

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

RENÉ GARNIER

## Le problème de Plateau

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 45 (1928), p. 53-144

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1928\\_3\\_45\\_\\_53\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1928_3_45__53_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1928, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LE PROBLÈME DE PLATEAU

PAR M. RENÉ GARNIER



## INTRODUCTION.

Ce Mémoire a pour objet la résolution du problème de Plateau pour les contours polygonaux, et, plus généralement, pour les contours continus, pourvus d'un nombre fini de points anguleux et possédant entre deux quelconques de leurs points (non séparés par un point anguleux) une courbure moyenne bornée. La méthode adoptée permet, de plus, de traiter les problèmes analogues du type de Schwarz et du type mixte. Avant d'en exposer les lignes générales, j'en indiquerai rapidement l'origine.

1. Dans ses *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, G. Darboux, après avoir énoncé le problème de Plateau, s'exprime de la manière suivante <sup>(1)</sup> :

« L'Analyse n'a pu, jusqu'ici, imaginer aucune méthode générale permettant de commencer l'étude de cette belle question. Toutefois, dans le cas particulièrement intéressant où le contour est formé de lignes droites et dans celui où quelques-unes des portions de ce contour sont remplacées par des plans que la surface doit couper normalement <sup>(2)</sup>, les propositions que nous avons fait connaître relativement aux diverses représentations conformes de la surface ont permis de

---

<sup>(1)</sup> Tome I, 2<sup>e</sup> édition, Paris 1914, p. 490.

<sup>(2)</sup> Nous désignerons cette seconde sorte de contour sous le nom de *contour de Schwarz*.

préparer la solution du problème, et même de le résoudre d'une manière complète pour certaines formes simples du contour. Les principaux résultats acquis à la Science dans cet ordre de recherches sont dus à Riemann, à M. Weierstrass et à M. Schwarz. »

Les travaux de Riemann et de Schwarz sont basés sur la représentation conforme; ils résolvent certains cas particuliers avec une grande élégance; quant à Weierstrass, il n'a publié de sa méthode qu'une esquisse très courte <sup>(1)</sup>; nous en reproduirons l'essentiel, car elle constitue, en fait, l'origine de ce Mémoire.

L'illustre géomètre représente la surface minima cherchée par des équations de la forme

$$X = \mathcal{R} \int i(G^2 - H^2) dx, \quad Y = \mathcal{R} \int (G^2 + H^2) dx, \quad Z = \mathcal{R} \int 2iGH dx,$$

où  $G(x)$  et  $H(x)$  sont deux fonctions monogènes analytiques qui devront être choisies de manière que le segment de surface minima cherché  $\Sigma$  et le contour aient pour images respectives le demi-plan  $\mathcal{R}(ix) < 0$  et l'axe réel. Weierstrass écarte d'ailleurs le cas d'un contour continu, et il remarque que, dans le cas d'un contour polygonal,  $G(x)$  et  $H(x)$  satisfont à une équation différentielle linéaire du second ordre (E), à coefficients rationnels; puis il ajoute :

« Die in dieser Differential-Gleichung vorkommenden Constanten, sowie diejenigen, welche durch die Integration eingeführt werden, hängen ab von den Richtungen und den Längen der einzelnen Strecken, aus denen die Begrenzung besteht. Im Allgemeinen erfordert die Bestimmung dieser Constanten die Lösung transcendenten Gleichungen.... »

Ce programme de recherches, G. Darboux en a précisé le début <sup>(2)</sup>,

<sup>(1)</sup> *Monatsberichte der Königl. Akad. der Wiss. zu Berlin*, 20 décembre 1866, p. 855; *Werke*, t. 3, p. 219-220.

<sup>(2)</sup> La première édition du Tome I de la *Théorie des Surfaces* date de 1887; or, de son côté, Weierstrass s'était proposé de développer les idées contenues dans sa Note de décembre 1866; ses résultats ont été rédigés par Schwarz, d'après un manuscrit inédit ne contenant que des formules; ils ont été publiés en 1903 seulement dans le Tome III

et, à la fin du beau Chapitre qu'il lui a consacré (1), il a insisté sur la nature des difficultés à surmonter : les équations transcendantes forment deux systèmes, celles du premier système exprimant que l'équation (E) admet un groupe donné. On reconnaît là *le problème de Riemann* et l'on prévoit l'importance de ce problème pour la solution du problème de Plateau. Or, récemment, j'ai fait connaître une méthode nouvelle pour résoudre le problème de Riemann (2); c'est précisément en étendant cette méthode que j'ai pu résoudre aussi le second système des équations transcendantes de Weierstrass.

Le problème de Plateau ainsi résolu pour les polygones (et, plus généralement, pour les contours de Schwarz et les contours mixtes), j'ai pu passer à la limite et le résoudre pour les contours continus énoncés au début; à cet effet, j'ai utilisé la méthode, toute différente de la première, par laquelle M. Birkhoff résout de son côté le problème de Riemann. D'ailleurs, la solution du problème de Plateau se trouvant définie par les formules de Weierstrass, son *analyticité* est établie par le fait même.

Résumons maintenant la méthode générale et les résultats principaux de ce Mémoire (3).

## 2. Les nos 6-9 rappellent les propriétés fondamentales de l'équa-

des *Werke* (p. 221-238). D'autre part, on doit ajouter que dans un Chapitre complémentaire (*Théorie des Surfaces*, t. I, 2<sup>e</sup> édition, Livre III, Chap. XIV), G. Darboux a développé de brillantes applications de la méthode de Weierstrass.

(1) *Théorie des Surfaces*, t. I, 2<sup>e</sup> édition, Livre III, Chap. XIII.

(2) *Ann. Sc. Ec. Norm. sup.*, 3<sup>e</sup> série, t. 43, 1926, p. 177-307. Désormais ce Mémoire sera désigné par [R].

(3) Au sujet du problème de Plateau proprement dit, on doit signaler encore d'importants résultats qui procèdent des travaux de M. Lebesgue. Citons notamment les recherches de M. S. Bernstein et un Mémoire tout récent de M. Haar (*Math. Ann.*, t. 97, 1926, p. 124), où l'on trouvera un historique et une bibliographie des recherches effectuées dans cette voie. M. Haar utilise les méthodes nouvelles du Calcul des Variations et, notamment, les suites minimisantes de M. Hilbert. Il résout ainsi le problème de Plateau moyennant cette restriction : il doit exister un plan P tel que tout plan variable coupant en trois points le contour donné fasse avec P. un angle de tangente bornée supérieurement. Citons encore la méthode de M. Müntz qui résout le problème pour des contours différant infiniment peu d'un contour plan (*Journ. für r. und angew. Math.*, t. 439, 1911, p. 52).



tion (E) et en précisent la forme générale sous les hypothèses suivantes : (E) ne possède aucun point effectivement singulier hors de l'axe réel, ni aucun point irrégulier; les  $n + 3$  sommets du contour polygonal  $P_n$  sont à distance finie et la surface ne se recouvre en aucun de ces points. Il est naturel d'adopter ces conventions dans une première étude du problème de Plateau; mais la méthode s'appliquerait à des hypothèses plus générales. En particulier, il est facile de traiter le cas des sommets infiniment lointains; nous indiquerons plus loin l'intérêt de cette généralisation (nos 4 et 25).

Les hypothèses précédentes montrent que dans le problème de Plateau et dans le problème de Schwarz proprement dit, l'équation (E) possède en dehors de ses singularités réelles  $t_1, \dots, t_{n+3}$ , images des sommets du contour,  $n - 1$  points apparemment singuliers au plus <sup>(1)</sup>; (E) coïncide donc avec l'équation (E<sub>n</sub>) de notre Mémoire précédent [R], dans laquelle l'un des points apparemment singuliers  $\lambda_j$  se serait confondu avec une singularité effective, soit  $t_k$ . Interprétons alors au point de vue actuel les résultats de [R]: on sait que si le groupe de monodromie (G) de (E) est donné, les coefficients de (E) sont rationnels par rapport aux  $z_k$  et aux  $\frac{dz_k}{dt_i}$ , les  $z_k$  constituant une intégrale bien déterminée d'un système différentiel  $(g_n, G_n)$ ; *actuellement, fixer le groupe (G) revient à écrire que les côtés de  $P_n$  ont des directions données* <sup>(2)</sup>. Résoudre le problème de Plateau (E<sub>n</sub>) pour  $P_n$  revient donc à déterminer les  $t_i$  (réels) et à choisir les intégrales G, H de (E) de manière que les côtés de  $P_n$  aient des longueurs données. Mais la méthode par laquelle le problème de Riemann est résolu dans [R] repose précisément sur l'étude des propriétés analytiques des intégrales  $z_k(t_1, \dots, t_2)$  de  $(g_n, G_n)$ : on prévoit donc l'importance de cette méthode pour la résolution des équations aux longueurs des côtés,  $A_k A_{k+1}$  de  $P_n$ . Ces équations s'écrivent

$$A_k A_{k+1} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} [ |G^2(x)| + |H^2(x)| ] dx,$$

(1) La limite est plus élevée pour le *problème mixte* où les données comprennent des segments rectilignes que la surface doit contenir et des plans qu'elle doit couper normalement.

(2) Pour abrégé, nous énonçons les résultats dans le problème de Plateau.

avec  $G(x) = ag(x)$ ,  $H(x) = bh(x)$ ,  $g$  et  $h$  étant deux intégrales canoniques pour le point  $t_k$ , de premiers coefficients égaux à 1. Je calcule  $b : a$  (n°s 12) et je montre (n° 13 à 18) que  $b : a$  est une fonction holomorphe de  $t_1, \dots, t_n$  (supposés distincts), alors même qu'au point envisagé on aurait  $z_k = 0$  ou  $z_k = \infty$  [valeurs singulières des coefficients du système  $(g_n, G_n)$ ]. A cet effet, j'ai établi que les intégrales de  $(g_n, G_n)$  possèdent deux séries distinctes de pôles du premier ordre; ceux de la première série sont des points réguliers, et les autres des pôles du second ordre des intégrales du système (A) de M. Schlesinger, associé à  $(g_n, G_n)$ . Or, à une équation (E) correspondent deux systèmes linéaires canoniques (n° 13); la considération de ces deux systèmes fournit une transformation automorphe de (A) qui substitue à une intégrale de (A) méromorphe en  $(t_1, \dots, t_n)$  une autre intégrale holomorphe en ce point (n° 16).

Le rapport  $b : a$  étant connu, on déduit des équations aux longueurs les combinaisons  $A_j A_{j+1} : A_{n+1} A_{n+2} = c_j$  ( $j = 2, \dots, n$ ); jointes à l'équation  $\lambda_j = t_k$  (ou  $z_k = 0$ ), elles forment un système ( $\mathcal{E}$ ) de  $n$  équations; leur résolution détermine le segment de surface minima à une homothétie près, la surface étant complètement précisée par la connaissance de  $a$ , c'est-à-dire de l'une quelconque des longueurs  $A_k A_{k+1}$ .

3. Pour résoudre les équations ( $\mathcal{E}$ ), il est nécessaire d'étudier leurs premiers membres lorsque plusieurs points  $t_h$ , soit  $t_i, t_{i+1}, \dots, t_n, t_{n+1}$  ( $= 0$ ), deviennent très voisins : nous dirons qu'alors il y a un *pseudo-choc*. Cette discussion fait l'objet de la deuxième Partie de ce Travail; elle constitue une généralisation (restreinte au domaine réel) des 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>, 4<sup>e</sup> Parties de notre Mémoire [R]; car notre étude antérieure avait précisément pour objet l'analyse d'un pseudo-choc binaire. Or, pour étudier le pseudo-choc de  $n + 2 - i$  points je substitue à  $(g_n, G_n)$  le système (A) de M. Schlesinger, et je fais dans ce système la transformation  $t_h = v_h t_i$  ( $h = i, \dots, n + 1$ ); puis, supposant, par exemple, les  $v_h$  et les  $t_k$  constants ( $k = 1, \dots, i - 1, n + 2, n + 3$ ), j'étudie le nouveau système par la méthode que j'ai développée dans [R] pour  $(g_n, G_n)$ ; d'ailleurs, actuellement, on peut se borner à l'étude des caractéristiques de deuxième espèce; je les construis encore par approximations successives, la notation des matrices simplifiant

notablement les calculs (n° 19) et la démonstration de convergence (n° 20) (1). Puis, procédant par récurrence comme dans [R], je montre qu'il n'existe pas d'autre représentation possible (au moins dans le cas réel, qui est celui du problème de Plateau) que celle des caractéristiques précédentes (n° 21) : *dans le cas d'un pseudo-choc entre  $t_i, \dots, t_{n+1}$  les intégrales de (A) sont représentables par des fonctions holomorphes de  $t_i, t_i^{-s}$  multipliées par  $t_i^{\varepsilon}$  ( $\varepsilon = \pm 1$  ou zéro,  $s$  exposant positif  $< 1$ ).*

Cela étant, il est possible d'étudier, dans le cas d'un pseudo-choc multiple l'allure des coefficients de l'équation linéaire attachée au problème de Plateau (n° 22). Utilisant alors un théorème classique de M. H. von Koch, qui établit la convergence uniforme des séries représentant les intégrales de (E) dans une couronne située entre les  $t_h$  (voisins) et les  $t_k$  (restants), j'obtiens (nos 23-24) le résultat essentiel que voici (et qui exclut les pseudo-chocs) :

*Lorsque  $t_i, \dots, t_n, t_{n+1}$  ( $= 0$ ) sont infiniment voisins, il en est de même des sommets  $A_i, \dots, A_n, A_{n+1}$  du polygone  $P_n$ , et l'on a*

$$c_n \equiv A_n A_{n+1} : A_{n+1} A_{n+2} = t_i^{1+s+M} f(t_i, t_i^{-s}),$$

*f étant une fonction de  $t_i, t_i^{-s}$  holomorphe pour  $|t_i|$  assez petit, et M un entier positif ou nul; on a d'ailleurs  $\pi s = V$ , V désignant la détermination comprise entre 0 et  $\pi$  de l'angle  $\overrightarrow{A_{i-1} A_i}, \overrightarrow{A_{n+1} A_{n+2}}$  des deux côtés finis de  $P_n$  contigus aux côtés infiniment petits.*

4. La troisième Partie est consacrée à la résolution proprement dite du problème de Plateau et de ses généralisations. Attribuons aux seconds membres  $c_2, \dots, c_{n-1}$  de (E) des valeurs fixes et donnons à  $c_n$  une valeur infiniment petite; j'ai montré dans [R] que pour  $t_{n+1} - t_n$  infiniment petit les  $z_j$  ( $j \neq n, n+1$ ) ont pour limites les intégrales d'un système ( $g_{n-1}, G_{n-1}$ ) : ce système est précisément associé au polygone  $P_{n-1}$ , limite de  $P_n$  pour  $t_{n+1} = t_n$ . Dès lors, on connaît la nature analytique des premiers membres des équations (E) pour  $t_{n+1} - t_n$  infiniment petit, et l'on saura résoudre ( $\mathcal{E}_n$ ) pour  $c_n$  infiniment petit si l'on

---

(1) Les résultats obtenus peuvent s'étendre aux systèmes de M. Schlesinger répondant à un système linéaire d'ordre quelconque ( $> 2$ ).

sait résoudre ( $\mathfrak{P}_{n-1}$ ) (n° 26); d'ailleurs la résolution du problème de Plateau pour le quadrilatère est une conséquence facile de [R], [n° 25]. En définitive, on voit réapparaître *la méthode de récurrence* dont M. Émile Picard a signalé l'importance pour des problèmes analogues (1).

Ce point acquis, tout reviendra à *prolonger la solution précédente* quand on fera croître  $c_n$  de zéro à la valeur donnée, soit  $c_n^0$ . Or, si l'on prend, par exemple,

$$t_{n+3} = -1 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = 0 < t_{n+2} = 1,$$

le point  $(t_1, \dots, t_n)$  se déplacera quand  $c_n$  variera dans une « pyramide » (II) d'un espace réel  $S_n$ . Appelons (II') le domaine intérieur à (II) et tel que les  $|t_i - t_j|$  y soient bornés inférieurement; dans (II') les  $z_k$  sont méromorphes, et par suite, d'après la première Partie, les premiers membres de ( $\mathcal{E}$ ) y sont holomorphes. Grâce au lemme de Borel-Lebesgue on peut donc établir (n° 27), que le prolongement de notre solution ne possède aucune singularité non algébrique, pourvu que  $(t_1, \dots, t_n)$  reste dans (II'). *A priori*, l'existence possible d'un pseudo-choc constituait la difficulté principale du prolongement de la solution; cette hypothèse ayant été exclue, le prolongement ne saurait se heurter qu'à des singularités algébriques.

Mais on doit exclure également cette dernière éventualité; et c'est là encore un fait essentiel; car si le déterminant fonctionnel de ( $\mathcal{E}$ ) s'annulait dans (II'), pour  $c_n = c'$ , on ne serait pas assuré de la réalité de  $t_i$  au delà de  $c'$ ; le prolongement de la solution deviendrait donc incertain. Or, admettons l'existence de la singularité  $c'$ ; pour  $c_n - c'$  infiniment petit ( $< 0$ ), il existera deux surfaces minima infiniment voisines, passant par le polygone  $P_n$  correspondant à  $c_n$ ; d'après la condition de Jacobi-Schwarz, l'équation

$$(u^2 + v^2 + 1)^2 \Delta^2 w + 8w = 0$$

devrait posséder sur la sphère une solution non identiquement nulle

---

(1) *Traité d'Analyse*, t. II, 3<sup>e</sup> édition, Paris 1926, p. 556, 561, 580. Rappelons que nous avons employé deux fois la méthode dans [R] (3<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> Parties), ainsi que dans la deuxième Partie du Mémoire actuel.

s'annulant sur la représentation sphérique de  $P_n$ , ce qui est impossible (n° 28).

Ainsi, dans la série des surfaces minima passant par  $P_n$ , *il ne peut y avoir bifurcation qu'au départ*, pour un côté  $A_n A_{n+1}$  infiniment petit; et ce fait arrivera quand le point  $\lambda_j$  du n° 2 tendra vers  $t_n$  (ou  $t_{n+1}$ , infiniment voisin de  $t_n$ ). On peut, d'ailleurs, relier deux surfaces minima appartenant à deux séries distinctes par une suite continue de déformations où le polygone a perdu un sommet à distance finie pour en acquérir un nouveau à l'infini (n° 25).

A la fin de la troisième Partie (n° 29), je forme les équations qui remplacent ( $\mathcal{E}$ ) pour la solution du problème de Schwarz ou du problème mixte.

5. La quatrième Partie a pour objet l'extension des résultats précédents aux contours continus  $\mathcal{C}$ ; pour la brièveté de l'exposition je me suis borné aux contours de Plateau; mais les résultats s'adaptent aisément aux contours de Schwarz et aux contours mixtes.

La méthode repose essentiellement sur la comparaison des solutions des problèmes de Plateau  $\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n+1}$  relatifs à deux polygones  $P_n, P_{n+1}$ , inscrits dans la courbe  $\mathcal{C}$ ,  $P_{n+1}$  admettant les  $n+3$  sommets de  $P_n$  et, en outre, un sommet supplémentaire. Ce résultat obtenu, on peut établir facilement (n° 37) que les surfaces minima successives passant par des polygones inscrits à  $\mathcal{C}$  et dont le nombre des côtés est indéfiniment doublé (par exemple) tendent uniformément, à l'intérieur de  $\mathcal{C}$ , vers une surface limite.

Or, pour comparer les solutions des problèmes  $\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{n+1}$ , la méthode de résolution du problème de Riemann ( $\mathcal{R}$ ), qui a été utilisée jusqu'ici, devient inapplicable; il faut adopter une méthode permettant l'étude de la *continuité des solutions par rapport aux données*. Mais, à ce point de vue, il y a lieu de transformer l'énoncé du problème ( $\mathcal{R}$ ) de la manière suivante (comme l'a fait Riemann lui-même pour le cas hypergéométrique):

Trouver deux matrices de fonctions,  $\Phi(x), \Psi(x)$ , holomorphes, la première à l'intérieur d'un contour continu (1)  $C$  reliant les  $t_j$ , la

---

(1) Dans le cas du problème de Plateau, on peut toujours supposer, moyennant une substitution linéaire, préalable sur  $x$ , que le contour  $C$  est un cercle.

seconde à l'extérieur de C (sauf peut-être à l'infini) et liées le long de C par l'équation (1)

$$(B) \quad \Phi : \mathbf{A}\Psi,$$

où  $\mathbf{A}$  désigne une matrice à éléments constants le long de C et subissant des discontinuités brusques aux points  $t_j$ . A la matrice précédente  $\mathbf{A}$ , substituons une matrice continue et l'on aura défini le problème de Riemann généralisé (H).

Or, actuellement, on dispose de deux méthodes pour résoudre les problèmes ( $\mathcal{R}$ ), à énoncé transformé, et (H); ces méthodes sont fondées sur une propriété classique de l'intégrale de Cauchy; elles ramènent d'ailleurs la solution de ( $\mathcal{R}$ ) à celle d'un problème (H) préliminaire.

L'une de ces méthodes est due à M. Hilbert (2), qui, le premier, s'est posé le problème (H) aux données continues; elle a été simplifiée ensuite par M. Plemelj (3); elle ramène le problème à la solution d'une équation de Fredholm.

Par sa simplicité, la seconde méthode, due à M. G.-D. Birkhoff (4) se prêtait naturellement à la comparaison que nous avons en vue; au n° 30, nous en rappelons brièvement les traits fondamentaux. L'application de la méthode soulevait d'ailleurs une difficulté que je résumerai rapidement. Pour rapprocher les solutions de  $\mathfrak{E}_{n+1}$  de celles de  $\mathfrak{E}_n$ , il fallait étudier au préalable la résolution d'une équation fonctionnelle (B) où  $\mathbf{A}$  est remplacé par  $\mathbf{I} + \varepsilon(x)$ ,  $\mathbf{I}$  étant la matrice-unité et  $\varepsilon(x)$  une matrice dont les éléments sont sur C de l'ordre de grandeur de la quantité arbitrairement petite  $\alpha = n^{-1}$ . Or, *les solutions de (B) n'admettent pas la continuité d'ordre zéro*; par contre, si l'on suppose que  $D\varepsilon \equiv [\varepsilon(x) - \varepsilon(\xi)] : (x - \xi)$  reste borné sur C, il est facile de voir que l'équation (B) (où  $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \varepsilon$ ) possède une solution  $(\Phi, \Psi)$  telle que les éléments de  $\Phi - \mathbf{I}$  (ou de  $\Psi - \mathbf{I}$ ) restent uniformément petits en module, à l'intérieur (ou à l'extérieur) de C et sur C. Mais précisément, *dans l'application au problème de*

(1) Le signe : indique l'égalité de deux matrices.

(2) *Nachr. d. königl. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen*, math.-phys. Klasse, 1905, p. 307.

(3) *Monatshefte für Math. und Phys.*, t. 19, 1908, p. 211.

(4) *Proceed. of the Americ. Acad. of Arts and Sc.*, vol. 49, 1913, p. 521.

Plateau, l'hypothèse faite sur  $D\varepsilon$  doit être rejetée : il faut supposer que les éléments de  $D\varepsilon$  prennent des valeurs de l'ordre de  $n^k$  ( $k > 0$ ) le long de  $n + 3$  arcs de  $C$  (dont la somme des longueurs est d'ailleurs infiniment petite avec  $\alpha$ ). Le théorème de continuité formulé plus haut reste encore exact (n° 32), mais la circonstance qu'on vient de signaler nécessite une discussion plus approfondie de l'équation fonctionnelle précédente (n° 31) et complique à diverses reprises l'analyse ultérieure (nos 33 à 36).

Indépendamment de la résolution du problème de Plateau, les résultats de la discussion précédente entraînent d'autres conséquences que je résumerai en quelques mots : la possibilité d'étendre la méthode de M. Birkhoff à des données continues (et de lipschitziens bornés); des théorèmes de continuité sur les solutions de deux problèmes H, à données voisines  $A'$ ,  $A''$  (c'est-à-dire telles que les éléments de  $A' - A''$  et  $D(A' - A'')$  restent petits le long de  $C$ ); des théorèmes analogues sur les solutions de deux problèmes voisins (H) et ( $\mathcal{R}$ ); ainsi se trouve justifiée, notamment, la conception du problème continu (H) comme forme-limite du problème ( $\mathcal{R}$ ) aux données discontinues. Ces résultats, et d'autres encore qui comportent une application importante aux systèmes de M. Schlesinger, feront l'objet d'une publication ultérieure (1).

---

## PREMIÈRE PARTIE

### ÉTUDE DU SYSTÈME ( $\mathcal{E}$ ) A L'INTÉRIEUR DE (II)

---

6. *Les substitutions linéaires fondamentales.* — Soit  $S$  la surface minima définie par les formules de Weierstrass

$$(1) \quad X = \mathcal{R} \int i(G^2 - H^2) dx, \quad Y = \mathcal{R} \int (G^2 + H^2) dx, \quad Z = \mathcal{R} \int 2iGH dx,$$

---

(1) Les principaux résultats de ce Mémoire ont été résumés en deux Notes des *Comptes rendus*, t. 183, 1926, p. 1012 et 1250.

où  $G$  et  $H$  désignent deux fonctions monogènes analytiques de la variable complexe  $x$ ; représentons d'une manière générale par  $u_0$  la quantité imaginaire conjuguée du nombre complexe  $u$ ; les cosinus directeurs  $\bar{X}$ ,  $\bar{Y}$ ,  $\bar{Z}$  de la normale à  $S$  seront donnés par les formules

$$(2) \quad \frac{\bar{X}}{-(GH_0 + HG_0)} = \frac{\bar{Y}}{i(GH_0 - HG_0)} = \frac{\bar{Z}}{GG_0 - HH_0} = \frac{1}{GG_0 + HH_0}.$$

De (1) et (2), on déduit aisément l'expression des deux formes quadratiques fondamentales de la surface

$$(3) \quad \begin{cases} S dX^2 = (GG_0 + HH_0)^2 dx dx_0, \\ -S dX d\bar{X} = i(GH' - HG') dx^2 - i(G_0 H'_0 - H_0 G'_0) dx_0^2. \end{cases}$$

Or, effectuons sur  $G$  et  $H$  la transformation linéaire, à coefficients constants

$$(4) \quad G_1 = aG + bH, \quad H_1 = cG + dH,$$

et sur  $G_0$ ,  $H_0$  la transformation  $(4)_0$  à coefficients  $a_0$ ,  $b_0$ ,  $c_0$ ,  $d_0$ , conjugués des premiers. Pour que la forme d'Hermite  $GG_0 + HH_0$  soit conservée par la transformation, il faut et il suffit que l'on ait

$$(5) \quad c = -\varepsilon b_0, \quad d = \varepsilon a_0, \quad aa_0 + bb_0 = 1 \quad (|\varepsilon| = 1);$$

il viendra donc  $ad - bc = \varepsilon$ ; la forme  $(3)_2$  ne pourra être invariante (au signe près) que pour  $\varepsilon = \pm 1$ ; s'il en est ainsi, la surface minima définie par  $G_1$  et  $H_1$  sera superposable à la première (à une symétrie plane près). D'ailleurs, les transformations  $(4)$ ,  $(5)$ , avec  $\varepsilon = 1$  forment un groupe continu contenant l'identité; elles définissent donc un déplacement, tandis que les transformations répondant à  $\varepsilon = -1$  sont le produit d'un déplacement et de la symétrie plane

$$a = 1 = -d, \quad b = 0 = c \quad \text{ou} \quad Z_1 = -Z + \text{const.}$$

Le déplacement précédent est le produit d'une rotation par une translation; il est facile de déterminer en fonction de  $a$  et  $b$  la grandeur de  $\varphi$  de cette rotation et la direction de son axe  $\Delta$ . En effet, soit  $\Sigma$  la sphère de centre  $o$  et de rayon  $1$  à laquelle appartient le point  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ ; représentons cette sphère sur un second plan com-



plexe  $\tau$  en posant

$$\frac{\bar{X} - i\bar{Y}}{1 + \bar{Z}} = -\frac{1}{\tau}.$$

On trouve aussitôt

$$\tau = \frac{G}{\Pi}.$$

Or, après la transformation (4),  $\Sigma$  a effectué une rotation d'amplitude  $\varphi$  autour d'un axe parallèle à  $\Delta$ ; mais  $\tau$  a subi alors une substitution linéaire de déterminant  $\varepsilon$ , du type elliptique, et, si l'on pose

$$(6) \quad \begin{cases} a = \lambda + i\rho, & b = \mu - i\nu & (\text{pour } \varepsilon = +1), \\ a = \rho - i\lambda, & b = -\nu - i\mu & (\text{pour } \varepsilon = -1), \end{cases}$$

on aura, par des formules classiques,

$$(7) \quad \begin{cases} \mu = \sin \frac{\varphi}{2} \cos \theta \sin \psi, \\ \nu = \sin \frac{\varphi}{2} \cos \theta \cos \psi, \\ \rho = \sin \frac{\varphi}{2} \sin \theta, \\ \lambda = \cos \frac{\varphi}{2}, \end{cases}$$

$\theta$  et  $\psi$  étant la latitude et la longitude (comptée à partir de ZOX) de la trace sphérique de l'axe (orienté) parallèle à  $\Delta$ . On remarquera que si l'on augmente  $\varphi$  de  $2\pi$ , les coefficients  $a, b, c, d$  de (4) seront remplacés par  $-a, -b, -c, -d$  respectivement.

Rappelons encore que dans tous les cas, la forme réduite de la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  est du type  $\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}$  avec  $S_1 S_2 = \varepsilon$ . En effet, il ne pourrait en être autrement que si l'équation en  $S$  de la matrice avait une racine double; or cette équation s'écrit

$$S^2 - 2\lambda S + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad S^2 + 2i\lambda S - 1 = 0,$$

selon que  $\varepsilon = +1$  ou  $-1$ ; pour que l'équation en  $S$  ait une racine double, il faut donc que  $\lambda^2 = 1$ , d'où  $\mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 0$ ;  $b$  et  $c$  sont donc nuls.

7. *L'équation linéaire* ( $E^*$ ). — Cela étant, proposons-nous de déterminer les fonctions  $G(x)$  et  $H(x)$  de manière que la surface  $S$  correspondante passe par un contour simple  $\mathcal{C}$ , formé de segments rectilignes  $D_j$  donnés et de courbes  $\gamma_j$  à construire dans des plans  $\Pi_j$  que  $S$  devra couper orthogonalement; en outre à l'intérieur de  $\mathcal{C}$ ,  $S$  ne devra posséder aucune singularité.

Ainsi posé, le problème est d'une grande indétermination, car les fonctions  $G(x)$  et  $H(x)$  qui répondent à une même surface  $S$  ne sont définies qu'à une transformation ponctuelle près; pour préciser le problème, nous nous proposerons de choisir  $G$  et  $H$  de manière que les formules (1) fournissent une représentation conforme du segment de  $S$  intérieur à  $\mathcal{C}$  sur le demi-plan complexe  $\Re(ix) \leq 0$ , soit  $\eta \geq 0$ , avec  $x = \xi + i\eta$ ; l'ensemble des lignes  $D_j$  et  $\gamma_j$  sera donc représenté sur l'axe réel.

Or considérons l'équation

$$(E^*) \quad \frac{d^2 y^*}{dx^2} + p(x) \frac{dy^*}{dx} + q(x)y^* = 0,$$

qui admet pour intégrales  $G(x)$  et  $H(x)$ ; il résulte du n° 6 que les coefficients  $p(x)$  et  $q(x)$  sont indépendants du choix des axes de coordonnées; nous allons montrer qu'ils sont réels sur l'axe réel  $O\xi$ .

Effectivement, si le segment  $\xi'\xi''$  de  $O\xi$  est l'image d'une portion rectiligne  $D_j$  de  $\mathcal{C}$ , dirigeons  $OY$  parallèlement à  $D_j$  et écrivons que sur  $\xi'\xi''$  on a  $dZ = 0 = \bar{Y}$ ; d'après (1) et (2) il viendra, sur  $\xi'\xi''$ ,

$$GH = G_0 H_0, \quad GH_0 = G_0 H,$$

d'où l'on tire

$$(8) \quad G = g, \quad H = h \quad \text{ou} \quad G = ig, \quad H = ih,$$

$g$  et  $h$  désignant ici, comme plus loin, des fonctions de  $x$  réelles sur l'axe réel (1). Si  $\xi'\xi''$  est l'image d'une courbe plane  $\gamma_j$ , prenons  $OX$  perpendiculaire au plan  $\Pi_j$  de la courbe  $\gamma_j$  et écrivons que sur  $\xi'\xi''$  on

(1) On vérifiera aisément que moyennant une symétrie par rapport à  $OZ$  ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi = \pi$ ) le second cas se ramène au premier. Il en est de même pour (9).

a  $dX = 0 = \bar{X}$ ; il viendra, d'après (1) et (2),

$$G^2 - H^2 = G_0^2 - H_0^2, \quad GH_0 + HG_0 = 0,$$

soit, le long de  $\xi'\xi''$ ,

$$(9) \quad G = ig, \quad H = h \quad \text{ou} \quad G = g, \quad H = ih.$$

Or, si l'on exprime  $p$  et  $q$  en fonction de  $G, H, G', H'$ , les formules (8) et (9) montrent aussitôt que  $p$  et  $q$  sont réels sur  $\xi'\xi''$ .

Les formules (8) et (9) entraînent une autre conséquence, d'une importance capitale pour notre problème : d'après le principe de symétrie de Schwarz, appliqué à  $g$  et  $h$ , la surface admet  $C_j$  (ou  $H_j$ ) comme axe (ou plan) de symétrie.

Montrons maintenant que, hors de l'axe réel,  $(E^*)$  admet tout au plus des points apparemment singuliers. En effet, soit  $\lambda_j$  un point singulier de  $(E^*)$  situé au-dessus de  $O\xi$ ;  $S$  ne devant posséder aucune singularité en dehors de  $\mathcal{C}$ ,  $\lambda_j$  est un point régulier, et ses exposants sont égaux respectivement à des moitiés d'entiers (de même parité). Je dis que  $\lambda_j$  ne saurait être une singularité logarithmique : car, dans le cas contraire, on aurait (au facteur  $\sqrt{x - \lambda_j}$  près)

$$\begin{aligned} G(x) &= a\varphi(x) + b[\varphi(x)\text{Log}(x - \lambda_j) + \psi(x)], \\ H(x) &= c\varphi(x) + d[\varphi(x)\text{Log}(x - \lambda_j) + \psi(x)]. \end{aligned}$$

$\varphi$  et  $\psi$  étant holomorphes au point  $\lambda_j$ . Or, on vérifie aisément que les intégrales

$$\Re \int F(x) \text{Log}^m(x - \lambda_j) dx \quad (m = 1 \text{ ou } 2),$$

où  $F(x)$  est holomorphe au point  $\lambda_j$ , ne sauraient être uniformes autour de  $\lambda_j$  que si  $F(x) \equiv 0$ . La surface  $S$  ne devant posséder aucune singularité à l'intérieur de  $\mathcal{C}$ , le résultat précédent appliqué à  $X$  et  $Y$  dans (1) donne  $b^2 \pm d^2 = 0$ , soit  $b = 0 = d$ ; ainsi  $G : H$  serait constant, et d'après (2)  $S$  se réduirait à un plan, cas qu'il est loisible d'exclure : le point  $\lambda_j$  est donc apparemment singulier.

D'autre part, en vertu du principe de symétrie, les singularités de  $(E^*)$  situées au-dessous de  $Ox$  ne peuvent être, non plus, que des points apparemment singuliers.

Observons à ce propos que si  $\lambda_j$  est un point apparemment singulier d'ordre <sup>(1)</sup>  $\mu$ , Saura au point correspondant  $M_j$  un contact d'ordre  $\mu + 1$  avec son plan tangent;  $M_j$  sera donc un point méplat de S (point de ramification de G. Darboux).

8. *Expression des exposants.* — Étudions maintenant les singularités réelles de  $(E^*)$  : nous nous imposerons d'abord les conditions suivantes :

- A. Sur l'axe réel,  $(E^*)$  n'admet aucun point irrégulier;
- B. Les sommets  $A_k$  du contour  $\mathcal{C}$  sont à distance finie.

Soient alors  $\alpha_k$  et  $\beta_k \geq \alpha_k$  les exposants d'un point singulier réel  $t_k$ ; on aura, d'après (B),  $2\alpha_k + 1 > 0$ , et, en vertu de (1), les axes OXYZ ayant des directions quelconques, on pourra écrire dans le voisinage de  $t_k$

$$(10) \quad \begin{cases} X - X_0 = cR \left[ \frac{a(x - t_k)^{2\alpha_k + 1}}{2\alpha_k + 1} \right], & Y - Y_0 = cR \left[ \frac{b(x - t_k)^{2\alpha_k + 1}}{2\alpha_k + 1} \right], \\ Z - Z_0 = cR \left[ \frac{c(x - t_k)^{2\alpha_k + 1}}{2\alpha_k + 1} \right], \end{cases}$$

$a, b, c$  étant trois constantes. Donnons à  $x - t_k$  des valeurs infiniment petites, positives d'abord, puis négatives; il résulte de (10) que le point de S correspondant à  $t_k$  est nécessairement un sommet, soit  $A_k$ , du contour.

Or, en tout point M du contour, d'image  $\xi$  dans le plan  $x$ , on peut définir une demi-normale à S par la condition suivante : lorsque  $x$  décrit une demi-circonférence de centre  $\xi$ , de rayon infiniment petit, dans le demi-plan  $\eta > 0$  et suivant le sens direct, le point  $M_1$  de S, d'image  $x$ , tournera autour de la demi-normale dans le sens direct; et si M est un sommet  $A_k$  de  $\mathcal{C}$ , l'amplitude de la rotation du vecteur  $MM_1$  autour de la demi-normale définira l'angle  $V_k$  du contour  $\mathcal{C}$  en  $A_k$ .

Cela étant, la succession de deux symétries d'abord autour de la droite D ou du plan H contenant  $A_{k-1}A_k$ , puis autour de la droite D ou du plan H contenant  $A_kA_{k+1}$  équivaut, pour  $t_{k-1} < t_k < t_{k+1}$  à une rotation  $R'_k$  de  $2(\pi - V_k)$  autour de la demi-normale en  $A_k$  (si  $A_k$  est de

(1) Voir [R], note (2) de la page 295.

première espèce) (1), et à une rotation  $R_k''$  de  $\pi - 2V_k$  suivie d'une symétrie ponctuelle (si  $A_k$  est de deuxième espèce).

Ainsi, d'après le théorème de symétrie du n° 7, un circuit décrit de  $x$  autour de  $t_k$  dans le sens direct, en passant par le symétrique de  $x$  relativement à  $O\xi$ , entraîne sur  $G$  et  $H$  une transformation (4) de déterminant égal à  $+1$  ou  $-1$  suivant que  $A_k$  est de première ou de deuxième espèce : en d'autres termes, les substitutions du groupe de monodromie de  $(E^*)$ , images des rotations précitées, sont, toutes, de la forme (4).

Une première conséquence en résulte aussitôt : si la différence  $\beta_k - \alpha_k$  est un entier, le point  $x = t_k$  ne saurait être logarithmique, sinon la forme réduite de  $S_k$  serait  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & a \end{pmatrix}$ , avec  $c \neq 0$  contrairement au résultat établi à la fin du n° 6 : en particulier, on a donc nécessairement  $\beta_k \neq \alpha_k$ , soit  $\beta_k > \alpha_k$ .

Or, moyennant une rotation des axes  $OXYZ$ , c'est-à-dire moyennant une substitution (4), on peut toujours supposer que l'intégrale  $H(x)$  de  $(E^*)$  figurant dans (1) est canonique pour le point  $t_k$  et appartient à l'exposant  $\beta_k$ ; les formules (10) seront alors remplacées par

$$(11) \quad \begin{cases} X - X_0 = \mathcal{R} \frac{i a (x - t_k)^{2\alpha_k + 1}}{2\alpha_k + 1}, & Y - Y_0 = \mathcal{R} \frac{a (x - t_k)^{2\alpha_k + 1}}{2\alpha_k + 1}, \\ Z - Z_0 = \mathcal{R} \frac{2i ab (x - t_k)^{\alpha_k + \beta_k + 1}}{\alpha_k + \beta_k + 1}, \end{cases}$$

la constante  $a$  pouvant être supposée positive (moyennant une rotation de  $OXYZ$  autour de  $OZ$ ) : il en résulte aussitôt que l'angle  $V_k$  défini précédemment est égal à  $(2\alpha_k + 1)\pi$ .

Évaluons maintenant  $\beta_k$ . Les racines de l'équation en  $S$  relatives à  $S_k$  sont  $e^{2\pi i \alpha_k}$  et  $e^{2\pi i \beta_k}$ ; d'après les formes obtenues pour cette équation (n° 6), on a donc  $\alpha_k + \beta_k = M_k$  ou  $M_k + \frac{1}{2}$  ( $M_k$  entier), selon que  $A_k$  est de première ou de deuxième espèce. Imposons-nous encore la condition suivante :

$C_k$ . L'angle  $V_k$  est inférieur à  $2\pi$  ou  $\pi$  selon que  $A_k$  est de première

(1) Avec G. Darboux, nous dirons que  $A_k$  est de deuxième espèce s'il est commun à une droite  $D$  et à un plan  $\Pi$ ; il sera de première espèce dans le cas contraire.

ou deuxième espèce : en d'autres termes, *la surface ne se recouvre pas elle-même en  $A_k$*  <sup>(1)</sup>. On déduit aussitôt de là, pour un sommet de première espèce,

$$(12) \quad \alpha_k = -\frac{1}{2} + \frac{V_k}{2\pi}, \quad \beta_k = \frac{1}{2} - \frac{V_k}{2\pi} + m_k,$$

$m_k$  étant un entier  $\geq 0$  si  $0 < V_k < \pi$  et  $\geq 1$  si  $\pi < V_k < 2\pi$ ; et pour un sommet de deuxième espèce

$$(13) \quad \alpha_k = -\frac{1}{2} + \frac{V_k}{2\pi}, \quad \beta_k = -\frac{V_k}{2\pi} + m_k,$$

$m_k$  étant un entier  $\geq 0$  si  $0 < V_k < \frac{\pi}{2}$  et  $\geq 1$  si  $\frac{\pi}{2} < V_k < \pi$ .

Déterminons maintenant la substitution  $S_k$ . Si l'on connaît la direction  $(\theta_k, \psi_k)$  de l'axe de la rotation  $R'_k$  ou  $R''_k$  (dirigée suivant notre demi-normale) et l'amplitude  $\varphi_k$  de cette rotation, les formules (6), (7) déterminent les coefficients de  $S_k$ , à une multiplication près par  $-1$

(1) Les conditions B et  $C_k$  entraînent la suivante : *du sommet  $A_k$  ne part aucune ligne double de S intérieure à C*. En effet, d'après (1), on peut écrire au voisinage de  $t_k$ , en négligeant des facteurs positifs et des constantes additives :

$$\begin{aligned} X &= -r^{2\alpha_k+1} \sin(2\alpha_k+1)\theta, \\ Y &= r^{2\alpha_k+1} \cos(2\alpha_k+1)\theta, \\ Z &= r^{\alpha_k+\beta_k+1} \sin[(\alpha_k+\beta_k+1)\theta + \theta_0] \end{aligned}$$

(avec  $x = re^{i\theta}$ ). On a  $0 < 2\alpha_k+1 < 2$ . D'autre part, si l'on pose  $\theta = \lambda - \frac{\theta_0}{\alpha_k+\beta_k+1}$ , l'existence d'une ligne double entraîne l'existence de deux angles  $\lambda$  et  $\lambda'$  compris entre  $\frac{\theta_0}{\alpha_k+\beta_k+1}$  et  $\frac{\theta_0}{\alpha_k+\beta_k+1} + \pi$ , et tels que

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h\pi}{2\alpha_k+1}, \quad \lambda' + \lambda = \frac{(2h'+1)\pi}{\alpha_k+\beta_k+1},$$

$h$  et  $h'$  étant entiers. Posons

$$2h = u, \quad 2h'+1 = v, \quad 2\alpha_k+1 = m, \quad \alpha_k+\beta_k+1 = n (> m);$$

le point  $(u, v)$  devra être compris à l'intérieur du triangle de sommets  $(0, \frac{2\theta_0}{\pi})$ ,  $(0, \frac{2\theta_0}{\pi} + 2n)$ ,  $(m, \frac{\theta_0}{\pi} + n)$ . Mais pour  $0 < m < 2$  le triangle ne contient aucun point dont l'abscisse soit un entier pair.

(n° 6, *ad fin.*); levons l'ambiguïté de signe. D'après (12) et (13) les racines de l'équation en  $S$  de la transformation  $S_k$  sont  $-e^{\pm iV_k}$  ou  $-e^{iV_k}$  et  $e^{-iV_k}$ , selon que  $A_k$  est de première ou de deuxième espèce; d'après (7) on aura donc dans le premier cas

$$\cos \frac{\varphi_k}{2} = -\cos V_k, \quad \text{soit} \quad \pm \varphi_k = 2(\pi - V_k) + 4K\pi,$$

et dans le second cas

$$\cos \frac{\varphi_k}{2} = \sin V_k, \quad \text{soit} \quad \pm \varphi_k = \pi - 2V_k + 4K\pi,$$

$K$  étant un entier. Mais, d'après l'expression précédemment obtenue pour l'amplitude  $\varphi_k$ , on prendra le signe supérieur, ce qui donne, suivant le cas,  $\varphi_k = 2(\pi - V_k)$  ou  $\pi - 2V_k$  et définit complètement  $S_k$ .

9. *Limitation du nombre des points apparemment singuliers.* — Cela étant, désignons par  $t_1, \dots, t_{n+3}$  les points singuliers effectifs de  $(E^*)$  en sorte que le contour  $\mathcal{C}$  aura  $n+3$  côtés; moyennant une substitution linéaire sur  $x$  à coefficients réels on peut toujours supposer que trois des points singuliers coïncident avec trois points arbitrairement choisis, soit (1)  $t_{n+1} = 0, t_{n+2} = 1, t_{n+3} = -1$ . Exprimons qu'à  $x = \infty$  correspond un point à distance finie de  $\mathcal{C}$ , où  $S$  ne présente aucune singularité; moyennant la substitution  $x = x_1^{-1}, y = x_1 y_1$  imposée par la forme de (1) le point  $x_1 = 0$  devra être un point ordinaire de la transformée de  $(E^*)$ : ainsi les exposants du point  $x = \infty$  dans  $(E^*)$  sont 1 et 2. Or  $p(x)$  et  $q(x)$  sont des fonctions rationnelles; si l'on écrit la relation de Fuchs [qui exprime que la somme des résidus de  $p(x)$  est nulle] on trouve aussitôt, d'après (12) et (13),

$$(14) \quad \sum_{k=1}^{n+3} m_k - \frac{N_2}{2} + N - n + 1 = 0,$$

---

(1) Pour l'instant nous ne prendrons pas  $t_{n+3} = \infty$  (comme dans [R]) afin d'avoir pour les exposants de  $t_{n+3}$  des expressions de même forme que les autres points  $t_k$ .

$N_2$  désignant le nombre des sommets de deuxième espèce (nécessairement pair), et  $N$ , celui des points apparemment singuliers.

En particulier, puisqu'on a  $m_k \geq 0$ , on déduit de (14)

$$N \leq n - 1 + \frac{N_2}{2}.$$

10. *Le groupe de monodromie (G) de (E\*)*. — Les substitutions  $S_k$  étant définies sans ambiguïté dès que l'on connaît l'orientation des éléments du contour  $\mathcal{C}$ , il en sera de même du groupe de monodromie (G) de (E\*) : le groupe est donc pleinement déterminé par la représentation sphérique  $\varpi$  du contour  $\mathcal{C}$ . Géométriquement, on pourra adopter comme paramètres de (G) (pour le problème de Plateau, par exemple) l'ensemble des coordonnées sphériques de  $n + 2$  sommets de  $\varpi$  par rapport au  $n + 3^e$ , pris pour pôle (et à un méridien origine arbitraire).

On pourra utiliser aussi un système de  $2n + 3$  distances sphériques des sommets de  $\varpi$ . Or, si l'on considère une substitution (4) comme le produit de deux symétries successives autour de deux axes (abstraction faite d'une symétrie plane éventuelle), l'invariant  $a + d$  de la substitution (4) sera égal à  $2 \cos \varphi$ ,  $\varphi$  étant la distance des images sphériques des deux axes. Le dernier mode de définition qui a été signalé revient donc à celui qui a été adopté dans [R] (n° 56); géométriquement, il ne détermine pas (G) d'une manière unique, ce qui s'accorde pleinement avec ce que nous avons dit dans [R] de la définition d'un groupe par les invariants.

11. *L'équation linéaire (E')*. — Cela étant, laissons indéterminées pour l'instant les valeurs de  $t_1, \dots, t_n$  et écrivons que, quelles que soient ces valeurs, le groupe de monodromie de (E\*) coïncide avec le groupe (G) qu'on vient de déterminer. Comme nous l'avons dit dans [R] il existe une équation linéaire du second ordre (E') admettant (G) pour groupe; cette équation possède  $n + 3$  points singuliers  $t_1, \dots, t_{n+3}$ , à exposants définis par (12) et (13) (les exposants du point non logarithmique  $x = \infty$  étant 1 et 2). (E') admet de plus  $n$  points apparemment singuliers; le point  $t_{n+3}$  une fois ramené à l'infini, les points apparemment singuliers  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  satisfont au système différentiel



$(f_n, F_n)$ , de variables indépendantes  $t_1, \dots, t_n$ , que j'ai formé dans ma Thèse; leurs combinaisons symétriques

$$z_k = \frac{\psi(t_k)}{\varphi'(t_k)} \quad \left[ \psi(x) = \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j), \quad \varphi(x) = \prod_{k=1}^{n+2} (x - t_k) \right]$$

intègrent le système équivalent  $(g_n, G_n)$  étudié dans [R]; enfin les constantes d'intégration qui individualisent l'intégrale  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  ou  $(z_1, \dots, z_n)$  qu'il faut adopter pour la formation de  $(E^1)$  sont déterminées d'une manière unique, pourvu que les exposants des points singuliers et les lacets sur lesquels on définit les substitutions soient déterminés aussi sans ambiguïté: et c'est bien ce qui a lieu actuellement.

L'équation  $(E^1)$  une fois formée, toute équation  $(E^*)$  qui aura même groupe que  $(E^1)$  s'en déduira par une transformation

$$y^* = \alpha y^1 + \beta \frac{dy^1}{dx},$$

où  $y^1$  représente l'intégrale générale de  $(E^1)$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant des fonctions rationnelles de  $x$ , n'admettant aucun pôle en dehors de  $x = t_1, \dots, t_{n+2}, t_{n+3}$ . Si l'ordre de ces fonctions rationnelles n'est pas limité, le nombre des points apparemment singuliers de  $(E^1)$  pourra être arbitrairement grand; *inversement, il résulte de la relation (14), c'est-à-dire des hypothèses du n° 8, que les fonctions rationnelles  $\alpha$  et  $\beta$  sont en nombre limité*; bornons-nous même, actuellement, au cas où le nombre  $N_2$  des sommets de deuxième espèce est au plus égal à 2, hypothèse qui est vérifiée notamment dans le problème de Plateau et dans le problème de Schwarz: d'après (14),  $(E^*)$  *devra coïncider avec une équation  $(E^1)$  (dans laquelle un des points  $\lambda_j$  sera venu se confondre avec un des  $t_k$  pour  $N_2 = 0$ )* <sup>(1)</sup>.

L'équation  $(E^1)$  qui vient d'être formée possède un système fondamental  $(G, H)$  subissant autour des points singuliers  $t_k$  les

<sup>(1)</sup> En procédant par récurrence on vérifierait aisément que  $(z_1, \dots, z_n)$  est réelle et, par suite, que  $(E^1)$  est réelle. La chose est évidente pour  $n = 0$ ; pour  $n$  quelconque on se rappellera ([R], n° 37) que  $(z_1, \dots, z_n)$  *peut être définie par des données réelles*: c'est immédiat pour  $t_i = 1$ , et pour  $t_i = 0$  cela résulte du procédé même de récurrence. Or, en vertu du théorème d'unicité énoncé à la fin de [R], la réalité des données entraîne la réalité de la solution sur l'axe réel.

substitutions prescrites  $S_k$ ; il s'agit maintenant de construire ce système.

12. *Le rapport  $b : a$ .* — Remarquons d'abord que le système (G, H) n'est pas déterminé d'une manière unique; il dépend de la rotation arbitraire qu'on peut effectuer sur les axes OXYZ. Or écartons le cas où le contour  $\mathcal{C}$  se réduirait à un polygone plan <sup>(1)</sup>; il existera donc au moins trois côtés consécutifs n'appartenant pas à un même plan. Désignons par  $A_{k-1}A_k$ ,  $A_kA_{k+1}$ ,  $A_{k+1}A_{k+2}$  un tel ensemble et dirigeons l'axe OY parallèlement à  $A_kA_{k+1}$ , le plan des XY étant parallèle à  $A_{k-1}A_k$ ; le côté  $A_{k+1}A_{k+2}$  sera donc orienté dans la direction  $(\theta, \psi)$ , avec  $\theta \neq 0$ .

Cela étant (n° 8), la substitution  $S_k$  sera définie par les formules (6), (7) où l'on fera notamment  $\theta = \pi : 2$ , ce qui entraîne  $\mu = 0 = \nu$ ; le système (G, H) est donc de la forme

$$(15) \quad G = ag, \quad H = bh,$$

avec

$$g(x) \equiv (x - t_k)^{\alpha_k} [1 + \dots], \quad h(x) \equiv (x - t_k)^{\beta_k} [1 + \dots],$$

les séries de puissances représentées par des points étant à coefficients réels et les déterminations de  $(x - t_k)^{\alpha_k}$ ,  $(x - t_k)^{\beta_k}$  étant réelles sur le segment  $t_k t_{k+1}$ ; d'ailleurs nous savons (n° 7) que le long de  $t_k t_{k+1}$  les intégrales G, H sont réelles ou purement imaginaires; moyennant une symétrie par rapport à OZ on peut les supposer réelles <sup>(2)</sup>; on peut donc affirmer que *les constantes a et b sont réelles*.

Montrons comment on déterminera le rapport  $b : a$ . Soient

$$g_1 \equiv (x - t_{k+1})^{\alpha_{k+1}} [1 + \dots], \quad h_1 \equiv (x - t_{k+1})^{\beta_{k+1}} [1 + \dots]$$

les déterminations des intégrales canoniques relatives à  $x = t_{k+1}$  qui sont réelles sur le segment  $t_{k+1} t_{k+2}$ ; posons encore

$$\rho \equiv e^{\pi i \alpha_{k+1}}, \quad \omega \equiv e^{\pi i \beta_{k+1}};$$

<sup>(1)</sup> Voir à ce sujet G. DARBOUX, *Théorie des Surfaces*, t. I, 2<sup>e</sup> éd., p. 579. L'hypothèse écartée est formulée pour le problème de Plateau, auquel nous nous bornons actuellement; les résultats s'étendraient aisément aux autres problèmes.

<sup>(2)</sup> Cf. n° 7, p. 66, note <sup>(1)</sup>.

sur le segment  $t_k t_{k+1}$  on peut écrire

$$(16) \quad g = \frac{A}{v} g_1 + \frac{B}{w} h_1, \quad h = \frac{C}{v} g_1 + \frac{D}{w} h_1,$$

A, B, C, D étant quatre constantes réelles telles que  $AD - BC \neq 0$ . Quand  $x$  décrit un lacet direct autour de  $t_{k+1}$  (G, H) subira donc la substitution

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{1}{AD - BC} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A}{v} & \frac{B}{w} \\ \frac{C}{v} & \frac{D}{w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & w^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{D}{w} & -\frac{B}{w} \\ -\frac{C}{v} & \frac{A}{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{AD - BC} \begin{pmatrix} ADv^2 - BCw^2 & \frac{a}{b} AB(v^2 - w^2) \\ \frac{b}{a} CD(v^2 - w^2) & ADw^2 - BCv^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Or actuellement la rotation  $R_{k+1}$  correspondant à  $S_{k+1}$  est le produit de deux symétries autour des axes  $(\theta = 0, \psi = \frac{\pi}{2})$  et  $(\theta, \psi)$ ; d'après (6) et (7)  $S_{k+1}$  s'écrira donc aussi

$$\begin{pmatrix} -i \cos \theta e^{-i\psi} & -i \sin \theta \\ -i \sin \theta & i \cos \theta e^{i\psi} \end{pmatrix}.$$

D'ailleurs, d'après (12),  $w^2 - v^2 = 2i \sin V_{k+1}$  et l'on aura ainsi,

$$(17) \quad \frac{a}{b} = 2 \frac{\sin V_{k+1}}{\sin \theta} \frac{CD}{AD - BC}, \quad \frac{b}{a} = -2 \frac{\sin V_{k+1}}{\sin \theta} \frac{AB}{AD - BC},$$

les seconds membres ayant un sens bien déterminé, puisque  $\sin \theta \neq 0$ ; en particulier on a donc  $ABCD \neq 0$ . Or attribuons à  $x$  une valeur constante  $x_0$  quelconque (mais différente des  $t_k$ ) et posons d'une manière générale

$$(\Phi\Psi) \equiv \Phi(x_0)\Psi'(x_0) - \Phi'(x_0)\Psi(x_0);$$

il viendra d'après (16)

$$(18) \quad \frac{AB}{AD - BC} = \frac{(gh_1)(g_1g)}{(gh)(g_1h_1)}, \quad \frac{CD}{AD - BC} = \frac{(hh_1)(g_1h)}{(gh)(g_1h_1)}.$$

Plus généralement, il importe d'observer que la méthode s'étendrait aux intégrales  $g', h'$  qui se multiplient par des constantes quand  $x$

décrit un contour fermé autour de  $t_{k+1}, \dots, t_{k+q}$ ;  $S_{k+1}$  serait alors remplacée par la substitution correspondant à ce dernier contour.

13. *Les deux systèmes canoniques équivalents à une équation du second ordre.* — Il s'agit maintenant d'étudier les rapports (18) lorsque les  $t_k$  varient en restant distincts. A cet effet, il nous sera commode de substituer à (E') un système différentiel canonique équivalent; d'ailleurs, pour faciliter la comparaison avec les résultats de [R], nous supposerons maintenant qu'on ait placé les trois points singuliers  $t_{n+1}, t_{n+2}, t_{n+3}$  en  $0, 1, \infty$ ; en outre nous poserons dans (E')

$$(19) \quad y'' = \prod_{k=1}^{n+2} (x - t_k)^{\frac{m_k-1}{2}} y',$$

les  $m_k$  ayant le même sens qu'au n° 8; la somme des exposants de  $y$  au point  $t_k$  sera donc 1 et non plus  $m_k$ . L'équation (E) vérifiée par  $y$  s'écrira ainsi

$$(E) \quad y'' = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} y' + \left[ q_1(x) + \frac{\theta(x)}{\psi(x)} \right] y,$$

$\psi(x)$  étant défini comme au n° 11,  $q_1(x)$  étant holomorphe en chacun des points  $\lambda_j$ , et  $\theta(x)$  étant un polynôme de degré  $n-1$ . Plaçons-nous dans le cas général où les  $\lambda_j$  sont tous distincts; on pourra trouver deux polynômes,  $\omega_0(x)$  de degré  $n-1$ ,  $\sigma_0(x)$  de degré  $n+1$ , satisfaisant à l'identité en  $x$  (1)

$$(20) \quad \sigma(x)\psi(x) + \omega(x)\psi'(x) \equiv \varphi(x)\theta(x).$$

Posons alors,  $\alpha$  et  $\beta$  étant deux constantes arbitraires,

$$(21) \quad \omega(x) \equiv \omega_0(x) + (\alpha x + \beta)\psi'(x), \quad \sigma(x) \equiv \sigma_0(x) - (\alpha x + \beta)\psi(x);$$

(1) On aura d'ailleurs

$$\frac{\omega_0(x)}{\psi(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_j \theta_j}{\psi_j^2(x - \lambda_j)}, \quad \sigma_0(x) = \frac{\varphi(x)\theta(x)}{\psi(x)} - \sum_{j=1}^n \frac{\varphi_j \theta_j \psi'(x)}{\psi_j^2(x - \lambda_j)},$$

en posant, d'une manière générale,  $F_j \equiv F(\lambda_j)$ .

$\omega$  et  $\sigma$  vérifieront encore (20). Si l'on fait ensuite

$$(22) \quad y_2 \equiv \frac{\omega y + \varphi y'}{\psi},$$

on tire aisément de (20) et (22)

$$y_2' = \frac{\varphi' + \omega}{\varphi} y_2 + \frac{A}{\psi} y$$

avec

$$(23) \quad A \equiv \omega' + \varphi q_1 - \frac{\omega^2}{\varphi} - \frac{\omega \varphi'}{\varphi} + \sigma.$$

Or, pour que  $x = \lambda_j$  soit un point apparemment singulier de (E), il faut et il suffit que

$$B \equiv q_1 + \frac{d}{dx} \left( \frac{\theta}{\psi'} \right) - \left( \frac{\theta}{\psi'} \right)^2$$

s'annule pour  $x = \lambda_j$ ; comme on a

$$A = \varphi B + \frac{\sigma \psi}{\psi'} \left( \frac{2\theta}{\psi'} - \frac{\sigma \psi}{\varphi \psi'} + \frac{\psi''}{\psi'} + \frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\sigma'}{\sigma} \right),$$

les coefficients du système

$$(S') \quad y' = -\frac{\omega}{\varphi} y + \frac{\psi}{\varphi} y_2, \quad y_2' = \frac{A}{\psi} y + \frac{\varphi' + \omega}{\varphi} y_2$$

vérifié par  $y$  et  $y_1$  seront holomorphes pour  $x = \lambda_j$ ; d'après (23) ils présenteront  $x = t_1, \dots, t_{n+2}$  comme pôles du premier ordre seulement. Enfin, soit  $Kx^{-2}$  le terme prépondérant du développement pour  $x = \infty$  du coefficient de  $y$  dans (E); au voisinage de  $x = \infty$ , l'expression

$$A = -\frac{\omega^2}{\varphi} + \omega' - \omega \left( \frac{\psi'}{\psi} + \frac{\varphi'}{\varphi} \right) + \varphi \left( q_1 + \frac{\theta}{\psi} \right)$$

admettra comme terme principal  $[-\alpha^2 - (n+1)\alpha + K]x^n$ ; pour que tous les coefficients de (S') s'annulent en  $x = \infty$  il faut donc que  $\alpha$  soit égal à l'un des exposants du point  $x = \infty$  pour (E); il y a donc deux systèmes canoniques (S') correspondant à une même équation (E), fait remarquable que nous utiliserons plus loin. Quant à  $\beta$ , on le déterminera par la condition qu'en  $x = \infty$  A soit de l'ordre de  $x^{n-2}$ ; d'après (22) augmenter  $\omega$  de  $\beta\psi(x)$  revient à remplacer dans (S')

$y_2$  par  $y_2 + \beta y$ ;  $A : \psi$  sera augmenté de

$$-\beta \frac{2\alpha + \varphi'}{\varphi} - \beta^2 \frac{\psi}{\varphi};$$

la transformation sera donc toujours possible, sauf pour

$$2\alpha + n + 2 = 0,$$

c'est-à-dire sauf si les exposants du point  $x = \infty$  pour le système (S') sont égaux (1). Or cette hypothèse est actuellement inadmissible car le coefficient de  $y_2$  dans la première équation de (S') étant exactement de l'ordre de  $x^{-2}$ ,  $x = \infty$  serait un point logarithmique. Posons enfin

$$(24) \quad y_2 = \lambda y_1,$$

où  $\lambda$  est la fonction de  $t_1, \dots, t_n$  définie dans [R] (n° 9, p. 192), et l'on obtiendra un système canonique de la forme

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = \sum_{k=1}^{n+2} \frac{\Lambda_{11}^k}{x-t_k} y + \sum_{k=1}^{n+2} \frac{\Lambda_{21}^k}{x-t_k} y_1, \\ \frac{dy_1}{dx} = \sum_{k=1}^{n+2} \frac{\Lambda_{12}^k}{x-t_k} y + \sum_{k=1}^{n+2} \frac{\Lambda_{22}^k}{x-t_k} y_1, \end{cases}$$

complètement identique (pour  $m=2$ ) au système  $\mathcal{S}$  de [R] (n° 8, p. 188); les  $A_{\mu\nu}^k$  vérifient d'ailleurs un système (A<sub>2</sub>) de Schlesinger (*ibid.*).

14. Les  $z_n$  admettent en  $t_i^0$  un pôle de première espèce. — Cela étant, reportons-nous aux résultats établis dans [R] : lorsqu'on a déterminé une intégrale ( $z_1, \dots, z_n$ ) de ( $g_n, G_n$ ), il suffit d'effectuer une quadrature et des opérations rationnelles pour obtenir en fonction de  $t_1, \dots, t_n$  les coefficients  $A_{\mu\nu}^k$  de (S) [R], formules (B), (8), (11), (15), p. 192-195}. Or les formules qu'on vient de citer montrent précisé-

(1) Les exposants du point  $x = \infty$  sont  $\alpha$  et  $-\alpha - n - 1$  pour (E), et  $\alpha, -\alpha - n - 2$  pour (S). La restriction précédente a d'ailleurs été signalée sous une autre forme dans [R] : n° 9, condition (3), p. 190.

ment que les  $A_{\mu\nu}^h$ , envisagés par exemple comme fonctions de  $t_i$  restent holomorphes tant que les  $z_i, z_h$  sont différents de zéro et  $\infty$ ; nous allons envisager ces deux cas.

Supposons d'abord que les  $z_h$  soient infinis pour  $t_i = t_i^0$ ; d'après les équations (G<sub>n</sub>) on trouve au voisinage de ce point

$$z_h = \frac{C_h}{t_i - t_i^0} + \dots,$$

les  $C_h (h \neq i)$  étant des constantes arbitraires, telles pourtant que les relations [R], (5) soient vérifiées (1) et  $C_i$  étant égal (2) à  $\varepsilon : \sqrt{D}$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ). Prenons d'abord  $\varepsilon = +1$ . D'après [R], [(8) et (11)]  $\lambda$  présente en  $t_i^0$  un zéro d'ordre 1 et  $M_h$  un pôle d'ordre 1. Nous dirons que  $t_i^0$  est, pour les  $z_h$ , un pôle de première espèce. Il résulte alors de [R] [formules (11) et (12)] que  $H_i$  et les  $H_h$  sont holomorphes pour  $t_i = t_i^0$ ; finalement les  $A_{\mu\nu}^h$  seront holomorphes pour  $t_i = t_i^0$ .

Mais alors l'intégrale  $y, y_1$  de (S) qui appartient en  $t_k$  à l'exposant  $\alpha_k$  est de la forme

$$(25) \quad y = (x - t_k)^{\alpha_k} [1 + \dots], \quad y_1 = -\frac{A_{11}^k - \alpha_k}{A_{21}^k} (x - t_k)^{\alpha_k} [1 + \dots],$$

avec  $A_{21}^k (t_i^0) \neq 0$  si  $C_k \neq 0$  (3). Au voisinage de  $x = t_k, t_i = t_i^0$ , l'intégrale précédente est une fonction holomorphe de  $t_i$ .

15. *Cas d'un pôle de deuxième espèce.* — Supposons maintenant  $\varepsilon = -1$ . On trouvera que  $t_i = t_i^0$  est un pôle d'ordre 1 pour  $\lambda$ , d'ordre 2 pour  $H_i$  et les  $H_k$ ; les  $A_{\mu\nu}^h$  auront donc en  $t_i^0$  un pôle d'ordre 2, et l'on ne voit pas immédiatement comment caractériser l'allure des intégrales  $y$  et  $y_1$  pour  $t_i = t_i^0$ .

Pour y parvenir, nous ferons dans (E)  $y = Y \sqrt{\Psi(x)}$ ;  $Y$  satisfera à

(1) Ceci entraîne pour les  $C_k$  des relations qui seront indiquées plus loin, n° 15.

(2) Pour la signification des notations suivantes,  $\sqrt{D}, \lambda, H_h, M_h, \dots$ , on se rapportera à [R], n° 9, et suiv.

(3) Pour  $C_k = 0$ , voir plus loin n° 17.

une équation que nous écrirons :

$$(F) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dx^2} &= \sum_{k=1}^n \left[ \frac{c_k}{(x-t_k)^2} + \frac{\bar{\alpha}_k}{x(x-1)(x-t_k)} \right] \\ &+ \frac{c_{n+1}}{x^2} + \frac{c_{n+2}}{(x-1)^2} + \frac{c_{n+3}}{x(x-1)} \\ &+ \sum_{j=1}^n \left[ \frac{3}{4(x-\lambda_j)^2} + \frac{\bar{\beta}_j}{x(x-1)(x-\lambda_j)} \right] \end{aligned} \right.$$

en conservant les notations de [R] (n° 8, p. 188); nous allons voir que  $t_i$  tendant vers  $t_i^0$  le second membre de (F) reste holomorphe.

Développons les  $z_h$  suivant les puissances de  $t_i - t_i^0 \equiv \tau$ ; soit

$$z_h = \frac{C_h}{\tau} + D_h + \dots \quad (h=1, \dots, n+2);$$

à l'aide de [R], (5) on trouvera aisément

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma'' C_h &= -C_i - C_k, & \Sigma'' D_h &= -D_i - D_k, \\ \Sigma''(t_h - t_i^0) C_h &= (t_i^0 - t_k) C_k, & \Sigma''(t_h - t_i^0) D_h &= 1 - C_i - (t_k - t_i^0) D_k, \\ \Sigma''(t_h - t_k) C_h &= (t_k - t_i^0) C_i, & \Sigma''(t_h - t_k) D_h &= 1 - C_i + (t_k - t_i^0) D_i, \end{aligned} \right.$$

où  $\Sigma''$  indique, dans tout le numéro actuel, une sommation étendue à toutes les valeurs 1, ..., n+2 de l'indice  $h$ , sauf  $h=i$  et  $h=k$ . Cela étant, reportons-nous à l'expression de  $\gamma_i$  donnée dans [R] [(29), p. 202]; à l'aide de (26) on trouve aussitôt

$$\sum_{h=1}^{n+2} \frac{t_h - t_i}{4 z_i z_h} \left( \frac{\partial z_h}{\partial t_i} \right)^2 = \frac{2C_i - 1}{4C_i \tau} + \dots, \quad \frac{1}{2z_i} \frac{\partial z_i}{\partial t_i} = -\frac{1}{2\tau} + \dots,$$

et comme on a  $C_i^2 D = 1$  et  $\bar{\alpha}_i = t_i(t_i - 1) \gamma_i$  il en résulte que  $\bar{\alpha}_i$  est holomorphe pour  $t_i = t_i^0$ .

Évaluons de même  $\gamma_k = \alpha_k : t_k(t_k - 1)$ . Pour cela nous utiliserons la relation ( $g_n$ ) { [R], p. 193 }

$$\frac{\partial z_h}{\partial t_k} = \frac{t_k - t_i}{t_k - t_h} \frac{z_h}{z_i} \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \frac{t_h - t_i}{t_h - t_k} \frac{z_k}{z_i} \frac{\partial z_h}{\partial t_i},$$



d'où, à l'aide de (23),

$$\frac{\partial z_h}{\partial t_k} = -\frac{C_h C_k}{C_i \tau^2} + \frac{C_h C_k}{C_i} \frac{A_h}{t_k - t_h} \frac{1}{\tau} + \dots, \quad (h \neq i)$$

$$\frac{\partial z_k}{\partial t_k} = -\frac{C_k^2}{C_i \tau^2} + \dots$$

avec

$$A_h \equiv (t_k - t_h) \frac{D_i}{C_i} + t_h - t_i^0 \frac{D_k}{C_k} + (t_i^0 - t_k) \frac{D_h}{C_h}.$$

On aura donc

$$\sum_{h=1}^{n+2} \frac{t_h - t_k}{4 z_h z_k} \left( \frac{\partial z_h}{\partial t_k} \right)^2$$

$$= \sum \frac{(t_h - t_k) C_h C_k}{4 C_i^2 \tau^2} \left[ 1 - \left( \frac{D_h}{C_h} + \frac{D_k}{C_k} + \frac{2 A_h}{t_k - t_h} \right) \tau + \dots \right]$$

$$+ \frac{C_k (t_i^0 - t_k)}{4 C_i \tau^2} + \left[ \frac{C_k}{4 C_i} - \frac{C_k (t_i^0 - t_k)}{4 C_i} \left( \frac{D_k}{C_k} + \frac{D_i}{C_i} \right) \right] \frac{1}{\tau} + \dots$$

Au moyen de (26) on trouve facilement que le coefficient de  $\tau^{-2}$  est nul et que  $\sum C_h A_h = 0$ ; finalement, il résulte de  $C_i^2 D = 1$  que  $\gamma_k$  est holomorphe pour  $t_i = t_i^0$

Mais alors la relation

$$\psi(x) = \varphi(x) \sum_{h=1}^{n+2} \frac{z_h}{x - t_h} = \frac{1}{\tau} \left( \tau x^n + \sum_{h=1}^{n+2} t_h^2 C_h x^{n-1} + \dots \right),$$

où la parenthèse est holomorphe en  $\tau$  pour  $\tau = 0$  montre que  $t_i$  tendant vers  $t_i^0$  les  $\lambda_j$  restent holomorphes sauf l'un d'eux, soit  $\lambda_1$ , qui admet  $t_i = t_i^0$  comme pôle du premier ordre. De l'expression  $\bar{\beta}_j$  donnée dans ma Thèse (1) on déduit ensuite que les  $\beta_j$  sont holomorphes, sauf  $B_1$  qui admet un pôle du premier ordre en  $t_i^0$ : l'équation (F) a donc bien son second membre holomorphe pour  $t_i = t_i^0$ .

Cela étant, soit  $Y = (x - t_k)^{\alpha_k} [1 + \dots]$  l'intégrale bien déterminée de (F), appartenant à l'exposant  $\alpha_k$  pour  $x = t_k$ , et de premier coefficient égal à 1; l'intégrale analogue pour (E) sera

$$y = (x - t_k)^{\alpha_k} \sqrt{\frac{\psi(x)}{\psi(t_k)}} [1 + \dots];$$

(1) *Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, 3<sup>e</sup> série, t. 29, 1912, p. 79.

d'après ce qu'on vient de voir,  $\psi(x) : \psi(t_i)$  sera holomorphe pour  $t_i = t_i^0$ ; il en sera donc de même de  $y$ , et aussi de

$$y_1 = \left( \frac{dy}{dx} - \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_{11}^i}{x-t_i} y \right) : \sum_{i=1}^{n+2} \frac{A_{21}^i}{x-t_i}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

16. *Transformation d'un pôle de deuxième espèce en un pôle de première espèce.* — Avant de poursuivre l'étude du rapport  $b : a$  nous démontrerons une propriété essentielle du système (S), qui permet de retrouver très simplement le résultat précédent. Supposons que les coefficients  $A_{\mu\nu}^k$  admettent  $t_i = t_i^0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) comme pôle : il sera impossible de former un système canonique de groupe (G), de singularités  $x = t_1^0, \dots, t_n^0$ , et d'exposants identiques à ceux du système (S) (formé avec les mêmes fonctions  $A_{\mu\nu}^k$  et des singularités  $t_i \neq t_i^0$ ).

Or effectuons sur  $(y, y_1)$  une transformation linéaire (T), à coefficients rationnels, qui conserve la forme canonique du système (S) et n'introduise aucune singularité nouvelle; le nouveau système linéaire (S<sub>1</sub>) admettra toujours le groupe (G); ses exposants reproduiront ceux de (S) à des entiers près; enfin, sur les  $A_{\mu\nu}^k$ , (T) induira une transformation automorphe birationnelle ('). Il est donc à prévoir que sauf peut-être pour des transformations (T) et des positions  $t_i^0$  exceptionnelles, (S<sub>1</sub>) aura ses coefficients holomorphes en  $t_i^0$ . Mais en pratique la construction effective d'une transformation (T) nécessite des calculs laborieux; en nous appuyant sur les résultats du n° 13, nous allons indiquer une transformation (T) dont la détermination est très simple; et nous vérifierons en même temps que les coefficients de (S<sub>1</sub>) sont bien holomorphes pour  $t_i = t_i^0$ .

Partons du système (S); à l'équation (E) vérifiée par  $y$  correspondent deux systèmes linéaires dont l'un est (S), et dont nous désignerons l'autre par ( $\bar{S}$ ). Au voisinage de  $x = \infty$ , (S) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left( -\frac{\rho'}{x} + \dots \right) y + \left( \frac{\lambda}{x^2} + \dots \right) y_1, \\ \frac{dy_1}{dx} &= \left( \frac{\mu}{x^2} + \dots \right) y + \left( -\frac{\rho''}{x} + \dots \right) y_1, \end{aligned}$$

(1) Pour plus de détails à ce sujet, voir PLEMELJ, *Jahresb. der D. Math. Verein.* 18, 1907, p. 15; L. SCHLESINGER, *Journ. für r. und ang. Math.*, t. 141, p. 119.

les termes non écrits étant d'ordre supérieurs en  $x$ ; et  $(\tilde{S})$  aurait une forme analogue,  $\rho'$  et  $\rho''$  étant remplacés par  $\tilde{\rho}'$  et  $\tilde{\rho}''$ . Or, on passe de (E) à (S) par des transformations (22), (24), le coefficient  $\alpha$ , qui figure dans (21), étant égal à l'un, soit  $r'$ , des exposants  $r'$ ,  $r''$  de  $y$  dans (E), pour  $x = \infty$ . Ainsi, d'après (S') (n° 13), les exposants de  $(y, y_1)$  dans (S), pour  $x = \infty$ , seront (1)

$$\rho' = \alpha = r' \quad \text{et} \quad \rho'' = -\alpha - n - 2 = r'' - 1.$$

Or, on passera de (E) à  $(\tilde{S})$  en prenant  $\alpha = r''$ , d'où l'on déduit

$$\rho' = r'' = \rho'' + 1 \quad \text{et} \quad \tilde{\rho}'' = -r'' - n - 2 = r' - 1 = \rho' - 1.$$

D'ailleurs, d'après (21), (22), (24), la transformation (T) sera de la forme

$$\tilde{y} = y_1 + \frac{1}{\lambda} [(r'' - r')x + \tilde{\beta} - \beta]y.$$

Enfin, en vertu des équations (B) ([R], p. 192), on aura

$$-\rho' = \frac{n+2}{2} + \frac{\sqrt{D}-1}{2}, \quad -\rho'' = \frac{n+2}{2} - \frac{\sqrt{D}-1}{2},$$

d'où

$$-\tilde{\rho}' = \frac{n+2}{2} - \frac{\sqrt{D}+1}{2}, \quad -\tilde{\rho}'' = \frac{n+2}{2} + \frac{\sqrt{D}+1}{2},$$

ce qui montre que lorsqu'on passe de (S) à  $(\tilde{S})$ ,  $\sqrt{D}$  est remplacé par  $-\sqrt{D}$ : si les  $z_h$  calculés sur (S) admettent en  $t_i = t_i^0$  un pôle de première (deuxième) espèce, leurs correspondants dans  $(\tilde{S})$  admettent un pôle de deuxième (première) espèce. En d'autres termes on peut toujours choisir le système canonique associé à (E) de telle sorte que les coefficients  $A_{\mu\nu}^k$  de ce système soient holomorphes pour  $t_i = t_i^0$ : ce qui entraîne l'holomorphie, en  $t_i^0$ , des coefficients de (E) C. Q. F. D.

17. Les  $z_h$  s'annulent en  $t_i^0$ . — Considérons toujours les  $z_h$  comme fonctions de la variable  $t_i$  et supposons maintenant que l'un d'eux soit nul en  $t_i^0$ ; il y aura deux cas à distinguer, suivant qu'il s'agit de  $z_h$  ( $h \neq i$ ) ou de  $z_i$ .

(1) Cf. note (1), p. 77.

Pour  $h \neq i$ , les équations  $(G_n)$  montrent que

$$z_h = \frac{\sqrt{d_h} z_i(t_i^0)}{t_h - t_i^0} (t_i - t_i^0) + \dots;$$

il résulte alors des formules  $\{ [R], (B), (11), (15) \}$  que  $H_i$ , les  $H_j$  et  $H_h$  sont holomorphes,  $H_h$  prenant en  $t_h$  la valeur  $\sqrt{d_h}$ ; tous les coefficients de  $(S)$  sont donc holomorphes, et pour  $h \neq k$  ou  $k + 1$  il en sera de même des intégrales canoniques en  $t_k$  ou  $t_{k+1}$ . Examinons le cas où l'on aurait, par exemple,  $h = k$  ou  $k + 1$ , le premier coefficient de la série de puissances définissant  $y$  étant toujours pris égal à 1 : dans ce cas, les intégrales précédentes s'expriment par les formules

$$y = \frac{Y}{\Lambda_{21}^k}, \quad y_1 = \frac{Y_1}{\Lambda_{21}^k},$$

analogues à (25), et où les séries de puissances  $Y(x - t_k)^{-2k}$ ,  $Y_1(x - t_k)^{-2k}$  ont tous leurs coefficients holomorphes pour  $t_i = t_i^0$ ; quel que soit  $x_0$ ,  $y$  et  $y_1$  présentent donc  $t_i = t_i^0$  comme singularité polaire d'ordre 1 en général<sup>(1)</sup>.

On procéderait de même et l'on aboutirait à une conclusion analogue dans le cas envisagé au n° 14, où l'on aurait  $z_h(t_i^0) = \infty$ , avec  $C_k = 0$ .

Examinons enfin le cas où  $z_i(t_i^0) = 0$ . On peut écrire alors

$$\begin{aligned} z_h &= a_h + b_h \tau + c'_h \tau^2 + \dots & (h \neq i), \\ z_i &= b_i \tau + c'_i \tau^2 + \dots & (\tau \equiv t_i - t_i^0); \end{aligned}$$

en vertu des identités  $[R, (5)]$  et de leur conséquence

$$\Sigma'(t_h - t_i^0 - \tau)(a_h + b_h \tau + c'_h \tau^2 + \dots) = 1,$$

on trouve

$$(27) \quad \begin{cases} \Sigma' a_h = 0, & \Sigma' b_h + b_i = 0, \\ \Sigma' a_h(t_h - t_i^0) = 1, & \Sigma' c'_h(t_h - t_i^0) = -b_i. \end{cases}$$

Or on tire de  $(G_n) b_h = -\frac{C a_h}{2(t_h - t_i^0)}$ , avec

$$\left(\frac{C^2}{4} + d_i\right) \Sigma' \frac{a_h}{t_h - t_i^0} = b_i C;$$

---

(1) On vérifiera aisément ce résultat dans le cas, signalé dans ma Thèse (p. 105), où  $(E)$  possède une intégrale réductible.

ces relations rapprochées de (27) entraînent

$$(28) \quad C^2 = 4 d_i, \quad \sum' \frac{a_k}{t_k - t_i^0} = \frac{2b_i}{C}.$$

Cela étant, on trouve aisément, en vertu de (27) et (28),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{z_i} \sum' \frac{(t_k - t_i)^2}{z_k} \left( \frac{\partial z_k}{\partial t_i} + \sqrt{D} z_i z_k \right)^2 \\ &= \sum' \frac{C^2 a_k}{4 b_i \tau} + \frac{C^2}{2 b_i} \sum' a_k \left( -\frac{1}{t_k - t_i^0} + \frac{2c'_k}{b_k} + \frac{\sqrt{D} b_i a_k}{b_k} - \frac{b_k}{2a_k} - \frac{c_i}{2b_i} \right) + \dots \\ &= C(1 - \sqrt{D}) + d_i + \dots, \end{aligned}$$

les termes non écrits s'annulant avec  $\tau$ . Mais cette relation rapprochée de [R, (15)] montre que, pour  $t_i = t_i^0$ ,  $2H_i$  est holomorphe et égal à  $C$ ; dès lors, d'après [R, (B)],  $H_k$  est également holomorphe ainsi que  $A_{1,2}^k$  et  $A_{2,1}^k$  ( $k \neq i$  ou  $= i$ ); il en sera donc de même des intégrales analogues à  $Y$  et  $Y_i$ , et par suite les intégrales  $y$  et  $y_i$  définies comme au début de ce numéro seront holomorphes ou méromorphes en  $t_i = t_i^0$ .

18. *Le rapport  $b : a$  est holomorphe et non nul à l'intérieur de  $\Pi$ .* — Cela étant, revenons aux équations (18) et envisageons leurs seconds membres comme fonctions du point  $(t_1, \dots, t_n)$ ; ce point tendant vers  $(t_1^0, \dots, t_n^0)$  en restant dans  $\Pi'$  (n° 4),  $g(x_0)$ ,  $h(x_0)$ ,  $g'(x_0)$  et  $h'(x_0)$  resteront holomorphes ou posséderont au plus un pôle d'ordre 1 si  $z_k$  (ou l'une des  $\lambda_j - t_k$ ) tend vers zéro; de même,  $g_1(x_0)$ ,  $h_1(x_0)$ ,  $g'_1(x_0)$ ,  $h'_1(x_0)$  seront holomorphes ou posséderont au plus un pôle d'ordre 1, si  $z_{k+1}$  (ou l'une des  $\lambda_j - t_{k+1}$ ) tend vers zéro. Si l'on a, par exemple  $z_k = 0$ , on multipliera par  $A_{2,1}^k$  les deux termes de chacune des fractions constituant les seconds membres de (18) : ces seconds membres pourront donc être considérés encore comme les quotients de deux fonctions holomorphes en  $t_i = t_i^0$ . D'ailleurs aucune des expressions  $(gh)$ ,  $(g_1 h_1)$ ,  $(gh_1)$ , ... ne peut s'annuler en  $t_i^0$  : c'est évident pour les deux premières; quant aux suivantes elles ne pourraient s'annuler que si l'un des coefficients  $A, B, C, D$  de (16) s'annulait ce qui, est inadmissible, comme nous l'avons vu (n° 12). En définitive il résulte alors de (17) que le rapport  $b : a$  reste toujours une fonction holomorphe de  $t_1, \dots, t_n$  à l'intérieur de  $\Pi'$ .

**DEUXIÈME PARTIE**  
IMPOSSIBILITÉ D'UN PSEUDO-CHOC

---

19. *Intégration, par approximations successives, du système (A) de M. Schlesinger à l'intérieur de  $\Pi'$ .* — Il s'agit maintenant d'étudier les intégrales  $G(x)$ ,  $H(x)$  à l'intérieur de  $\Pi'$ , c'est-à-dire lorsqu'un certain nombre de points  $t_h$  consécutifs sont à des distances mutuelles très petites; on peut toujours supposer que le groupement précédent est formé des points  $t_i, t_{i+1}, \dots, t_n, t_{n+1} = 0$ , les  $|t_k| (k < i)$  étant bornés inférieurement.

Commençons par étudier, dans cette hypothèse, les intégrales du système (A) de M. Schlesinger, et pour cela faisons le changement de variables

$$(29) \quad t_h = v_h t_i \quad (h = i+1, \dots, n)$$

en posant de plus  $v_i \equiv 1, v_{n+1} \equiv 0$ . Pour une fonction quelconque

$$f(t_1, \dots, t_n) \equiv g(t_1, \dots, t_i, v_{i+1}, \dots, v_n),$$

on aura

$$\frac{\partial g}{\partial t_i} = \sum_{h=i}^n v_h \frac{\partial f}{\partial t_h};$$

introduite dans le système (A) <sup>(1)</sup>, la transformation (29) le changera donc en le système suivant :

$$(A') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Lambda^k}{\partial t_i} : \Lambda^k \sum_{h=i}^n \frac{v_h \Lambda^h}{v_h t_i - t_k} - \sum_{h=i}^n \frac{v_h \Lambda^h}{v_h t_i - t_k} \Lambda^k \quad (k = 1, \dots, i-1, n+2), \\ \frac{\partial \Lambda^h}{\partial t_i} : \frac{\Lambda^h \sum_{l=i}^n \Lambda^l - \sum_{l=i}^n \Lambda^l \Lambda_h}{t_i} + v_h \sum^* \frac{\Lambda^k \Lambda^h - \Lambda^h \Lambda^k}{v_h t_i - t_k} \quad (h = i, \dots, n+1), \end{array} \right.$$

---

<sup>(1)</sup> La notation (A) désigne le système (A<sub>2</sub>) de M. Schlesinger [R, n° 9] écrit avec la notation des matrices.  $\sum^*$  indique une somme étendue aux valeurs  $1, \dots, i-1, n+2$  de  $k$ .

où les dérivées sont prises dans le nouveau système de variables; conformément aux conventions adoptées dans [R](n° 9, p. 190-191), nous supposons que les intégrales qu'il s'agit de représenter vérifient les conditions suivantes <sup>(1)</sup> :

$$(30) \quad A_{11}^g + A_{22}^g = 1, \quad A_{11}^g A_{22}^g - A_{12}^g A_{21}^g = \frac{1-d_g}{4} \quad (g=1, \dots, n+2),$$

$$(31) \quad \begin{cases} \sum_{g=1}^{n+2} A_{11}^g = \frac{n+1}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2}, & \sum_{g=1}^{n+2} A_{12}^g = 0, \\ \sum_{g=1}^{n+2} A_{21}^g = 0, & \sum_{g=1}^{n+2} A_{22}^g = \frac{n+3}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2}, \end{cases}$$

qui constituent un système de  $2n+7$  équations distinctes; les intégrales de (A') qui satisfont à (30), (31) dépendent donc de  $2n+1$  arbitraires. Soient alors  $a^h, a^k (h \neq i, n+1)$ ,  $n$  matrices constantes et réelles, vérifiant (30), et les  $a^h$  étant assujetties à la restriction suivante : les constantes  $s'$  et  $s''$  qui vont être définies en fonction des  $a^h$  devront être réelles et telles que  $0 < s' - s'' < 1$ . Les  $t_k$  et les  $v_k$  étant toujours réels, nous allons chercher à construire dans l'intervalle réel  $(t_i^0, 0)$  une solution de (A'), vérifiant (30), (31) — y compris pour  $h = i, n+1$  — et telle que,  $t_i$  tendant vers zéro, les  $A^h$  tendent vers les  $a^h$  tandis que,  $t_i$  tendant vers  $t_i^0$ , les  $A^h (h \neq i, n+1)$  tendent vers les  $a^h$ ; de plus une certaine combinaison linéaire des  $A_{\mu\nu}^i$  que l'on fixera bientôt devra tendre vers une constante donnée  $b_{11}$ . Pour abrégé, nous dirons que les conditions précédentes réalisent *le cas réél*.

Désignons par C la matrice (31) et posons  $C = \sum^* a^h \div a$ ; puis, par une substitution linéaire ramenons la matrice  $a$  à sa forme canonique  $b \div c^{-1}ac$ . D'une manière générale désignons par B<sup>f</sup> ou b<sup>f</sup> les transformées  $c^{-1}A^f c$  ou  $cc^{-1}a^f c$  d'une matrice quelconque A<sup>f</sup> ou a<sup>f</sup> ( $f = h$  ou  $k$ ); de même, le système (A') — qui conserve d'ailleurs sa forme — s'écrira (B'); nous allons résoudre ce dernier système par approximations successives.

<sup>(1)</sup> Dans le problème de Plateau la matrice (31) est toujours du type général ( $\sqrt{D} \neq 1$ ); cf n° 13, p. 77.

En première approximation nous prendrons

$$B^{k,0} : b^k, \quad t_i \frac{dB^{h,0}}{dt_i} : B^{h,0}b - bB^{h,0} \quad (h = i+1, \dots, n).$$

Or en nous plaçant dans le cas général, ce qui est loisible actuellement, nous pouvons écrire

$$b : \begin{pmatrix} s'' & 0 \\ 0 & s' \end{pmatrix};$$

posons  $s' - s'' = s (> 0)$ ; il viendra

$$B^{h,0} : \begin{bmatrix} b_{11}^h & b_{12}^h \left(\frac{t_i}{t_i^0}\right)^s \\ b_{21}^h \left(\frac{t_i}{t_i^0}\right)^{-s} & b_{22}^h \end{bmatrix} \quad (h = i+1, \dots, n),$$

et nous définirons  $B^{i,0}$ ,  $B^{n+1,0}$  en les assujettissant à vérifier conjointement avec les  $B^{h,0}$  et les  $B^{k,0}$  les conditions (30) et les transformées de (31) par  $c$ ; de plus  $B_{11}^{i,0}$  devra se réduire à la constante donnée  $b_{11}$ . On en déduit sans ambiguïté  $B_{22}^{i,0}$ ,  $B_{11}^{n+1,0}$ ,  $B_{22}^{n+1,0}$ ; quant aux autres éléments de  $B^{i,0}$  et  $B^{n+1,0}$ , leur détermination dépend d'un radical du second degré que l'on prendra arbitrairement

Cela étant, imaginons qu'on ait déterminé  $B^{k,j}$ ,  $B^{h,j}$  ( $j = 1, \dots, m$ ); pour calculer  $B^{k,m+1}$ ,  $B^{h,m+1}$  on fera d'abord

$$(32) \quad B^{k,m+1} : b^k + \int_0^{t_i} \left[ B^{k,m} \sum_{h=i}^n \frac{v_h B^{h,m}}{v_h t_i - t_k} - \sum_{h=i}^n \frac{v_h B^{h,m}}{v_h t_i - t_k} B^{k,m} \right] dt_i;$$

puis on intégrera les équations

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_i \frac{dB^{h,m+1}}{dt_i} + (b B^{h,m+1} - B^{h,m+1} b) \\ : \sum^* (B^{k,m+1} - b^k) B^{h,m} - B^{h,m} \sum^* (B^{k,m+1} - b^k) \\ + v_h t_i \sum^* \frac{B^{h,m} B^{k,m+1} - B^{k,m+1} B^{h,m}}{v_h t_i - t_k} \quad (h = i+1, \dots, n) \end{array} \right.$$

moyennant les conditions initiales  $B^{h,m+1}(t_i^0) : b^h$ . On calculera de même  $B_{11}^{i,m+1}$ , qui, pour  $t_i = t_i^0$ , devra se réduire à  $b_{11}$ ; quant aux élé-



ments restants de  $B^{i,m+1}$  et à ceux de  $B^{n+1,m+1}$  on les déterminera par la condition de satisfaire à (30), et aux transformées de (31), conjointement avec ceux de  $B^{h,m+1}$  et de  $B^{k,m+1}$ . Comme tout à l'heure, ceci donnera deux solutions; on retiendra seulement celle qui pour  $t_i = t_i^0$  infiniment petit diffère infiniment peu de la solution choisie en première approximation.

20. *Convergence des approximations.* — Il s'agit de démontrer la convergence des approximations précédentes. Posons (<sup>1</sup>)

$$|t_i| = r, \quad |t_i^0| = r_0, \quad (1-s) \int_0^r \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-s} dr = r_0^s r^{1-s} \equiv \varepsilon,$$

d'où

$$(34) \quad r < \varepsilon < r_0 (< 1)$$

et

$$(35) \quad (1-s) \int_r^{r_0} \frac{\varepsilon}{r} dr = r_0 - r_0^s r^{1-s} \equiv \varepsilon' \quad (< r_0).$$

Cela étant, admettons qu'on ait déjà obtenu (<sup>2</sup>) pour  $j = 0, \dots, m-1$  les inégalités

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} |B_{\mu\nu}^{k,j+1} - B_{\mu\nu}^{k,j}| < A(qr_0)^j \varepsilon \quad [(\mu\nu) \neq (12)], \\ |B_{12}^{k,j+1} - B_{12}^{k,j}| < A(qr_0)^j r, \\ |B_{\mu\mu}^{k,j+1} - B_{\mu\mu}^{k,j}| < A(qr_0)^j \varepsilon' \quad (\mu = 1, 2), \\ |B_{12}^{h,j+1} - B_{12}^{h,j}| < A(qr_0)^j \left(\frac{r}{r_0}\right)^s \varepsilon', \\ |B_{21}^{h,j+1} - B_{21}^{h,j}| < A(qr_0)^j \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-s} \varepsilon', \end{array} \right.$$

où  $A$  et  $q$  sont deux nombres positifs indépendants de  $r_0$  et  $m$  et tels en outre qu'on ait

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} |B_{\mu\nu}^{k,0}| < A, \quad |B_{\mu\mu}^{k,0}| < A, \\ |B_{12}^{h,0}| < A \left(\frac{r}{r_0}\right)^s, \quad |B_{21}^{h,0}| < A \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-s}, \end{array} \right.$$

(<sup>1</sup>) Ces notations concordent avec celles de [R]; on observera qu'actuellement (cas réel), l'exposant  $\omega$  de [R] (n° 15, p. 204) est égal à  $s$ .

(<sup>2</sup>) Nous omettons la démonstration pour  $j = 0$ ; elle ne différerait aucunement de celle du cas général.

d'où, pour  $2r_0 < q^{-1}$ ,  $r_0 < 1$  et  $j = 0, \dots, m-1$ ,

$$(38) \quad \begin{cases} |B_{0j}^{k,j}| < 2A, & |B_{\mu\mu}^{k,j}| < 2A, & |B_{1/2}^{k,j}| < 2A \left(\frac{r}{r_0}\right)^s, \\ |B_{21}^{k,j}| < 2A \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-s}, & |B_{1/2}^{k,j} - b_{1/2}^k| < 2Ar, \\ |B_{\mu\nu}^{k,j} - b_{\mu\nu}^k| < 2A\varepsilon & [(\mu\nu) \neq (12)]; \end{cases}$$

nous allons montrer que les inégalités (36) subsistent encore pour  $j = m$ .

Posons  $\left| \frac{r_h}{v_h t_i - t_k} \right| < f$ ; on tire aisément de (32), (38), (34), (35)

$$\begin{aligned} & |B_{\mu\mu}^{k,m+1} - B_{\mu\mu}^{k,m}| \\ & < 2f(n-i+1)A^2(qr_0)^{m-1} \int_0^r \left[ \left(\frac{r}{r_0}\right)^s (\varepsilon + \varepsilon') + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-s} (r + \varepsilon') \right] dr \\ & < 8f(n-i+1)A^2 \frac{(qr_0)^m}{q} \frac{\varepsilon}{1-s} \leq A \frac{q_1}{q} (qr_0)^m \varepsilon \end{aligned}$$

avec

$$(39) \quad q_1 \geq \frac{8f(n-i+1)}{1-s} A.$$

On aura de même

$$\begin{aligned} |B_{1/2}^{k,m+1} - B_{1/2}^{k,m}| & < 4f(n-i+1)A^2(qr_0)^{m-1} \int_0^r \left[ \varepsilon' + r + \left(\frac{r}{r_0}\right)^s \varepsilon' + \left(\frac{r}{r_0}\right)^s \varepsilon \right] dr \\ & < 16f(n-i+1)A^2 \frac{(qr_0)^m}{q} r \leq A \frac{q_1}{q} (qr_0)^m r \end{aligned}$$

avec

$$(40) \quad q_1 \geq 16f(n-i+1)A$$

et

$$\begin{aligned} |B_{21}^{k,m+1} - B_{21}^{k,m}| & < 4f(n-i+1)A^2(qr_0)^{m-1} \int_0^r \left[ 1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-s} \right] (\varepsilon + \varepsilon') dr \\ & < 16f(n-i+1)A^2 \frac{(qr_0)^m}{q} \frac{\varepsilon}{1-s} \leq A \frac{q_1}{q} (qr_0)^m \varepsilon \end{aligned}$$

avec

$$(41) \quad q_1 \geq \frac{16f(n-i+1)}{1-s} A,$$

condition qui entraîne (39) et (40).

Cela fait, on évaluera  $|B_{\mu\nu}^{h,m+1} - B_{\mu\nu}^{h,m}|$  en remplaçant les  $|B_{\mu\nu}^{h,m+1} - B_{\mu\nu}^{h,m}|$  par les limitations qu'on vient d'obtenir, et non pas par (36). On trouvera ainsi, d'après (33), (36), (38), (35),

$$|B_{\mu\mu}^{h,m+1} - B_{\mu\mu}^{h,m}| < 2iA^2 \frac{(qr_0)^m}{q} \int_r^{r_0} \Phi_1 dr$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\equiv \left(\frac{r}{r_0}\right)^s \frac{\varepsilon + fr}{r} + q_1 \frac{\varepsilon}{r} (1 + fr) + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-s} q_1 (1 + fr) + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-s} (1 + f) \\ &< 2(1 + f)(1 + q_1) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-s}, \end{aligned}$$

d'où

$$|B_{\mu\mu}^{h,m+1} - B_{\mu\mu}^{h,m}| < 4i(1 + f)(1 + q_1)A^2 \frac{(qr_0)^m}{q} \frac{\varepsilon'}{1 - s} \leq \Lambda (qr_0)^m \varepsilon'$$

pourvu que

$$(42) \quad q \geq \frac{4i(1 + f)(1 + q_1)\Lambda}{1 - s}.$$

On aura de même

$$|B_{12}^{h,m+1} - B_{12}^{h,m}| < 2iA \frac{(qr_0)^m}{q} \left(\frac{r}{r_0}\right)^s \int_r^{r_0} \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-s} \Phi_2 dr$$

avec

$$\begin{aligned} \Phi_2 &\equiv 2(1 + q_1) \left[ r + \varepsilon \left(\frac{r}{r_0}\right)^s \right] \\ &+ 2fr \left[ 1 + q_1 r + \left(\frac{r}{r_0}\right)^s (1 + q_1 \varepsilon) \right] < 4(1 + f)(1 + q_1)r, \end{aligned}$$

d'où

$$|B_{12}^{h,m+1} - B_{12}^{h,m}| < 8i(1 + f)(1 + q_1)\Lambda^2 \frac{(qr_0)^m}{q} \left(\frac{r}{r_0}\right)^s \frac{\varepsilon'}{1 - s} \leq \Lambda (qr_0)^m \left(\frac{r}{r_0}\right)^s \varepsilon'$$

avec

$$(43) \quad q \geq \frac{8i(1 + f)(1 + q_1)\Lambda}{1 - s};$$

et enfin

$$|B_{21}^{h,m+1} - B_{21}^{h,m}| < 2iA^2 \frac{(qr_0)^m}{q} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-s} \int_r^{r_0} \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r_0}\right)^s \Phi_3 dr$$

avec

$$\Phi_3 \equiv 2 \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-s} \varepsilon + \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-s} q_1 \varepsilon + q_1 \varepsilon + \varepsilon \right] + 2fr \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-s} + q_1 \varepsilon \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-s} + 1 + q_1 \varepsilon \right] \\ < 4(1+q_1)(\varepsilon + fr) \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-s},$$

soit encore

$$(44) \quad \Phi_3 < 4(1+q_1)(1+f) \varepsilon \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-s},$$

d'où

$$|B_{21}^{h,m+1} - B_{21}^{h,m}| < 8iA^2(1+q_1)(1+f) \frac{(qr_0)^m}{q} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-s} \frac{\varepsilon'}{1-s} \leq A(qr_0)^m \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-s} \varepsilon',$$

pour

$$(45) \quad q \geq \frac{8i(1+f)(1+q_1)A}{1-s}.$$

En définitive, il résulte de (41)-(45) que si l'on choisit A de manière à vérifier (37), les inégalités (36), (38) continueront (1) à être satisfaites pour  $j = m$  à condition que l'on ait

$$(1-s)^2 q > 8(1+f)A[(1-s)i + 16f(n-i+1)A].$$

Par un procédé classique, on en conclut que pour  $r_0 \leq r'_0 < q^{-1}$  les approximations (32), (33) convergent vers une solution de (B') qui prend aux limites 0 et  $t_i$  les valeurs données à  $a^h$ ,  $b^h$  et satisfait évidemment aux relations (31); il en est de même, d'ailleurs, des relations (30) : car elles sont vérifiées en  $t_i^0$  et ce sont des intégrales premières de (B').

En vue de l'application de ces résultats au problème de Plateau il est nécessaire de préciser la nature analytique de notre solution au voisinage de l'origine. Or, en procédant par récurrence, on voit immédiatement que les  $B_{\mu\nu}^{h,m}$  sont des fonctions de  $t_i$ ,  $t_i^s$ ,  $t_i^{1-s}$  holomorphes par rapport à ces variables (dans le domaine de leurs origines respectives); les  $B_{\mu\nu}^k$  sont donc des fonctions holomorphes de  $t_i^s$  et  $t_i^{1-s}$ ; et il en est de même des  $B_{\mu\nu}^h$ ,  $\left(\frac{t_i}{t_i^0}\right)^{-s} B_{12}^h$ ,  $\left(\frac{t_i}{t_i^0}\right)^s B_{21}^h$ . Dès lors, si l'on revient au système (A'), on peut dire que les  $A_{\mu\nu}^k$  et les  $t_i^s A_{\mu\nu}^h$  sont holomorphes en  $t_i^s$  et  $t_i^{1-s}$ ; ainsi les produits  $t_i A^h$  tendent vers zéro comme  $t_i^{1-s}$  et la

(1) Et ceci, pour  $h = i$  et  $n + 1$ ; nous ne nous arrêterons pas sur le cas où les deux solutions envisagées à la fin du n° 19 coïncideraient.

formule

$$(46) \quad \frac{A^i}{x-t_i} + \frac{A^{i+1}}{x-t_{i+1}} + \dots + \frac{A^n}{x-t_n} + \frac{A^{n+1}}{x}$$

$$: \frac{A^i + \dots + A^{n+1}}{x} + t_i \sum_{h=i}^{n+1} \frac{v_h A^h}{x - v_h t_i}$$

montre alors que, dans le coefficient différentiel du système (S) écrit sous la forme

$$\frac{dy}{dx} : y \sum_{g=1}^{n+2} \frac{A^g}{x-t_g},$$

le groupement (46) tend vers la limite  $a : x$  quand  $t_i$  tend vers zéro; d'une manière précise on peut écrire

$$\sum \frac{A_g}{x-t_g} : \frac{a}{x} + \frac{\varepsilon}{x} + \sum_{h=i}^{n+1} \frac{\varepsilon_h}{x(x-t_h)} + \sum^* \frac{A^k}{x-t_k},$$

$\varepsilon$  et  $\varepsilon_h$  étant des matrices, holomorphes en  $t_i^s, t_i^{1-s}$  et s'annulant avec  $t_i$ .

21. *Les caractéristiques épuisent la représentation des intégrales dans le cas réel.* — Et maintenant, il nous faut répondre à une question essentielle : pour  $t_i$  infiniment petit, toutes les intégrales du système (A') sont-elles représentables (dans le cas réel) par les caractéristiques que nous venons de construire ?

Nous allons montrer qu'il en est bien ainsi, et pour cela nous procéderons par récurrence comme pour le problème analogue de notre Mémoire antérieur [R] (troisième Partie).

Observons tout d'abord que le théorème que nous voulons établir est évident pour les systèmes différentiels (A') où tous les points singuliers, à l'exception d'un seul,  $t_{n+3}$  par exemple, sont infiniment voisins de l'un d'eux, soit  $t_{n+1} = 0$ ; il n'y a pas alors de matrice  $A^h$  ni de somme  $\sum^*$  dans (A') qui se réduit à des équations du type

$$t_i \frac{dA^h}{dt_i} : aA^h - A^h a \quad (h = 1, \dots, n+2),$$

$a$  désignant la matrice constante  $\Sigma A^h$ ; ce système est du type envisagé

au n° 19 en première approximation; son intégrale est donc représentable par les développements du n° 19 (réduits à leurs premiers termes).

Cela étant, admettons que la proposition ait été établie pour un système (A') attaché à un système linéaire possédant les points singuliers  $x = t_2, \dots, t_{i-1}, t_{n+2}, t_{n+3}$  et le groupe de points singuliers infiniment voisins  $x = t_i, \dots, t_n, t_{n+1}$ ; nous désignerons ce système par  $(S_{n-1})$  et le système (A') correspondant par  $(A_{n-1})$ , et nous allons établir que la proposition subsiste pour le système (A'), soit  $(A_n)$  attaché au système linéaire  $(S_n)$  possédant les points singuliers de  $(S_{n-1})$  et en outre le point  $x = t_1$ .

Procédons comme dans [R] <sup>(1)</sup> et faisons tendre  $t_1$  vers  $t_{n+2}$ ; l'intégrale de  $(A_n)$  peut être définie par le système de valeurs qu'elle prend au point  $t_1 = t_{n+2}^0 + \varepsilon, t_2^0, \dots, t_{i-1}^0, t_i^0, v_{i+1}^0, \dots, v_n^0$ ; comme dans [R] on se bornera d'abord aux intégrales pour lesquelles le système de valeurs précédentes satisfait, quel que soit  $\varepsilon$  aux conditions,

$$(G) \quad |A_{\mu\nu}^g| < M,$$

où M est un nombre positif fixé une fois pour toutes. Si  $\varepsilon$  est assez petit l'intégrale de  $(A_n)$  peut être développée suivant les puissances de  $\varepsilon$  ([R], n° 39, p. 255), les matrices  $A^g$  ( $g \neq 1, n+2$ ) et  $A^1 + A^{n+2}$  tendant, pour  $\varepsilon = 0$ , vers des solutions d'un système  $(A_{n-1})$ . Considérons alors les solutions précédentes de  $(A_n)$ ; lorsque  $t_1$  tend vers zéro, ou bien les  $A^k$  tendront vers des matrices limites bien déterminées, et alors les solutions de  $(A_n)$  seront représentables par les caractéristiques du n° 19; ou bien les éléments des  $A^k$  finiront par rester intérieurs à des cercles d'indétermination dont le diamètre sera très petit avec  $\varepsilon$ ; on écartera cette dernière hypothèse comme dans [R] (p. 256).

Il faut prouver maintenant que le résultat acquis subsiste lorsque  $|t_1 - t_{n+2}|$  n'est plus infiniment petit. Or, soit  $t_1 = 0$  un point du chemin  $(t_{n+2}^0 + \varepsilon, t_1^0)$  qui par hypothèse met la proposition en défaut. Envisageons les limites  $a^k$  des  $A^k$  pour  $t_1 = 0$ ; les  $A^k$  sont des fonctions de  $t_1$  satisfaisant à un système différentiel du type  $(A_{n-1})$ , et moyen-

(1) Dans [R] le point singulier mobile était désigné par  $t_n$  (et non par  $t_1$ ).

nant une transformation (T) préalable (n° 16), on peut toujours supposer que le point  $t_1 = 0$  n'est pas une singularité polaire des  $a^h$ ; de plus, quitte à remplacer  $(t_2^0, \dots, t_{i-1}^0, t_{i+1}^0, \dots, t_n^0)$  par un point voisin, on peut toujours supposer que,  $t_i$  tendant vers 0, les valeurs des  $a^h$  ( $h = i, \dots, n, n+1$ ) restent finies. Dans ces conditions, les matrices  $a^h, a^k$  restent bornées en module quand  $t_i$  tend vers 0,  $t_i$  variant de  $t_i^0$  à 0; le raisonnement développé dans [R] (n° 42, p. 261) s'applique aussitôt, et l'on peut affirmer que pour  $t_i = 0$  l'intégrale de  $(A_n)$  est encore représentable par les caractéristiques du n° 19.

Toutefois, le succès de la démonstration est subordonné à la réalisation de la condition (C); or cette condition est de forme analogue à la condition  $C(\eta)$  de [R]. Dans le cas où elle ne serait pas remplie on procéderait comme dans [R] (n° 43, p. 262-263), en observant que le théorème de M. Painlevé, qui avait joué dans cette partie de la démonstration un rôle essentiel, continue à rester valable. On peut donc écarter la restriction précédente, et, en conséquence, on doit répondre affirmativement à la question posée au début de ce numéro.

**22. Nature analytique des coefficients de (E). Signification géométrique de  $s$ .** — Nous allons étudier maintenant l'allure des intégrales G, H de l'équation linéaire (E') lorsque plusieurs points  $t_n$  sont infiniment voisins; à cet effet nous examinerons d'abord la forme des coefficients de l'équation (E).

Tout d'abord, d'après le résultat établi à la fin du n° 20, il est aisé de voir que l'équation (E) vérifiée par  $y$  aura ses coefficients holomorphes pour  $t_i = 0$  en  $t_i^s$  et  $t_i^{1-s}$ . En effet, le système (S) ayant la forme

$$y' = a_{11}y + a_{21}y_1, \quad y_1' = a_{12}y + a_{22}y_1,$$

l'équation (E) s'écrit

$$y'' = \left( a_{11} + a_{22} + \frac{a'_{21}}{a_{21}} \right) y' + \left( a'_{11} - \frac{a'_{21}}{a_{21}} a_{11} + a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22} \right) y.$$

On a déjà montré, à la fin du n° 20 que les  $a_{\mu\nu} = \sum_{\alpha}^{n+2} \frac{A_{\mu\nu}^{\alpha}}{x - t_{\alpha}}$  sont de la

forme annoncée; reste à étudier  $a'_{21} : a_{21}$ ; mais on a  $a_{21} = \lambda \psi(x) : \varphi(x)$  [R, p. 197] et

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = t_i \sum_{h=i}^n \frac{t_h z_h}{x(x-t_h)} + \sum^* \frac{t_k z_k}{x(x-t_k)} = \frac{P_{i-1}(x)}{x \prod^* (x-t_k)} + \frac{t_i^{i-s} P_{n-i}(x)}{x \prod_{h=i}^n (x-t_h)},$$

$P_{i-1}$  et  $P_{n-i}$  étant des polynômes en  $x$ , de degrés marqués par les indices, et à coefficients holomorphes en  $t_i^s, t_i^{i-s}$ : on en déduit aussitôt la propriété annoncée.

Décrivons dans le sens direct un contour fermé  $\Gamma$  autour des points  $x = t_i, \dots, t_n, t_{n+1}$ ; à ce contour correspond dans le groupe de monodromie de  $G$  de (E) une substitution  $\Sigma$ ; nous allons calculer les racines de l'équation fondamentale relative à  $\Sigma$ .

Tout d'abord, ces racines sont indépendantes de  $t_i$ ; or, si,  $x$  restant constant, on fait tendre  $t_i$  vers zéro, le système (S) tendra vers un système de la forme

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left( \frac{a_{11}}{x} + \dots \right) y + \left( \frac{a_{21}}{x} + \dots \right) y_1, \\ \frac{dy_1}{dx} &= \left( \frac{a_{12}}{x} + \dots \right) y + \left( \frac{a_{22}}{x} + \dots \right) y_1, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant holomorphes en  $x$  pour  $x=0$ , et la matrice d'éléments  $a_{\mu\nu}$  n'étant autre que la matrice  $a$  du n° 19. Mais, à la limite  $\Gamma$  se réduit à un contour fermé décrit autour de  $x=0$ : les racines cherchées sont donc  $e^{2\pi s' \sqrt{-1}}$  et  $e^{2\pi s'' \sqrt{-1}}$ . Or on a (n° 19)

$$s' + s'' = a_{11} + a_{22} = n - i + 2, \quad s' - s'' = s;$$

les racines cherchées sont donc

$$(-1)^N e^{\pi s' \sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad (-1)^N e^{-\pi s' \sqrt{-1}} \quad (N \equiv n - i + 2).$$

Posons alors

$$(47) \quad y = z \sqrt{\varphi(x)}, \quad y_1 = z_1 \sqrt{\varphi(x)},$$

$z$  et  $z_1$  satisferont à un système (T) et  $z$  à une équation (F); les



racines de l'équation fondamentale relative à l'équation (F) et au contour  $\Gamma$  seront précisément

$$e^{\pi s \sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad e^{-\pi s \sqrt{-1}}.$$

Il est facile maintenant de trouver la signification géométrique de  $s$ . Géométriquement,  $\Sigma$  équivaut à une succession de symétries autour des côtés  $A_{i-1}A_i, \dots, A_h, A_{h+1}, \dots, A_{n+1}A_{n+2}$  de notre polygone; or cette succession se réduit au couple des symétries extrêmes autour de  $A_{i-1}A_i$  et  $A_{n+1}A_{n+2}$ . Désignons par  $V$  la détermination comprise entre  $o$  et  $\pi$  de l'angle  $(\overrightarrow{A_{i-1}A_i}, \overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}})$ ; d'après (19) et (47) la différence des exposants relatifs à  $\Sigma$  est la même, pour les équations (E') et (F); mais l'angle désigné au n° 8 par  $V_k$  est égal actuellement à  $\pi - V$ ; d'après (12) la différence des exposants est donc égale à

$$1 - \frac{\pi - V}{\pi}$$

(à un entier près) et, puisque  $s$  est inférieur à 1, on a nécessairement

$$s = \frac{V}{\pi}.$$

23. *Théorème fondamental sur le rapport des longueurs des côtés dans le cas d'un pseudo-choc.* — Ceci posé, soit  $\mathcal{C}$  une couronne limitée dans le plan de la variable

$$\xi \equiv \frac{x}{t_i}$$

par deux circonférences de centre  $o$ , l'une  $C_1$  de rayon  $1 + \varepsilon$  ( $\varepsilon$ , quantité arbitrairement petite), l'autre  $C_2$  de rayon  $R$  quelconque, mais supérieur à  $1 + \varepsilon$  : ainsi les points singuliers  $\xi = v_i, \dots, v_{n+1}$  ( $0 = v_{n+1} < v_n < \dots < v_{i+1} < v_i = 1$ ) seront tous intérieurs à  $C_1$ , et, pour  $t_i$  assez petit, les points  $\xi = t_k : t_i$  seront extérieurs à  $C_2$ . D'après la propriété qui vient d'être établie au sujet de la substitution  $\Sigma$  (n° 22), (F) possède deux intégrales, soit  $Z_1$  et  $Z_2$ , telles qu'à l'intérieur de  $\mathcal{C}$  les quotients  $Z_1 : \xi^{\frac{s}{2}}$  et  $Z_2 : \xi^{-\frac{s}{2}}$  sont holomorphes. Ces quotients

pourront donc être développés en séries de Laurent sous la forme

$$\begin{aligned} Z_1 &= \xi^{\frac{s}{2}} \left[ f_{11}(t_i \xi; t_i^s, t_i^{s-1}) + f_{12}\left(\frac{1}{\xi}; t_i^s, t_i^{1-s}\right) \right], \\ Z_2 &= \xi^{-\frac{s}{2}} \left[ f_{21}(t_i \xi; t_i^s, t_i^{s-1}) + f_{22}\left(\frac{1}{\xi}; t_i^s, t_i^{1-s}\right) \right], \end{aligned}$$

les  $f_{z_1}$  étant holomorphes en  $t_i \xi$  pour  $|t_i \xi| \leq R t_i$  et les  $f_{z_2}$  en  $1 : \xi$  pour  $|\xi| > 1 + \varepsilon$ . On déterminera les coefficients de ces séries par la méthode de M. H. von Koch <sup>(1)</sup>; de cette méthode, et de l'holomorphie des coefficients de (F) par rapport à  $t_i^s, t_i^{1-s}$  il résulte que, l'un des coefficients de  $f_{z_1}$  étant pris égal à 1, les  $f_{z_2}$ , envisagées comme fonctions de  $\xi$ , seront uniformément convergentes dans  $\mathcal{C}$  pour  $0 \leq |t_i| \leq r_0$  (suffisamment petit), et envisagées comme fonctions de  $t_i^s, t_i^{1-s}$ , seront holomorphes relativement à ces arguments dans le même champ.

Ainsi, pour  $t_i$  infiniment petit,  $t_i^{\frac{s}{2}} Z_1$  et  $t_i^{-\frac{s}{2}} Z_2$  convergent vers deux intégrales

$$Z_1^0 = x^{\frac{s}{2}} f_{11}(x; 0, 0), \quad Z_2^0 = x^{-\frac{s}{2}} f_{21}(x; 0, 0)$$

canoniques en  $x = 0$  pour l'équation (F<sup>0</sup>) qu'on obtient <sup>(2)</sup> en faisant  $t_i = 0$  dans (F); les exposants de  $Z_1^0, Z_2^0$  étant exactement égaux à  $\pm s : 2$  (n° 22), on peut toujours supposer que le coefficient pris égal à 1 dans  $f_{z_1}(x; t_i^s, t_i^{1-s})$  est le terme initial  $f_{z_1}(0; t_i^s, t_i^{1-s})$ ;  $Z_1$  et  $Z_2$  sont donc complètement déterminées. De même, si dans  $Z_1$  et  $Z_2$  on laisse  $\xi$  constant et qu'on fasse tendre  $t_i$  vers zéro,  $Z_1$  et  $Z_2$  tendront vers les fonctions

$$\bar{Z}_1 = \xi^{\frac{s}{2}} \left[ 1 + f_{12}\left(\frac{1}{\xi}; 0, 0\right) \right], \quad \bar{Z}_2 = \xi^{-\frac{s}{2}} \left[ 1 + f_{22}\left(\frac{1}{\xi}; 0, 0\right) \right]$$

<sup>(1)</sup> *Acta math.*, t. 16, 1892, p. 217.

<sup>(2)</sup> La matrice des coefficients du système (T<sup>0</sup>) correspondant à (F<sup>0</sup>) s'écrit

$$\frac{a - \frac{N1}{2}}{x} + \sum^* \frac{\Lambda^k(0) - \frac{1}{2}}{x - t_k} \quad (1, \text{matrice-unité}).$$

qui seront les intégrales canoniques, relatives à  $\xi = \infty$ , de l'équation ( $\bar{F}$ ) qu'on obtient (1) en faisant dans (F)  $x = t_i \xi$ , puis  $t_i = 0$ .

Ce point établi, observons que (F) possède dans le domaine de  $\xi = 0$  deux intégrales canoniques

$$\zeta_1 = \xi^{\alpha_{n+1}} \varphi_1(\xi; t_i^s, t_i^{1-s}), \quad \zeta_2 = \xi^{\beta_{n+1}} \varphi_2(\xi; t_i^s, t_i^{1-s})$$

avec

$$\varphi_1(0; t_i^s, t_i^{1-s}) \equiv 1 \equiv \varphi_2(0; t_i^s, t_i^{1-s}),$$

$\varphi_1$  et  $\varphi_2$  étant holomorphes en  $\xi$  pour  $|\xi| < c_n$ , et en  $t_i^s, t_i^{1-s}$  pour  $|t_i|$  assez petit;  $t_i$  tendant vers zéro,  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  tendront vers les intégrales correspondantes

$$\bar{\zeta}_1 = \xi^{\alpha_{n+1}} \varphi_1(\xi; 0, 0), \quad \bar{\zeta}_2 = \xi^{\beta_{n+1}} \varphi_2(\xi; 0, 0)$$

de ( $\bar{F}$ ). D'ailleurs (F) ne possède aucune singularité à l'intérieur du segment  $(0, t_{n+2} : t_i)$  de l'axe  $o, \xi$ ; par suite, en un point  $\xi = c$ , intérieur à  $\mathcal{C}$  les prolongements de  $\zeta_1, \zeta_2$  sont des fonctions holomorphes de  $\xi, t_i^s, t_i^{1-s}$  tendant vers les valeurs correspondantes des prolongements de  $\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2$ .

Cela étant on peut écrire

$$\zeta_1 = A_1 Z_2 + B_1 Z_2, \quad \zeta_2 = A_2 Z_1 + B_2 Z_2,$$

les coefficients  $A_j, B_j$  étant déterminés par les équations

$$\zeta_j = A_j Z_1 + B_j Z_2, \quad \frac{d\zeta_j}{d\xi} = A_j \frac{dZ_1}{d\xi} + B_j \frac{dZ_2}{d\xi}$$

où l'on fait  $\xi = c$ . Comme les dérivées de  $\zeta_j, Z_1, Z_2$  admettent des représentations analogues à celles de  $\zeta_j, Z_1, Z_2$ , les coefficients  $A_j, B_j$  seront des fonctions de  $t_i^s, t_i^{1-s}$  holomorphes pour  $t_i = 0$ , et prenant en

(1) La matrice des coefficients du système ( $\bar{T}$ ) qu'on déduit de (T) par la substitu-

tion  $z_1 = \begin{pmatrix} t_i \\ t_i^0 \end{pmatrix}^s z_2$  et le passage à la limite  $t_i \rightarrow 0$  s'écrit  $\sum_{h=i}^{n+1} \frac{\bar{A}^h - \frac{1}{2}}{\xi - \nu_h}$  où  $\bar{A}^h = \lim_{t_i=0} c^{-1} A^h c$ , et  $c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$ , avec  $g = \begin{pmatrix} t_i \\ t_i^0 \end{pmatrix}^s$ .

ce point les valeurs  $\bar{A}_j, \bar{B}_j$  fournies par les équations

$$\bar{\zeta}_j = \bar{A}_j \bar{Z}_1 + \bar{B}_j \bar{Z}_2, \quad \frac{d\bar{\zeta}_j}{d\bar{\zeta}} = \bar{A}_j \frac{d\bar{Z}_1}{d\bar{\zeta}} + \bar{B}_j \frac{d\bar{Z}_2}{d\bar{\zeta}}.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \zeta_j = & A_j \left(\frac{x}{l_i}\right)^s \left[ f_{11}(x; t_i^s, t_i^{1-s}) + f_{12}\left(\frac{l_i}{x}; t_i^s, t_i^{1-s}\right) \right] \\ & + B_j \left(\frac{x}{l_i}\right)^{-s} \left[ f_{21}(x; t_i^s, t_i^{1-s}) + f_{22}\left(\frac{l_i}{x}; t_i^s, t_i^{1-s}\right) \right], \end{aligned}$$

la représentation étant valable quel que soit  $x$ , positif et  $< t_{n+2} = 1$  (1).

Soient alors  $y_j^1 (j = 1, 2)$  les intégrales de (E<sup>1</sup>) canoniques en  $x = 0$  qui correspondent à  $\zeta_j$ , en vertu de (19) et (47); on aura

$$y_j^1 = \Lambda \zeta_j \quad (j = 1, 2)$$

avec

$$\Lambda = \prod_{g=1}^{n+2} (x - t_g)^{\frac{m_g}{2}}$$

et

$$(49) \quad \int_0^{t_{n+2}} (y_j^1)^2 dx = \int_0^{t_{n+2}} \Lambda^2 \zeta_j^2 dx = t_i^s \bar{\mathcal{F}}_j(t_i^s, t_i^{1-s})$$

avec

$$(50) \quad \bar{\mathcal{F}}_j(0, 0) = \bar{\Lambda}_j^2 \int_0^{t_{n+2}} x^{s+M} \prod_{k=1}^* (x - t_k)^{m_k} f_{11}^2(x; 0, 0) dx$$

$$\left( M = \sum_{h=1}^{n+1} m_h \geq 0 \right),$$

et  $\bar{\mathcal{F}}_j(t_i^s, t_i^{1-s})$  étant holomorphe en  $t_i^s, t_i^{1-s}$  pour  $|t_i|$  assez petit.

On trouverait enfin

$$(51_1) \quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} (y_1^1)^2 dx = t_i^{1+M} \int_0^{t_n} \xi^{2\alpha_{n+1}} \prod_{h=i}^{n+1} (\xi - t_h)^{m_h}$$

$$\times \prod_{k=1}^* (t_i \xi - t_k)^{m_k} \varphi_1^2(\xi; t_i^s, t_i^{1-s}) d\xi$$

$$= t_i^{1+M} \mathcal{R}_1(t_i^s, t_i^{1-s})$$

(1) On peut toujours supposer  $t_{i-1} < 1$  (sinon, on raisonnerait sur  $t_{i-1}, t_i, t_{i+1}$  comme actuellement sur  $t_{n+2}, t_{n+1}, t_n$ ).

et

$$(51_2) \quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} (y_1^2)^2 dx = t_i^{1-M} \mathcal{C}_2(t_i^s, t_i^{1-s}),$$

$\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  étant holomorphes en  $t_i^s, t_i^{1-s}$ , avec, par exemple,

$$\mathcal{C}_1(0, 0) = \int_0^{v_n} \xi^{2\alpha_{n+1}} \Lambda_1^2 \varphi_1^2(\xi; 0, 0) d\xi \equiv \int_0^{v_n} \Lambda_1^2 \bar{\xi}_1^2 d\xi$$

avec

$$\Lambda_1^2 = \prod_{l=h}^{n+1} (\xi - c_h)^{m_h} \prod (-t_k)^{m_k}.$$

Et maintenant, si l'on revient aux notations du n° 12 (p. 73), il sera facile d'exprimer en fonction de  $t_i$  le rapport des longueurs des côtés  $z \equiv A_n A_{n+1} : A_{n+1} A_{n+2}$ . En effet, d'après (3), on a

$$(52) \quad z = \frac{\int_{t_n}^{t_{n+1}} (|G^2| + |H^2|) dx}{\int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} (|G^2| + |H^2|) dx} = \frac{\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( |g^2| + \frac{b^2}{a^2} |h^2| \right) dx}{\int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} \left( |g^2| + \frac{b^2}{a^2} |h^2| \right) dx},$$

quelle que soit d'ailleurs la nature du côté, rectiligne (problème de Plateau), ou curviligne (problème de Schwarz). Or, si l'on fait  $k = n + 1$  dans la définition de  $g(x), h(x), g_1(x), h_1(x)$  (n° 12), on aura

$$(53) \quad g(x) = \Lambda t_i^{2\alpha} \zeta_1(x), \quad h(x) = \Lambda t_i^{\beta} \zeta_2(x).$$

Reste à évaluer  $b^2 : a^2$ , qui est égal, d'après (17) et (18), à

$$-\frac{AB}{CD} = -\frac{(gh_1)(g_1g)}{(hh_1)(g_1h)},$$

or on peut écrire

$$g_1(x) = \Lambda t_i^{2\alpha} \zeta_3(x), \quad h_1(x) = \Lambda t_i^{\beta} \zeta_4(x)$$

avec

$$\zeta_3(x) = (\xi - c_n)^{\alpha_n} \varphi_3(\xi - c_n; t_i^s, t_i^{1-s}),$$

$$\zeta_4(x) = (\xi - c_n)^{\beta_n} \varphi_4(\xi - c_n; t_i^s, t_i^{1-s}),$$

$\varphi_3$  et  $\varphi_4$  étant holomorphes en  $\xi - c_n$ , sur le segment  $(0, c_n)$  et en  $t_i^s, t_i^{1-s}$ . D'après la définition de  $(\Phi, \Psi)$  on trouve aussitôt

$$(54) \quad \frac{b^2}{a^2} = -t_i^{2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}} \frac{(\zeta_1 \zeta_3)(\zeta_2 \zeta_4)}{(\zeta_2 \zeta_1)(\zeta_3 \zeta_2)} = t_i^{2(\alpha_{n+1} - \beta_{n+1})} \omega(t_i^s, t_i^{1-s}),$$

$\omega$  étant en général une fonction holomorphe de  $t_i^s, t_i^{1-s}$  (indépendante de  $\xi$ ). Admettons provisoirement ce dernier point; on peut écrire alors, d'après (52), (53) et (54) [ $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  étant des séries en  $x, (-t_i)^s, (-t_i)^{1-s}$  à coefficients réels],

$$(55) \quad z = \frac{\int_{t_n}^{t_{n+1}} |\Lambda^2| (\zeta_1^2 + \omega \zeta_2^2) dx}{\int_{t_{n+1}}^{t_{n+2}} |\Lambda^2| (\zeta_1^2 + \omega \zeta_2^2) dx},$$

soit, d'après (49) et (51),

$$(56) \quad z = t_i^{1+s+m} \frac{\partial \mathcal{C}_1(t_i^s, t_i^{1-s}) + \omega(t_i^s, t_i^{1-s}) \partial \mathcal{C}_2(t_i^s, t_i^{1-s})}{\bar{\mathcal{F}}_1(t_i^s, t_i^{1-s}) + \omega(t_i^s, t_i^{1-s}) \bar{\mathcal{F}}_2(t_i^s, t_i^{1-s})};$$

or comme  $\bar{A}_1$  et  $\bar{A}_2$  ne peuvent être nuls à la fois,  $\bar{\mathcal{F}}_1(0, 0)$  et  $\bar{\mathcal{F}}_2(0, 0)$  ne sont pas simultanément nuls; et puisque  $\omega(0, 0) \neq 0$ , on a obtenu ainsi la formule fondamentale

$$(57) \quad \frac{\text{longueur } A_n A_{n+1}}{\text{longueur } A_{n+1} A_{n+2}} = t_i^{1+s+m} f(t_i^s, t_i^{1-s}),$$

$f$  étant, pour  $|t_i|$  assez petit, une fonction holomorphe de  $t_i^s$  et  $t_i^{1-s}$ .

24. *Cas où la ligne brisée  $A_{i-1} A_i \dots A_{n+1} A_{n+2}$  est plane.* — Il nous reste à examiner si  $\omega$  peut cesser d'être holomorphe et non nul pour  $t_i = 0$ ; or je dis qu'une telle éventualité ne saurait se produire que si la brisée  $A_{i-1} \dots A_{n+2}$  est plane.

En effet, observons d'abord que l'équation ( $\bar{F}$ ) (p. 98) définit une surface minima ( $\bar{S}$ ) passant par une brisée  $\bar{A}_i \dots \bar{A}_n$ , et dont les côtés sont parallèles à ceux de  $A_i \dots A_n$  et par deux demi-droites  $\Delta', \Delta''$  issues de  $\bar{A}_i, \bar{A}_{n+1}$  parallèlement à  $A_i A_{i-1}$  et à  $A_{n+1} A_{n+2}$ ; on construira  $\bar{S}$  en prenant actuellement  $\bar{G} = z \bar{\Lambda} \bar{\zeta}_1, \bar{H} = \beta \bar{\Lambda} \bar{\zeta}_2$ , avec  $\bar{\Lambda} = \prod_{k=i}^{n+1} (\xi - \sigma_k)^{\frac{m_k}{2}}$ , et le rapport  $\beta : z$  étant déterminé comme au n° 12; si le côté  $\bar{A}_{n-1} \bar{A}_n$  n'est pas parallèle au plan  $\bar{A}_n \bar{A}_{n+1} \bar{A}_{n+2}$  la formule (17) fournira pour  $\beta^2 : z^2$  une valeur bien déterminée, finie et non nulle, soit

$$(\bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_4)(\bar{\zeta}_3 \bar{\zeta}_1) : (\bar{\zeta}_2 \bar{\zeta}_4)(\bar{\zeta}_3 \bar{\zeta}_2).$$

Or d'après les propriétés établies au sujet des équations (F) et ( $\bar{F}$ ), et de leurs intégrales  $\zeta$  et  $\bar{\zeta}$ , le rapport  $\beta^2 : \alpha^2$  constitue nécessairement la limite de  $\omega(t_i', t_i'^{-s})$  pour  $t_i = 0$ .

Supposons maintenant que  $\bar{A}_{n-1}\bar{A}_n$  soit parallèle au plan  $\bar{A}_n\bar{A}_{n+1}\bar{A}_{n+2}$ ; s'il existe un indice  $h(\geq i)$  tel que les sommets  $A_{h-1}A_h \dots A_{h+1}A_{h+2}$  forment une ligne brisée gauche, le fait n'étant plus exact pour la brisée  $A_h \dots A_{h+2}$ , on remplacera  $\bar{\zeta}_3$  et  $\bar{\zeta}_4$  par les intégrales canoniques  $\bar{\zeta}'$ ,  $\bar{\zeta}''$  relatives au circuit enveloppant  $c_n, c_{n-1}, \dots, c_h$ ; en vertu de la remarque qui termine le n° 12,  $\beta : \alpha$  pourra être déterminé à l'aide de  $\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \bar{\zeta}', \bar{\zeta}''$  et aura une valeur finie et non nulle : la conclusion précédente subsiste donc.

Il nous faut envisager maintenant le cas où les sommets  $A_{i-1}, \dots, A_{n+2}$  sont dans un même plan : s'il en est ainsi, on ne peut plus affirmer que  $\omega$  est holomorphe et non nul pour  $t_i = 0$ ; mais, d'après (56), la formule (57), ne saurait cesser d'être exacte que si l'on avait en même temps  $\mathcal{F}_1(0, 0) = 0 = \omega(0, 0)$  ou  $\mathcal{F}_2(0, 0) = 0 = \omega^{-1}(0, 0)$ ; en vertu de (50) on aurait alors  $\bar{A}_1 = 0$  ou  $\bar{A}_2 = 0$ ; il nous suffira évidemment d'examiner la première hypothèse.

Puisque la ligne brisée  $\bar{A}_i \dots \bar{A}_{n+1}$  et les deux demi-droites  $\Delta', \Delta''$  sont dans un même plan, l'intégrale  $\bar{\zeta}_1$  qui suffit à définir la surface minima plane  $\bar{S}$  se reproduit à des constantes multiplicatives près (n° 12) quand  $\xi$  décrit des circuits fermés successifs autour des points  $c_{n+1} = 0, (c_{n+1}, c_n), \dots, (c_{n+1}, \dots, c_{i+2}, c_i)$  : c'est une intégrale de ( $\bar{F}$ ) à dérivée logarithmique rationnelle (1). Pour que l'on ait  $\bar{A}_1 = 0$ , il faut et il suffit qu'en  $\xi = \infty$ ,  $\bar{\zeta}_1$  appartienne à l'exposant  $s : 2$ ; or il est aisé de se rendre compte que cette circonstance peut se produire effectivement.

En effet, on peut écrire

$$\bar{\zeta}_1 = C \prod_{h=i}^{n+1} (\xi - c_h)^{\gamma_h - \frac{m_h}{2}} P(\xi),$$

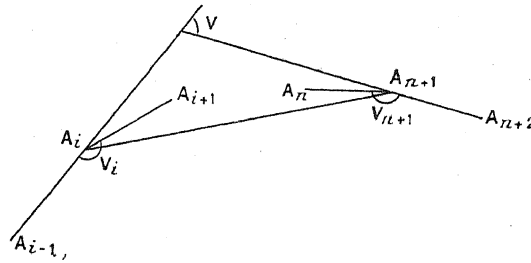
(1) Ce cas particulier a été étudié précisément par G. Darboux (*loc. cit.*), dans l'hypothèse où les sommets du contour peuvent être infiniment éloignés (surfaces minima passant par des droites parallèles à un plan fixe).

C étant une constante et P un polynome de degré  $p$ ; de plus, l'exposant  $\gamma_h$  est égal à l'une des quantités  $\alpha_h$  ou  $\beta_h$  du n° 8; on a d'ailleurs

$$\alpha_h = \frac{m_h}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{V_h}{\pi} - 1 - m_h \right), \quad \beta_h = \frac{m_h}{2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{V_h}{\pi} - 1 - m_h \right).$$

Mais d'après la définition de  $V_h$  (n° 8) le segment plan  $\bar{S}$  ne peut

Fig. 1.



être représenté conformément sur le demi-plan  $\mathcal{R}(x\sqrt{-1}) < 0$  ou  $\mathcal{R}(\xi\sqrt{-1}) > 0$  que si l'on a constamment  $\gamma_h = \alpha_h$  ou  $\gamma_h = \beta_h$ , soit

$$\gamma_h = \frac{m_h}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{V_h}{\pi} - 1 - m_h \right) \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

et en  $\xi = \infty$ ,  $\zeta_1$  appartiendra dès lors à l'exposant

$$\varphi = -\frac{\varepsilon}{2} \left[ \sum_{h=i}^{n+1} \left( \frac{V_h}{\pi} - 1 \right) - M \right] - p.$$

Or

$$\sum_{h=i+1}^n V_h + V_i + V_{n+1} - \varphi = (n - i)\pi,$$

$\varphi$  désignant la somme des angles  $\widehat{A_{i-1}A_iA_{n+1}}$  et  $\widehat{A_iA_{n+1}A_{n+2}}$ , c'est-à-dire  $2\pi - V$ ; il vient donc

$$\sum_{h=i}^{n+1} V_h = (n - i + 2)\pi - V,$$



et par suite, d'après (48),

$$\varrho = \frac{\varepsilon}{2} \left( \frac{V}{\pi} + M \right) - p = \frac{\varepsilon}{2} (s + M) - p,$$

la réalisation de la circonstance envisagée équivaut donc à l'existence des relations  $\varepsilon = +1$ ,  $M = 0$  (d'où  $m_h = 0$  et  $\Lambda \equiv 1$ ),  $p = 0$ .

Or, dans ce cas, pour  $t_i$  infiniment petit,  $\zeta_i$  tend vers l'intégrale

$$\bar{\zeta}_i = \zeta_i^{\alpha_{n+1}} \prod_{h=i}^n \left( 1 - \frac{\zeta_i}{\zeta_h} \right)^{\alpha_h};$$

d'après (51), le numérateur de (55) est au moins de l'ordre de  $t_i$ ; le dénominateur est la somme de deux termes infiniment petits dont le premier

$$t_i \int_0^{t_{n+1}:t_i} \zeta_i^2(\zeta) d\zeta$$

est de l'ordre de  $t_i^s$  d'après ce qui précède. Ce dénominateur est donc de l'ordre de  $t_i^{s'}$  ( $0 \leq s' \leq s$ ), et, par suite, le rapport (55) tend vers zéro comme  $t_i^{1-s}$  au moins, résultat qui suffit à assurer la validité des développements ultérieurs dans le cas d'un polygone dont les côtés ont l'orientation exceptionnelle signalée plus haut.

### TROISIÈME PARTIE.

#### RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE PLATEAU-SCHWARZ.

##### 25. Résolution du problème de Plateau pour le quadrilatère gauche.

— Abordons maintenant la résolution du problème de Plateau, et procédant par récurrence, commençons par le cas du quadrilatère ( $n = 1$ ).

Les inconnues à déterminer sont au nombre de deux : ce sont le point singulier  $t_1 \equiv t(t_2, t_3, t_4$  ayant été placés en  $0, 1, \infty$ ) et la constante  $a$  du n° 12. Or actuellement,  $(E^1)$  ne doit posséder aucun point

apparemment singulier  $x = \lambda$  (n° 9); mais le système différentiel  $(G_n)$  attaché au contour se réduit pour  $n = 1$  à l'équation (VI) de M. Painlevé, dont l'intégrale générale est précisément  $\lambda(t)$ . Après avoir choisi (n° 11) l'intégrale  $\lambda(t)$  de (VI) qui résout le problème de Riemann pour le groupe de monodromie  $\mathcal{G}$  défini par les directions des côtés du quadrilatère, il faudra faire varier  $t$  par valeurs réelles jusqu'à ce que le point apparemment singulier  $x = \lambda(t)$  de  $(E^1)$  vienne coïncider avec l'un des points singuliers  $0, 1$  ou  $\infty$  de  $(E^1)$ . Nous allons montrer que le problème est toujours possible.

En effet, on peut toujours supposer que la représentation du segment  $S$  de surface minima sur le demi-plan supérieur a été effectuée de telle sorte que les images des quatre sommets du contour sur l'axe réel se succèdent par exemple dans l'ordre  $0, t, 1, \infty$ ; il nous faut étudier les intersections avec les droites  $\lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = t, \lambda = \infty$  de l'arc réel  $0 < t < 1$  de la courbe intégrale qui convient au problème. Or, d'après [R, n° 48], ou d'après notre Mémoire sur l'équation (VI) <sup>(1)</sup>, si  $t$  (ou  $1-t$ ) est infiniment petit,  $\lambda$  (ou  $1-\lambda$ ) est de l'ordre de  $t^s$  [ou  $(1-t)^s$ ], avec  $0 < s < 1$ : l'arc de courbe représentative admet donc aux points  $t = 0 = \lambda, t = 1 = \lambda$  deux tangentes verticales. Écartons alors le cas où  $\lambda(t)$  posséderait un pôle au moins dans l'intervalle  $(0, 1)$ : l'équation  $\lambda = \infty$  aurait alors une racine au moins; puisque l'intégrale  $\lambda(t)$  est dépourvue de points non algébriques mobiles, elle est continue dans l'intervalle  $(0, 1)$  et d'après l'orientation des tangentes aux points  $t = 0, t = 1$  l'arc  $0 < t < 1$  de la courbe représentative devra rencontrer en un point au moins l'une des droites  $\lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = t$  (fig. 2, p. 106).

En tout cas, l'ensemble des équations  $\lambda = 0, \lambda = 1, \lambda = t, \lambda = \infty$  ne peut avoir qu'un nombre fini  $\mathcal{N}$  de racines dans l'intervalle ouvert  $(0, 1)$ : sinon elles auraient un point d'accumulation  $\tau$ , ce qui est absurde; car  $\tau$  ne peut être ni un point intérieur (en vertu de la fixité des points non algébriques), ni une extrémité de l'intervalle (en vertu de la représentation de l'intégrale en ces points).

Ainsi,  $(E^1)$  devra coïncider avec l'une quelconque des  $\mathcal{N}$  équations formées au moyen des  $\mathcal{N}$  solutions précédentes;  $(E^1)$  ayant été ainsi

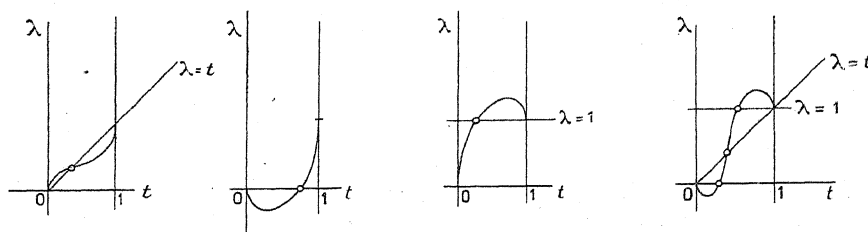
<sup>(1)</sup> *Ann. sc. Ec. Norm.*, 3<sup>e</sup> série, t. 34, 1917, p. 328, n° 52.

construite, le rapport  $b : a$  sera déterminé (n° 12), et pour définir S il ne restera plus qu'à calculer  $a$ , par la formule (1)

$$a^2 \int_0^1 \left[ g^2(x) + \frac{b^2}{a^2} h^2(x) \right] dx = \text{long. } A_2 A_3.$$

Réciproquement, on voit aussitôt que les intégrales  $G = ag$ ,  $H = bh$

Fig. 2.



qu'on vient de calculer définissent bien une surface S répondant à la question.

Présentons enfin une remarque relative au cas où le nombre  $\mathcal{N}$  des racines des équations  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\lambda = t$ ,  $\lambda = \infty$  comprises entre 0 et 1 est supérieur à 1. Faisons tendre  $t$  de l'une  $t'$  de ces racines à une autre racine  $t''$  et supposons, par exemple, qu'on ait  $\lambda(t') = 0$ ,  $\lambda(t'') = 1$ . Supposant  $t_1 \equiv t$ ,  $t_2 \equiv 0$ ,  $t_3 \equiv 1$ ,  $t_4 \equiv \infty$ , on maintiendra fixes les sommets  $A_1$  et  $A_4$  : le quadrilatère  $A_1 A_2 A_3 A_4$  se déformera en perdant (2) l'un des sommets  $A_2$  ou  $A_3$  ; le segment S s'étendra à l'infini tout en gardant trois sommets à distance finie : deux fixes et le troisième mobile sur une droite fixe. Quand  $t$  tendra vers  $t''$  le quadrilatère reviendra à sa position primitive, mais le segment primitif de sur-

(1) Ainsi, actuellement, il n'y a qu'une seule longueur qui intervienne dans les équations de condition : c'était bien évident *a priori*, car tous les quadrilatères gauches dont les sommets sont à distance finie, et dont les côtés ont des directions données sont semblables entre eux.

(2) Car on a dans (14) (pour  $\lambda \neq 0, 1, t$  ou  $\infty$ ) :  $N_2 = 0$ ,  $N = 1$ ,  $n = 1$  ; l'un des entiers  $m_k$  doit donc être égal à  $-1$  ; ce ne peut être ni  $m_4$ , ni  $m_1$  (puisque  $A_4$  et  $A_1$  sont à distance finie). Suivant qu'on prendra  $m_2$  ou  $m_3 = -1$ , on obtiendra deux équations linéaires — donc deux séries de surfaces minima — distinctes.

face minima aura été remplacé par un segment différent : ainsi, lorsque le quadrilatère gauche sert de contour à  $\partial\mathcal{C}$  segments distincts de surfaces minima, on passe de l'un à l'autre de ces segments par quatre suites distinctes de déformations où le quadrilatère cesse d'être fermé, le segment qu'il limite s'étendant à l'infini.

Dans le cas d'un contour polygonal quelconque ( $n > 1$ ) on procéderait de même pour obtenir un résultat analogue.

26. *Résolution du problème de Plateau pour un polygone possédant un côté arbitrairement petit.* — Le problème de Plateau est ainsi résolu pour un quadrilatère gauche quelconque. Admettons maintenant qu'il ait été traité pour un polygone gauche à  $n + 2$  côtés, et montrons qu'on saura le résoudre pour un polygone  $\mathcal{C}_{n+3}$  présentant un côté de plus.

L'intégrale  $(z_1, \dots, z_n)$  du système  $(g_n, G_n)$  attaché à  $\mathcal{C}_{n+3}$  ayant été choisie comme il a été dit plus haut (n° 11), l'équation linéaire  $(E^1)$  — soit  $(E'_n)$  — attachée à  $\mathcal{C}_{n+3}$  n'est pas encore déterminée : il faut encore calculer les valeurs de  $t_1, \dots, t_n$ . Or, pour construire, à une homothétie près, un polygone  $\mathcal{C}_{n+3}$  dont les côtés ont des directions connues, il faut se donner les rapports mutuels des  $n$  côtés  $A_2A_n, \dots, A_{n+1}A_{n+2}$ ; les trois autres côtés sont alors immédiatement déterminés par leurs directions. Écrivons que ces rapports (qui sont des fonctions de  $t_1, \dots, t_n$ ) ont des valeurs déterminées,  $c_j$ , et exprimons en outre que l'un des points apparemment singuliers coïncide avec l'un des points singuliers <sup>(1)</sup>  $t_n$ , ou encore que  $z_n(t_1, \dots, t_n) = 0$ . Ceci nous fournira  $n$  équations  $(\mathcal{E})$  entre  $t_1, \dots, t_n$ ; il faut montrer qu'elles possèdent une solution au moins.

Pour cela nous commencerons par établir qu'il en est bien ainsi quand l'un des côtés, soit  $A_nA_{n+1}$ , est infiniment petit. Les équations  $(\mathcal{E})$  se divisent alors en deux groupes : l'un est formé des équations

$$(58) \quad \begin{cases} (\mathcal{E}_j) & \overline{A_jA_{j+1}} : \overline{A_{n+1}A_{n+2}} = c_j \quad (j = 2, 3, \dots, n-1), \\ (\mathcal{E}') & z_n = 0; \end{cases}$$

(1) La valeur de  $h$  étant d'ailleurs pas imposée *a priori*; *vide infra*.

l'autre se réduit à l'équation  $(\mathcal{E}_n)$  où  $c_n$  est arbitrairement petit. Or, quand  $t_n$  tend vers  $t_{n+1}$  ( $\equiv 0$ ), on sait par [R] que les  $z_k$  ( $k \neq n, n+1$ ) tendent vers des limites finies, bien déterminées, solutions d'un problème de Riemann pour une équation linéaire  $(\tilde{E}')$  qui aurait comme points singuliers  $t_1, \dots, t_{n-1}, t_{n+1} = 0, t_{n+2} = 1, t_{n+3} = \infty$  et où la constante  $d_{n+1}$  serait remplacée par  $s^2$ ,  $-s$  désignant toujours l'ordre de  $z_n$  pour  $t_n = 0$ ; d'ailleurs  $z_n$  et  $A_{21}''$  étant du même ordre,  $s^*$  coïncide avec l'exposant  $s$  introduit plus haut (n° 19). Or actuellement, les exposants des points singuliers de  $(E')$  sont  $\pm \left(\frac{1}{2} - \frac{V_k}{2\pi}\right)$ ; ceux de l'équation linéaire  $(E_n)$  privée de terme en  $y'$ , qui est envisagée dans [R] (nos 8, 12) sont donnés par la relation

$$\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{d_k}{4};$$

cette équation se déduisant de  $(E')$  par une transformation  $y | \mu y$ , on a

$$d_k = \left(\frac{V_k}{\pi} - 1\right)^2.$$

Mais précisément on a établi que  $s = V : \pi$ ,  $V$  désignant l'angle compris entre 0 et  $\pi$  que forment les vecteurs  $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$  et  $\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}$ ; cet angle est donc bien le supplément de l'angle  $V_{n+1}$  du polygone  $\mathcal{C}_{n+2}$  vers lequel tend  $\mathcal{C}_{n+3}$  lorsque  $t_n$  tend vers  $t_{n+1}$ , et l'équation  $(\tilde{E}')$  se réduit à l'équation  $(E'_{n-1})$  attachée au polygone  $\mathcal{C}_{n+2}$  vers lequel tend  $\mathcal{C}_{n+3}$  lorsque  $t_n$  tend vers  $t_{n+1}$ .

Dès lors, les équations (58) qui ont leurs premiers membres holomorphes en  $t_n^s, t_n^{1-s}$  tendent vers des équations-limites bien déterminées qui résolvent précisément le problème de Plateau pour  $\mathcal{C}_{n+2}$ . Or, par hypothèse, il existe au moins un indice  $h$  pour lequel ces équations-limites admettent une solution (au moins), bien déterminée  $t_1 = t_1^0, \dots, t_{n-1} = t_{n-1}^0$ ; on conservera cet indice pour l'équation  $(\mathcal{E}')$  relative à  $\mathcal{C}_{n+3}$ ; dans le cas où l'on aurait  $h = n+1$ , on prendra pour  $(\mathcal{E}')$  l'une ou l'autre des équations  $z_n = 0$  ou  $z_{n+1} = 0$ , ce qui introduira une bifurcation dans la série des surfaces minima passant par  $\mathcal{C}_{n+3}$ .

Cela étant, les équations à résoudre pour  $t_n$  infiniment petit se pré-



bien déterminée, réelle et holomorphe autour de chaque valeur de  $c_n$  (ou, pour  $c_n = 0$ , holomorphe en  $c_n^{\frac{s}{1+s}}$  et  $c_n^{\frac{1-s}{1+s}}$ ); en vertu du théorème fondamental des nos 23-24, *il est impossible que  $c_n$  tendant vers  $c_n^0$  le plus petit des  $|t_n - t_{n-1}|$  tende vers zéro*: en effet, d'après (57), l'un au moins des rapports  $c_n$  serait infiniment petit.

Ainsi,  $c_n$  en tendant vers  $c_n^0$ , il existe un nombre positif  $\zeta$  tel que les distances mutuelles des points  $t_1, \dots, t_n$  et leurs distances aux points <sup>(1)</sup>  $t_{n+1} = 0$ ,  $t_{n+2} = 1$ ,  $t_{n+3} = -1$  demeurent supérieures à  $\zeta$ . Le point M  $(t_1, \dots, t_n)$  reste donc intérieur (au sens large) à un domaine (II') (n° 4), intérieur lui-même (au sens strict) à la pyramide (II) définie par les inégalités

$$-1 < t_1 < \dots < t_n < 0.$$

Or, en tout point de (II') les fonctions  $z_k$  ou  $A_{p,q}^k$  ne peuvent présenter au plus qu'une singularité polaire; comme on l'a vu dans la première Partie, le rapport  $b:a$  reste holomorphe et les intégrales  $g(x)$  et  $h(x)$  possèdent au plus (quel que soit  $x \neq t_n$ ) une singularité polaire d'ordre 1, en sorte que *les premiers membres des équations ( $\mathcal{E}'$ ) et ( $\mathcal{E}_j$ ) ( $j = 2, \dots, n$ ) sont holomorphes en tout point M de (II')*.

Cela étant, désignons momentanément par

$$f_j(t_1, \dots, t_n) = c_j \quad (j = 1, \dots, n),$$

les équations ( $\mathcal{E}_j$ ) et attribuons aux  $t_k$  un système de valeurs quelconques,  $t_k^0$  appartenant à (II') et annulant  $z_n$ . Les  $f_j$  prendront un système de valeurs  $u_j^0$  et à chaque point  $M^0(t_1^0, \dots, t_n^0)$  de (II') annulant  $z_n$  on pourra faire correspondre un nombre positif  $\varepsilon$  tel que les différences  $t_k - t_k^0$  soient des fonctions holomorphes des  $u_j - u_j^0$  lorsque les  $u_j$  vérifieront les conditions  $|u_j - u_j^0| < \varepsilon$ : l'assertion précédente ne pourrait être en défaut que si le déterminant fonctionnel  $\omega$  des  $f_j$  par rapport aux  $t_k$  s'annulait en  $M^0$ , mais nous verrons tout à l'heure qu'une telle éventualité est inadmissible.

Ceci posé, d'après le théorème de Borel-Lebesgue les nombres  $\varepsilon(M)$  ont dans le domaine fermé (II';  $z_n = 0$ ) un minimum essentiellement positif  $\varepsilon_0$ ; il suffit de prendre  $u_1^0 = c_1, \dots, u_{n-1}^0 = c_{n-1}$  et  $|c_n - c_n^0| < \varepsilon_0$

(1) Il est plus commode actuellement de prendre ici  $t_{n+3} = -1$  et non pas  $t_{n+3} = \infty$ .

pour être sûr que,  $c_n$  tendant vers  $c_n^0$ , le point  $(t_1, \dots, t_n)$  tend vers une position limite, réelle et bien déterminée, résolvant le problème de Plateau pour  $c_n = c_n^0$ ; dans le voisinage de  $c_n^0$ ,  $t_1, \dots, t_n$  sont des fonctions holomorphes réelles de  $c_n - c_n^0$ : ainsi le point d'arrêt  $c_n^0$  ne saurait exister et le problème de Plateau est résoluble pour  $c_n = C$ .

28. *Exclusion des singularités algébriques.* — Toutefois, la validité de la démonstration précédente est subordonnée à une condition fondamentale :  $\mathcal{D}$  ne doit s'annuler en aucun point du domaine ( $\mathbb{H}'$ ;  $z_n = 0$ ). Tant que ce fait n'aura pas été établi, on peut seulement affirmer qu'en  $c_n^0$  la solution  $(t_1, \dots, t_n)$  est une fonction *holomorphe ou algébroïde* <sup>(1)</sup> de  $c_n - c_n^0$ , de sorte qu'*a priori*, nous ne sommes pas sûrs qu'au delà de  $c_n^0$  le point  $(t_1, \dots, t_n)$  reste réel. Il est donc essentiel d'exclure l'hypothèse précédente <sup>(2)</sup>.

Or, considérons les surfaces minima passant par les côtés fixes  $A_2 A_3, \dots, A_{n-1} A_n$  de  $\mathcal{C}_{n+3}$  et par les côtés de directions données mais de longueurs variables (sauf le second) :  $A_n A_{n+1}, A_{n+1} A_{n+2}, A_{n+2} A_{n+3}, A_{n+3} A_1, A_1 A_2$ . Ces surfaces ne dépendent que d'un paramètre variable; montrer que  $\mathcal{D}(c_n^0) \neq 0$  revient à établir qu'en  $c_n^0$  la caractéristique de la surface ne peut coïncider avec  $A_{n+1} A_{n+2} A_{n+3} A_1$ . Or, s'il en était ainsi, on pourrait construire pour  $c_n^0 - c_n$  infiniment petit positif deux surfaces minima  $S_1, S_2$  infiniment voisines et passant toutes deux par le même contour  $\mathcal{C}_{n+3}(c_n)$ , infiniment voisin de  $\mathcal{C}_{n+3}(c_n^0)$ . A chaque point  $M_1$  de  $S_1$  faisons correspondre le point  $M_2$  infiniment voisin, appartenant à  $S_2$  et tel que le vecteur  $M_2 - M_1$  soit normal à  $S_1$ ; appelons  $\varepsilon \varphi$  la mesure de ce vecteur,  $\varphi$  étant un scalaire nul sur  $\mathcal{C}_{n+3}$ , mais dont la valeur absolue présentera sur  $S_1$  un maximum non infiniment petit ( $+1$  par exemple).  $S_1$  étant une surface minima, la courbure moyenne

(1) Car, dans la définition de  $\varepsilon$ , on peut seulement affirmer que les  $t_k - t_k^0$  sont holomorphes ou algébroïdes en  $u_j - u_j^0$ , etc.

(2) Cette hypothèse n'est autre que celle d'une variété de sûreté, analogue à la courbe de sûreté du problème balistique : la vitesse initiale étant donnée, les paraboles de tir issues de  $O$  ont une enveloppe qu'elles touchent au foyer conjugué  $O_1$  de  $O$ ;  $M$  étant voisin de  $O_1$ , il passe par  $M$ , 2,1 ou 0 trajectoire suivant la position de  $M$  par rapport à la courbe de sûreté.



de  $S_2$  aura pour valeur (aux termes en  $\varepsilon^2$  près)

$$\frac{\varepsilon}{2}(\Delta\varphi - 2K\varphi).$$

$\Delta\varphi$  étant le paramètre différentiel du deuxième ordre de  $S_1$  (construit pour la première forme différentielle quadratique) et  $K$  la courbure totale de  $S_1$ . Mais  $S_2$  étant minima, on aura  $\Delta\varphi - 2K\varphi = 0$ , ou

$$(60) \quad \Delta^*\varphi + 2\rho = 0,$$

$\Delta^*\varphi$  étant le paramètre analogue, mais construit à partir du  $ds^2$  de la sphère de rayon 1 sur laquelle on a représenté  $S_1$ . Ainsi donc, pour que  $\mathcal{O}(c_n^0) = 0$ , il faut que l'équation aux dérivées partielles (60) admette une solution  $\varphi(\tau, \tau_0)$  ( $\tau$  et  $\tau_0$  variables conjuguées) s'annulant sur l'image sphérique de  $\mathcal{C}_{n+3}(c_n^0)$ (<sup>1</sup>). Or si l'on pose  $\tau = u + v\sqrt{-1}$ ,  $u$  et  $v$  étant réels, l'équation (60) prend la forme

$$(61) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{8\rho}{(u^2 + v^2 + 1)^2} = 0,$$

*complètement indépendante de  $c_n$* ; tout revient à rechercher si, sur la sphère  $\Sigma(u, v)$ , (61) possède une solution non identiquement nulle,  $\varphi$ , s'annulant sur l'image sphérique de  $\mathcal{C}_{n+3}(c_n^0)$ . Or, quand  $c_n$  varie, les polygones  $\mathcal{C}_{n+3}(c_n)$  ont la même image sphérique  $\Gamma$ : car  $\Gamma$  est formée d'arcs de grands cercles ayant leurs plans orthogonaux aux côtés correspondants de  $\mathcal{C}_{n+3}$ ; *a priori*, ces arcs ne sont déterminés qu'à leurs compléments près à la circonférence, et à des multiples près de  $2\pi$ ; mais le sens et les multiples de  $2\pi$  ne peuvent varier par continuité;  $\Gamma$  est donc invariable. Mais alors, si pour  $c_n = c_n^0$  on pouvait construire une solution de  $\Delta\varphi - 2K\varphi = 0$ , nulle sur  $\mathcal{C}_{n+3}(c_n^0)$ , et non identiquement nulle sur le segment de surface minima passant par  $\mathcal{C}_{n+3}(c_n^0)$ , on le pourrait encore pour  $0 < c_n < c_n^0$ , ce qui est absurde.

Il est donc établi que  $\mathcal{O}(c_n)$  ne peut s'annuler, et le problème de Plateau est ainsi résolu pour un polygone gauche quelconque.

---

(1) Il est d'ailleurs bien connu que l'équation de Schwarz (60) joue dans le problème de Plateau le même rôle que l'équation de Jacobi dans les problèmes à une dimension du Calcul des variations.

29. *Extension des résultats précédents au problème de Schwarz et au problème mixte.* — Indiquons maintenant les modifications qu'il faut faire subir aux résultats précédents dans le cas d'un contour de Schwarz ou d'un contour mixte. Le seul point nouveau réside dans la formation des équations transcendantes qui vont remplacer les équations (E) du n° 26.

Dans le cas d'un contour de Schwarz, prenons par exemple pour axe OX l'intersection de deux plans  $\Pi_j$  consécutifs, soient  $\Pi_{n+3}$  et  $\Pi_1$ ; le sommet  $A_1$  ( $x = t_1$ ) devra être situé sur cet axe. Soit  $X_0$  son abscisse; d'une manière générale, l'abscisse du point de la surface correspondant au point analytique  $x$  sera

$$X = X_0 + \alpha \sqrt{-1} \int_{t_1}^x (G^2 - H^2) dx.$$

Exprimons alors que le sommet  $A_i$  ( $i = 2, \dots, n+2$ ) appartient au plan  $\Pi_i$  d'équation  $A_i X + B_i Y + C_i Z + D_i = 0$ ; nous obtiendrons la relation

$$(62)_i \quad \alpha^2 \alpha \left[ \int_{t_1}^{t_i} \varpi_i \left( g, \frac{b}{a} h \right) dx \right] + D_i + A_i X_0 = 0$$

avec

$$\varpi_i(G, H) = A_i \sqrt{-1} (G^2 - H^2) + B_i (G^2 + H^2) + 2 C_i \sqrt{-1} GH,$$

et  $a, b$  ayant la même signification qu'au n° 12. D'ailleurs, il n'y aura pas lieu d'écrire l'équation  $(62)_{n+3}$  correspondant au sommet  $A_{n+3}$ : car, une fois qu'on aura exprimé que le groupe de l'équation (E) coïncide avec celui des substitutions linéaires définies par les directions de plans  $\Pi_j$ , le sommet  $A_{n+3}$  appartiendra nécessairement aux plans de directions données passant par  $A_{n+2}$  et par  $A_1$ . Or, si l'on élimine  $X_0$  et  $\alpha^2$  entre les équations  $(62)_i$ , on obtient  $n-1$  équations, qui, prises <sup>(1)</sup> avec l'une des équations  $z_k = 0$ , forment un système, entièrement analogue au système (E) du n° 26, et dont les coefficients jouissent par rapport à  $t_1, \dots, t_n$  de propriétés analytiques identiques.

Comme pour le problème de Plateau, on montrera que les équations

(1) Comme pour le problème de Plateau, on doit avoir  $N = n-1$  (n° 9), condition qui est encore exprimée par une équation  $z_k = 0$ .

sont résolubles en  $t_1, \dots, t_n$ ; ces inconnues étant calculées,  $a^2$  et  $X_0$  seront déterminés linéairement.

Supposons maintenant que le contour donné soit du type mixte; il sera formé par une succession de  $p$  ( $\geq 1$ ) chaînons, le chaînon de rang  $i$  comprenant  $n_i$  segments rectilignes consécutifs suivis de  $\nu_i$  plans II consécutifs. Le contour contiendra ainsi  $2p$  sommets de deuxième espèce (n° 8), et l'on aura (n° 9)

$$n = \sum_{i=1}^p n_i + \sum_{i=1}^p \nu_i - 3,$$

$$N = \sum_{i=1}^p n_i + \sum_{i=1}^p \nu_i + p - 4,$$

en prenant pour  $N$  sa valeur maximum, ce qui est l'hypothèse la plus générale (1).

Cela étant, on formera d'abord une équation ( $E^*$ ) (n° 9), à  $N = n + p - 1$  points apparemment singuliers; cette équation se déduit de ( $E'$ ) par la transformation rationnelle du n° 11 (p. 72); elle est d'ailleurs complètement déterminée par la donnée des  $p - 1$  nouveaux points apparemment singuliers  $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+p-1}$  (réels) et par les valeurs des entiers  $m_k$  liés par (14).

La résolution du problème exige donc la détermination de  $n + p$  inconnues : les points  $t_1, \dots, t_n$ , les  $p - 1$  points  $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+p-1}$  et la constante  $a$  figurant en facteur dans  $G$ . Montrons comment on peut déterminer les quantités précédentes.

Supposons que le chaînon de rang  $i$  soit formé des  $n_i = f$  segments rectilignes  $A_{\rho} A_{\rho+1}, \dots, A_{\rho+f-1} A_{\rho+f}$  et de  $\nu_i = q$  plans, les sommets correspondants du contour étant  $A_{\rho+f}, A_{\rho+f+1}, \dots, A_{\rho+f+q}$ . On écrira que les  $f$  premiers segments ont des longueurs données, que les points  $x = t_{\rho+f+j}$  ( $j = 1, \dots, q - 1$ ) sont sur des plans donnés  $\Pi_{ij}$ , et que le point  $x = t_{\rho+f+q}$  est un point donné du dernier plan; ceci donnera des

---

(1) L'hypothèse contraire revient à adjoindre au système d'équations que nous obtiendrons des équations surnuméraires  $z_k = 0$  qui en général ne pourront être vérifiées.

équations de la forme

$$(63) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 \int_{t_{q+k-1}}^{t_{q+k}} \left( |g^2| + \frac{b^2}{a^2} |h^2| \right) dx = t_{ik} \quad (k = 1, \dots, f), \\ a^2 \int_{t_i}^{t_{2+f+i}} \mathfrak{R}_j \left( g, \frac{b}{a} h \right) dx + D_j = 0 \quad (j = 1, \dots, q-1), \\ a^2 \mathfrak{R} \left[ \sqrt{-1} \int_{t_i}^{t_{2+f+q}} \left( g^2 - \frac{b^2}{a^2} h^2 \right) dx \right] = X_{p+f+q}, \\ a^2 \mathfrak{R} \int_{t_i}^{t_{2+f+q}} \left( g^2 + \frac{b^2}{a^2} h^2 \right) dx = Y_{p+f+q}. \end{array} \right.$$

le sommet  $x = t_i$  étant pris à l'origine du trièdre OXYZ et les  $\mathfrak{R}_j$  ayant la même signification que dans (62)<sub>i</sub>; or les équations précédentes sont au nombre de  $f + q + 1$ , alors que le nombre des éléments du chaînon est égal à  $f + q$ : on en déduit que les  $p - 1$  premiers chaî-

nons introduisent  $\sum_{i=1}^{p-1} n_i + \sum_{i=1}^{p-1} \nu_i + p - 1$  équations. Étudions de plus près les équations fournies par le dernier chaînon.

Si le contour comprend un chaînon au moins à  $\nu \geq 2$  plans on pourra toujours supposer que ce chaînon est le dernier, et en procédant comme pour le contour de Schwarz on voit que les deux côtés curvilignes  $A_{n+2}A_{n+3}$ ,  $A_{n+3}A_1$  du dernier chaînon ne fournissent aucune équation nouvelle, alors que pour un autre chaînon ils en auraient introduit trois [des types (63)<sub>2</sub>, (63)<sub>3</sub>, (63)<sub>4</sub>]: le nombre total des équations, pour tout le contour sera donc

$$\sum_{i=1}^p n_i + \sum_{i=1}^p \nu_i + p - 3 = n + p.$$

Supposons au contraire que l'on ait  $\nu_i = 1$  quel que soit  $i$ . Les équations (63)<sub>3</sub> et (63)<sub>4</sub> relatives à l'extrémité  $A_1$  du dernier chaînon se réduisent à une identité; de plus, le groupe de monodromie de ( $E^*$ ) ayant été défini à l'aide des directions des côtés et plans du contour, il est inutile d'écrire que l'avant-dernier côté  $A_{n+2}A_{n+3}$  (qui est rectiligne) possède une longueur donnée; le dernier chaînon introduit donc seulement  $n_p = \nu_p + 1 - 3$  équations, et le nombre

total des équations est encore égal à  $n + p$  : dans tous les cas, il coïncide donc avec le nombre des inconnues. Or, il suffit d'éliminer  $a^2$  entre les équations précédentes pour obtenir un système de relations, entièrement analogues aux équations (E) du n° 26, et qu'on discutera par un procédé analogue; d'ailleurs, actuellement, au lieu d'appliquer la méthode de récurrence à partir d'un quadrilatère mixte (ou non), on partira d'un contour triangulaire mixte; la solution du problème dans ce dernier cas est une application immédiate de la théorie des fonctions hypergéométriques (<sup>1</sup>).

## QUATRIÈME PARTIE.

RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE PLATEAU POUR LES CONTOURS CONTINUS.

30. *Rappel de la méthode de M. Birkhoff pour la solution du problème de Riemann.* — Reprenons (<sup>2</sup>) l'équation (B) du n° 5 et supposons que les éléments  $a_{\mu\nu}(z)$  de la matrice  $A(z)$  (de déterminant non nul sur  $C$ ) soient holomorphes en tout point de  $C$ , sauf peut-être en un nombre fini de points où ils possèdent cependant une suite illimitée de dérivées. Les  $a_{\mu\nu}$  sont donc holomorphes de part et d'autre de  $C$ , dans une région limitée par deux courbes, l'une  $D_1$  intérieure, l'autre  $D_2$  extérieure à  $C$ ,  $D_1$  et  $D_2$  touchant  $C$  aux points singuliers de  $a(z)$ . Nous supposons pour l'instant que dans l'aire  $(D_1, D_2)$  on a

$$(64) \quad |\alpha_{\mu\nu}(z)| < K, \quad |D(z_1, z_2) \alpha_{\mu\nu}| < K,$$

(<sup>1</sup>) Voir G. DARBOUX, *loc. cit.*, p. 519, 573.

(<sup>2</sup>) Dans toute cette quatrième Partie, on a interverti l'ordre des matrices figurant dans les formules de M. Birkhoff : ceci, de manière à harmoniser les notations avec celles qui ont été adoptées déjà dans [R] et dans le Mémoire actuel pour le problème de Riemann; en effet, nous avons écrit un système différentiel linéaire sous la forme  $\frac{dy}{dx} \div YA$ , et non sous la forme  $\frac{dy}{dx} \div -AY$  employé par M. Birkhoff.

en posant d'une manière générale pour une fonction ou une matrice

$$Df \text{ ou } D(u, v)f \equiv \frac{f(u) - f(v)}{u - v};$$

d'ailleurs,  $C_1$  et  $C_2$  désignant deux courbes fermées qu'on définira dans un instant et qui limitent une aire annulaire contenant  $C, D_1, D_2$ , on prolongera par continuité  $a(z)$  dans la portion restante de l'aire ( $C_1, C_2$ ) de manière qu'en tout point de ( $C_1, C_2$ ) les relations (64) continuent à subsister.

Cela étant, envisageons le système

$$(65) \quad \begin{cases} F^+(x) - F^-(x) + \tau^p(x)A(x)G^+(x), \\ G^-(x) - G^+(x) + \tau^{-p}(x)A^{-1}(x)F^-(x) - I \end{cases} \left[ I + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

où  $x$  est un point de  $C$ ,  $p$  un entier positif,  $\tau(x)$  une fonction analytique faisant correspondre le cercle  $|\tau| = 1$ , à la courbe (analytique)  $C$  et représentant conformément la couronne  $\varphi^{-1} \leq |\tau| \leq \varphi$  ( $\varphi$ , nombre positif  $> 1$ ) sur une aire annulaire contenant  $C$  : les frontières de cette aire seront précisément  $C_1$  et  $C_2$ ; enfin, les indices supérieurs + (ou -) caractérisent des fonctions ou des matrices holomorphes à l'intérieur (ou à l'extérieur) de  $C$  et continues sur  $C$ . Il est clair que la résolution de (65) entraîne celle de (B) : car on tire de (65)

$$F^+(x) + \tau^p A(x) [I + G^-(x)],$$

et dans le cas (qui nous suffit) où  $C$  est la circonférence  $|x| = 1$ , on satisfera à (B) en prenant  $\Phi = F^+$ ,  $\Psi = x^p(I + G^-)$ .

Or, moyennant les conditions (64), les équations (65) peuvent être résolues par approximations successives convergentes. A cet effet, on s'appuie sur la propriété suivante (qui a son analogue pour les fonctions  $g^-$ ): l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{\tau^p(z)g^+(z)}{z-x} a(z) dz$$

représente deux fonctions holomorphes  $f^\pm(x)$  satisfaisant sur  $C$  à la relation

$$f^+(x) - f^-(x) = \tau^p(x)g^+(x)a(x).$$

De plus, si  $a$  vérifie (64) et si l'on a sur  $C$   $|g^+(z)| < L$  on déduit de la relation

$$(66) \quad f^-(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{D_1} \tau''(z) g^+(z) \frac{a(z) - a(x)}{z - x} dz \\ + \frac{a(x)}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_1} \frac{\tau''(z) g^+(z)}{z - x} dz,$$

l'inégalité

$$(67) \quad |f^-(x)| \leq \frac{KL}{2\pi} \left[ \int_{D_1} |\tau''(z)| dz + \int_{C_1} \left| \frac{\tau''(z)}{z - x} dz \right| \right] \equiv zL,$$

$z$  pouvant être rendu arbitrairement petit, pour  $p$  assez grand.

Cette inégalité permet d'établir aisément la convergence des approximations pourvu que l'on ait  $2z < 1$ .

Au sujet de la solution  $G^-(x)$ , nous observerons que, d'après la forme même de l'intégrale de Cauchy (1),  $\mathfrak{M}G^-(x)$  est, pour  $|x|$  très grand, de l'ordre de  $l:|x|$  ( $l$ , longueur de  $C$ ).

Un procédé analogue va nous permettre d'adjoindre à (67) une inégalité parallèle qui nous sera précieuse (n° 36). Soit  $C_1$  une courbe entourant  $C_1$  et intérieure à la couronne  $(C, C_1)$ . On aura, pour  $x$  sur  $C_1$ ,

$$f^+(x) = \tau''(x) g^+(x) a(x) + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{D_1} \tau''(z) g^+(z) \frac{a(z) - a(x)}{z - x} dz \\ + \frac{a(x)}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_1'} \frac{\tau''(z) g^+(z)}{z - x} dz;$$

on en déduit sur  $C_1$  (et, par suite, à l'intérieur de  $C_1$ )

$$|f^+(x)| < z_1 L,$$

le facteur  $z_1$  pouvant être rendu arbitrairement petit (pour  $p$  assez grand).

Rappelons maintenant comment M. Birkhoff a rattaché la résolution du problème classique de Riemann à celle de l'équation (B); ce faisant,

(1) La notation  $\mathfrak{M}A$  désigne le maximum du module des éléments de la matrice  $A$ .

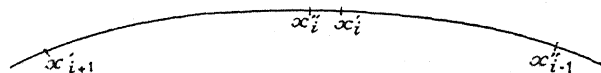
nous nous placerons d'ailleurs dans les circonstances réalisées pour le problème de Plateau.

Moyennant une substitution linéaire effectuée sur la variable complexe  $x$  des trois premières Parties, il est toujours loisible de supposer que les points singuliers  $t_i (i = 1, \dots, n = 3)$  sont situés, non plus sur l'axe réel, mais sur la circonférence  $C(|x| = 1)$ ; c'est l'hypothèse que nous adopterons désormais. Les  $t_i$  sont les images des sommets  $A_i$  d'un polygone  $P$  à  $n + 3$  côtés inscrit dans le contour continu  $\mathcal{C}$ ; soit  $S_i$  la substitution linéaire (n° 8) relative à  $A_i$ ; posons

$$\mathbf{A}_1 \div \mathbf{I}, \quad \mathbf{A}_i \div S_i \mathbf{A}_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n + 2),$$

et soit  $\mathbf{A}(x)$  la matrice discontinue qui le long de chaque arc  $t_i t_{i+1}$  de  $C$  coïncide avec  $\mathbf{A}_{i+1}$ . Définissons maintenant une matrice  $\mathfrak{A}(x)$  de la manière suivante : soit  $c_i$  une circonférence entourant  $t_i$  et admettant pour diamètre sa corde commune  $x'_i x''_i$  avec  $C$ ; les rayons  $r_i$  (qui

Fig. 3.



seront précisés ultérieurement) sont assez petits pour que les  $c_i$  soient toutes extérieures les unes aux autres. Cela étant, nous prendrons sur l'arc  $x''_{i-1} x'_i$

$$\mathfrak{A}(x) \div \mathbf{A}_i(x)$$

et sur l'arc  $x'_i x''_i$

$$(68) \quad \mathfrak{A}(x) \div \mathbf{A}_i + \Theta \left( \frac{x - x'_i}{x''_i - x'_i} \right) (\mathbf{A}_{i+1} - \mathbf{A}_i)$$

avec

$$\Theta(u) \int_0^1 e^{-\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}} dt = \int_0^u e^{-\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}} dt.$$

L'exponentielle tend vers zéro lorsque  $u$  tend vers 0 ou 1 en restant intérieur à la circonférence décrite sur  $(01)$  comme diamètre ou sur cette circonférence; l'expression (68) sera donc holomorphe à l'intérieur de  $c_i$  et sur  $c_i$ , sauf en  $x'_i, x''_i$ ; en ces points, elle admettra



une infinité de dérivées toutes nulles. Enfin, sur les arcs  $z'_{i-1}z'_i$ , le déterminant  $|\mathfrak{A}(x)|$  est égal à 1; et sur  $z'_iz''_i$ , on a

$$(6g) \quad |\mathfrak{A}(x)| = (1 - \Theta)^2 + \Theta^2 + 2\Theta(1 - \Theta) \cos \frac{\varphi_i}{2},$$

$\varphi_i$  désignant l'amplitude de  $S_i$  (n° 6). Or, dans le cas d'un contour  $\mathcal{C}$ , à courbure moyenne bornée, les angles  $V_k$  (n° 8) du polygone  $P$ , inscrit dans  $\mathcal{C}$ , seront voisins de  $\pi$  lorsque les côtés de  $P$  seront assez petits; les angles  $\varphi_i$  seront donc (n° 8) voisins de zéro et les zéros  $\Theta$  de (6g) auront un module  $> K$ ,  $K$  étant le maximum de  $|\Theta|$  à l'intérieur de  $c_i$ ; le déterminant (6g) ne peut donc s'annuler sur  $x'_ix''_i$ .

Les conditions de M. Birkhoff étant réalisées, on pourra résoudre le problème de Riemann, soit ( $\mathcal{R}$ ), aux données  $[\mathfrak{A}(x); C]$ ; c'est ce que nous appellerons *le problème préliminaire*. Soient  $U^+(x)$ ,  $\hat{U}(x)$  un couple de matrices telles que sur  $C$

$$(70) \quad U^+(x) \div \mathfrak{A}(x) \hat{U}(x),$$

$\hat{U}(x)$  étant holomorphe à l'extérieur de  $C$ , sauf en  $x = \infty$ , qui peut être un pôle; résoudre le problème de Riemann proposé, soit ( $R$ ), revient à résoudre l'équation fonctionnelle analogue

$$Y^+(x) \div \mathbf{A}(x) \hat{Y}(x).$$

Or, soit  $\zeta_i(x - t_i)$  la matrice de Cauchy relative à  $t_i$  et à  $S_i$ , c'est-à-dire la matrice à éléments de la forme  $c_{\nu\mu} \left(\frac{x - t_i}{r_i}\right)^{\gamma_i}$  et subissant autour de  $t_i$  la substitution  $S_i$ ; posons, extérieurement aux  $c_i$ ,

$$Y^+(x) \div U^+(x) Z(x), \quad \text{d'où} \quad \hat{Y}(x) \div \hat{U}(x) Z(x)$$

(car, extérieurement aux  $c_i$ ,  $\mathfrak{A} \div \mathbf{A}$ ), et intérieurement aux  $c_i$

$$Y^+(x) \div \zeta_i^+(x - t_i) Z_i(x), \quad \hat{Y}(x) \div \hat{\zeta}_i(x - t_i) Z_i(x),$$

$\zeta_i^+$  et  $\hat{\zeta}_i$  désignant les deux déterminations de  $\zeta_i$ , calculées intérieure-

rement et extérieurement à  $C$  et se raccordant le long de  $t_i x'_i$ . La matrice  $Z_i(x)$  est uniforme intérieurement à  $c_i$ ;  $Z(x)$  est uniforme extérieurement aux  $c_i$ , et l'on doit avoir le long des  $c_i$

$$Z_i(x) = [\zeta_i^{-1}(x - t_i) U(x)] Z(x),$$

le crochet (qui peut recevoir indifféremment les signes  $+$  ou  $\wedge$ ) désignant une matrice connue, uniforme le long de  $c_i$ , holomorphe en tout point de  $c_i$ , sauf en  $x'_i x''_i$ . La résolution du problème (R) est ainsi ramenée à celle de deux problèmes (H), soient  $(\mathcal{H})$  et  $(\mathcal{H}^{\mu+3})$ , les données du second étant portées par  $n + 3$  courbes distinctes.

Or, d'après M. Birkhoff, un problème  $(\mathcal{H}^\mu)$  se ramène à une succession de  $\mu$  problèmes  $(\mathcal{H}^1)$ ; indiquons le principe de la méthode en supposant  $\mu = 2$  et en en déduisant une conséquence que nous utiliserons plus loin.

Supposons que,  $c_1$  et  $c_2$  étant deux circonférences extérieures l'une à l'autre, soit  $|x - a_i| = r_i$ , il s'agisse de résoudre le système

$$(71) \quad F_i = \tau_i^{\mu} A_i F$$

(sur  $c_i$ ; avec  $\tau_i = \frac{x - a_i}{r_i}$  et  $i = 1, 2$ );  $F_i$  désigne une matrice holomorphe dans  $c_i$  et  $F$  une matrice holomorphe à l'extérieur de  $c_1$  et  $c_2$ . On résoudra d'abord l'équation

$$(72) \quad G_1 = \tau_1^{\mu} A_1 G \quad (\text{sur } c_1),$$

$G_1$  et  $G$  ayant mêmes significations que  $F_1$  et  $F$ ; puis on posera

$$F_1 = G_1 H, \quad F_2 = G H_2, \quad F = G H,$$

$H$  étant holomorphe extérieurement à  $c_2$ , et  $H_2$ , intérieurement à  $c_2$ . Ces matrices seront bien des solutions de (71), pourvu que l'on ait sur  $c_2$

$$H_2 = \tau_2^{\mu} (G^{-1} A_2 G) H.$$

*Corollaire.* — Supposons que  $\alpha (= 1 : n)$  étant un nombre arbitrairement petit, les  $n + 3$  circonférences  $c_i$  soient de rayon  $\alpha^f$  ( $f > 1$ ), les centres de deux circonférences consécutives étant à des distances  $> k\alpha$  ( $k, k', k'', k'''$ , nombres positifs indépendants de  $\alpha$ ); ainsi, les distances des circonférences à l'une quelconque d'entre elles,  $c_i$ , seront supé-

rieures à  $k'\alpha$ ,  $2k'\alpha$ , ...,  $(n+3)k'\alpha$ ; supposons encore que  $G$  conserve la même signification que dans (72) et que les  $\mathcal{M}A_i$  soient bornés supérieurement. D'après une remarque antérieure (p. 118), si  $x$  est à une distance  $d$  de  $c_1$ ,  $\mathcal{M}(G-1)$  est en  $x$  de l'ordre de  $\alpha^f:d$ ; une remarque analogue s'applique aux diverses matrices  $H$  relatives à  $c_2, \dots, c_{n+3}$ . L'application successive du procédé précédent donnera en un point  $x$  de  $c_1$ ,

$$F \div G \left[ I + k'' \theta \alpha^{f-1} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+3} \right) \right] \div G \left[ I + k''' \theta \alpha^{f-1} \log \frac{1}{\alpha} \right],$$

avec  $\mathcal{M}\theta < 1$ : telle est la relation qui existe sur  $c_1$  entre les solutions  $F, G$  de deux systèmes (71), le premier formé de  $n+3$  équations distinctes, le second se réduisant à une seule.

31. *Application au problème de Plateau : théorèmes préliminaires.* — Inscrivons dans le contour de Plateau  $\mathcal{C}$  un polygone  $P$ , de  $n+3$  côtés, dont les longueurs respectives soient comprises entre  $k_1\alpha$  et  $k_2\alpha$ , avec  $\alpha = 1:n$  et les  $k_j, k'_j, \dots$  désignant toujours des nombres positifs indépendants de  $\alpha$  <sup>(1)</sup>. Le contour  $\mathcal{C}$  ayant entre deux quelconques de ses points une courbure moyenne bornée <sup>(2)</sup>, les angles  $V_i$  (n° 8) sont de la forme <sup>(3)</sup>  $\pi - k'_i\alpha$ ; ainsi, les exposants  $\alpha_i, \beta_i$  de  $S_i$  seront de l'ordre

(1) On se rendra compte aisément que ceci n'implique aucune restriction relativement au cas où  $\mathcal{C}$  comprendrait une partie rectiligne de longueur finie.

(2) Pour abrégé l'exposition, nous supposons que  $\mathcal{C}$  ne possède aucun point anguleux; mais, comme il a été dit dans l'Introduction, les résultats s'étendraient aisément au cas où  $\mathcal{C}$  posséderait un nombre fini de points anguleux.

(3) En effet, considérons l'arc  $A_{i-1}A_iA_{i+1}$  de  $\mathcal{C}$ ; désignons par  $t$  le vecteur unitaire de la tangente à  $\mathcal{C}$ , par  $s$  l'arc compté jusqu'au point  $M$  à partir d'une origine fixe et affectons de l'indice  $o$  les éléments relatifs à  $A_{i-1}$ ; la courbure moyenne étant bornée, on a  $|t - t_0| < k(s - s_0)$ , d'où, sur l'arc  $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ ,

$$|M - A_{i-1} - (s - s_0)t_0| < \frac{k}{2}(s_1 - s_0)(s - s_0),$$

$s_1$  se rapportant à  $A_{i+1}$ . En particulier,  $A_i$  appartient à un cône de sommet  $A_{i-1}$ , de révolution autour de  $t_0$  et d'ouverture  $k'\alpha$  (car  $s_1 - s_0$  est de l'ordre de  $\alpha$ ). Il appartient aussi à un cône analogue de sommet  $A_{i+1}$ ; l'angle  $\pi - \widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}}$ , inférieur à la somme de l'angle de contingence et des demi-angles au sommet des deux cônes, est donc de l'ordre de  $\alpha$ .

de  $\alpha$ ; il en sera de même des éléments de la matrice  $S_i - I$ , et, par suite, de ceux de la matrice  $\mathbf{A}_{i+1} - \mathbf{A}_i$ . Enfin, en vertu du théorème fondamental du n° 23, on aura <sup>(1)</sup>  $|t_i - t_{i+1}| > k_3^{-1} \alpha$ .

Cela étant, nous prendrons pour les  $c_i$ , comme au n° 30 (p. 121), des circonférences de rayon  $\alpha^f$  ( $f > 1$ ); la distance  $x'_i x''_i$  sera donc très petite, en même temps que  $\alpha$ , par rapport aux distances  $x''_{i-1} x'_i$ ,  $x''_i x'_{i+1}$ ; et les éléments de  $D(x, \xi) \mathcal{C}$  (n° 30), pour  $x$  et  $\xi$  intérieurs à  $c_i$  seront de l'ordre de  $\alpha^{1-f}$ .

Établissons alors une propriété préliminaire des solutions  $U^+$  et  $\hat{U}$  du problème ( $\mathcal{C}$ ); je dis que, pour  $\alpha$  arbitrairement petit  $\mathfrak{M}U^+$  et  $\mathfrak{M}\hat{U}$ ,  $\alpha^{f-1} \mathfrak{M}DU^+$  et  $\alpha^{f-1} \mathfrak{M}D\hat{U}$  restent bornés le long de chaque  $c_i$ .

En effet, pour  $U^+$  et  $\hat{U}$ , la proposition résulte essentiellement du procédé d'approximations successives et de la formule (66). Dans cette formule,  $\mathfrak{M}\mathcal{C}$  est borné; la seconde intégrale est donc bornée;  $\mathfrak{M}D(x, z) \mathcal{C}$  est borné lorsque,  $x$  appartenant à  $c_i$ ,  $z$  est extérieur à l'arc  $x''_{i-1} x'_{i+1}$ . Enfin, si l'on suppose  $x$  plus près de  $x'_i$  que de  $x''_i$ , on trouve que dans la première intégrale de (66) les arcs  $x''_i x'_{i+1}$  et  $x'_i x''_i$  introduisent des contributions de l'ordre de <sup>(2)</sup>  $\alpha \log \frac{1}{\alpha}$  et  $\alpha$ ; quant à l'arc  $x''_{i-1} x'_i$ , sa contribution est de l'ordre de

$$\alpha \int_{(x''_{i-1} x'_i)} \left| \frac{x'_i - x}{z - x} dz \right| < \alpha |x'_i - x| \int_{(x''_{i-1} x'_i)} (|d \log \rho| + |d\omega|),$$

avec  $z - x = \rho e^{i\theta}$ ; elle est donc infiniment petite avec  $\alpha$ ,

D'ailleurs, si  $x$  appartient, par exemple, à l'arc  $x''_{i-1} x'_i$ , on observera que sur cet arc  $D\mathcal{C} = 0$ ; pour  $U^+$ , le résultat obtenu subsiste donc lorsque  $x$  est un point quelconque de  $C$  (et *a fortiori* lorsque  $x$  est

(1) Bien entendu, on suppose qu'après la substitution linéaire indiquée au n° 30 (p. 66), les images des points 0, 1,  $\infty$  de l'axe réel coïncident avec trois points de  $C$  dont les distances soient bornées inférieurement quel que soit  $\alpha$ . Pratiquement, on supposera que ces images sont indépendantes de  $\alpha$ .

(2) On entend par là que le module de l'expression envisagée est inférieur à  $k \alpha \log \frac{1}{\alpha}$ ,  $k \alpha$ , etc.

intérieur à C). Bien entendu, un énoncé analogue s'applique aussi à  $\hat{U}$ .

Examinons maintenant  $DU^+$ . Supposons d'abord que  $x$  et  $\xi$  soient intérieurs à C et plus voisins de  $x'_i$  que de  $x''_i$ ; on aura

$$D(x, \xi)U^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{U^+(z)}{(z-x)(z-\xi)} dz \\ + \frac{\alpha(x'_i)}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{\hat{U}(z) dz}{(z-x)(z-\xi)} + \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C D(z, x'_i) \alpha \cdot \frac{(z-x'_i)\hat{U}(z)}{(z-x)(z-\xi)} dz.$$

Or, dans la première intégrale, C peut être remplacée par une courbe extérieure : cette intégrale est donc bornée en module. Reste la seconde. Si  $z$  est extérieur à l'arc  $x''_{i-1}x'_{i+1}$ ,  $\Re D\alpha$  et  $\left| \frac{z-x'_i}{z-x} \right|$  sont bornés;  $\Re \hat{U}$  l'est aussi, d'après ce qui précède; la portion correspondante de l'intégrale est donc de l'ordre de  $\log \alpha^{-1}$ . Sur l'arc  $x''_{i-1}x'_i$ ,  $D\alpha$  est nul; sur l'arc  $x'_i x''_i$ , la formule (68) ou encore la relation

$$D(z, x'_i) \alpha = \int_{x'_i}^z \frac{z-t}{z-x'_i} \alpha''(t) dt,$$

conséquence de  $\alpha'(x'_i) = 0$  [ou de  $\Theta'(1) = 0$ ], montre que  $\Re D\alpha$  est de l'ordre de  $\alpha^{-f}$ ;  $|(z-x'_i)^2(z-x)^{-1}(z-\xi)^{-1}|$  restant borné (en vertu de notre hypothèse sur la position de  $x$  et  $\xi$ ), la contribution de cet arc est donc inférieure à  $k_4 \alpha$ . Enfin, sur l'arc  $x''_i x'_{i+1}$ , on aura

$$\Re D\alpha < \frac{k_5 \alpha}{|z-x'_i|};$$

la portion correspondante de l'intégrale sera de l'ordre de  $\alpha^{1-f}$ .

Supposons maintenant que  $x$  et  $\xi$  soient intérieurs à C, mais que les rapports  $\left| \frac{x-x'_i}{x-x''_i} \right|$  et  $\left| \frac{\xi-x''_i}{\xi-x'_i} \right|$  soient inférieurs à 1. Dans ce cas, on introduira, par exemple, le point X intérieur à C, situé sur  $c_i$  à égale distance de  $x'_i$  et  $x''_i$ ; et la formule

$$(73) \quad D(x, \xi) = \frac{x-X}{x-\xi} D(x, X) + \frac{X-\xi}{x-\xi} D(X, \xi)$$

montrera que le résultat précédent subsiste encore dans le cas actuel.

Si  $x$  et  $\xi$  sont extérieurs à C, la relation (70) donnera pour le prolongement de  $U^+$ ,  $DU^+ = \alpha D\hat{U}$ , puisque extérieurement aux  $c_i$   $\alpha$  est

constant. Or, extérieurement à C,  $D\hat{U}$  se calcule comme  $DU^+$  intérieurement à C : le théorème est donc encore exact.

Enfin, la relation (73) permettra d'étendre la validité du théorème au cas où  $x$  et  $\xi$  sont sur  $c_i$  de part et d'autre de C; en effet, on pourra toujours choisir pour X l'un des points  $x', x''$ , de manière que  $\left| \frac{x-X}{x-\xi} \right|$  et  $\left| \frac{X-\xi}{x-\xi} \right|$  soient bornés (et même  $< 1$ ).

32. *Lemme fondamental.* — Pour comparer entre elles les solutions de deux équations ou systèmes (B), aux données voisines, nous utiliserons prochainement un lemme que nous allons établir. Auparavant, présentons deux définitions préliminaires.

*Conditions  $\mathcal{C}_1$ .* — Le contour est la circonférence  $|x| = 1$ ;  $b(x)$  étant un élément quelconque de la matrice B, on a  $|b(x)| < k_6 \varepsilon$ ,  $\int |D(x, z)b \cdot dz| < k_7 \varepsilon$ ,  $x$  et  $z$  étant deux points de C.

*Conditions  $\mathcal{C}_2$ .* — Le contour est formé de l'ensemble des  $n + 3$  circonférences  $c_i$ ; on a, avec la même signification pour  $b(x)$  et  $x$  et  $z$  appartenant à  $c_i$ :  $|b(x)| < k_8 \varepsilon$ ,  $\alpha' |D(z, x)b| < k_9 \varepsilon$ .

Dans ces énoncés  $\varepsilon$  désigne une quantité positive, infiniment petite avec  $\alpha$ ; par suite, si l'on substitue  $b$  à  $a$  dans (66), et si l'on forme l'inégalité (67) correspondante, on pourra affirmer <sup>(1)</sup> que dans cette formule le facteur  $\alpha$  est infiniment petit avec  $\alpha$  (quel que soit  $p$ ); pour  $\alpha$  assez petit, on pourra donc prendre  $p = 0$ .

Ceci posé, pour  $p = 0$  et  $A(x) = I$  les équations (65) admettent la solution évidente

$$(74) \quad F^+(z) = I + G^+(z), \quad F^-(z) = 0 + G^-(z).$$

Supposons alors que le contour et les éléments de la matrice

$$A(z) = I + B(z)$$

vérifient les conditions  $\mathcal{C}_1$  ou  $\mathcal{C}_2$ ; nous allons montrer que le sys-

---

(1) S'il s'agit des conditions  $\mathcal{C}_2$ , on supposera d'abord que le contour se réduit à une seule circonférence  $c_i$ ; la démonstration qui va suivre une fois achevée dans ce cas particulier, on étendra le résultat obtenu au cas général d'un contour à  $n + 3$  circonférences  $c_i$  à l'aide du corollaire du n° 30.

tème (65) possède une solution *voisine* de (74). Posons

$$\begin{aligned} F^+(z) &\div I + \varphi^+(z), & G^+(z) &\div I + \psi^+(z), \\ F^-(z) &\div \varphi^-(z), & G^-(z) &\div \psi^-(z). \end{aligned}$$

Les nouvelles matrices  $\varphi$  et  $\psi$  satisfont aux équations

$$(75) \quad \begin{cases} \varphi^+(z) - \varphi^-(z) \div \psi^+(z) + B(z)[I + \psi^+(z)], \\ \psi^-(z) - \psi^+(z) \div \varphi^-(z) + [I + B_1(z)]\varphi^-(z), \end{cases}$$

avec  $I + B_1(z) \div [I + B(z)]^{-1}$ ; d'ailleurs, comme  $|I + B(z)|$  n'est pas nul sur  $C$ ,  $B_1(z)$  vérifiera les mêmes conditions ( $\mathcal{C}_1$  ou  $\mathcal{C}_2$ ) que  $B(z)$ .

Pour résoudre (75), nous ferons les approximations successives suivantes. Prenant d'abord  $\varphi_0^+ \div \varphi_0^- \div 0 \div \psi_0^+ \div \psi_0^-$ , et posant pour abrégé  $\Delta_m u \div u_m - u_{m-1}$ , nous définirons d'abord les  $\Delta_1$  par les équations

$$(76)_1 \quad \begin{cases} \Delta_1 \varphi^+ - \Delta_1 \varphi^- \div B(z), \\ \Delta_1 \psi^- - \Delta_1 \psi^+ \div 0 \end{cases}$$

(et la condition  $\Delta_1 f^- \div 0$  pour  $x = \infty$ ), puis pour les  $\Delta_m$  par les équations

$$(76)_m \quad \begin{cases} \Delta_m \varphi^+ - \Delta_m \varphi^- \div \Delta_{m-1} \psi^+ + B \Delta_{m-1} \psi^+ & (m = 2, 3, \dots), \\ \Delta_m \psi^- - \Delta_m \psi^+ \div \Delta_{m-1} \varphi^- + B_1 \Delta_{m-1} \varphi^- & (\Delta_m f^-(\infty) \div 0); \end{cases}$$

posant

$$\Delta_m \varphi^+ - \Delta_{m-1} \psi^+ \div u_m^+, \quad \Delta_m \psi^- - \Delta_{m-1} \varphi^- \div v_m^-,$$

on peut écrire (76)<sub>m</sub> sous la forme

$$(76)'_m \quad \begin{cases} u_m^+ - \Delta_m \varphi^- \div B \Delta_{m-1} \psi^+, \\ v_m^- - \Delta_m \psi^+ \div B_1 \Delta_{m-1} \varphi^-. \end{cases}$$

Or, en appliquant à (76)<sub>1</sub>, (76)'<sub>m</sub> la relation (67) et en tenant compte des conditions  $\mathcal{C}_1$  ou  $\mathcal{C}_2$ , on trouve successivement

$$\begin{aligned} \Re \Delta_1 \varphi^- < k_{10} \varepsilon, & \quad \Re \Delta_2 \varphi^- = 0, & \quad \Re \Delta_3 \varphi^- < k_{10}^3 \varepsilon^3, & \quad \dots, \\ \Re \Delta_1 \psi^+ = 0, & \quad \Re \Delta_2 \psi^+ < k_{10}^2 \varepsilon^2, & \quad \Re \Delta_3 \psi^+ = 0, & \quad \dots \end{aligned}$$

La convergence des approximations est donc assurée pour  $\alpha$  suffisamment petit; les matrices  $\varphi_{2m-1}^\pm$ ,  $\psi_{2m}^\pm$  convergent uniformément, dans leurs régions respectives, vers des solutions  $\varphi^\pm$ ,  $\psi^\pm$  de (75). D'ailleurs, d'après (76)<sub>m</sub> ( $m \geq 1$ ), les éléments de  $\Delta_{2m-1} \varphi^+$  sont sur  $C$

(et, par suite, à l'intérieur de  $C$ ) de l'ordre de  $\varepsilon^{2m-1}$ , et un résultat analogue s'applique à  $\Delta_{2m}\psi^-$ ; si l'on observe alors que les matrices  $\psi^-$  et  $\psi^+$  satisfont sur  $C$  à l'équation

$$I + \varphi^+ \div (I + B)(I + \psi^-);$$

on peut énoncer la proposition suivante.

LEMME FONDAMENTAL. — L'équation

$$\Phi^+(z) \div [I + B(z)] \Psi^-,$$

où  $B(z)$  vérifie les conditions  $\mathcal{C}_1$  ou  $\mathcal{C}_2$ , possède une solution

$$\Phi^+(z) \div I + \varphi^+(z), \quad \Psi^-(z) \div I + \psi^-(z),$$

telle que dans leurs domaines respectifs, on a

$$\partial\bar{\partial}\varphi^+(z) < k_{11}\varepsilon, \quad \partial\bar{\partial}\psi^-(z) < k_{11}\varepsilon.$$

Dans l'une des applications que nous ferons du lemme précédent, on aura, le long du cercle  $C(|z|=1)$  l'inégalité  $|b(z)| < k_{12}\alpha$ ; de plus, les  $c_i$  étant définies comme plus haut, et les points  $x$  et  $z$  étant extérieurs aux  $c_k$ , mais intérieurs à l'aire limitée par  $D_1$  et  $D_2$  (n° 30), entre  $c_i$  et  $c_{i+1}$ , on aura  $|D(x, z)b| < k_{12}$ , tandis que pour  $x$  et  $z$  dans  $c_i$ , on pourra écrire

$$|D(x, z)b| < k_{12}\alpha^{1-f}.$$

S'il en est ainsi, je dis que les conditions  $\mathcal{C}_1$  sont réalisées avec

$$\varepsilon = \alpha \log \frac{1}{\alpha}.$$

Montrons, en effet, que

$$\int_C |D(x, z)b \, dz| < k_{12}\alpha \log \frac{1}{\alpha}.$$

Tout d'abord, sans restreindre la généralité, on peut toujours supposer que  $x$  est intérieur à l'arc  $x''_{i-1}x'_{i+1}$  et que, s'il appartient à  $x''_i x'_{i+1}$ , il est plus près de  $x''_i$  que de  $x'_{i+1}$ . Désignons par  $C'$  l'arc complémentaire de  $x''_{i-1}x'_{i+1}$  par rapport à  $C$ , il viendra

$$\int_{C'} |Db \, dz| < 2k_{12}\alpha \int_{C'} \left| \frac{dz}{z-x} \right| < k_{12}\alpha \log \frac{1}{\alpha}.$$



Si  $x$  appartient à l'arc  $x''_i x'_{i+1}$ , on aura

$$\int_{(x''_i x'_{i+1})} |D b dz| < k_{15} \alpha,$$

puis, les intégrales étant étendues à l'arc  $x''_i x'_i$ ,

$$\begin{aligned} \int |D(z, x) b dz| &< \int \left| \frac{z - x''_i}{z - x} D(z, x''_i) b dz \right| + \int \left| \frac{x''_i - x}{z - x} D(x, x''_i) b dz \right| \\ &< k_{12} \alpha^{1-f} \int \left| \left( 1 + \frac{x - x''_i}{z - x} \right) dz \right| + k_{12} \int \left| \frac{x''_i - x}{z - x} dz \right| < k_{16} \alpha, \end{aligned}$$

car, actuellement  $\left| \frac{x - x''_i}{z - x} \right|$  est inférieur à 1. Enfin, la contribution de l'arc  $x''_{i-1} x'_i$  se limite comme celle de C'; elle de l'ordre de  $\alpha \log \frac{1}{\alpha}$ .

Si  $x$  appartient à  $x'_i x''_i$ , on a le long de cet arc

$$\int |D(z, x) b dz| < k_{17} \alpha;$$

reste à évaluer les contributions de  $x''_{i-1} x'_i$  et  $x''_i x'_{i+1}$ ; les calculs étant identiques, bornons-nous au premier arc. On a le long de  $x''_{i-1} x'_i$ ,

$$\int |D(z, x) b dz| < k_{12} \int \left| \left( 1 + \frac{x - x'_i}{z - x} \right) dz \right| + k_{12} \alpha^{1-f} \int \left| \frac{x'_i - x}{z - x} dz \right|.$$

La partie principale est le second terme qui est de l'ordre de

$$(77) \quad \alpha^{1-f} |x'_i - x| \log \left| \frac{x''_{i-1} - x}{x'_i - x} \right|.$$

Or, quand  $x$  varie sur le cercle  $\left| \frac{x''_{i-1} - x}{x'_i - x} \right| = m$ , le maximum de (77) est

$$\alpha^{1-f} |x''_{i-1} - x'_i| \frac{\log m}{m - 1};$$

mais actuellement  $m$  est supérieur à  $\alpha^{-f} : k_{18}$ ; l'expression (77) est donc inférieure à  $k_{19} \alpha \log \alpha^{-1}$ .

33. *Les problèmes de Plateau  $\overline{\mathcal{E}}$  et  $\overline{\mathcal{E}}_n$ ; les problèmes préliminaires ( $\mathcal{E}$ ) et ( $\mathcal{E}_0$ ).* — Pour effectuer le passage à la limite que nous avons en vue, nous commencerons par comparer les solutions des problèmes de

Plateau  $\mathcal{X}_n$  et  $\overline{\mathcal{X}}$  relatifs respectivement à un polygone P, de sommets  $A_1, A_2, \dots, A_{n+3}$ , inscrit dans la courbe  $\mathcal{C}$ , et à un polygone inscrit  $\overline{P}$  présentant un sommet de plus  $A_{n+4}$ , situé, par exemple, sur l'arc  $A_{n+3}A_1$  de  $\mathcal{C}$ . Les intégrales  $g, h$  de l'équation linéaire (E'), attachée à  $\mathcal{X}_n$ , sont fournies par une équation

$$(78) \quad Y^+ + \mathbf{A} \hat{Y},$$

où  $\mathbf{A}$  est une matrice qu'on peut écrire immédiatement dès que l'on connaît les directions des côtés de P et les valeurs de  $t_i$ ; dans la suite, ces valeurs sont supposées connues. Les intégrales  $\overline{g}, \overline{h}$ , associées à  $\overline{\mathcal{X}}$ , satisfont de même à une équation ( $\overline{78}$ ). Il s'agit de comparer  $g, h$  et  $\overline{g}, \overline{h}$ ; et pour cela, nous comparerons les données  $\mathbf{A}$  et  $\overline{\mathbf{A}}$  et les solutions des équations (78) et ( $\overline{78}$ ), ce qui nous amènera à comparer d'abord les solutions des problèmes préliminaires (n° 30) attachés à  $\mathcal{X}_n$  et à  $\overline{\mathcal{X}}$ ; puis nous procéderons par approximations successives pour trouver les valeurs, soient  $\overline{t}_i$ , des paramètres des sommets de  $\overline{P}$ , et par suite,  $\overline{\mathbf{A}}$ .

Les  $t_i$  étant connus pour P, nous pourrons former aussitôt la matrice  $\mathcal{A}$  relative au problème ( $\mathcal{ZC}$ ) correspondant, et nous écrirons ainsi les équations auxiliaires correspondantes

$$(78)' \quad \begin{cases} \Phi^+ - \Phi^- + x^p \mathcal{A} \Psi^+, \\ \Psi^- - \Psi^+ + x^{-p} \mathcal{A}^{-1} \Phi^- = 1, \end{cases}$$

où l'entier  $p$  sera précisé ultérieurement. Nous admettrons en première approximation que les  $\overline{t}_i$  sont égaux aux  $t_i (i \neq n+4)$ ; quant à  $\overline{t}_{n+4}$ , nous le ferons coïncider avec la valeur  $t_{n+4}$  de  $x$  qui définit, par exemple, la projection orthogonale de  $A_{n+4}$  sur  $A_{n+3}A_1$ . Nous définirons ainsi un problème préliminaire ( $\mathcal{ZC}_0$ ) et une matrice  $\mathcal{A}_0$  que nous conserverons au cours de toutes nos approximations: car les valeurs approchées que nous adopterons pour les  $t_i$  resteront intérieures aux  $c_i$ ; d'ailleurs, il est clair que  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_0$  coïncideront partout, sauf à l'intérieur de  $c_{n+3}, c_{n+4}, c_1$  et le long des deux arcs de C reliant ces circonférences. Enfin, C ayant une courbure moyenne bornée, les cosinus directeurs des vecteurs  $A_{n+4} - A_{n+3}$  et  $A_1 - A_{n+4}$  seront très voisins de ceux de  $A_1 - A_{n+3}$ , leurs différences mutuelles étant de l'ordre de  $\alpha$ ; par un calcul facile,

on en déduit que  $\alpha^{-1} \alpha_0 - I$  vérifie les conditions énoncées à la suite du lemme (n° 32, p. 127), et, par suite, les conditions  $\mathcal{C}_1$ .

Écrivons alors les équations

$$(78)' \quad \begin{cases} \Phi_0^+ - \Phi_0^- \div x'' \alpha_0 \Psi_0^+, \\ \Psi_0^- - \Psi_0^+ \div x'' \alpha_0^{-1} \Phi_0^- - I; \end{cases}$$

on les résoudra en posant

$$(79) \quad \Phi_0^+ \div \Phi^+(I + \varepsilon_1^+), \quad I + \Psi_0^- \div (I + \Psi^-)(I + \varepsilon_2^-),$$

$\varepsilon_1^+$  et  $\varepsilon_2^-$  étant donnés par l'équation

$$(80) \quad I + \varepsilon_1^+ \div (I + a)(I + \varepsilon_2^-),$$

où l'on a posé

$$I + a \div (I + \Psi^-)^{-1} \alpha^{-1} \alpha_0 (I + \Psi^-).$$

Comme  $|I + \Psi^-|$  ne peut s'annuler sur  $C$ ,  $a$  vérifie encore les conditions  $\mathcal{C}_1$ ; observons d'ailleurs que  $a$  s'annule tout le long de  $C$ , sauf sur un arc dont la longueur est de l'ordre de  $\alpha$ .

Afin de préciser la limitation des solutions de (80), nous désignons par  $\gamma$  un arc de  $C$  de longueur  $\alpha^h$  ( $\frac{1}{2} < h < 1$ ) contenant  $t_{n+3}$ ,  $t_{n+4}$  et  $t$ , à son intérieur, et par  $\Gamma$  l'arc complémentaire de  $\gamma$  relativement à  $C$ ; nous appellerons encore  $\gamma'$  la circonférence ayant pour points diamétralement opposés les extrémités de  $\gamma$ . D'après notre lemme, l'équation (80) possédera une solution  $(\varepsilon_1^+, \varepsilon_2^-)$ , qui, sur  $\gamma$  et dans  $\gamma'$ , sera de l'ordre de  $\alpha \log \alpha^{-1}$ ; mais si l'on étudie directement la solution des équations (76)<sub>m</sub> correspondantes (n° 30, p. 65), on voit aisément que, sur  $\Gamma$  et extérieurement à  $\gamma'$ , la solution précédente est au plus de l'ordre de  $\alpha^{2-h}$ . Désignons alors par  $\beta$  un nombre positif égal à  $\alpha \log \alpha^{-1}$  sur  $\gamma$  et dans  $\gamma'$ , à  $\alpha^{2-h}$  sur  $\Gamma$  et hors de  $\gamma'$ ; on pourra dire que sur  $C$  (80) possédera une solution  $(\varepsilon_1^+, \varepsilon_2^-)$  qui est de l'ordre de  $\beta$ . Enfin, les matrices

$$U^+ \div \Phi^+ \quad \text{et} \quad \hat{U} \div x''(I + \Psi^-), \quad U_0^+ \div \Phi_0^+ \quad \text{et} \quad \hat{U}_0 \div x''(I + \Psi_0^-)$$

satisfont, d'après (78)' et (78)'<sub>0</sub>, aux équations

$$U^+ \div \alpha \hat{U}_2 \quad U_0^+ \div \alpha_0 \hat{U}_0$$

attachées aux problèmes  $(\mathcal{R})$  et  $(\mathcal{R}_0)$ , et en vertu de (79), on aura

$$(81) \quad U_0^+ \div U^+(I + \varepsilon_1^+), \quad \hat{U}_0 \div \hat{U}(I + \varepsilon_2^-).$$

Par suite, si, comme on peut le supposer,  $U^+$  et  $\hat{U}$  sont normalisées (au sens de M. Birkhoff), il en sera de même <sup>(1)</sup> de  $U_0^+$  et  $\hat{U}$ .

Or, aux problèmes préliminaires  $(\mathcal{R})$  et  $(\mathcal{R}_0)$  sont associés respectivement des problèmes de Riemann  $(R)$  et  $(R_0)$ ; nous allons comparer les solutions de ces deux problèmes.

34. *Comparaison des solutions des problèmes de Riemann  $(R)$  et  $(R_0)$ .*

— A cet effet, nous étudierons d'abord  $D(x, \xi)_{\varepsilon_1^+}$ ,  $D(x, \xi)_{\varepsilon_2^-}$ ,  $x$  et  $\xi$  étant deux points d'une circonférence  $c_i$ . Pour  $i = n + 3, n + 4, 1$ , on peut appliquer le théorème préliminaire du n° 31 à l'équation (80); les  $\mathcal{M}D\varepsilon$  seront inférieurs à  $k_{20}z^{1/\nu}$ ; mais, pour les autres valeurs de  $i$ , il est possible d'obtenir une limitation moins élevée. En effet, on a,  $x$  et  $\xi$  étant intérieurs à  $C$ ,

$$(82) \quad D(x, \xi)_{\varepsilon_1^+} \div \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_C \frac{\varepsilon_1^+(z)}{(z-x)(z-\xi)} dz;$$

observons qu'à travers tout arc de  $C$  où  $a \div 0$   $\varepsilon_1^+$  se prolonge en  $\varepsilon_2^-$ ; dans (82), on peut donc, sans changer la valeur de l'intégrale, remplacer l'arc de  $C$  où  $a \div 0$  par un arc extérieur ayant mêmes extrémités. Il résulte aussitôt de là et de la valeur de  $\mathcal{M}\varepsilon_1^+$  que  $\mathcal{M}D\varepsilon_1^+$  est inférieur au quotient de  $k_{20}z^2 \log z^{-1}$  par  $z^2$  ou  $z^{2h}$  suivant que  $c_i$  est intérieur ou extérieur à  $\gamma'$ ; enfin, comme au n° 31, le résultat ainsi obtenu s'étend à une disposition quelconque de  $x$  et  $\xi$  sur  $c_i$ .

Ceci posé, rappelons encore que, pour passer des solutions de  $(\mathcal{R})$ ,  $(\mathcal{R}_0)$  à celles de  $(R)$ ,  $(R_0)$ , il faut résoudre deux équations

$$(83) \quad Z_i \div \alpha Z, \quad Z_{i,0} \div \alpha_0 Z_0,$$

où les données sont réparties sur  $n + 3$  ou  $n + 4$  circonférences;

---

(1) Cette remarque (qui est essentielle) peut être répétée pour chacune des relations du voisinage que nous établirons. Nous ne la renouvelerons pas.

sur  $c_i$ , on aura

$$\alpha \div \zeta_i^{-1} U(x), \quad \alpha \beta_0 \div \zeta_{i,0}^{-1} U_0(x).$$

Posons  $\zeta_i \zeta_{i,0}^{-1} \div 1 + \varepsilon_3$ ; pour  $i \neq n+3, n+4, 1$ , on aura  $\varepsilon_3 \div 0$ , et sur  $c_{n+3}, c_{n+4}, c_1$ ,

$$\mathfrak{M} \varepsilon_3 < k_{22} \alpha, \quad \mathfrak{M} D \varepsilon_3 < k_{22} \alpha^{1-f}.$$

On peut écrire alors

$$\alpha \beta^{-1} \alpha \beta_0 - 1 \div \varepsilon + U^{-1} \varepsilon_3 U (1 + \varepsilon),$$

$\varepsilon$  et  $U$  étant affectés, suivant le cas, des indices 1 ou 2 et intérieur ou extérieur; par suite, selon que  $c_i$  sera intérieur ou extérieur à  $\gamma'$ , il viendra

$$\mathfrak{M}(\alpha \beta^{-1} \alpha \beta_0 - 1) < k_{23} \alpha \log \frac{1}{\alpha} \quad \text{ou} \quad k_{23} \alpha^{2-h}.$$

De plus, d'après la valeur obtenue plus haut (p. 123) pour  $\mathfrak{M}DU$ , l'expression  $\mathfrak{M}D(\alpha \beta^{-1} \alpha \beta_0)$  est inférieure sur  $c_i$  ( $i = n+3, n+4, 1$ ) à la plus grande des quantités  $k_{24} \alpha^{1-f}$  et  $\mathfrak{M}D\varepsilon$ , soit  $k_{24} \alpha^{1-f}$ ; tandis que pour  $i \neq n+3, n+4, 1$ ,  $\mathfrak{M}D(\alpha \beta^{-1} \alpha \beta_0)$  est inférieur à  $\mathfrak{M}D\varepsilon$ , c'est-à-dire à  $k_{21} \log \alpha^{-1}$  ou à  $k_{21} \alpha^{2-2h} \log \alpha^{-1}$ , selon que  $c_i$  est intérieur ou extérieur à  $\gamma'$ .

Il est aisé maintenant de comparer les solutions des équations (83); en effet, il suffit d'appliquer notre lemme, les conditions  $\mathcal{C}_2$  étant réalisées avec  $\varepsilon = \alpha^{2-h}$  ou  $\alpha \log \alpha^{-1}$ , suivant que  $c_i$  est extérieur ou intérieur à  $\gamma'$ ; dans tous les cas, on peut écrire  $\varepsilon = \beta$ , d'après la notation du n° 33 (p. 130); on aura donc

$$(84) \quad \mathfrak{M}(ZZ_0^{-1} - 1) < k_{25} \beta, \quad \mathfrak{M}(Z_i Z_{i,0}^{-1} - 1) < k_{25} \beta;$$

on observera, d'ailleurs, que  $\mathfrak{M}Z, \mathfrak{M}Z_0, \mathfrak{M}Z_i, \mathfrak{M}Z_{i_0}$  restent bornés (indépendamment de  $\alpha$ ), le long de  $c_i$  et dans leurs régions respectives;

pour le voir, on procédera comme pour  $U^+, \hat{U}$  (n° 31) (1), en remarquant que le long de  $c_i$ ,  $\mathfrak{M}U$  et  $\mathfrak{M}\zeta_i$  restent bornés ainsi que  $\alpha^{f-1} \mathfrak{M}DU$  et  $\alpha^{f-1} \mathfrak{M}D\zeta_i$ .

(1) On tiendra compte aussi du fait que les solutions obtenues sont normalisées (au sens de M. Birkhoff).

Finalement, en vertu de (81) et (84), les problèmes de Riemann (R) et (R<sub>0</sub>) correspondant, d'une part, aux points critiques ( $t_1, \dots, t_{n+3}$ ) et ( $t_1, \dots, t_{n+3}, t_{n+4}$ ), d'autre part, aux groupes de monodromie déterminés par les polygones P et  $\bar{P}$ , posséderont deux solutions Y, Y<sub>0</sub> définies extérieurement aux  $c_i$  par

$$Y \doteq UZ, \quad Y_0 \doteq U_0 Z_0$$

et intérieurement aux  $c_i$  par

$$Y \doteq \zeta_i Z_i, \quad Y_0 \doteq \zeta_{i_0} Z_{i_0}.$$

D'après les propriétés établies pour U, U<sub>0</sub>, Z, Z<sub>0</sub>, les quantités  $\Re Y$  et  $\Re Y_0$  sont bornées (indépendamment de  $\alpha$ ), extérieurement aux  $c_i$ ; dans cette région, on aura

$$Y_0 \doteq Y(1 + \delta_1) \quad \text{avec} \quad \Re \delta_1 < k_{26} \beta;$$

de même, intérieurement aux  $c_i$  ( $i \neq n+3, n+4, 1$ ), on aura

$$Y_0 \doteq Y(1 + \delta_2) \quad \text{avec} \quad \Re \delta_2 < k_{26} \beta.$$

Soit alors C une matrice constante telle que, dans le domaine de l'un des points singuliers extérieurs à  $\gamma'$ , soit <sup>(1)</sup>  $t_i$ , les premiers termes des développements des éléments  $Y_{11}^*$ ,  $Y_{21}^*$  de  $Y^* \doteq CY$  soient égaux à 1; on pourra donc identifier  $Y_{11}^*$ ,  $Y_{21}^*$  avec les intégrales  $g$  et  $h$  attachées au problème (R) (n° 12). Désignons par  $Y_0^*$  la matrice qui joue le même rôle pour le problème (R<sub>0</sub>); on trouvera aisément

$$Y_0^* \doteq C_0 Y_0 \quad \text{avec} \quad C_0 \doteq (1 + \bar{\delta}_2)^{-1} C,$$

( $\bar{\delta}_2$  désignant la valeur de la matrice  $\delta_2$  au point  $x_i$ ); on peut donc prendre

$$Y_0^* \doteq Y^*(1 + \bar{\delta}_3) \quad \text{avec} \quad \Re \bar{\delta}_3 < k_{26} \alpha^{2-h}.$$

On obtiendra de même deux systèmes  $(\tilde{g}, \tilde{h})$ ,  $(\tilde{g}_0, \tilde{h}_0)$  canoniques pour le point  $t_{i+1}$ ; ces systèmes seront formés à l'aide des éléments de deux matrices  $\tilde{Y}^*$  et  $\tilde{Y}_0^*$  que l'on construira par le même procédé que tout à l'heure, et l'on aura

$$\tilde{Y}_0^* \doteq \tilde{Y}^*(1 + \tilde{\delta}_3) \quad \text{avec} \quad \Re \tilde{\delta}_3 < \tilde{k}_{26} \alpha^{2-h}.$$

(1) Au n° 12, ce point était désigné par  $t_k$ .

Mais on peut écrire,  $c$  étant constant,

$$\tilde{Y}^* = cY^*, \quad \tilde{Y}_0^* = c_0Y_0^*;$$

on trouvera alors aussitôt

$$(85) \quad c_0 = cY^*(I + \tilde{\delta}_3)(I + \delta_3)^{-1}(Y^*)^{-1} = c(I + \delta') \quad \text{avec} \quad \Re \delta' < k_{27}\alpha^{2-h}.$$

Or, les intégrales  $(G, H)$ ,  $(G_0, H_0)$  qui résolvent le problème  $\mathcal{P}$  et le problème de Plateau  $\mathcal{P}_0$  relatif à un polygone  $P_0$ , de côtés parallèles à  $\bar{P}$ , de sommets correspondant à  $t_1, \dots, t_{n+1}$ , sont de la forme (n° 12)

$$G = ag, \quad H = bh, \quad G_0 = a_0g_0, \quad H_0 = b_0h_0.$$

et l'on peut écrire

$$\left| \frac{a^2}{b^2} \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}} \right| = 1$$

et une formule analogue pour  $\mathcal{P}_0$ . Comme on a  $c_{21}c_{22} \neq 0$ , on déduit de là et de (85) que  $\left| \frac{a_0^2}{b_0^2} \frac{b^2}{a^2} - 1 \right|$  est de l'ordre de  $\alpha^{2-h}$ .

Enfin, on déterminera  $\frac{a_0}{a} - 1$  en exprimant que les intégrales

$$a^2 \int_{t_p}^{t_q} \left[ |g^2(x)| + \frac{b^2}{a^2} |h^2(x)| \right] dx \quad \text{et} \quad a_0^2 \int_{t_p}^{t_q} \left[ |g_0^2(x)| + \frac{b_0^2}{a_0^2} |h_0^2(x)| \right] dx$$

sont égales [ $t_p, t_q, t_r$  désignant les trois points singuliers  $t_i$  qu'on peut supposer fixes (*cf.* la note 1 de la page 123)]; et comme on peut écrire encore, extérieurement ou intérieurement aux  $c_i$  (mais extérieurement à  $\gamma'$ , hypothèse qu'on peut toujours admettre pour l'arc  $t_p t_q$ )

$$Y_0 = (I + \delta'')Y \quad \text{avec} \quad \Re \delta'' < k_{28}\alpha^{2-h},$$

on aura

$$g_0 = (1 + \delta''_{11})g + \delta''_{12}h, \quad h_0 = \delta''_{21}g + (1 + \delta''_{22})h.$$

et l'on trouvera pour  $\frac{a_0}{a} - 1$  une expression du même ordre. En définitive, on peut donc poser,  $u_0$  désignant la quantité imaginaire conjuguée de  $u$ ,

$$G_0G_0^0 + H_0H_0^0 = GG^0 + HH^0 + \beta\varphi_0,$$

$\varphi_0$  étant une forme d'Hermite en  $G, H, G^0, H^0$ , à coefficients bornés (quel que soit  $\alpha$ ).

Ceci posé, nous calculerons d'abord les  $t'_j$  par les équations (1)

$$\int_{t_p}^{t'_j} (G_0 G_0^0 + H_0 H_0^0) dx = \int_{t_p}^{t_j} (GG^0 + HH^0) dx,$$

ou

$$(86) \quad \int_{t_j}^{t'_j} (GG^0 + HH^0) dx + \int_{t_p}^{t'_j} \beta \varphi_0 dx = 0.$$

Soit  $A'_j$  le point du polygone P défini par  $x = t'_j$ ; si  $t_j$  est extérieur à  $\gamma'$ , la première intégrale de (86), et, par conséquent,  $t'_j - t_j$ , puisque les exposants de G, H sont de l'ordre de  $\alpha$ , est de l'ordre de  $\alpha^{2-h}$ . Si  $t_j$  est intérieur à  $\gamma'$ , on trouvera de même que  $t'_j - t_j$  est de l'ordre de la plus grande des quantités  $\alpha^{2-h}$  et  $\alpha^h \cdot \alpha \log \alpha^{-1}$ , soit  $\alpha^{2-h}$  puisqu'on a supposé  $h > \frac{1}{2}$ . Désignons alors par  $y = \omega(x)$  la substitution linéaire définie par l'égalité entre rapports anharmoniques

$$(y \ t_p \ t_q \ t_r) = (x \ t_p \ t_{q,0} \ t_{r,0});$$

nous poserons en seconde approximation  $t_{j,1} = \omega(t'_j)$ , de sorte que, dans tous les cas,  $t_{j,1} - t_j$  sera de l'ordre de  $\alpha^{2-h}$ .

35. *Introduction d'un algorithme d'approximations successives.* — Cela étant, supposons, d'une manière générale, qu'on ait trouvé les valeurs des  $t_{i,\nu}$  ( $\nu = 1, \dots, m$ ). Posons  $\mathcal{B}_m = \zeta_{i,m}^{-1} U_0$ ,  $\zeta_{i,m}$  désignant la même matrice que  $\zeta_i$ , mais relative au point  $t_{i,m}$  (et non plus  $t_i$ ); d'ailleurs, nous supposons que pour  $\nu = 0, \dots, m-1$ , on ait obtenu l'inégalité

$$(86) \quad |t_{i,\nu+1} - t_{i,\nu}| < k_{2\nu} \alpha^{2-h+h\nu},$$

(avec  $t_{i,0} \equiv t_i$ ); ainsi, pour

$$(87) \quad \mu f < 2 - h \quad (\mu > 1)$$

(et  $\alpha$  assez petit) les  $t_{i,\nu}$  seront intérieurs à une circonférence  $\bar{c}_i$ , con-

---

(1) Pour les deux côtés qui aboutissent en  $A_{n+1}$ , le second membre de la première équation devra être remplacé par la longueur du côté envisagé; mais, d'après le choix de  $t_{n+i}$ , cette longueur ne diffère du second membre que par une quantité de l'ordre de  $\alpha^3 < \alpha^{2-h}$ . Aucune difficulté ne peut donc se produire.



centrique à  $c_i$ , et de rayon  $\alpha^f$ . On résoudra alors sur l'ensemble des  $c_i$  les équations

$$(88) \quad Z_{i,m}^+ \div \mathfrak{B}_m Z_m,$$

en adoptant pour l'entier  $p$  (n° 30) la même valeur, — indépendante de  $\alpha$  et de  $m$  — qui sera fixée plus loin. Puis, on posera, extérieurement aux  $c_i$ ,

$$\begin{cases} Y_m^+ \div U_0^+ Z_m, \\ \widehat{Y}_m \div \widehat{U}_0 Z_m, \end{cases}$$

et intérieurement aux  $c_i$ ,

$$\begin{cases} Y_m^+ \div \zeta_{i,m}^+ Z_{i,m}, \\ \widehat{Y}_m \div \widehat{\zeta}_{i,m} Z_{i,m}, \end{cases}$$

les notations reproduisant celles du n° 30. Procédons alors sur  $Y_m$  comme sur  $Y$  et  $Y_0$ ; on déduira de  $Y_m$  des intégrales canoniques ( $G_m, H_m$ ), et, par suite, de nouvelles valeurs  $t_{i,m+1}$  telles que

$$\int_{t_p}^{t_{i,m+1}} (G_m G_m^0 + H_m H_m^0) dx = \int_{t_p}^{t_{i^0}} (G_0 G_0^0 + H_0 H_0^0) dx,$$

et ainsi de suite. Nous allons montrer que, pour  $p$  pris assez grand (indépendamment de  $\alpha$ ), les  $t_{i,m}$  et les  $Y_m$  tendent vers des limites bien déterminées.

Conformément à la méthode rappelée plus haut (n° 30, p. 121), nous comparerons d'abord les solutions des équations (88) relatives à un seul contour  $c_i$ ; et, pour cela, nous comparerons les solutions des systèmes auxiliaires

$$(89)_{m+1} \quad \begin{cases} P_{m+1}^+ - P_{m+1}^- \div \tau_i^p \mathfrak{B}_{m+1} Q_{m+1}^+, \\ Q_{m+1}^- - Q_{m+1}^+ \div \tau_i^{-p} \mathfrak{B}_{m+1}^{-1} P_{m+1}^- - I, \end{cases}$$

et

$$(89)_m \quad \begin{cases} P_m^+ - P_m^- \div \tau_i^p \mathfrak{B}_m Q_m^+, \\ Q_m^- - Q_m^+ \div \tau_i^{-p} \mathfrak{B}_m^{-1} P_m^- - I, \end{cases}$$

relatifs à  $c_i$  [ $\tau_i = (z - z_i) : \alpha^f$ ;  $z_i$  centre de  $c_i$ ;  $\alpha^f$  rayon de  $c_i$ ]. Pour cela, nous résoudrons par approximations successives le système (89)<sub>m+1</sub> en partant, non pas des matrices initiales de M. Birkhoff, mais

des solutions du système

$$(90)_0 \quad \begin{cases} P_{m+1,1}^+ - P_{m+1,1}^- \div \tau_l^p \mathcal{B}_{m+1} Q_m^+, \\ Q_{m+1,1}^- - Q_{m+1,1}^+ \div \tau_l^{-p} \mathcal{B}_{m+1}^{-1} P_m^- - I. \end{cases}$$

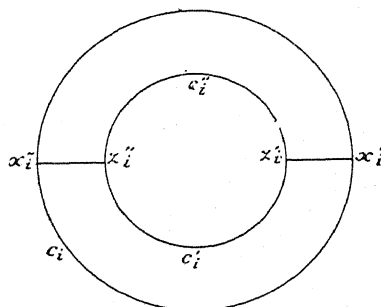
puis en résolvant successivement les systèmes

$$(90)_q \quad \begin{cases} P_{m+1,q+1}^+ - P_{m+1,q+1}^- \div \tau_l^p \mathcal{B}_{m+1} Q_{m+1,q}^+, \\ Q_{m+1,q+1}^- - Q_{m+1,q+1}^+ \div \tau_l^{-p} \mathcal{B}_{m+1}^{-1} P_{m+1,q}^- - I \quad (q = 1, 2, \dots), \end{cases}$$

36. *Convergence des approximations. Comparaison des solutions de  $\bar{\mathfrak{R}}$  et  $\bar{\mathfrak{R}}$ .* — Nous commencerons par comparer les solutions de  $(89)_m$  et  $(90)_0$  et, à cet effet, nous présenterons quelques remarques au sujet de  $\mathcal{B}_{m+1}$ ,

Nous prendrons pour courbe  $D_1$  (n° 30) une ligne fermée constituée par le segment rectiligne  $x'_i z'_i$ , la demi-circonférence  $c'_i$  appartenant

Fig. 4.



à  $\bar{c}_i$ , les segments  $z''_i x''_i$ ,  $x''_i z''_i$ , la demi-circonférence  $c''_i$ , complémentaire de  $c'_i$  et le segment  $z'_i x'_i$ . Un élément quelconque de  $\mathcal{B}_{m+1}$  est holomorphe en tout point de  $c_i$  (sauf en  $x'_i$ ,  $x''_i$ ) et de l'aire comprise entre  $c_i$  et  $D_1$ ; mais les valeurs prises par cet élément sur les deux bords de  $x'_i z'_i$  et de  $z''_i x''_i$  sont différentes. En effet, on a  $\mathcal{B}_{m+1} \div \zeta_{i,m+1}^{-1} U_0$  où  $\zeta$  et  $U$  sont définies sur  $c_i$  comme au n° 30 (p. 120); or les valeurs, soient  $U_0^{(+)}$  et  $U_0^{(-)}$  qu'on en déduit par prolongement, pour  $U_0$ , sur les deux bords de  $x'_i z'_i$ , intérieur et extérieur à  $G$ , sont différentes. D'après (70) on a à l'intérieur de  $c_i$

$$U_0^{(+)} \div [\mathbf{A}_i + \Theta (\mathbf{A}_{i+1} - \mathbf{A}_i)] \mathbf{A}_i^{-1} U_0^{(-)} \div [(1 - \Theta) I + \Theta S_i^{-1}] U_0^{(-)} \div (I + \alpha \Theta S_i) U_0^{(-)},$$

$s_i$  (ainsi que  $s'_i, s''_i$ ) désignant une matrice à coefficients bornés (pour  $\alpha$  infiniment petit); mais  $\zeta_{i,m+1}$  reprenant les mêmes valeurs sur les deux bords (n° 30, p. 120-121) on aura aussi :

$$\mathcal{B}_{m+1}^{(+)} \div (I + \alpha \Theta s'_i) \mathcal{B}_{m+1}^{(-)}.$$

D'autre part, le long des deux bords de  $\zeta''_i x''_i, \zeta_{i,m+1}^{-1}$  a deux séries de valeurs,  $\zeta_{i,m+1}^{-1}$  et  $\zeta_{i,m+1}^{-1} S_i^{-1}$ ; il viendra donc sur les deux bords

$$\mathcal{B}_{m+1}^{(+)} \div \zeta_{i,m+1}^{-1} [(1 - \Theta) S_i + \Theta I] \zeta_{i,m+1} \mathcal{B}_{m+1}^{(-)} \div [I + \alpha (1 - \Theta) s''_i] \mathcal{B}_{m+1}^{(-)}.$$

Cela étant, posons

$$\begin{aligned} f_{m+1,q+1} - f_{m+1,q} &\div \Delta_q f \quad (q \geq 1), \quad f_{m+1,1} - f_{m+1} \div \Delta f, \quad \zeta_{i,m} \zeta_{i,m+1}^{-1} \div I + \varepsilon_m; \\ \mathcal{B}_{m+1} - \mathcal{B}_m &\div \mathcal{C}_m, \\ \mathcal{B}_{m+1}^{-1} - \mathcal{B}_m^{-1} &\div \mathcal{C}'_m, \end{aligned}$$

et admettons qu'on ait obtenu déjà (1)

$$(91) \quad \begin{cases} \mathcal{N}(P_{\nu+1}^- - P_{\nu}^-) < k_{30} \alpha^{2+h\nu} \\ \mathcal{N}(Q_{\nu+1}^+ - Q_{\nu}^+) < k_{30} \alpha^{2+h\nu} \end{cases} \quad (\nu = 0, 1, \dots, m-1);$$

il viendra

$$(92) \quad \begin{cases} \Delta P^+ - \Delta P^- \div \tau_i^p \mathcal{C}_m Q_m^+, \\ \Delta Q^- - \Delta Q^+ \div \tau_i^p \mathcal{C}'_m P_m^-. \end{cases}$$

Mais on a  $\mathcal{C}_m \div \zeta_{i,m}^{-1} \varepsilon_m U_0$  et entre  $c_i$  et  $\bar{c}_i$

$$\mathcal{N} \varepsilon_m < k_{31} \alpha^{2-h+hm+1-\nu_i};$$

utilisant alors les résultats établis pour  $\mathcal{B}_{m+1}$ , on trouvera le long de  $\zeta'_i x'_i \zeta'_i$  (ou de  $\zeta''_i x''_i \zeta''_i$ )

$$(93) \quad \mathcal{N} \int \tau_i^p D(z, x) \mathcal{C}_m \cdot Q_m^+(z) dz < k_{32} \alpha \int |\tau_i^p| \mathcal{N} \mathcal{C}_m \mathcal{N} Q_m^+ \left| \frac{\Theta}{z-x} dz \right|.$$

Mais  $\Theta : (z-x)$  est au plus de l'ordre de  $\frac{\Theta}{z-x'_i} \times \frac{1}{x''_i-x'_i}$ , produit dont

le premier facteur est borné (et même infiniment petit) avec  $(z-x'_i)$  ( $x''_i-x'_i$ )<sup>-1</sup>; de plus, d'après la remarque faite pour  $\mathcal{N}Z_0$  (n° 34, p. 132)

(1) Ces inégalités s'obtiendraient pour  $\nu = 0$  par la même méthode que dans le cas général.

et d'après (91),  $\mathfrak{M}Q_m^+$  est borné; dans ces conditions le premier membre de (92) sera inférieur à  $k_{33}\alpha^{4-h+hm-\mu f} < k_{33}\alpha^{2+hm}$ , pour

$$(94) \quad \mu f < 2 - h.$$

De même,  $z$  appartenant à  $\bar{c}_i$  et  $x$  étant intérieur à  $c_i$ , on aura

$$\mathfrak{M}D(z, x) \mathfrak{C}_m < k_{34}\alpha^{2-h+hm+1-2\mu f};$$

étendu à  $\bar{c}_i$  le premier membre de (93) sera inférieur à

$$k_{35}\alpha^{\mu(\mu-1)f} \times \alpha^{2-h+hm+1-\mu f} < k_{35}\alpha^{2+hm}$$

si l'on a

$$(95) \quad \rho(\mu - 1)f > h - 1 + \mu f.$$

Enfin, on trouvera

$$(96) \quad \mathfrak{M} \left[ \mathfrak{C}_m(x) \int_{\bar{c}_i} \frac{\tau^{\rho} Q_m^+(z)}{z-x} dz \right] < k_{36}\alpha^{2-h+hm+1-f} \times \alpha^{(p+1)(\mu-1)f} < k_{36}\alpha^{2+hm},$$

pourvu que l'on ait

$$(97) \quad (p+1)(\mu-1)f > f + h - 1.$$

On étudiera de même (92)<sub>2</sub> en remplaçant  $\bar{c}_i$  par la circonférence concentrique de rayon  $\alpha^{\mu'f}$  ( $f^{-1} < \mu' < 1$ ); l'inégalité correspondant à (94) sera toujours vérifiée; (95) et (97) seront remplacées par

$$(95') \quad \rho(1-\mu')f > (2-\mu')f + h - 1,$$

$$(97') \quad \rho(1-\mu')f > f + h - 1.$$

Or (95) et (95') entraînent (97) et (97)'; de plus (94) est identique à (87); ainsi  $h, f, \mu, \mu', p$  sont astreints seulement à vérifier les inégalités

$$(A) \quad \begin{cases} 1 < 2h < 2, & f > 1, & 0 < \mu' < 1 < \mu, & \mu f < 2 - h, \\ \rho(\mu - 1)f > h - 1 + \mu f, & \rho(1 - \mu')f > h - 1 + (2 - \mu')f; \end{cases}$$

en outre  $p$  doit être pris assez grand (soit  $p > p_0$ ) de manière que la construction de la solution du problème de Plateau  $\mathfrak{P}$  relatif au polygone à  $n+3$  côtés  $P$  soit assurée.

Dans ces conditions on aura, à l'extérieur <sup>(1)</sup> de  $c_i$   $\Delta P^- < k_{37} \alpha^{2+hm}$  et à l'intérieur de  $c_i$  :  $\Delta Q^+ < k_{37} \alpha^{2+hm}$ .

Soit alors  $\bar{d}_i$  un cercle concentrique à  $c_i$ , de rayon  $k\alpha^{p/l}$  ( $k < 1$ ); faisons jouer à  $\bar{d}_i$  le rôle de la courbe  $C'_i$  du n° 30 (p. 118);  $x$  étant intérieur à  $\bar{d}_i$  ou sur  $\bar{d}_i$ ,  $\mathfrak{N}\Delta P^+(x)$  sera de l'ordre de  $\alpha^{2+hm}$  pourvu : 1° qu'il en soit de même du premier membre de (96) (pour la position actuelle de  $x$ ) <sup>(2)</sup>; 2° et que  $\tau_i^p \mathcal{C}_m Q_m^+$  soit du même ordre sur  $\bar{d}_i$ , conditions qui entraînent (95). On démontrerait de même qu'extérieurement à un cercle  $\tilde{d}_i$  concentrique à  $c_i$ , de rayon  $k\alpha^{p/l}$  ( $k > 1$ ) et sur  $\tilde{d}_i$ ,  $\mathfrak{N}\Delta Q^-(x)$  est de l'ordre de  $\alpha^{2+hm}$ , si (95)' est vérifiée.

Ce point acquis, on déduit de (90)<sub>q</sub> et (90)<sub>q-1</sub> :

$$\begin{aligned} \Delta_q P^+ - \Delta_q P^- &= \tau_i^p \mathcal{C}_{m+1} \Delta_{q-1} Q^+, \\ \Delta_q Q^- - \Delta_q Q^+ &= \tau_i^p \mathcal{C}_{m+1}^{-1} \Delta_{q-1} P^-. \end{aligned}$$

Or, sur  $c_i$  on a  $\mathfrak{N}\mathcal{C}_{m+1} < k_{38}$ ,  $\alpha^{1-l} \mathfrak{N}D\mathcal{C}_{m+1} < k_{38}$ ; procédant alors comme dans les approximations successives de M. Birkhoff, on voit que si  $p$  est supérieur à un nombre  $p_1$  indépendant de  $\alpha$  et de  $m$ , on aura dans les régions marquées par les indices

$$(98) \quad \begin{cases} \mathfrak{N}\Delta_q P^- < \frac{1}{2} \mathfrak{N}\Delta_{q-1} Q^+, \\ \mathfrak{N}\Delta_q Q^+ < \frac{1}{2} \mathfrak{N}\Delta_{q-1} P^-; \end{cases}$$

et, comme tout à l'heure, on aurait des inégalités analogues pour  $\mathfrak{N}\Delta_q P^+$  et  $\mathfrak{N}\Delta_q Q^-$  extérieurement à la couronne  $(\bar{d}_i, \tilde{d}_i)$ .

Rapprochant ces inégalités de celles qu'on a obtenues pour  $\Delta P$  et  $\Delta Q$  on en déduit aussitôt : 1° la convergence des  $P_{m+1,q}^{\pm}$ ,  $Q_{m+1,l}^{\pm}$  vers une solution  $P_{m+1}^{\pm}$ ,  $Q_{m+1}^{\pm}$  de (89)<sub>m+1</sub>; 2° la validité des inégalités

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(Q_{m+1}^+ - Q_m^+) &< k_{39} \alpha^{2+hm}, \\ \mathfrak{N}(P_{m-1}^- - P_m^-) &< k_{39} \alpha^{2+hm}. \end{aligned}$$

dans les régions intérieure et extérieure à  $c_i$  : les inégalités (91) sont

(1) D'une manière plus précise, si  $x$  est à une distance  $d$  de  $c_i$  on pourra multiplier les seconds membres des inégalités par  $\alpha^l : d$ .

(2) L'intégrale relative à  $D\mathcal{C}_m$  n'introduit aucune inégalité nouvelle.

donc vérifiées encore pour  $\nu = m$  (et  $\alpha$  suffisamment petit); 3° la validité des inégalités

$$(99) \quad \begin{cases} \Re(P_{m+1}^+ - P_m^+) < k_{i_0} \alpha^{2+hm}, \\ \Re(Q_{m+1}^- - Q_m^-) < k_{i_0} \alpha^{2+hm}. \end{cases}$$

sauf peut-être dans les couronnes  $(\bar{d}_i, \tilde{d}_i)$ . Enfin, il est intéressant d'observer que les diverses conditions imposées à  $p$  permettent de prendre pour cet exposant *une valeur indépendante de  $m$  et ne dépendant de  $\alpha$  que par l'intermédiaire de  $p_0$* .

Comme les déterminants  $|P_0^+|$  et  $|I + Q_0^-|$  ne s'annulent pas dans les régions  $+$  et  $-$ , il en est de même de  $|P_m^+|$  et  $|I + Q_m^-|$  et l'on peut remplacer les inégalités (99) par les égalités

$$(100) \quad \begin{cases} P_{m+1}^+ \div P_m^+ (I + \alpha^{2+hm} \theta'_m), \\ I + Q_{m+1}^- \div (I + Q_m^-) (I + \alpha^{2+hm} \theta''_m), \end{cases}$$

où  $\theta'_m$  et  $\theta''_m$  sont des matrices à éléments bornés (quels que soient  $\alpha$  et  $m$ ); à une distance  $d$  du centre de  $c_i$  on aurait

$$I + Q_{m+1}^- \div (I + Q_m^-) \left( I + \alpha^{2+hm+f} \frac{\theta''_m}{d} \right).$$

Les résultats précédents ont été établis dans le cas d'un contour unique  $c_i$ ; on les étendra au cas d'un contour formé de  $n+4$  circonférences par le procédé du n° 30; on trouvera ainsi que dans ce cas les seconds membres de (100) doivent être multipliés par une matrice telle que  $I + \alpha^{2+hm} \alpha^{f-1} \log \alpha^{-1} \theta_m^w$  ( $\theta_m^w$ ,  $\theta_m^w$  matrices à éléments bornés quels que soient  $\alpha$  et  $m$ ); comme on a  $f > 1$  ce dernier facteur est négligeable.

Cela étant, on déduit de (100) les relations

$$Z_{i,m+1} \div Z_{i,m} (I + \alpha^{2+hm} \theta'_m), \quad Z_{m+1} \div Z_m (I + \alpha^{2+hm} \theta''_m),$$

et par suite le long de  $C$  et extérieurement aux  $c_i -$ , sauf peut-être à l'intérieur des couronnes  $(c_i, \tilde{d}_i)$

$$(101) \quad Y_{m+1} \div Y_m (I + \alpha^{2+hm} \theta''_m),$$

*Je dis que la relation (101) est encore vérifiée à l'intérieur des couronnes précédentes.*

En effet, les  $Y$  sont indépendants du choix des  $c_i$  (ou de  $f$ ), et, par

suite, du choix des couronnes précédentes. Or  $f, \mu, \mu'$  sont seulement assujettis à vérifier les inégalités (A); mais il est toujours possible de trouver deux systèmes  $(f_1, \mu_1, \mu'_1), (f_2, \mu_2, \mu'_2)$ , satisfaisant à ces inégalités et tels que  $f_1 \mu_1 < f_2 \mu'_2$ . La couronne  $(\bar{d}_i, \bar{d}'_i)$  relative au second système sera donc intérieure à la circonférence  $\bar{d}_i$  relative au premier; par suite (101) sera encore valable dans la couronne (1).

Procédant comme plus haut (n° 34, p. 134), on obtiendra une formule

$$G_{m+1} G_{m+1}^0 + H_{m+1} H_{m+1}^0 = G_m G_m^0 + H_m H_m^0 + \alpha^{2+hm} \varphi_m.$$

où  $\varphi_m$  est une forme d'Hermite en  $G_m, H_m$ , à coefficients bornés quels que soient  $\alpha$  et  $m$ , et l'on en déduira que (86) est encore valable pour  $\nu = m$ . Nos approximations sont donc régulièrement convergentes pour  $\alpha$  assez petit; les  $t_{i,m}$  tendent vers des valeurs  $\bar{t}_i$ , les  $Y_m$  vers une matrice  $\bar{Y}$  telle qu'extérieurement aux  $c_i$  on a  $\bar{Y} = Y_0 (1 + \delta)$ , avec  $\mathfrak{M} \delta < k_{s,1} \alpha^{2-h}$ . D'après un raisonnement classique on peut affirmer que  $\bar{Y}$  fournit la solution d'un problème de Riemann ( $\bar{R}$ ) dont le groupe de monodromie coïncide avec celui de  $(R_0)$ , tandis que les points singuliers ont précisément pour situations les limites  $\bar{t}_i$  des  $t_{i,m}$ . Si  $\bar{G}$  et  $\bar{H}$  se déduisent de  $\bar{Y}$  comme  $G_m$  et  $H_m$  de  $Y_m$  ( $\bar{G}$  et  $\bar{H}$  sont d'ailleurs les limites de  $G_m$  et  $H_m$ ) on aura, d'après la définition de  $t_{j,m}$ ,

$$\int_{t_p}^{\bar{t}_j} (\bar{G} \bar{G}^0 + \bar{H} \bar{H}^0) dx = \text{longueur } \Lambda_p \Lambda_{p+1} \dots \Lambda_j;$$

---

(1) En s'appuyant sur (98) on en déduira que  $\mathfrak{M} \Delta P^+$  et  $\mathfrak{M} \Delta Q^-$  sont aussi de l'ordre de  $\alpha^{2+hm}$  intérieurement et extérieurement aux  $c_i$ , ce qui permettra de simplifier le processus des approximations: on calculera des matrices  $\dot{Y}_m$  et des quantités  $\dot{t}_{i,m}$  à partir des  $P_{m+1,1}^+$  et des  $Q_{m+1,1}^-$  (sans avoir à former les  $P_{m+1,q}$ ,  $Q_{m+1,q}$ ); pour résoudre sur  $n+4$  contours les équations (90)<sub>0</sub> on additionnera les solutions correspondant, chacune, à un contour unique (en ne prenant chaque fois, dans chaque somme, qu'une seule matrice affectée de l'indice +); la convergence des approximations  $\dot{t}_{i,m}, \dot{Y}_m$  vers une solution du problème de Plateau se démontrera comme dans le texte. Un raisonnement connu permettra d'établir qu'elle coïncide avec celle du texte.

ainsi  $\bar{G}$  et  $\bar{H}$  fournissent la solution du problème de Plateau  $\bar{\mathfrak{X}}$  pour le polygone  $\bar{P}$ .

37. *Convergence des solutions des problèmes  $\mathfrak{X}_n$  vers une solution du problème  $\mathfrak{X}$ .* — Ceci posé, soit  $x$  un point quelconque extérieur aux  $c_i$  et intérieur à  $C$ ; d'après les formules reliant  $Y$  et  $Y_0$  (n° 34),  $Y_0$  et  $\bar{Y}$  (n° 36), on aura

$$\bar{Y}(x) = Y(x)(1 + \lambda) \quad \text{avec} \quad \mathfrak{N}\lambda < k_{12}\beta.$$

Si l'on réintroduit l'entier  $n = 1 : \alpha$ , on pourra écrire,  $\mathfrak{N}Y$  étant borné indépendamment de  $x$ , extérieurement aux  $c_i$ ,

$$\mathfrak{N}[\bar{Y}(x) - Y(x)] < \frac{k_{43}}{n^{2-h}} \quad \text{ou} \quad \frac{k_{43}}{n} \log n,$$

selon que  $x$  est extérieur ou intérieur à  $\gamma'$ . Or imaginons qu'on construise successivement les polygones  $(^1)P_n, \dots, P_{2n}$  en introduisant chaque fois un nouveau sommet, pris sur le contour continu  $\mathcal{C}$  entre deux sommets consécutifs du premier polygone  $P_n$ . Le nombre des polygones précédents tels que la circonférence  $\gamma'$  correspondante contienne le point  $x$  à son intérieur est au plus de l'ordre de  $n^{1-h}$ ; entre les matrices  $Y(x)$  correspondant à  $P_n$  et  $P_{2n}$ , soient  $Y^{(0)}(x)$  et  $Y^{(1)}(x)$ , on peut donc écrire la relation

$$\mathfrak{N}[Y^{(1)}(x) - Y^{(0)}(x)] < \frac{k \log n}{n^h},$$

$k$  étant indépendant de  $n$ . Procédons sur les  $P_{2n}$  comme sur  $P_n$  pour en déduire des polygones  $P_{4n}, P_{8n}, \dots, P_{2^q n}$ ; d'après la remarque de la page 141, l'entier  $p$  ne dépendra pas de  $q$ , et l'on aura entre les matrices correspondantes des inégalités telles que

$$\mathfrak{N}[Y^{(q+1)}(x) - Y^{(q)}(x)] < \frac{k \log(2^q n)}{(2^q n)^h};$$

$k$  étant indépendant de  $q$ . On en déduit que les matrices  $Y^{(q)}(x)$  correspondant aux polygones  $P_{2^q n}$  inscrits dans  $\mathcal{C}$  et fournissant la solution

---

(1) Ici, la notation  $P_n$  désigne un polygone de  $n$  côtés (et non plus  $n+3$ ). On peut toujours supposer que les matrices  $Y$  figurant dans ce numéro sont celles dont les éléments  $Y_{11}, Y_{21}$  coïncident avec les intégrales  $G$  et  $H$ .



d'un problème de Plateau  $\mathcal{P}_{2^n}$  convergent uniformément, dans tout domaine intérieur à  $C$ , vers une matrice-limite  $\mathcal{Y}(x)$ . D'ailleurs, sur  $C$ , les intégrales  $X, Y, Z$  construites à l'aide des formules (1) appliquées aux éléments  $Y_{11}^n, Y_{21}^n$  de  $Y^n(x)$  sont continues; étendues à  $C$ , elles fournissent la représentation des polygones  $P_{2^n}$  et convergent donc uniformément vers la représentation du contour  $\mathcal{C}$  (à l'aide de  $\mathcal{Y}$ ). On en déduit qu'à l'intérieur de  $C$  les trois intégrales précédentes convergent uniformément vers trois fonctions harmoniques qui fournissent pour le problème de Plateau relatif à  $\mathcal{C}$  une solution analytique bien déterminée.

