impossible serait sans doute celui où un groupement d'un nombre borné de termes assurerait la convergence. Quoi qu'il en soit ceci montre l'intérêt des propriétés données ci-dessus et de la proposition précise de M. Pólya donnée dans l'introduction qui s'appliquent à la famille des fonctions solutions d'équations (1) indépendamment de la possibilité de les représenter par des séries simples. Ces propriétés appartiendront évidemment à la somme des séries de la forme (24) dès que leur domaine de convergence contiendra un cercle de rayon $\Gamma$.

Supposons maintenant qu'une solution $g(z)$ soit donnée par la somme d'une série (24) dans un cercle $|z - z_0| < \Gamma + h$, $h > 0$, la série étant uniformément convergente dans ce cercle. Le calcul des coefficients des polynomes $Q_n(z)$ se fait en généralisant la méthode de M. Ritt. La fonction

$$g(z) - e^{a_n z} Q_n(z)$$

est solution de

$$\Lambda(y; n, \ldots, n + \mu_n - 1) = 0 \qquad (a_n = a_{n+1} = \ldots = a_{n+\mu_n - 1}), \tag{25}$$

tout au moins pour $|z - z_0| < h$. Pour simplifier l'écriture, écrivons $a$, $\mu$, Q au lieu de $a_n$, $\mu_n$, $Q_n$ et appelons $C(y)$ le premier membre de (25) et $\Phi(u)$ sa fonction génératrice. La fonction et ses dérivées vérifient $C(y)=0$. En éliminant $Q$, $Q'$, ..., $Q^{j-1}$ [1] entre (26) et ses $j$ premières dérivées, on voit que

$$g^j - jag^{j-1} + C_j^2 a^2 g^{j-2} + \ldots + (-1)^j a^j g - e^{az} Q^j$$

est solution de $C(y)=0$. D'ailleurs

$$C[g^j - \ldots + (-1)^j a^j g] = (-1)^j a^j A(g;\, n,\, n+1,\, \ldots,\, n+\mu-j-1)$$

$$C(e^{az}Q^j) = e^{az}\left[\Phi(a)Q^j + \Phi'(a)Q^{j+1} + \ldots + \frac{\Phi^{\mu-j-1}(a)}{(\mu-j-1)!}Q^{\mu-1}\right],$$

Q et ses dérivées vérifient donc le système d'équations

$$(27)\qquad \begin{aligned} &e^{az}\left[\Phi(a)Q^{(j)} + \ldots + \frac{1}{(\mu-j-1)!}\Phi^{(\mu-j-1)}(a)Q^{(\mu-1)}\right] \\ &\quad = (-1)^j a^j A(g;\, n,\, n+1,\, \ldots,\, n+\mu-j-1) \\ &\qquad (j=0,\, 1,\, \ldots,\, \mu-1). \end{aligned}$$

La dernière de ces équations ($j=\mu-1$) donne le terme de plus haut degré de $Q(z)$, la précédente donne le terme précédent, et ainsi de suite. Il suffit d'ailleurs que $g(z)$ soit holomorphe dans le cercle $|z-z_0|<\Gamma+h$, $h>0$, pour que ce calcul soit possible. *A toute solution de* (1) *holomorphe dans un tel cercle correspond une suite de polynomes* $Q_n(z)$ *attachés à ce cercle et aux zéros* $a_n$ *de* $f(u)$. Nous les appellerons les *polynomes de Dirichlet de* $g(z)$ [Dans le cas où $f(u)$ n'a qu'un nombre fini de zéros multiples, on a des coefficients de Dirichlet].

Une fonction (24) uniformément convergente dans un domaine contenant un cercle de rayon $\Gamma$ admet ses propres polynomes coefficients pour polynomes de Dirichlet, *elle ne peut représenter zéro si tous ses polynomes coefficients ne sont pas nuls*.

Supposons que deux solutions holomorphes dans un même cercle $|z-z_0|<D+h$, $h>0$, aient les mêmes polynomes de Dirichlet dans le cercle $|z-z_0|<h$. Leur différence $G(z)$ a des polynomes de Dirichlet identiquement nuls. Les conditions (27) montrent alors que l'on a pour $|z-z_0|<h$ et pour tout $n$

$$A(G;\, n,\, n+1,\, \ldots,\, n+\mu_n-1)=0.$$

---

[1] Dans les formules jusqu'à (27) les indices supérieurs de $g$, $Q$, $\Phi$ sont des indices de dérivation.

Alors, eu égard à (20), la fonction

$$A(G; n, \ldots, n + \mu_n - 1, n', \ldots, n' + \mu_{n'} - 1)$$

vérifie deux équations linéaires d'ordre fini sans solutions communes, elle est identiquement nulle; en opérant ainsi de proche en proche on voit que, quel que soit $n$,

$$A(G; 1, 2, \ldots, n) = 0.$$

On peut alors appliquer (21), ce qui donne cette proposition :

XV. *Deux solutions qui sont à la fois holomorphes pour* $|z - z_0| < D + h$, $h > 0$, *et ont mêmes polynomes de Dirichlet dans ce cercle sont identiques.*

Il s'ensuit que, dès que la série (24) formée avec les polynomes de Dirichlet d'une solution $g(z)$ valable autour de $z_0$, et holomorphe pour $|z - z_0| < D + h$, converge uniformément dans ce cercle, elle y donne le développement de la fonction $g(z)$. En se reportant à l'étude de la convergence de ces séries faite au n° 1 et en remarquant que, dans le cas du type minimum les conditions (4) sont toujours vérifiées (puisque l'ordre d'un zéro est moindre que le plus grand de ses indices et que $n : a_n$ tend vers zéro) on voit que :

XVI. *Dans le cas du type minimum, pour qu'une solution soit développable en série de solutions fondamentales dans une portion de son domaine d'existence, il faut et il suffit que la série*

$$\Sigma |e^{a_n z} Q_n(z)| \tag{28}$$

*formée avec les polynomes de Dirichlet de cette solution converge dans cette portion.*

*Si la fonction est du type moyen et si* $\mu_n : a_{n+\mu_n}$ *tend vers zéro, pour qu'une solution valable autour de* $z_0$ *et holomorphe pour* $|z - z_0| < D + h$ *soit développable pour* $|z - z_0| < h$, *il suffit que la série*] (28) [*correspondant à ses polynomes de Dirichlet converge dans le premier de ces cercles.*

6. *Sur la divisibilité.* — Considérons deux transmutations $A(y)$ et $A_1(y)$ de fonctions génératrices $f(u)$ et $f(u_1)$ et désignons par $(AA_1)(y)$ la transmutation dont la fonction génératrice est le produit $f(u)f_1(u)$. Nous appellerons $\Gamma_1$ le nombre analogue à $\Gamma$ et relatif

à $f_1(u)$. Si $g(z)$ est holomorphe pour $|z-z_0|<\Gamma+\Gamma_1+h$, $h>0$, on a uniformément pour $|z-z_0|<\Gamma_1+h$

$$A(g)=\lim[g+c_1g'+\ldots+c_ng^{n}].$$

En appliquant la transmutation $A_1$ aux deux membres, on voit que dans le cercle de rayon $h$, $A_1[A(g)]=(AA_1)(g)$, donc :

XVII. *Si $g(z)$ est solution de $A(y)=0$ autour de $z_0$ et est holomorphe pour $|z-z_0|<\Gamma+\Gamma_1+h$, $g$ est solution de $(AA_1)(y)=0$ lorsque $|z-z_0|<h$.*

L'inégalité (22) donnerait une autre démonstration, mais un résultat moins précis. Lorsque l'équation est du type minimum elle admet toutes les solutions des équations du type minimum dont les génératrices sont les diviseurs de $f(u)$. Dans le cas du type moyen l'énoncé précédent apporte quelques restrictions. Il est d'ailleurs clair que lorsque la condition (18) est vérifiée, une solution d'un diviseur appartenant au type minimum ne peut convenir partout si son domaine d'existence est borné et ne convient nulle part si ce domaine est trop petit, ce qui est réalisable comme on le verra au n° 7.

Lorsque deux fonctions génératrices ont des zéros communs les équations correspondantes ont des solutions communes. Ces solutions communes proviennent-elles uniquement des zéros communs? En d'autres termes, deux équations dont les génératrices n'ont pas de zéros communs peuvent-elles avoir des solutions communes?

Plaçons-nous dans les conditions du théorème XVII et montrons que :

XVIII. *Les polynomes de Dirichlet de la solution $g(z)$ considérée comme solution de $A(y)=0$ ou comme solution de $(AA_1)(y)=0$ sont les mêmes.*

Les formules (27) donnent en effet ces polynomes dans le premier cas. Si $g(z)$ est considéré comme solution de l'équation composée, on voit de suite que les polynomes correspondant aux zéros de $f_1(u)$ [qui ne sont pas zéros de $f(u)$] sont nuls. D'autre part les deux membres des égalités (27) restent égaux lorsqu'on leur applique la transmutation $A_1(y)$. Or on obtient ainsi dans le premier membre

$$e^{az}\left[\Phi(a)f_1(a)Q^{(j)}+\ldots+\frac{1}{(\mu-j-1)!}[\Phi(a)f_1(a)]^{(\mu-j-1)}\right],$$

c'est-à-dire que les équations deviennent celles déterminant les polynomes de Dirichlet de l'équation composée. Ceci démontre la proposition.

Considérons alors deux équations A, $A_1$ admettant les solutions $g$ et $g_1$ et supposons pour simplifier qu'elles soient du type minimum. La différence $g-g_1$ est solution de $(AA_1)(y)=0$ et la suite de ses polynomes de Dirichlet est constituée par les suites des polynomes de $g$ et $-g_1$ relatifs aux équations A et $A_1$. Si $g$ et $g_1$ coïncident, elles ont donc mêmes polynomes de Dirichlet et ces polynomes ne sont pas tous nuls d'après ce qui a été dit plus haut. Les deux fonctions $f(u)$ et $f_1(u)$ ont donc des zéros communs et seuls ces zéros communs fournissent des polynomes de Dirichlet non nuls pour les solutions communes. D'après (27) *les solutions communes à* A *et* $A_1$ *sont les solutions de l'équation dont la fonction génératrice est le plus grand commun diviseur de* $f(u)$ *et* $f_1(u)$.

7. *Cas des équations régulières. Propriétés des séries correspondantes.* — Nous supposerons ici que les zéros de la fonction génératrice vérifient la condition (15). En suivant ce qui a été fait par M. Ritt nous introduirons l'équation

$$(AA_1)(y)=0 \tag{29}$$

avec

$$f_1(u)=f(-u).$$

Le quotient de $f(u)f(-u)$ par le binome $\left(1-\frac{u}{a_n}\right)^{\mu_n}$ est alors le produit de la fonction $F_n(u)$ du n° 3 par

$$\left(1+\frac{u}{a_n}\right)^{\mu_n}.$$

On pourra appliquer la proposition VII et les inégalités (16) et (17) à la fonction $\Phi(a)$ figurant dans les inégalités (27) correspondant à cette fonction et aux dérivées de $\frac{\Phi'(a)}{\Phi(a)}$.

Soit $g(z)$ une solution de (1) valable autour de $z_0$ et holomorphe dans le cercle $|z - z_0| < 2D + h$; ses polynomes de Dirichlet peuvent être calculés en considérant cette fonction comme solution de (29). Nous allons montrer que, moyennant certaines conditions, la série (28) correspondante converge dans un cercle $|z - z_0| < h' < h$. Dans ce cercle les fonctions

$$(AA_1)(g; n, n+1, \ldots, n+\mu-j-1)$$

sont uniformément bornées. D'autre part, en tirant $Q(z)$ des égalités (27), on obtient

$$e^{az}Q = \sum_{j=0}^{j=\mu-1} \frac{a^j}{\Phi(a)^{j+1}} \Delta(j)(AA_1)(g; n, \ldots, n+\mu-j-1),$$

$\Delta(j)$ désignant le déterminant

$$\Delta(j) = \begin{vmatrix} \Phi'(a) & \frac{1}{2}\Phi''(a) & \ldots & \frac{1}{j!}\Phi^{(j)}(a) \\ \Phi(a) & \Phi'(a) & \ldots & \frac{1}{(j-1)!}\Phi^{(j-1)}(a) \\ 0 & \Phi(a) & \ldots & \frac{1}{(j-2)!}\Phi^{(j-2)}(a) \\ \cdot & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \Phi'(a) \end{vmatrix}$$

dont les éléments d'une parallèle à la diagonale principale sont tous égaux. Ce déterminant $\Delta(j)$ contient $2^{j-1}$ termes non nuls qui sont de la forme

$$\Phi(a)^\lambda \quad \Phi'(a)^\mu \quad \ldots \quad \left[\frac{\Phi^{(j)}(a)}{j!}\right]^\nu$$

avec

$$\mu + \ldots + j\nu = j, \qquad \lambda + \mu + \ldots + \nu = j.$$

On a donc

$$\frac{\Delta(j)}{\Phi(a)^j} = \sum \pm \left[\frac{\Phi'(a)}{\Phi(a)}\right]^\mu \cdots \left[\frac{\Phi^{(j)}(a)}{j!\,\Phi(a)}\right]^\nu.$$

Un facteur de ce produit s'exprime au moyen de $\varphi(a) = \dfrac{\Phi'(a)}{\Phi(a)}$ et de ses dérivées, on a

$$\frac{\Phi^{(j)}(a)}{\Phi(a)} = \sum \varphi^{l_1}(\varphi')^{l_2} \ldots (\varphi^{(j-1)})^{l_j}$$

avec

$$t_1 + 2t_2 + \ldots + jt_j = j,$$

et le $\Sigma$ contenant moins de $j!$ termes. Appliquons les inégalités déduites de (16) et (17). Nous obtenons

$$\left|\frac{\Delta(j)}{\Phi(a)^j}\right| < \mathrm{B}^j j^j |a|^j,$$

B étant le quotient d'une constante absolue par $\omega^2$. Il suit de là et du théorème VII que

$$|e^{a_n z} \mathrm{Q}_n(z)| < e^{(\mathrm{K}+\varepsilon)|a_n|}(\mathrm{B}\mu_n |a_n|^2)^{\mu_n}.$$

On sait que $\mu_n : |a_n|$ est borné, si donc on suppose que

$$(30) \qquad \lim \frac{\mu_n \log|a_n|}{|a_n|} = 0,$$

on aura l'inégalité

$$|e^{a_n z} \mathrm{Q}_n(z)| < e^{(\mathrm{K}+\varepsilon)|a_n|}$$

valable dans le cercle $|z - z_0| < h$ si petit que soit $\varepsilon$ pourvu que $n$ soit assez grand. K est la constante figurant dans l'énoncé VII. La condition (30) implique la condition (10) du n° 1 et par suite pour tous les points du cercle sauf peut-être ceux d'un ensemble de mesure linéaire nulle, on a aussi

$$|e^{a_n z} \mathrm{C}_n| < e^{(\mathrm{K}+\eta)|a_n|}.$$

Cette inégalité a lieu partout dans le cercle considéré puisque le premier membre est holomorphe.

Supposons d'abord que $f(u)$ soit du type minimum; K est nul. Les distances positives de tout point $z$ du cercle aux droites $\mathrm{D}_n$ du n° 1 restent inférieures à $\eta$ dès que $n$ est assez grand. Considérons trois points du cercle et les petits cercles de rayon $2\eta$ ayant pour centres ces trois points. Les tangentes communes à ces petits cercles parallèles aux côtés du triangle des trois points déterminent un petit triangle intérieur au premier dont tous les points sont à des distances négatives au moins égales en valeur absolue à $\eta$ de toutes les droites $\mathrm{D}_n$ sauf un nombre fini d'entre elles. La série (28) converge donc dans ce triangle et par suite dans le cercle considéré, ce qui permet d'énoncer ce résultat :

XIX. *Si $f(u)$ est du type minimum et si les $a_n$ et $\mu_n$ vérifient les condi-*

*tions* (15) *et* (30) *toute solution de* (1) *est développable en série de solutions fondamentales dans tout son domaine d'existence qui est convexe.*

*Moyennant ces conditions imposées aux* $a_n$ *et* $\mu_n$ *une série* (24) *admet la frontière de son domaine de convergence comme ligne singulière.*

La seconde partie de l'énoncé complète un résultat que j'avais donné précédemment (1).

Dans le cas du type moyen, les considérations précédentes s'appliquent avec quelques modifications. On prendra dans le cercle $|z - z_0| < h$ trois points formant un triangle équilatéral et l'on entourera les sommets de cercles de rayon supérieur à K. Il est nécessaire que $h$ soit supérieur à $2K$, il faudra d'autre part appliquer la proposition XVI. On obtient ainsi cette proposition :

XX. *Si* $f(u)$ *est du type moyen et si les* $a_n$ *et* $\mu_n$ *vérifient les conditions* (15) *et* (30), *il existe un nombre* $\Omega'$ *au plus égal à* $3D + 2K$ *tel que :*

1° *Toute solution de* (1) *valable autour de* $z_0$ *et holomorphe pour* $|z - z_0| < \Omega' + h$ *est développable en série de solutions fondamentales dans le cercle* $|z - z_0| < h$;

2° *Le domaine de convergence de la série obtenue contient tous les points qui peuvent être joints à* $z_0$ *par une ligne dont chaque point est centre d'un cercle de rayon supérieur à* $\Omega'$ *dans lequel la solution prolongée le long de la ligne est encore holomorphe.*

En ce qui concerne les singularités de fonctions définies par les séries (24) on a la proposition suivante qui comprend un théorème de M. Ostrowski (2) :

XXI. *Si une série* (24) *possède un domaine de convergence et si les* $a_n$ *et* $\mu_n$ *satisfont aux conditions* (15) *et* (30), *la somme de la série ne peut être holomorphe dans un cercle de rayon supérieur à* $\Omega'$ *si le cercle concentrique de rayon* $\Gamma$ *est intérieur au domaine de convergence, la circonférence de ce cercle étant tangente à la frontière du domaine.*

---

(1) *Comptes rendus*, t. 181, 1925, p. 763-765.

(2) *Sitzb. der preus. Akad. der W.*, 1923, p. 39-44. *Voir* aussi à ce sujet le Mémoire de M. Pólya qui suit celui-ci dans ce recueil.

Le théorème XIX justifie ce qui a été dit au n° 6. La forme du domaine de convergence des séries (24) est conditionnée dans une certaine mesure par l'ensemble E limite des arguments réduits des nombres $a_n$. C'est une conséquence du n° 1. On peut prendre une suite de fonctions fondamentales telle que E ne contienne qu'un nombre fini $s$ de points. Les domaines de convergence sont alors des polygones convexes de $s$ côtés au plus (certains des côtés pouvant aller à l'infini) dont les directions des perpendiculaires aux côtés dirigées vers l'intérieur sont connues. Tout polygone satisfaisant à cette condition est le domaine d'existence de solutions faciles à former. On pourra obtenir des solutions dont le domaine d'existence sera un triangle aussi petit que l'on voudra.

Lorsque E renfermera une infinité de points on aura d'autres formes de domaines. Si E est dense entre o et $2\pi$, on pourra obtenir un domaine limité par une courbe convexe F donnée. On choisit les $C_n$ pour que le lieu des points limites des points $\nu_n$ du n° 1 soit la podaire de F par rapport à l'origine.

8. *Solutions entières.* — Les fonctions entières, solutions d'une équation (1) sont au moins du type moyen de l'ordre un. Ce résultat donné par M. Schürer dans le Mémoire cité dans l'Introduction peut aussi s'établir et se compléter de la façon suivante dans le cas ici envisagé :

Soient $M(r)$ le maximum du module de la fonction entière $g(z)$ pour $|z| = r$, $M(r; p)$ le maximum du module de sa dérivée d'ordre $p$. Supposons que l'on ait

$$(31) \qquad \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\log M(r)}{r} \leqq E \qquad (E > o).$$

D'après le théorème de M. Hadamard sur la convexité, on a

$$\log M(r) = \int_a^r u(x)\frac{dx}{x} + H,$$

$u(x)$ ne décroissant pas. On en déduit que $\log M(r)$ étant inférieur à $5Er$ dans une suite d'intervalles $r_q$, $4r_q$ [en vertu de (31)], $u(r)$ est inférieur à $E_1 r$ dans les intervalles $2r_q$, $4r_q$, $E_1$ étant aussi fini et il s'ensuit que

$$\log M(r+h) < \log M(r) + hE_1,$$

pourvu que $r$ et $r+h$ appartiennent à un même intervalle. Les inégalités de Cauchy donnent alors

$$M(r;p) < p!\frac{M(r+h)}{h^p} < M(r)\frac{p!}{h^p}e^{hE_1}, \tag{32}$$

cette inégalité étant valable lorsque $r$ appartient aux intervalles $2r_q$, $3r_q$ et $h$ pouvant être pris fixe mais arbitrairement grand. Supposons maintenant que $g(z)$ soit solution de (1), la fonction génératrice qui est au plus du type moyen ne s'annulant pas pour $|u| \leqq U$. Pour $|u| \leqq U$, on a

$$\left|\sum_0^m c_n u^n\right| > 2\sum_{m+1}^{\infty} |c_n| \frac{n!}{h^n} e^{hE_1}, \tag{33}$$

pourvu que $h$ puis $m$ soient pris assez grands. Pour $n \leqq m$ et $z$ choisi de façon que $|g(z)| = M(r)$, on a

$$\frac{g^{(n)}(z)}{g(z)} = \left[\frac{N(r)}{z}\right]^n (1+\varepsilon_n),$$

$\varepsilon_n$ pouvant être pris aussi petit que l'on veut dès que $r$ est assez grand et extérieur à certains intervalles exceptionnels (¹). Les intervalles exceptionnels appartenant à un intervalle $2r_q$, $3r_q$ ont une longueur totale infiniment petite par rapport à $r_q$. $N(r)$ est le rang du terme maximum de la série $g(z)$ et l'on a encore dans les intervalles $2r_q$, $3r_q$, $N(r) < rE_2$. Alors $g(z)$ étant solution de (1), on a dans ces intervalles

$$\left|\sum_1^m c_n \left[\frac{N(r)}{z}\right]^n (1+\varepsilon_n)\right| \leqq \sum_{m+1}^{\infty} |c_n| \frac{n!}{h^n} e^{hE_1},$$

et l'on peut supprimer les $\varepsilon_n$ dans le premier membre à condition de multiplier le second membre par 2, pourvu que $r$ soit assez grand. Pour que l'on ne soit pas en contradiction avec (33), il faut que

$$N(r) \geqq Ur.$$

Cette inégalité aura lieu dans chacun des intervalles $2r_q$, $3r_q$ à condi-

---

(¹) *Lectures on the general Theory of integral Functions.*

tion de multiplier le second membre par un facteur tendant vers un, et comme

$$\log M(r) > \int_a^r N(x) \frac{dx}{x},$$

on voit que :

XXII. *Lorsque* (2) *est au plus du type moyen de l'ordre un, on a pour toute fonction entière vérifiant* (1)

$$\varlimsup_{r=\infty} \frac{\log M(r)}{r} > 0.$$

*Pour une solution entière qui est au plus du type moyen de l'ordre un, on a*

$$\varliminf \frac{\log M(r)}{r} > U.$$

En employant l'égalité (20) on déduit de ce dernier résultat que toute solution entière du type moyen de l'ordre un est une combinaison d'un nombre fini de solutions fondamentales, proposition due à M. Schürer.

Il existe d'autre part des solutions entières d'ordre aussi grand que l'on veut. On peut en effet extraire de la suite des $a_n$ une autre suite dont les arguments réduits ont une limite qu'il est loisible de supposer nulle (en changeant $z$ en $sz$) et dont les modules ont des différences supérieures à 1. Si $a_n$ est égal à $A(n) + iB(n)$, la série

$$g(z) = \Sigma C_n e^{-iB(n)} e^{a_n z} \qquad (C_n > 0)$$

a son module maximum pour $|z| = r$ compris entre

$$\Sigma C_m e^{mr} \quad \text{et} \quad \Sigma C_m e^{m(1+\varepsilon_m)r},$$

les sommations étant étendues à une même suite d'entiers $m$, et $\varepsilon_m$ tendant vers zéro. On peut choisir les $C_m$ pour que la fonction

$$\Sigma C_m e^m$$

soit à croissance aussi rapide et aussi irrégulière que l'on veut.

Notons que, dès que les $a_n$ et $\mu_n$ satisfont aux conditions (15) et (30), les fonctions entières solutions sont développables en série (24) convergente dans tout le plan.

9. *Solutions non analytiques.* — Dans le cas des fonctions du type moyen dont les coefficients vérifient les conditions (18), la convergence de la série (1) implique que les dérivées vérifient les inégalités

$$\left(\frac{|y^{(n)}|}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} < \delta \qquad [n > n(z)].$$

Il suffit que ces conditions soient vérifiées uniformément sur un segment pour que $y(z)$ soit analytique dans un domaine contenant ce segment. Il n'existe pas de fonctions non analytiques mais quasi analytiques sur un segment auxquelles s'applique la transmutation (1) puisque la donnée en un point des dérivées vérifiant les inégalités précédentes ne peut définir qu'une fonction analytique. Il semble donc possible que, tout au moins pour les équations les plus régulières qui sont effectivement du type moyen, toute solution soit analytique.

Il n'en est plus de même dans le cas du type minimum. La convergence de (1) n'entraîne plus de condition analogue à celle relative à l'analyticité, ni même à celles relatives à la quasi-analyticité si $\sqrt[n]{|c_n|}$ est le terme général d'une série convergente. Nous supposerons la variable $z = x$ réelle et nous formerons des solutions non analytiques au moyen de séries de solutions fondamentales en remarquant que :

XXIII. *Si la suite des fonctions indéfiniment dérivables* $G(x; n)$ *converge uniformément vers* $G(x)$ *sur le segment* $a \leqq x \leqq b$ *et si sur ce segment on a pour tout n*

$$|G^{(p)}(x; n)| < N_p,$$

*la série*

$$\Sigma |c_p| N_p$$

*étant convergente,* $A(G)$ *existe et est la limite de* $A[G(x; n)]$.

Les hypothèses entraînent en effet l'existence des dérivées de $G(x)$ qui sont les limites des $G^{(p)}(x; n)$ et vérifient les mêmes inégalités. Toute série de solutions fondamentales dont la somme des $n$ premiers termes vérifie les conditions de l'énoncé XXIII fournit donc une solution. Si cette série admet un domaine de convergence dont la frontière est coupure et contient le segment $(a, b)$, cette somme ne peut être analytique sur $(a, b)$ en vertu d'un théorème de M. Painlevé.

Il est aisé d'appliquer ces considérations. Supposons qu'une suite infinie de zéros $a_n$ admette $\frac{\pi}{2}$ pour argument. Extrayons-en une suite $a_n$ vérifiant les conditions (15). La série

$$\Sigma b_n e^{a_n z}$$

admet le demi-plan supérieur pour domaine d'existence si

$$(34)\qquad \frac{\log|b_n|}{|a_n|}$$

tend vers zéro. Sur l'axe réel $Ox$, on a

$$G(x) = \Sigma b_n e^{a_n x},$$

donc

$$N_p = \Sigma |b_n| |a_n|^p$$

et il suffit que

$$\Sigma(|b_n| \Sigma |c_p a_n^p|)$$

converge pour que $G(x)$ ne soit pas analytique tout en étant solution. Supposons pour éviter toute difficulté que la fonction (2) soit d'ordre $\rho$ inférieur à 1. On a

$$\Sigma |c_p a_n^p| < e^{|a_n|^\rho},$$

et l'on peut prendre en conformité avec (34)

$$|b_n| = e^{-\varepsilon_n |a_n|}$$

avec

$$\lim \varepsilon_n = 0, \qquad \varepsilon_n |a_n| > |a_n|^{\rho_1} \qquad (\rho_1 > \rho),$$

de sorte que toutes les conditions sont réalisées.

On pourra obtenir des fonctions quasi analytiques. Par exemple, en prenant $|a_n| = \sigma^n$, $\sigma > 1$, et $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, le calcul de $N_p$ est celui du maximum du module d'une fonction entière et l'on trouve

$$\sqrt[p]{N_p} < Kp \log p,$$

$G(x)$ appartient à la première classe de fonctions quasi analytiques de M. Denjoy.

Les exemples que l'on peut ainsi former introduisent des fonctions qui sont la valeur limite d'une solution analytique sur un côté d'un polygone d'existence. On peut généraliser un peu en prenant la somme de deux telles fonctions, l'une correspondant à une solution holomorphe au-dessous d'un segment de $Ox$, l'autre à une solution holomorphe au-dessus de ce même segment. Mais il y aurait lieu de rechercher si toutes les solutions non analytiques sont nécessairement de cette forme.

10. *Cas où la fonction génératrice est du type maximum de l'ordre un.* — Je donnerai ici quelques indications sur le cas où la fonction génératrice est une fonction entière d'ordre fini quelconque. Il est loisible de supposer qu'elle est au plus du type moyen de l'ordre $\rho$. On a donc

$$|f(u)| < e^{(A+\varepsilon)|u|^{\rho}}, \tag{35}$$

si petit que soit $\varepsilon$ pourvu que $|u|$ soit assez grand. On en tire des inégalités bien connues pour les coefficients $c_n$, inégalités de la forme

$$|c_n| < \left(\frac{A' + \varepsilon}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}}.$$

Si l'on suppose que l'on a des inégalités de sens contraire de la même forme

$$|c_n| > \left(\frac{A''}{n}\right)^{\frac{n}{\rho}},$$

valables soit pour tous les $n$, soit pour des $n$ assez rapprochés, la condition de convergence de la série (1) entraîne pour les $y^{(n)}$ des inégalités qui expriment que $y$ est une fonction entière qui est au plus du type moyen de l'ordre $\frac{\rho}{\rho - 1}$. Ce sont des solutions de cette espèce qu'il conviendra de chercher. En reprenant les notations du n° 8 et en utilisant la première partie de l'inégalité (32), on établira que :

XXIV. *Si $g(z)$ est une fonction entière qui est au plus du type moyen de l'ordre $\rho$, on a*

$$M(r; p) < M(r)\,(A\,r^{\rho-1})^{p}, \qquad \text{si } p < A\,r^{\rho},$$
$$M(r; p) < M(r)\left(A\,p^{\frac{\rho-1}{\rho}}\right)^{p}, \qquad \text{si } p > A\,r^{\rho},$$

A *étant une constante que l'on peut remplacer par une fonction de $r$ ten-*

*dant vers zéro lorsque $r$ croît indéfiniment, lorsque $g(z)$ est du type minimum.*

Le cas des fonctions régulières montre que ces inégalités sont bien précises.

De XXIV on tire cette proposition qui correspond à VIII :

XXV. *Si $f(u)$ est du type moyen de l'ordre $\rho$* [inégalité (35)], *la transmutation* (1) *définit une fonction entière dès que l'on y remplace $y$ par une fonction entière $g(z)$ d'ordre $\frac{\rho}{\rho-1}$ et d'un type moyen assez petit* [ce qui signifie que le nombre analogue au nombre A de (35) doit être assez petit].

Le problème qu'il y a lieu de se poser ici est celui de la représentation des solutions par des séries à simple entrée de solutions fondamentales. Je n'entrerai pas dans le détail de cette étude qui se fait en suivant la même marche que ci-dessus. La proposition IX se généralise : si la suite des fonctions entières $g(z;\, n)$ converge uniformément vers $g(z)$ qui est d'un type moyen assez petit de l'ordre $\frac{\rho}{\rho-1}$, $A[g(z;\, n)]$ converge uniformément vers $A[g(z)]$. [Par cette convergence uniforme, il faut entendre que les $g(z;\, n)$ sont en outre uniformément du type de $g(z)$]. Ceci conduit à une généralisation du même genre de XVII. On peut alors se borner à considérer des équations dont la fonction génératrice est de la forme $\varphi(u^q)$, $q$ étant entier et $\varphi(u)$ d'ordre inférieur à un, ce qui permet d'appliquer les considérations du n° 7. En particulier, on obtient cette proposition :

XXVI. *Si la fonction génératrice est une fonction sans zéros d'ordre $\rho$ supérieur à un, l'équation* (1), *dont les solutions sont nécessairement des fonctions entières qui sont au plus du type moyen de l'ordre $\frac{\rho}{\rho-1}$, n'admet pas de solutions de cet ordre et d'un type moyen assez petit.*

Il est probable qu'une telle équation n'a pas de solutions analytiques.