

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

FRANCIS PERRIN

## Étude mathématique du mouvement brownien de rotation

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 45 (1928), p. 1-51

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1928\\_3\\_45\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1928_3_45__1_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1928, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ANNALES  
SCIENTIFIQUES  
DE  
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

---

ÉTUDE MATHÉMATIQUE  
DU  
MOUVEMENT BROWNIEN DE ROTATION

PAR M. FRANCIS PERRIN

---

RÉSUMÉ.

Pour déduire, des lois élémentaires du mouvement brownien de rotation d'une sphère, la probabilité d'une rotation donnée au bout d'un temps quelconque, on s'est heurté notamment à la difficulté qui résulte de l'impossibilité de décomposer une rotation finie en composantes indépendantes.

Dans les premiers Chapitres de ce Mémoire, le problème est résolu en généralisant l'équivalence bien connue des lois du mouvement brownien de translation et de celles de la diffusion (ou de la conductibilité thermique), et en intégrant les équations aux dérivées partielles obtenues par des développements en séries de fonctions fondamentales.

L'étude du mouvement brownien de rotation d'une sphère est faite en deux étapes :

I. Le mouvement brownien angulaire d'une direction unique, liée à la sphère, correspond à une diffusion sur la surface d'une sphère de rayon 1. De l'équation aux dérivées partielles correspondante, on déduit :

1° La valeur moyenne au temps  $t$  du carré du sinus de l'angle d'écart  $\omega$

$$\overline{\sin^2 \omega} = \frac{2}{3}(1 - e^{-6\mathcal{R}t}),$$

formule rigoureuse qui remplace la formule asymptotique

$$\overline{\omega^2} = 4\mathcal{R}t;$$

2° Le développement de la fonction  $f(\omega, t)$ , donnant la probabilité d'un écart angulaire quelconque, en série de polynomes sphériques et d'exponentielles par rapport au temps.

II. Le mouvement brownien d'ensemble de la sphère autour de son centre est représentable par une diffusion sur une hypersphère à trois dimensions, et la fonction de probabilité correspondante  $g(\Phi, t)$  a un développement analogue à celui de la fonction  $f(\omega, t)$ .

Le problème plus simple du mouvement brownien de rotation autour d'un axe fixe équivaut à une diffusion sur une circonférence (Chapitre III). Deux développements en série de types différents sont obtenus pour la fonction de probabilité correspondante  $h(\alpha, t)$ .

D'une façon générale (Chapitre IV), la fonction de probabilité relative au mouvement brownien angulaire d'une direction liée à une hypersphère à  $p$  dimensions se déduit, suivant la parité de  $p$ , de la fonction  $h(\alpha, t)$  ou de la fonction  $f(\omega, t)$ , par des dérivations par rapport à  $\cos \alpha$  ou  $\cos \omega$ . Ce résultat prouve notamment que toutes ces dérivées sont positives.

Une étude des fonctions obtenues  $f, g, h$  et de leurs relations est faite au Chapitre V.

Enfin, le problème du mouvement brownien d'ensemble d'une hypersphère à trois dimensions est résolu au Chapitre VI par des méthodes analogues.

La deuxième partie de ce travail (dernier Chapitre) est consacrée à l'exposé d'une méthode toute différente permettant l'étude des problèmes de mouvement brownien. Cette méthode consiste à résoudre d'une façon générale l'équation fonctionnelle intégrale qui exprime l'indépendance et l'équivalence des déplacements ou des rotations

successives. Cette équation admet comme solutions une infinité de lois de probabilité résultant de l'*itération* indéfinie de distributions de probabilité infiniment ramassées, suivant des lois quelconques, au voisinage de l'origine (représentant la position initiale). Si la distribution de probabilité dont on part est effectivement tout entière ramassée autour de l'origine, c'est-à-dire nulle, ou infiniment petite du second ordre au moins en dehors d'un domaine infiniment petit entourant l'origine, la loi limite d'itération est toujours la même; elle correspond alors à la loi ordinaire de Gauss et donne la solution véritable du problème de mouvement brownien. Mais les solutions obtenues à partir d'une loi de probabilité qui soit au premier ordre seulement infiniment petite à des distances finies de l'origine, sont de nature tout à fait différente et sont physiquement exclues par l'impossibilité des vitesses infinies.

La condition mise ainsi en évidence, qui est nécessaire et suffisante pour que le résultat d'un nombre infini d'itérations conduise à la loi de type Gauss, l'est d'ailleurs naturellement aussi (quoiqu'on ne la mette pas en général en évidence) pour qu'on puisse démontrer l'équivalence des lois du mouvement brownien et de celles de la diffusion.

---

## INTRODUCTION.

---

On appelle *mouvement brownien* les déplacements parfaitement irréguliers, dus à l'agitation thermique, d'une particule solide dans un milieu doué de viscosité. Les problèmes fondamentaux relatifs au mouvement brownien de translation sont étroitement liés à d'autres théories importantes de physique mathématique (diffusion dans les solutions et conductibilité thermique, loi des erreurs de Gauss); ils sont résolus depuis longtemps. La théorie du mouvement brownien de rotation était beaucoup moins avancée, seules les lois élémentaires en avaient été données par Einstein. Ce phénomène se prête pourtant aussi à des mesures directes donnant les grandeurs moléculaires <sup>(1)</sup>,

---

<sup>(1)</sup> Jean PERRIN, *Comptes rendus*, 149, 1909, p. 549, et *les Atomes*.

et intervient de façon essentielle dans diverses questions, notamment dans la dépolarisation plus ou moins grande des lumières de fluorescence, et la détermination correspondante des durées d'émission lumineuse.

Du point de vue mathématique, l'étude statistique des rotations irrégulières, ou plus exactement des déplacements continus mais sans dérivée (axe instantané de rotation indéterminé) d'une sphère autour de son centre, est un problème intéressant de probabilité géométrique, qui conduit notamment à l'obtention de fonction de type Gauss sur des multiplicités fermées (sphères et hypersphères).

Je tiens à exprimer ici mes très vifs remerciements à M. Émile Borel, qui a bien voulu s'intéresser à ce travail; j'ai en particulier développé le dernier Chapitre à la suite de questions qu'il m'avait posées.

\* \* \*

Les lois élémentaires du mouvement brownien de rotation d'une petite sphère immergée librement dans un liquide, sont tout à fait analogues à celles du mouvement brownien de translation. Si l'on considère un intervalle de temps  $\Delta t$  suffisamment court pour que la rotation totale subie par la sphère soit en fait toujours assez petite pour pouvoir être décomposée en trois rotations indépendantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  effectuées autour de trois axes perpendiculaires quelconques, on démontre qu'il résulte de l'isotropie et de l'irrégularité du mouvement (indépendance des rotations successives) (1) que les valeurs moyennes de ces rotations et de leurs produits deux à deux sont nulles, et celles de leurs carrés égales entre elles et proportionnelles au temps, ce que

---

(1) Cette indépendance ne peut pas physiquement subsister pour des intervalles de temps réellement infiniment petits, mais elle est encore pratiquement complète pour des durées telles que les déplacements moyens correspondants soient extrêmement petits et cela suffit pour qu'on puisse en déduire les lois relatives aux déplacements finis de la particule.

nous écrivons

$$(1) \quad \begin{cases} \bar{\alpha} = \bar{\beta} = \bar{\gamma} = 0, & \bar{\beta\gamma} = \bar{\gamma\alpha} = \bar{\alpha\beta} = 0, \\ \bar{\alpha^2} = \bar{\beta^2} = \bar{\gamma^2} = 2 \mathcal{R} \Delta t. \end{cases}$$

D'une façon plus précise, la probabilité que les composantes de la rotation subie par la sphère pendant le temps  $\Delta t$  soient comprises respectivement entre  $\alpha$  et  $\alpha + d\alpha$ ,  $\beta$  et  $\beta + d\beta$ ,  $\gamma$  et  $\gamma + d\gamma$ , est dans les mêmes conditions

$$(2) \quad \left( \frac{1}{4\pi \mathcal{R} \Delta t} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{4\mathcal{R} \Delta t}} d\alpha d\beta d\gamma.$$

On sait qu'Einstein <sup>(1)</sup> a de plus montré que le coefficient  $\mathcal{R}$  (qui correspond au coefficient de diffusion dans la théorie du mouvement brownien de translation) peut être déduit du théorème d'équipartition de l'énergie cinétique et de la loi de Stokes donnant le couple de frottement qui s'oppose à la rotation d'une sphère de rayon  $r$  plongée dans un liquide de viscosité  $\eta$ . En désignant par  $T$  la température absolue, par  $R$  la constante des gaz, et par  $N$  le nombre d'Avogadro, on trouve que

$$(3) \quad \mathcal{R} = \frac{1}{2} \frac{RT}{N} \frac{1}{4\pi r^3 \eta}.$$

Mais ces formules cessent d'être applicables quand les rotations ne sont plus très petites, c'est-à-dire quand  $\mathcal{R} \Delta t$  devient notable, car on ne peut plus alors décomposer la rotation subie par la sphère en trois rotations effectuées dans un ordre quelconque autour de trois axes perpendiculaires. Dans ce Mémoire nous nous proposons de montrer comment on peut résoudre le problème qui se pose alors, de la composition d'une infinité de rotations infiniment petites indépendantes, et déterminer ainsi d'une façon générale la probabilité d'une rotation donnée au bout d'un temps quelconque.

---

<sup>(1)</sup> *Ann. der Physik.*, 49, 1906, p. 371.

## CHAPITRE I.

## MOUVEMENT BROWNIEN D'UNE DIRECTION LIÉE A LA SPHÈRE.

Nous commencerons par étudier les déplacements angulaires d'un seul rayon déterminé OC de la sphère immergée S, ou, ce qui revient au même, les déplacements du point M où une parallèle à ce rayon menée par le centre d'une sphère fixe  $\Sigma$  de rayon 1 rencontre cette sphère. Ces déplacements sont caractérisés par la probabilité  $f(\omega, t)d\Omega$  que le rayon considéré se trouve au bout du temps  $t$  dans un angle solide infiniment petit  $d\Omega$  faisant avec sa direction initiale l'angle  $\omega$ .

Si l'on considère deux rayons OA et OB formant avec OC un trièdre trirectangle, on voit que le déplacement du rayon OC résulte à chaque instant des rotations élémentaires autour de ces rayons, et que le déplacement correspondant du point M a pour composantes  $s_1$  et  $s_2$  suivant deux directions perpendiculaires tangentes à la sphère  $\Sigma$  les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  de ces rotations. D'après les relations (1) on a donc

$$(4) \quad \overline{s_1} = \overline{s_2} = 0, \quad \overline{s_1 s_2} = 0, \quad \overline{s_1^2} = \overline{s_2^2} = 2R \Delta t.$$

Ces relations expriment un mouvement brownien de déplacement du point M sur la surface sphérique  $\Sigma$ . Un raisonnement identique à celui qu'on fait dans le cas du plan montre qu'il y a équivalence entre ces lois élémentaires et celles de la diffusion (1), c'est-à-dire qu'il résulte

(1) Le raisonnement en question suppose, aussi bien dans le cas du plan, que sur une multiplicité quelconque, que les valeurs moyennes des termes d'ordre supérieur au deuxième formés avec les composantes du déplacement, sont nulles, ou tout au moins du second ordre par rapport à  $\Delta t$  :

$$\overline{s_1^3} = \overline{s_2^3} = B_k \Delta t^2 + \dots$$

Cette hypothèse supplémentaire est nécessaire bien qu'on ne la mette pas en évidence en général. Elle est d'ailleurs bien indépendante des conditions (4), car on peut concevoir des déplacements désordonnés satisfaisant à ces dernières conditions et pour lesquels

$$\overline{s_1^3} = \overline{s_2^3} = A_k \Delta t + B_k \Delta t^2 + \dots \quad (A_k \neq 0).$$

Il n'y aurait plus alors équivalence avec les lois de la diffusion. De tels déplacements sont d'ailleurs physiquement impossibles (ils supposent des vitesses réellement infinies), mais nous en donnerons au dernier Chapitre un exemple théorique.

des relations précédentes que la fonction de probabilité  $f(\omega, t)$  satisfait à l'équation de la diffusion sur la sphère  $\Sigma$ , le coefficient de diffusion étant égal à  $\mathcal{R}$ . Pour obtenir l'expression de cette équation on peut, soit appliquer la formule générale que nous donnons plus loin (p. 15), soit écrire que le produit par  $\mathcal{R}$  du flux du gradient de la fonction  $f$  à travers le contour d'un petit élément  $d\Omega = \sin \omega d\omega d\varphi$  de  $\Sigma$  est égal à la dérivée par rapport au temps de  $f d\Omega$ , ce qui donne

$$(5) \quad \mathcal{R} \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \sin \omega \frac{\partial f}{\partial \omega} \right) = \sin \omega \frac{\partial f}{\partial t}$$

ou

$$(6) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} + \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \frac{\partial f}{\partial \omega} = \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial f}{\partial t}.$$

La fonction de probabilité  $f(\omega, t)$  doit de plus satisfaire à la condition

$$(7) \quad \oint_{\Sigma} f d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} f(\omega, t) \sin \omega d\omega = 1$$

et d'autre part pour  $t$  infiniment petit elle doit tendre vers zéro quel que soit  $\omega$ , sauf au voisinage de  $\omega = 0$ , où elle devient alors infinie,

$$(8) \quad f(\omega, 0) = 0, \quad \text{sauf} \quad f(0, 0) = +\infty.$$

Avant d'effectuer l'intégration de l'équation aux dérivées partielles (6), nous allons montrer qu'on peut obtenir simplement, sans qu'il soit nécessaire de connaître explicitement la fonction  $f(\omega, t)$ , une formule rigoureuse donnant la valeur moyenne au temps  $t$  du carré du sinus de l'angle d'écart  $\omega$  <sup>(1)</sup>. En effet, désignons par  $I(t)$  cette fonction du temps

$$(9) \quad I(t) = \overline{\sin^2 \omega} = 2\pi \int_0^{\pi} \sin^2 \omega f(\omega, t) \sin \omega d\omega.$$

En dérivant sous le signe d'intégration, on obtient

$$I'(t) = 2\pi \int_0^{\pi} \sin^2 \omega \frac{\partial f}{\partial t} \sin \omega d\omega$$

(1) F. PERRIN, *Comptes rendus*, 181, 1925, p. 514.



ou, en remplaçant  $\frac{df}{dt}$  par sa valeur tirée de l'équation (5),

$$I'(t) = 2\pi R \int_0^\pi \sin^2 \omega \frac{d}{d\omega} \left( \sin \omega \frac{df}{d\omega} \right) d\omega,$$

d'où, en intégrant deux fois par parties (les termes intégrés sont nuls aux limites),

$$I'(t) = 4R 2\pi \int_0^\pi f(\omega, t) \sin \omega d\omega - 6R 2\pi \int_0^\pi \sin^2 \omega f(\omega, t) \sin \omega d\omega,$$

c'est-à-dire, d'après les relations (7) et (9),

$$(10) \quad I'(t) = 4R - 6R I(t).$$

L'intégration de cette équation différentielle donne

$$I(t) = C e^{-6Rt} + \frac{2}{3}$$

et, comme on doit avoir  $I(0) = 0$ , on obtient finalement

$$(11) \quad \overline{\sin^2 \omega} = \frac{2}{3} (1 - e^{-6Rt}).$$

Cette formule est l'analogie de celle qui donne le carré moyen du déplacement dans le cas du mouvement brownien de translation.

Pour étudier complètement le mouvement brownien de rotation, il faut considérer comme nous le ferons plus loin, non pas seulement une direction, mais un trièdre lié à la sphère S. Si  $\alpha_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) sont les neuf cosinus qui déterminent la position d'un tel trièdre à l'instant  $t$  par rapport à sa position initiale, on a

$$\overline{\alpha_{11}^2} = \overline{\cos^2 \omega} = 1 - \overline{\sin^2 \omega}, \quad \overline{\alpha_{11}^2} + \overline{\alpha_{12}^2} + \overline{\alpha_{13}^2} = 1$$

et comme par symétrie

$$\overline{\alpha_{12}^2} = \overline{\alpha_{13}^2},$$

on voit que d'une façon générale

$$(12) \quad \overline{\alpha_{ii}^2} = \frac{1}{3} (1 + 2 e^{-6Rt}), \quad \overline{\alpha_{ik}^2} = \frac{1}{3} (1 - e^{-6Rt}) \quad (i \neq k).$$

On a d'ailleurs, encore par symétrie (1),

$$(12 \text{ bis}) \quad \overline{\alpha_{ik} \alpha_{jk}} = 0 \quad (i \neq j).$$

Enfin un calcul analogue à ceux que nous venons de faire donne

$$(13) \quad \overline{\alpha_{ii}} = \overline{\cos \omega} = e^{-2\mathcal{R}t}, \quad \overline{\alpha_{ik}} = 0.$$

*Détermination explicite de la fonction  $f(\omega, t)$ .* — Les conditions (5), (7) et (8) déterminent la fonction  $f(\omega, t)$  et l'on peut en déduire une expression analytique simple de cette fonction. Posons

$$(14) \quad \cos \omega = u, \quad f(\omega, t) = F(u, t).$$

L'équation (5) devient

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left[ (1 - u^2) \frac{\partial F}{\partial u} \right] = \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial F}{\partial t}.$$

La forme de cette équation aux dérivées partielles suggère des solutions particulières de la forme

$$F_n(u, t) = \varphi_n(t) P_n(u),$$

$P_n(u)$  étant le  $n^{\text{ième}}$  polynôme de Legendre qui satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d}{du} \left[ (1 - u^2) \frac{dP_n(u)}{du} \right] = -n(n+1) P_n(u);$$

$F_n(u, t)$  sera donc une solution de l'équation (15) si

$$\varphi_n'(t) = -n(n+1)\mathcal{R} \varphi_n(t),$$

c'est-à-dire si

$$\varphi_n(t) = c_n e^{-n(n+1)\mathcal{R}t}.$$

Il en résulte que toute série de la forme

$$(16) \quad F(u, t) = c_0 + c_1 P_1(u) e^{-2\mathcal{R}t} + \dots + c_n P_n(u) e^{-n(n+1)\mathcal{R}t} + \dots$$

satisfait formellement à l'équation (15) quels que soient les coef-

(1) Les formules (12) et (13), appliquées aux grosses molécules des corps fluorescents dissous, suffisent pour calculer rigoureusement l'influence de la viscosité du solvant sur la polarisation de la lumière qu'ils émettent (F. PERRIN, *J. de Physique*, t. VII, 1926, p. 390).

ficients constants  $c_n$ . Cette série représente la solution générale de l'équation (15), car on peut déterminer les  $c_n$  de façon que la fonction  $F(u, t)$  ainsi définie se réduise pour  $t = 0$  à une fonction quelconque donnée  $F(u, 0)$ . On sait en effet que toute fonction peut être développée en série de polynômes de Legendre, pour les valeurs de la variable comprises entre  $-1$  et  $+1$ , ce qui est le cas ici puisque  $u = \cos \omega$ . On a

$$F(u, 0) = c_0 + c_1 P_1(u) + \dots + c_n P_n(u) + \dots$$

en prenant

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^{+1} F(u, 0) P_n(u) du.$$

Dans le problème du mouvement brownien de rotation on doit avoir  $F(u, 0) = 0$  quel que soit  $u$ , sauf au voisinage de  $u = 1$ ,  $F$  étant alors infiniment grand mais satisfaisant toujours à la condition

$$2\pi \int_{-1}^{+1} F(u, t) du = 1.$$

Comme  $P_n(1) = 1$ , on aura donc dans ce cas ( $F$  étant essentiellement positif),

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-1}^{+1} F(u, t) du = \frac{1}{2\pi} \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

et la fonction de probabilité sera par suite donnée par le développement

$$(17) \quad F(u, t) = \frac{1}{4\pi} [1 + 3 P_1(u) e^{-2\mathfrak{R}t} + \dots + (2n + 1) P_n(u) e^{-n(n+1)\mathfrak{R}t} + \dots]$$

ou en revenant à la variable  $\omega$

$$(18) \quad f(\omega, t) = \frac{1}{4\pi} [1 + 3 P_1(\cos \omega) e^{-2\mathfrak{R}t} + \dots \\ + (2n + 1) P_n(\cos \omega) e^{-n(n+1)\mathfrak{R}t} + \dots].$$

Ces séries sont absolument convergentes pour  $t > 0$  car  $|P_n| \leq 1$ ; elles sont uniformément convergentes par rapport à  $u$  ou  $\omega$  pour toute

valeur positive du temps. Rappelons que

$$(19) \quad \begin{cases} n P_n(u) = (2n-1)u P_{n-1}(u) - (n-1)P_{n-2}(u), \\ P_1(u) = u, \quad P_2(u) = \frac{1}{2}(3u^2-1), \quad \dots \end{cases}$$

En utilisant les propriétés d'orthogonalité des polynomes de Legendre on peut facilement déduire, des expressions (17) ou (18), la valeur moyenne au temps  $t$  d'un polynome en  $u$  (ou  $\cos \omega$ ), et retrouver ainsi par exemple les formules (11), (12) et (13) (1).

---

## CHAPITRE II.

### ÉTUDE GÉNÉRALE DU MOUVEMENT BROWNIEN DE ROTATION D'UNE SPHÈRE.

---

*Représentation des déplacements d'une sphère.* — Nous devons maintenant chercher à déterminer complètement la probabilité au temps  $t$  pour que la sphère mobile  $S$  se trouve dans une certaine position quelconque  $P$ .

On peut amener la sphère  $S$  dans la position  $P$  à partir de sa position initiale  $P_0$  par une rotation résultante unique; soient  $2\Phi$  la grandeur de cette rotation et  $\theta, \psi$  les coordonnées sphériques de sa direction (par rapport à un trièdre fixe). Nous définirons la position  $P$  par les angles  $\Phi, \theta, \psi$ , ou par les paramètres homogènes d'Olinde Rodrigues :

$$(20) \quad \begin{cases} \lambda = \sin \Phi \sin \theta \sin \psi, \\ \mu = \sin \Phi \sin \theta \cos \psi, \\ \nu = \sin \Phi \cos \theta, \\ \rho = \cos \Phi, \end{cases}$$

qui satisfont à la relation

$$(21) \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1.$$

---

(1) On peut également démontrer que

$$\int_0^\infty \left[ f(\omega, t) - \frac{1}{4\pi} \right] dt = \frac{1}{4\pi R} \left( \log \frac{2}{1 - \cos \omega} - 1 \right).$$

Si l'on considère  $\lambda, \mu, \nu, \rho$  comme les coordonnées rectangulaires d'un point M dans l'espace à 4 dimensions, cette équation représente

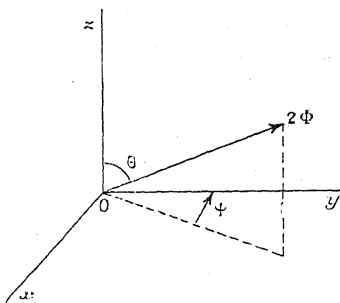


Fig. 1.

une hypersphère  $\Sigma_3$  de rayon 1, et à toute position P de la sphère S on peut faire correspondre indifféremment le point M( $\lambda, \mu, \nu, \rho$ ) ou le point diamétralement opposé M'( $-\lambda, -\mu, -\nu, -\rho$ ). En particulier les points M<sub>0</sub> et M'<sub>0</sub> où l'axe des  $\rho$  coupe l'hypersphère  $\Sigma_3$  correspondent à la position P<sub>0</sub>.

Cette correspondance entre les positions de la sphère S et les points de l'hypersphère  $\Sigma$  peut être considérée comme intrinsèque. En effet, si en premier lieu on change le trièdre Oxyz lié à la position P<sub>0</sub>,  $\rho$  garde la même valeur et les composantes,  $\lambda, \mu, \nu$  subissent une transformation linéaire orthogonale, ce qui correspond à un changement d'axes orthogonaux dans l'espace ( $\lambda, \mu, \nu, \rho$ ) avec conservation de l'axe des  $\rho$ . Par ailleurs si au lieu de définir la position P par rapport à la position P<sub>0</sub> par la rotation ( $\lambda, \mu, \nu, \rho$ ), nous considérons une autre position de référence P<sub>1</sub>, de laquelle on passe à la position P<sub>0</sub> par une rotation ( $\lambda', \mu', \nu', \rho'$ ), la position P sera définie par rapport à la position P<sub>1</sub> par une rotation ( $\lambda'', \mu'', \nu'', \rho''$ ) donnée par les formules bien connues de la composition des rotations, que l'on peut écrire (les trièdres liés aux positions P<sub>1</sub> et P<sub>0</sub> se correspondant) :

$$(22) \quad \begin{cases} \lambda'' = \rho'\lambda + \nu'\mu - \mu'\nu + \lambda'\rho, \\ \mu'' = -\nu'\lambda + \rho'\mu + \lambda'\nu + \mu'\rho, \\ \nu'' = \mu'\lambda - \lambda'\mu + \rho'\nu + \nu'\rho, \\ \rho'' = -\lambda'\lambda - \mu'\mu - \nu'\nu + \rho'\rho. \end{cases}$$

Ces formules définissent une transformation linéaire orthogonale effectuée sur les coordonnées du point  $M$ , car

$$\lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 + \rho'^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \rho^2 = 1;$$

elles correspondent par suite à un déplacement autour de l'origine du système d'axes auquel est rapportée l'hypersphère  $\Sigma_3$ , déplacement amenant l'axe des  $\rho$  à passer par le point  $M$ , qui correspond à la nouvelle position de référence  $P$ , (1). Ces déplacements forment un sous-groupe à trois paramètres du groupe des déplacements autour de l'origine dans l'espace à quatre dimensions. Ce sous-groupe étant transitif pour les points de l'hypersphère  $\Sigma_3$ , admet comme seul élément différentiel invariant l'élément d'aire  $d\sigma$  de cette multiplicité (invariant vis-à-vis de tous les déplacements). La probabilité élémentaire  $dJ$  relative aux positions de la sphère  $S$ , définie par la condition d'invariance vis-à-vis du groupe des rotations autour de l'origine dans l'espace à trois dimensions, est donc égale à l'élément d'aire  $d\sigma$  de l'hypersphère  $\Sigma_3$ .

$$(23) \quad dJ = d\sigma = \sin^2 \Phi \sin \theta \, d\Phi \, d\theta \, d\psi,$$

et nous retrouvons bien ainsi sans calcul l'expression classique de la probabilité élémentaire  $dJ$ .

Les formules de composition des rotations donnent également les variations  $d\lambda$ ,  $d\mu$ ,  $d\nu$ ,  $d\rho$  des coordonnées de position de la sphère  $S$ , quand on lui fait subir, à partir d'une position quelconque  $P(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ , une petite rotation de composantes  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (par rapport aux axes mobiles), et par suite de coordonnées homogènes  $\frac{\alpha}{2}$ ,  $\frac{\beta}{2}$ ,  $\frac{\gamma}{2}$ , 1 (par rap-

(1) Le tableau des seize cosinus de cette transformation orthogonale

$$\begin{vmatrix} \rho' & \nu' & -\mu' & \lambda' \\ -\nu' & \rho' & \lambda' & \mu' \\ \mu' & -\lambda' & \rho' & \nu' \\ -\lambda' & -\mu' & -\nu' & \rho' \end{vmatrix}$$

est gauche, ce qui correspond à un déplacement décomposable en deux rotations absolument perpendiculaires égales en valeurs absolues (la décomposition en deux rotations perpendiculaires est alors possible d'une infinité de façons).

port à la position P) :

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\lambda = \rho \frac{\alpha}{2} + \nu \frac{\beta}{2} - \mu \frac{\gamma}{2}, \\ d\mu = -\nu \frac{\alpha}{2} + \rho \frac{\beta}{2} + \lambda \frac{\gamma}{2}, \\ d\nu = \mu \frac{\alpha}{2} - \lambda \frac{\beta}{2} + \rho \frac{\gamma}{2}, \\ d\rho = -\lambda \frac{\alpha}{2} - \mu \frac{\beta}{2} - \nu \frac{\gamma}{2}. \end{array} \right.$$

Ces formules montrent que le déplacement correspondant du point représentatif  $M(\lambda, \mu, \nu, \rho)$  est la résultante de trois petits déplacements  $s_1 = \frac{\alpha}{2}$ ,  $s_2 = \frac{\beta}{2}$ ,  $s_3 = \frac{\gamma}{2}$ , effectués suivant trois directions rectangulaires, ayant respectivement comme cosinus directeurs

$$(\rho, -\nu, \mu, -\lambda), \quad (\nu, \rho, -\lambda, -\mu), \quad (-\mu, \lambda, \rho, -\nu).$$

Ces directions sont d'ailleurs bien toutes trois perpendiculaires à la direction  $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$ , et par suite tangentes à l'hypersphère  $\Sigma_3$ .

Remarquons enfin que dans un déplacement continu quelconque, le carré de la vitesse du point représentatif  $M$  est proportionnel à l'énergie cinétique  $T$  de la sphère  $S$ . En effet, on a

$$2T = A(p^2 + q^2 + r^2).$$

$A$  étant le moment d'inertie de la sphère  $S$  autour d'un diamètre, et  $p, q, r$  les composantes de la rotation instantanée suivant les axes mobiles. Or la rotation subie par la sphère pendant l'intervalle de temps infiniment petit  $dt$  a pour composantes suivant ces axes  $\alpha = p dt$ ,  $\beta = q dt$ ,  $\gamma = r dt$ ; donc en désignant par  $ds$  la distance infiniment petite parcourue par le point  $M$ , on a d'après les formules (24)

$$ds^2 = d\lambda^2 + d\mu^2 + d\nu^2 + d\rho^2 = \frac{1}{4}(p^2 + q^2 + r^2) dt^2$$

et par suite

$$(25) \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2A} T.$$

Cette relation démontre l'invariance de l'élément linéaire de l'hyper-

sphère  $\Sigma_3$

$$(26) \quad ds^2 = d\Phi^2 + \sin^2\Phi d\theta^2 + \sin^2\Phi \sin^2\theta d\psi^2,$$

et redonne par suite comme expression de la probabilité élémentaire invariante, l'élément d'aire  $d\sigma$  qui lui correspond.

*Mouvement brownien de rotation.* — Supposons de nouveau que la sphère S soit soumise à un mouvement brownien de rotation, et que  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  soient les composantes suivant les axes mobiles de la petite rotation totale subie par la sphère S pendant un très petit intervalle de temps  $\Delta t$ . Ces composantes satisfont alors aux relations moyennes (1). Par suite les valeurs moyennes du premier et du second ordre relatives aux composantes

$$s_1 = \frac{\alpha}{2}, \quad s_2 = \frac{\beta}{2}, \quad s_3 = \frac{\gamma}{2}$$

des déplacements correspondants du point représentatif M sur  $\Sigma_3$  sont

$$\begin{aligned} \overline{s_1} = \overline{s_2} = \overline{s_3} = 0, \quad \overline{s_2 s_3} = \overline{s_3 s_1} = \overline{s_1 s_2} = 0, \\ \overline{s_1^2} = \overline{s_2^2} = \overline{s_3^2} = 2 \frac{\mathcal{R}}{4} \Delta t. \end{aligned}$$

Ces composantes étant comptées, comme nous l'avons montré, suivant les axes d'un trièdre trirectangle tangent à la multiplicité  $\Sigma_3$ , il résulte directement des formules précédentes que, si l'on désigne par  $U d\sigma$  la probabilité pour que le point M se trouve à un certain instant sur un élément  $d\sigma$  de  $\Sigma_3$ , la fonction U satisfait à l'équation de la diffusion sur cette hypersphère, le coefficient de diffusion étant égal à  $\frac{1}{4} \mathcal{R}$ .

Sur une multiplicité d'élément linéaire

$$ds^2 = a_{ik} dx^i dx^k,$$

l'équation de la diffusion s'écrit (en notation tensorielle)

$$(27) \quad \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{a} a^{ik} \frac{\partial U}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{\mathcal{D}} \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Sur l'hypersphère  $\Sigma_3$  le déterminant  $a$  des  $a_{ik}$  est (avec les



variables  $\Phi, \theta, \psi$ )

$$a = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2 \Phi & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 \Phi \sin^2 \theta \end{vmatrix} = \sin^4 \Phi \sin^2 \theta,$$

et l'on a

$$a^{ii} = \frac{1}{a_{ii}}, \quad a^{kk} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq k.$$

L'équation de la diffusion est donc (en faisant  $\mathcal{Q} = \frac{\mathcal{R}}{4}$ )

$$(28) \quad \frac{1}{\sin^2 \Phi} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left( \sin^2 \Phi \frac{\partial U}{\partial \Phi} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Phi \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Or la probabilité pour que la sphère S ait subi entre l'instant initial et l'instant  $t$  une rotation  $(\Phi, \theta, \psi)$  ne dépend par symétrie que de la grandeur  $2\Phi$  de cette rotation et non de sa direction, autrement dit si le pôle  $\Phi = 0$  de l'hypersphère  $\Sigma_3$  correspond, comme nous l'avons supposé, à la position initiale de la sphère S, la fonction de probabilité  $U$  ne dépend que de l'angle  $\Phi$  et du temps  $t$  (mais non de  $\theta$  et  $\psi$ ); nous pouvons donc la désigner par  $g(\Phi, t)$ . Pour une telle fonction l'équation (28) se réduit à

$$(29) \quad \frac{1}{\sin^2 \Phi} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left( \sin^2 \Phi \frac{\partial g}{\partial \Phi} \right) = \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial g}{\partial t}.$$

Par ailleurs comme une position de la sphère S est représentée par deux points diamétralement opposés sur  $\Sigma_3$ , on doit avoir

$$(30) \quad g(\Phi, t) = g(\pi - \Phi, t)$$

et

$$\oint_{\Sigma_3} g(\Phi, t) d\sigma = \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(\Phi, t) \sin \Phi \sin \theta d\Phi d\theta d\psi = 2,$$

c'est-à-dire

$$(31) \quad 2\pi \int_0^\pi g(\Phi, t) \sin^2 \Phi d\Phi = 1.$$

Enfin la position initiale correspondant aux deux pôles  $\Phi = 0$  et  $\Phi = \pi$  de  $\Sigma_3$ , la fonction  $g(\Phi, t)$  doit tendre vers zéro avec  $t$  pour toute valeur de  $\Phi$ , sauf au voisinage de  $\Phi = 0$  et  $\Phi = \pi$ ,  $g$  tendant alors vers l'infini tout en continuant de satisfaire aux conditions (30) et (31). La fonction  $g(\Phi, t)$  est ainsi complètement déterminée, et nous allons montrer qu'on peut en trouver une représentation analytique explicite.

L'équation (29) développée s'écrit

$$(32) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \Phi^2} + 2 \frac{\cos \Phi}{\sin \Phi} \frac{\partial g}{\partial \Phi} = \frac{4}{R} \frac{\partial g}{\partial t}.$$

Transformons-la en prenant comme fonction inconnue le produit

$$(33) \quad Y(\Phi, t) = g(\Phi, t) \sin \Phi.$$

Elle devient

$$(34) \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial \Phi^2} + Y = \frac{4}{R} \frac{\partial Y}{\partial t},$$

et nous devons en étudier les solutions  $Y(\Phi, t)$  qui admettent la période  $2\pi$  par rapport à  $\Phi$ , et s'annulent pour  $\Phi = 0$  [d'après la relation (33)]. Cette dernière équation aux dérivées partielles étant linéaire admet comme solutions particulières satisfaisant à ces conditions des fonctions de la forme

$$\sin m\Phi e^{at},$$

$m$  étant un nombre entier quelconque; en faisant la substitution on trouve qu'il faut avoir

$$a = -R \frac{m^2 - 1}{4}.$$

Il en résulte que la série

$$(35) \quad Y(\Phi, t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin m\Phi e^{-\frac{m^2-1}{4} R t}$$

représente la solution générale, satisfaisant aux conditions indiquées,

de l'équation (34), car le théorème de Fourier permet de déterminer les coefficients  $c_m$  de façon que cette série se réduise pour  $t = 0$  à une fonction quelconque  $Y_0(\Phi)$  donnée pour  $\Phi$  compris entre 0 et  $\pi$

$$(36) \quad c_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi Y_0(\Phi) \sin m\Phi \, d\Phi.$$

Dans le cas du mouvement brownien de rotation, nous aurons d'après les conditions (20) et (31)

$$(37) \quad Y_0(\Phi) = Y_0(\pi - \Phi), \quad 2\pi \int_0^\pi Y_0(\Phi) \sin \Phi \, d\Phi = 1,$$

$Y_0(\Phi)$  étant nul, sauf au voisinage de  $\Phi = 0$  et  $\Phi = \pi$ . Comme on peut écrire

$$c_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin m\Phi}{\sin \Phi} Y_0(\Phi) \sin \Phi \, d\Phi,$$

on voit par suite que ( $Y_0$  étant positif)

$$c_{2n} = 0, \quad c_{2n+1} = \frac{2n+1}{\pi^2}.$$

La solution cherchée est donc

$$Y(\Phi, t) = \frac{1}{\pi^2} \sum (2n+1) \sin(2n+1)\Phi e^{-n(n+1)\mathcal{R}t}$$

ou, en revenant à la fonction  $g(\Phi, t)$ ,

$$(38) \quad g(\Phi, t) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\sin \Phi} [\sin \Phi + \dots + (2n+1) \sin(2n+1)\Phi e^{-n(n+1)\mathcal{R}t} + \dots].$$

Remarquons que le quotient  $\frac{\sin(2n+1)\Phi}{\sin \Phi}$  est un polynôme de degré  $n$  en  $\cos^2 \Phi$  ou en  $\cos 2\Phi$ , et si l'on pose

$$(39) \quad \frac{\sin(2n+1)\Phi}{\sin \Phi} = (2n+1) R_n(\cos 2\Phi),$$

on peut montrer que les polynômes  $R_n$  forment une suite analogue à celle des polynômes de Legendre; ils sont notamment caractérisés par

les relations

$$\begin{aligned}
 (40) \quad & \left. \begin{aligned}
 & \frac{d}{du} \left[ (1-u) \sqrt{1-u^2} \frac{dR_n(u)}{du} \right] = -n(n+1) R_n(u) \sqrt{\frac{1-u}{1+u}}, \\
 & [R_n(1) = 1], \\
 & \int_{-1}^{+1} R_n(u) R_m(u) \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} du = 0, \\
 & \int_{-1}^{+1} R_n^2(u) \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} du = \frac{\pi}{(2n+1)^2}, \\
 & 2u R_n(u) = \frac{2n+3}{2n+1} R_{n+1}(u) + \frac{2n-1}{2n+1} R_{n-1}(u), \\
 & R_0(u) = 1, \quad R_1(u) = \frac{1}{3} (2u+1), \\
 & R_n(u) = \frac{(-2)^n n!}{(2n+1)!} \sqrt{\frac{1+u}{1-u}} \frac{d^n}{du^n} \left[ \sqrt{\frac{1-u}{1+u}} (1-u^2)^n \right], \\
 & \frac{1+z}{1-2uz+z^2} = 1 + \dots + (2n+1) R_n(u) z^n + \dots
 \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

En résumé, la probabilité pour que la sphère soumise au mouvement brownien se trouve à l'instant  $t$  dans une position déduite de la position initiale par une rotation de grandeur  $2\Phi$  et de direction  $\theta, \psi$  (à  $d\Phi, d\theta, d\psi$  près) est

$$g(\Phi, t) \sin^2 \Phi \sin \theta \, d\Phi \, d\theta \, d\psi,$$

la fonction  $g$  étant déterminée par le développement en série (38). Si l'on veut définir l'orientation de la sphère par les cosinus directeurs  $\alpha_{ik}$  ou par les angles d'Euler  $\omega, \lambda, \mu$ , il suffit d'utiliser les relations

$$(41) \quad \cos 2\Phi = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} - 1}{2}, \quad \cos \Phi = \cos \frac{\omega}{2} \cos \frac{\lambda + \mu}{2}.$$

### CHAPITRE III.

#### MOUVEMENT BROWNIEN DE ROTATION DANS LE PLAN OU AUTOUR D'UN AXE.

Ces problèmes se ramènent à l'étude de la diffusion sur une circonférence de rayon 1. Si l'on désigne par  $\alpha$  l'angle d'écart à partir de la

position initiale, et par  $h(\alpha, t) d\alpha$  la probabilité d'une rotation comprise entre  $\alpha$  et  $\alpha + d\alpha$  à l'instant  $t$ , on voit immédiatement, comme dans le cas du mouvement brownien de déplacement sur une droite, que

$$(42) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{R} \frac{\partial h}{\partial t}.$$

La solution générale de cette équation, identique à celle du problème de l'armille sans perte de chaleur, est

$$h(\alpha, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 R t} (A_n \sin n\alpha + B_n \cos n\alpha)$$

avec

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} h(\alpha, 0) \sin n\alpha d\alpha, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} h(\alpha, 0) \cos n\alpha d\alpha \quad (n \neq 0),$$

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} h(\alpha, 0) d\alpha.$$

Dans le cas étudié ici, on a

$$h(\alpha, 0) = 0,$$

sauf au voisinage de  $\alpha = 0$ ,  $h$  étant alors positif et infiniment grand de telle façon que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} h(\alpha, 0) d\alpha = 1.$$

On a par suite

$$A_n = 0, \quad B_n = \frac{1}{\pi}, \quad B_0 = \frac{1}{2\pi}.$$

Donc

$$(43) \quad h(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi} [1 + 2 e^{-R t} \cos \alpha + \dots + 2 e^{-n^2 R t} \cos n\alpha + \dots].$$

On peut déduire facilement de ce développement la valeur moyenne au temps  $t$  de  $\cos n\alpha$  ou de  $\cos^2 \alpha$ . Par exemple

$$(44) \quad \overline{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{2} (1 + \overline{\cos 2\alpha}) = \frac{1}{2} (1 + e^{-4R t}).$$

On sait d'ailleurs que  $\cos n\alpha$  est un polynôme de degré  $n$  en  $\cos \alpha$ , et

que les polynomes (1)

$$(45) \quad Q_n(\cos \alpha) = \cos n \alpha$$

forment une suite orthogonale analogue à celle des polynomes de Legendre, et qui rentre dans une même classe générale dont nous parlerons au Chapitre suivant.

En posant  $h(\alpha, t) = H(\cos \alpha, t)$  on aura donc

$$(46) \quad H(u, t) = \frac{1}{2\pi} [1 + \dots + 2 Q_n(u) e^{-n^2 R t} + \dots],$$

développement analogue au développement (17) de la fonction  $F(u, t)$ .

Si l'on considère que la diffusion sur la circonférence se produit sur une droite illimitée enroulée sur cette circonférence, ce qui est possible à cause de l'identité de l'équation (42) avec celle de la diffusion sur une droite, on aboutit à une autre expression de la fonction  $h(\alpha, t)$ . D'après un résultat classique la densité au temps  $t$ , en un point d'abscisse  $\alpha$  de la droite enroulée, est en effet

$$(47) \quad \omega(\alpha, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi R t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4R t}}, \quad (-\infty < \alpha < +\infty)$$

et en faisant la somme pour les différentes parties de la droite qui se superposent sur la circonférence, on voit que (2)

$$(48) \quad h(\alpha, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi R t}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\alpha + 2k\pi)^2}{4R t}}, \quad (-\pi \leq \alpha \leq +\pi).$$

L'identité des développements (43) et (48) résulte d'ailleurs directe-

(1) On désigne sous le nom de « polynomes de Tchebycheff » les polynomes

$$T_n(u) = \frac{1}{2^{n-1}} Q_n(u).$$

(2) Ce dernier type de développement est indiqué dans la Thèse de M<sup>e</sup> G. L. DE HAAS-LORENTZ, *Die Brownsche Bewegung und einige verwandte Erscheinungen* (F. Vieweg et Sohn in Braunschweig, 1913).

ment de la relation

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi(n+iy)^2x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{x} + 2\pi iny},$$

bien connue dans la théorie des fonctions thêta.

Les développements (43) et (48) convergent rapidement, le premier quand  $t$  est grand, et le deuxième quand  $t$  est petit.

Remarquons enfin que la solution (47) du mouvement brownien de translation sur une droite peut être mise sous une forme analogue à l'expression (43) de la fonction  $h(x, t)$ . En développant en effet en intégrale de Fournier, on obtient

$$\omega(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\mathcal{R}u^2t} \cos u x \, du.$$

#### CHAPITRE IV.

MOUVEMENT BROWNIEN D'UNE DIRECTION LIÉE A UNE HYPERSPHERE A  $p$  DIMENSIONS.

On peut généraliser facilement au cas d'une hypersphère à un nombre quelconque de dimensions les problèmes de mouvement brownien ou de diffusion résolus aux Chapitres I et III pour la sphère et la circonférence. Nous représenterons paramétriquement une hypersphère de rayon 1 dans l'espace à  $(p+1)^e$  dimensions par les équations

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \theta_1 & (0 \leq \theta_1 \leq \pi), \\ x_2 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 & (0 \leq \theta_2 \leq \pi), \\ \dots & \dots & \dots \\ x_p &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \cos \theta_p & (0 \leq \theta_{p-1} \leq \pi), \\ x_{p+1} &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_p & (0 \leq \theta_p \leq 2\pi), \end{aligned}$$

Sur cette multiplicité l'élément linéaire a pour expression

$$ds^2 = d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \dots + \sin^2 \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{p-1} d\theta_p^2,$$

et l'élément « d'aire »

$$d\sigma = \sin^{p-1} \theta_1 \sin^{p-2} \theta_2 \dots \sin \theta_{p-1} d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_p.$$

L'équation de la diffusion, pour une fonction ne dépendant que de  $\theta_1$  et du temps, se réduit à

$$(49) \quad \frac{1}{\sin^{p-1} \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[ \sin^{p-1} \theta_1 \frac{\partial f_p}{\partial \theta_1} \right] = \frac{1}{R} \frac{\partial f_p}{\partial t}.$$

Si  $f_p(\theta_1, t) d\sigma$  est la probabilité pour que le point diffusant, initialement au pôle  $\theta_1 = 0$ , se trouve à l'instant  $t$  dans l'élément  $d\sigma$ , on aura

$$(50) \quad S_{p-1} \int_0^\pi f_p(\theta_1, t) \sin^{p-1} \theta_1 d\theta_1 = 1,$$

$S_p$  étant « l'aire » de l'hypersphère de rayon 1 dans l'espace à  $(p+1)$  dimensions

$$(51) \quad S_p = \frac{2\pi^{\frac{p+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} = \begin{cases} 2 \frac{(2\pi)^k}{1.3 \dots (2k-1)} & \text{si } p = 2k, \\ 2 \frac{\pi^{k+1}}{k!} & \text{si } p = 2k+1. \end{cases}$$

De plus, la fonction  $f_p(\theta_1, t)$  doit tendre vers zéro avec  $t$ , quel que soit  $\theta_1$ , sauf au voisinage de  $\theta_1 = 0$ .

Posons

$$(52) \quad \cos \theta_1 = u, \quad F_p(u, t) = f_p(\theta_1, t);$$

nous aurons

$$(53) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left[ (1-u^2)^{\frac{p}{2}} \frac{\partial F_p}{\partial u} \right] = \frac{1}{R} \frac{\partial F_p}{\partial t} (1-u^2)^{\frac{p-2}{2}}$$

avec

$$(54) \quad S_{p-1} \int_{-1}^{+1} F_p(u, t) (1-u^2)^{\frac{p-2}{2}} du = 1 \quad \text{et} \quad F_p(u, t) > 0.$$

La solution cherchée s'obtient en considérant les polynomes hyper-



sphériques  $P_{np}(u)$  définis et caractérisés par les relations

$$(55) \left\{ \begin{array}{l} (a) \quad \frac{d}{du} \left[ (1-u^2)^{\frac{p}{2}} \frac{dP_{np}(u)}{du} \right] = -n(n+p-1) (1-u^2)^{\frac{p-2}{2}} P_{np}(u), \\ (b) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1-u^2) \frac{d^2 P_{np}(u)}{du^2} - pu \frac{dP_{np}(u)}{du} = -n(n+p-1) P_{np}(u), \\ P_{np}(1) = 1, \end{array} \right. \\ (c) \quad \int_{-1}^{+1} P_{np}(u) P_{mp}(u) (1-u^2)^{\frac{p-2}{2}} du = 0 \quad \text{si} \quad m \neq n, \\ (d) \quad \int_{-1}^{+1} P_{np}^2(u) (1-u^2)^{\frac{p-2}{2}} du = \frac{1}{2n+p-1} \frac{n! (p-1)!}{(n+p-2)!} \frac{S_p}{S_{p-1}}, \\ (e) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{np}(u) = \frac{(-1)^n}{p(p+2)\dots(p+2n-2)} (1-u^2)^{-\frac{p-2}{2}} \\ \quad \times \frac{d^n}{du^n} \left[ (1-u^2)^{n+\frac{p-2}{2}} \right], \end{array} \right. \\ (f) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1-2uz+z^2)^{-\frac{p-1}{2}} = 1 + \dots + \frac{(n+p-2)!}{n!} \frac{1}{(p-2)!} P_{np}(u) z^n + \dots \\ \quad \text{si} \quad p \geq 2, \end{array} \right. \\ (g) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1-z^2}{(1-2uz+z^2)^{\frac{p+1}{2}}} \\ = 1 + \dots + (2n+p-1) \frac{(n+p-2)!}{n! (p-1)!} P_{np}(u) z^n + \dots, \end{array} \right. \\ (h) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{np}(-u) = (-1)^n P_{np}(u), \\ |P_{np}(u)| \leq 1 \quad \text{pour} \quad -1 \leq u \leq +1, \end{array} \right. \\ (i) \quad n(n+p-2) P_{np}(u) = (n+p-2)u P'_{np}(u) - n P'_{n-1,p}(u), \\ (j) \quad \left\{ \begin{array}{l} (n+p-2) P_{np}(u) \\ = (2n+p-3)u P_{n-1,p}(u) - (n-1) P_{n-2,p}(u), \end{array} \right. \\ (k) \quad P_{0,p}(u) = 1, \quad P_{1,p}(u) = u, \quad P_{2,p}(u) = \frac{1}{p} [(p+1)u^2 - 1], \quad \dots \end{array} \right.$$

Ces polynômes se déduisent simplement de la fonction hypergéométrique  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ; on a en effet (1)

$$(56) \quad P_{np}(u) = F\left(n+p-1, -n, \frac{p}{2}, \frac{1-u}{2}\right).$$

(1) Les polynômes  $R_n(u)$  considérés page 19 sont aussi des polynômes hypergéométriques.

Ils comprennent comme cas particuliers les polynomes  $Q_n(u)$  et  $P_n(u)$  que nous avons considérés dans les Chapitres précédents :

$$(57) \quad P_{n_1}(u) = Q_n(u), \quad P_{n_2}(u) = P_n(u)$$

et l'on peut montrer qu'ils s'en déduisent par des dérivations successives <sup>(1)</sup> :

$$(58) \quad \begin{cases} P_{n,2k+1}(u) = \frac{n!}{(n+2k-1)!} \frac{1}{(n+k)} \frac{(2k)!}{2^k k!} \frac{d^k}{du^k} Q_{n+k}(u), \\ P_{n,2k+2}(u) = \frac{n!}{(n+2k)!} 2^k k! \frac{d^k}{du^k} P_{n+k}(u). \end{cases}$$

Un raisonnement analogue à ceux que nous avons faits pour la sphère et la circonférence conduit, pour la fonction  $F_p(u, t)$ , au développement

$$(59) \quad F_p(u, t) = \frac{1}{S_p} \sum \frac{(n+p-2)!}{n! (p-1)!} (2n+p-1) P_{np}(u) e^{-n(n+p-1)\mathcal{R}t},$$

d'où l'on déduit notamment les valeurs moyennes au temps  $t$  suivantes <sup>(2)</sup> :

$$(60) \quad \overline{P_{np}(u)} = e^{-n(n+p-1)\mathcal{R}t}, \quad \overline{\sin^2 \theta_1} = \frac{p}{p+1} [1 - e^{-2(p+1)\mathcal{R}t}].$$

Suivant que  $p$  est pair ou impair, la fonction  $F_p(u, t)$  se déduit, par

métriques

$$R_n(u) = (2n+1) F\left(n+1, -n, \frac{3}{2}, \frac{1-u}{2}\right) = (-1)^n F\left(n+1, -n, \frac{1}{2}, \frac{1+u}{2}\right).$$

<sup>(1)</sup> Il faut faire attention de ne pas confondre les polynomes hypersphériques  $P_{np}(u)$  avec les fonctions de Legendre d'ordres supérieurs, qui apparaissent comme coefficients dans le développement des fonctions de Laplace en série trigonométrique, et sont définies par la relation

$$L_{\nu, h}(u) = (1-u^2)^{\frac{h}{2}} \frac{d^h}{du^h} P_{\nu}(u).$$

<sup>(2)</sup> On voit que ces valeurs moyennes atteignent leurs limites  $\left(0 \text{ et } \frac{p}{p+1}\right)$  d'autant plus rapidement que  $p$  est plus grand. Le développement (59) montre même que la fonction  $S_p \cdot F_p(u, t)$  tend très rapidement vers la valeur constante 1 si  $p$  est grand : sur une sphère à un très grand nombre de dimensions la diffusion serait presque instantanée.

des dérivations par rapport à  $u$ , de la fonction  $F(u, t)$  du Chapitre I ou de la fonction  $H(u, t)$  du Chapitre III. En utilisant les relations (58) on trouve en effet que

$$(61) \quad \begin{cases} F_{2k+1}(u, t) = \frac{1}{(2\pi)^k} e^{k^2 \mathcal{R}t} \frac{\partial^k}{\partial u^k} H(u, t), \\ F_{2k+2}(u, t) = \frac{1}{(2\pi)^k} e^{k(k+1) \mathcal{R}t} \frac{\partial^k}{\partial u^k} F(u, t). \end{cases}$$

## CHAPITRE V.

ÉTUDE DES FONCTIONS  $f(\omega, t)$ ,  $g(\Phi, t)$ ,  $h(\alpha, t)$  ET DE LEURS RELATIONS.

L'étude du mouvement brownien de rotation d'une sphère libre, ou d'un solide mobile autour d'un axe fixe, nous a conduit à exprimer la probabilité d'une rotation donnée au bout d'un temps quelconque au moyen des fonctions ( $t > 0$ )

$$(62) \quad \begin{cases} f(\omega, t) = F(\cos \omega, t) \\ \quad = \frac{1}{4\pi} [1 + \dots + (2n+1) P_n(\cos \omega) e^{-n(n+1) \mathcal{R}t} + \dots], \\ g(\Phi, t) = G(\cos \Phi, t) \\ \quad = \frac{1}{\pi^2} \left[ 1 + \dots + (2n+1) \frac{\sin(2n+1)\Phi}{\sin \Phi} e^{-n(n+1) \mathcal{R}t} + \dots \right], \\ h(\alpha, t) = H(\cos \alpha, t) = \frac{1}{2\pi} [1 + \dots + 2 \cos n \alpha e^{-n^2 \mathcal{R}t} + \dots]. \end{cases}$$

Les fonctions  $f(\omega, t)$  et  $h(\alpha, t)$  sont en même temps les solutions principales des équations de la diffusion, ou de la conductibilité thermique, sur une coque sphérique et sur une circonférence <sup>(1)</sup>; elles jouent sur ces multiplicités fermées le rôle des fonctions de Gauss sur les multiplicités planes illimitées.

Les fonctions  $F(u, t)$ ,  $G(u, t)$ ,  $H(u, t)$  sont définies pour  $u$  compris entre  $-1$  et  $+1$ , mais on peut les prolonger en dehors de cet inter-

(1) Elles permettent d'exprimer au moyen d'intégrales définies les solutions générales de ces équations.

valle, et l'on prouve facilement qu'au point de vue analytique ce sont des fonctions entières de la variable  $u$ .

Les relations (61) du Chapitre précédent montrent que les fonctions  $F(u, t)$  et  $H(u, t)$  sont positives ainsi que toutes leurs dérivées par rapport à  $u$ , pour  $u$  compris entre  $-1$  et  $+1$  [car les fonctions  $F_p(u, t)$  sont essentiellement positives dans cet intervalle]; comme il s'agit de fonctions entières il en est de même pour  $u > 1$ ,

$$(63) \quad \frac{\partial^k}{\partial u^k} F(u, t) > 0, \quad \frac{\partial^k}{\partial u^k} H(u, t) > 0 \quad \text{pour} \quad u \geq -1.$$

Les fonctions  $F(u, t)$  et  $H(u, t)$  satisfaisant aux équations aux dérivées partielles

$$(64) \quad \begin{cases} (1-u^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} - 2u \frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial F}{\partial t}, \\ (1-u^2) \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} - u \frac{\partial H}{\partial u} = \frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\partial H}{\partial t}, \end{cases}$$

on voit que, quel que soit  $t > 0$ ,

$$(65) \quad \begin{cases} \frac{\partial F(1, t)}{\partial t} < 0 & \text{et} & \frac{\partial F(u, t)}{\partial t} > 0 & \text{si} & -1 \leq u \leq 0, \\ \frac{\partial H(1, t)}{\partial t} < 0 & \text{et} & \frac{\partial H(u, t)}{\partial t} > 0 & \text{si} & -1 \leq u \leq 0, \end{cases}$$

et pour  $t = 0$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k F(u, 0)}{\partial t^k} &= 0, \\ \frac{\partial^k H(u, 0)}{\partial t^k} &= 0, \end{aligned}$$

quel que soit  $u \neq 1$ .

Pour  $0 < u < 1$ , les fonctions  $F(u, t)$  et  $H(u, t)$  passent par un maximum quand  $t$  croit de zéro à l'infini.

Les développements (62) convergent rapidement quand  $t$  est grand; ils mettent en particulier très bien en évidence la façon dont les fonctions  $f, g, h$  tendent vers l'uniformité quand  $t$  tend vers l'infini. Nous avons donné pour la fonction  $h(z, t)$  un autre développement en série, convergeant rapidement quand  $t$  est petit :

$$(66) \quad h(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \mathcal{R} t}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z+2k\pi)^2}{4\mathcal{R} t}},$$

On peut en déduire un développement analogue pour la fonction  $g(\Phi, t)$ . En effet, cette fonction représente la diffusion <sup>(1)</sup> sur une sphère à trois dimensions de deux points diamétralement opposés de sorte que

$$(67) \quad G(u, t) = F_3\left(u, \frac{t}{4}\right) + F_3\left(-u, \frac{t}{4}\right) \\ = \frac{1}{2\pi} e^{\frac{\mathcal{R}t}{4}} \left[ \frac{\partial}{\partial u} H\left(u, \frac{t}{4}\right) - \frac{\partial}{\partial u} H\left(-u, \frac{t}{4}\right) \right],$$

d'après la première relation (61). En revenant à la variable  $\Phi$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial u} = -\frac{1}{\sin \Phi} \frac{\partial}{\partial \Phi},$$

et l'on obtient

$$(68) \quad g(\Phi, t) = \frac{e^{\frac{\mathcal{R}t}{4}}}{(\pi \mathcal{R}t)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\sin \Phi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k (\Phi + k\pi) e^{-\frac{(\Phi + k\pi)^2}{\mathcal{R}t}}.$$

Pour la fonction  $f(\omega, t)$  nous remarquons d'abord que, d'après les développements (62) et (68), on a

$$(69) \quad 4\pi f(\pi, t) = \pi^2 g\left(\frac{\pi}{2}, t\right) \\ = \left(\frac{\pi}{\mathcal{R}t}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mathcal{R}t}{4} - \frac{\pi^2}{4\mathcal{R}t}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) e^{-\frac{n(n+1)\pi^2}{\mathcal{R}t}},$$

c'est-à-dire

$$(70) \quad f(\pi, t) = \left(\frac{\pi}{\mathcal{R}t}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mathcal{R}t}{4} - \frac{\pi^2}{4\mathcal{R}t}} f\left(\pi, \frac{\pi^2}{\mathcal{R}^2 t}\right),$$

relation fonctionnelle analogue à celle que vérifie la fonction  $h(o, t)$

$$(71) \quad h(o, t) = \sqrt{\frac{\pi}{\mathcal{R}t}} h\left(o, \frac{\pi^2}{\mathcal{R}^2 t}\right).$$

D'autre part, en pensant à la signification géométrique des angles  $\omega$  et  $\Phi$ , on voit de suite que

$$f(\omega, t) = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} g(\Phi, t) d\mu, \quad \text{avec} \quad \cos \Phi = \cos \frac{\omega}{2} \cos \frac{\lambda + \mu}{2}.$$

---

<sup>(1)</sup> Avec un coefficient de diffusion égal à  $\frac{\mathcal{R}}{4}$ .

En substituant dans cette relation le développement (68) on n'obtient en général aucun développement simple de la fonction  $f(\omega, t)$ , mais pour  $\omega = 0$  on trouve

$$4\pi f(0, t) = \frac{1}{\mathcal{R}t} e^{-\frac{\mathcal{R}t}{3}} \frac{1}{\sqrt{\pi \mathcal{R}t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi}{\sin \Phi} e^{-\frac{\Phi^2}{\mathcal{R}t}} d\Phi,$$

expression qui peut être développée en série par rapport aux puissances entières de  $\mathcal{R}t$

$$(72) \quad 4\pi f(0, t) = \frac{1}{\mathcal{R}t} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \mathcal{R}t + \frac{4}{315} \mathcal{R}^2 t^2 + \dots$$

Pour  $t$  très petit, on peut enfin déduire de l'expression (2), page 5, que l'on a asymptotiquement

$$(73) \quad 4\pi f(\omega, \Delta t) = \frac{1}{\mathcal{R} \Delta t} e^{-\frac{\omega^2}{\mathcal{R} \Delta t}},$$

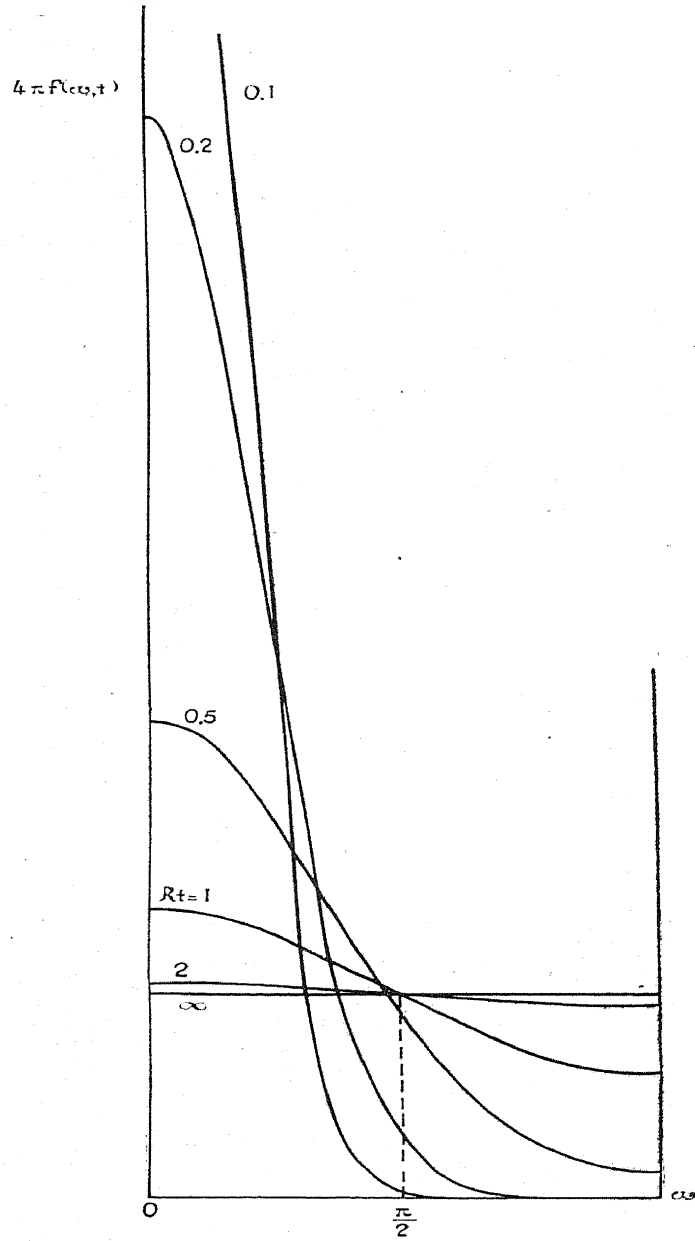
car alors  $\alpha^2 + \beta^2 = \omega^2$  et  $d\alpha d\beta = \omega d\omega d\varphi$ .

Les divers développements obtenus permettent de calculer les valeurs des fonctions  $f(\omega, t)$ ,  $g(\Phi, t)$ ,  $h(\alpha, t)$  pour toutes valeurs des variables. Nous donnons ci-dessous des tables sommaires de ces fonctions, ainsi que deux réseaux de courbes montrant clairement l'allure de  $f(\omega, t)$ .

$4\pi f(\omega, t)$ .

$\omega \backslash \mathcal{R}t$	0,1.	0,2.	0,5.	1.	2.	4.
0	10,3401	5,3473	2,3703	1,4184	1,0550	1,0010
$\frac{\pi}{6}$	5,3328	3,8856	2,1170	1,3594	1,0476	1,0009
$\frac{\pi}{3}$	0,7135	1,4949	1,5130	1,2015	1,0275	1,0005
$\frac{\pi}{2}$	0,0272	0,3079	0,8757	0,9938	1,0000	1,0000
$\frac{2\pi}{3}$	0,0004	0,0347	0,4245	0,7955	0,9725	0,9995
$\frac{5\pi}{6}$	0,0000	0,0024	0,1942	0,6561	0,9524	0,9991
$\pi$	0,0000 ( $3,5 \cdot 10^{-9}$ )	0,0003	0,1284	0,6064	0,9451	0,9990

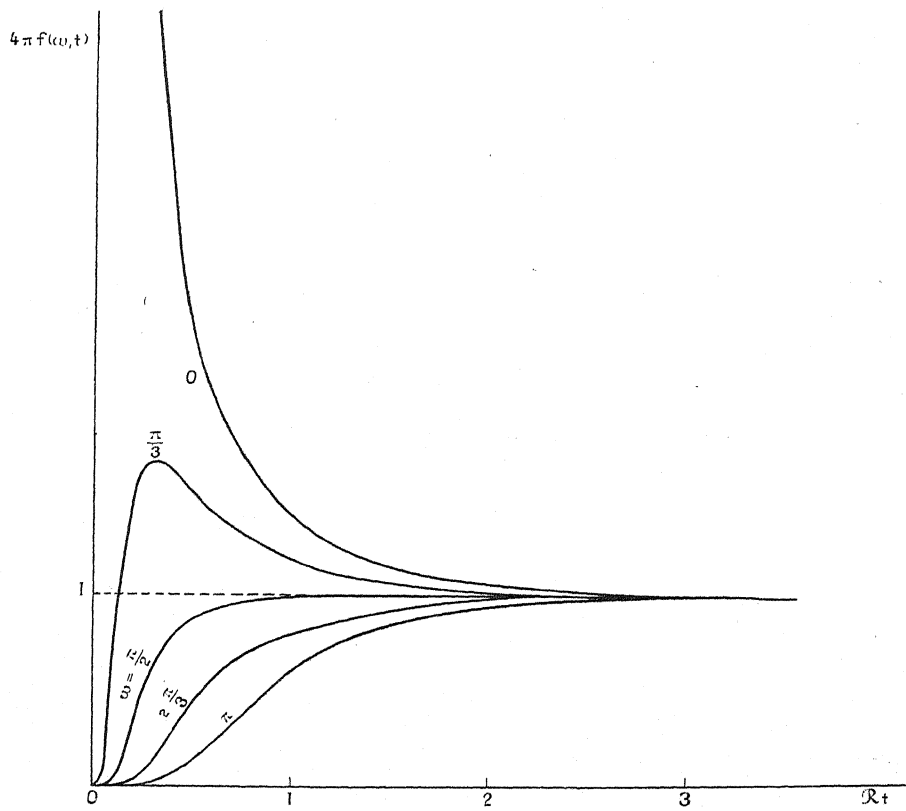
FRANCIS PERRIN.



Courbes I.

$$\pi^2 g(\Phi, t).$$

$\Phi \backslash \mathcal{R}t.$	0,25.	0,5	1.	2.	4.
0	15,095	5,6810	2,2803	1,1650	1,0030
$\frac{\pi}{6}$	5,2795	2,7310	1,8244	1,1099	1,0020
$\frac{\pi}{3}$	0,2271	0,7663	0,9876	1,0000	1,0000
$\frac{\pi}{2}$	0,0012	0,1284	0,6064	0,9451	0,9990



Courbes II.



$$2\pi h(\alpha, t).$$

$\alpha \backslash \mathcal{R}t.$	0,25.	0,5.	1.	2.	4.
0	3,545	2,507	1,773	1,271	1,037
$\frac{\pi}{3}$	1,184	1,449	1,349	1,135	1,018
$\frac{2\pi}{3}$	0,300	0,730	0,963	0,999	1,000
$\frac{2\pi}{3}$	0,044	0,280	0,612	0,864	0,982
$\pi$	0,0004	0,036	0,301	0,730	0,963

## CHAPITRE VI.

### MOUVEMENT BROWNIEN DE ROTATION D'UNE HYPERSPHERE A TROIS DIMENSIONS.

*Composition des rotations autour d'un point dans l'espace à quatre dimensions.* — Soient  $x_1, x_2, x_3, x_4$  et  $x'_1, x'_2, x'_3, x'_4$  les coordonnées d'un même point par rapport à deux systèmes d'axes orthogonaux de même origine dans l'espace à quatre dimensions. Les formules de transformation peuvent s'écrire (Cayley)

$$(74) \quad \begin{cases} x'_1 - x_1 = a(x'_2 + x_2) + b(x'_3 + x_3) + c(x'_4 + x_4), \\ x'_2 - x_2 = -a(x'_1 + x_1) + h(x'_3 + x_3) - g(x'_4 + x_4), \\ x'_3 - x_3 = -b(x'_1 + x_1) - h(x'_2 + x_2) + f(x'_4 + x_4), \\ x'_4 - x_4 = -c(x'_1 + x_1) + g(x'_2 + x_2) - f(x'_3 + x_3). \end{cases}$$

Nous poserons <sup>(1)</sup>

$$(75) \quad \begin{cases} \theta = af + bg + ch, \\ \delta = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + f^2 + g^2 + h^2 + \theta^2, \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> On a :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & h & -g \\ -b & -h & 0 & f \\ -c & g & -f & 0 \end{vmatrix} = \theta^2, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ -a & 1 & h & -g \\ -b & -h & 1 & -f \\ -c & g & -f & 1 \end{vmatrix} = \delta.$$

puis

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \frac{c}{\gamma} = \frac{f}{\varphi} = \frac{g}{\psi} = \frac{h}{\eta} = \frac{1}{\rho}, \\ \rho^2 \delta = 1, \quad \rho \theta = -\sigma. \end{array} \right.$$

Les huit paramètres  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi, \eta, \rho, \sigma$  sont liés par les deux relations

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \varphi^2 + \psi^2 + \eta^2 + \rho^2 + \sigma^2 = 1, \\ \alpha\varphi + \beta\psi + \gamma\eta + \rho\sigma = 0. \end{array} \right.$$

Un même changement d'axes est caractérisé par les valeurs  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi, \eta, \rho, \sigma$  des huit paramètres ou par ces valeurs changées de signe.

Si  $2\Phi$  et  $2\Theta$  sont les grandeurs des deux rotations ordinaires absolument perpendiculaires qui amènent le premier système d'axes sur le second, on a <sup>(1)</sup>

$$(78) \quad \theta = \text{tang } \Phi \text{ tang } \Theta, \quad \delta = \frac{1}{\cos^2 \Phi \cos^2 \Theta}$$

et par suite

$$(79) \quad \rho = \cos \Phi \cos \Theta, \quad \sigma = -\sin \Phi \sin \Theta.$$

Considérons deux déplacements successifs du système de référence autour de l'origine; désignons par  $\alpha, \beta, \dots$  et  $\alpha', \beta', \dots$  les paramètres respectifs de ces déplacements, et par  $\alpha'', \beta'', \dots$  ceux du déplacement résultant. Les formules obtenues par Cole pour la composition des rotations autour d'un point dans l'espace à quatre dimensions, avec les paramètres  $a, b, c, f, g, h, \theta$  deviennent, avec ceux que nous avons introduits :

$$(80) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha'' = \varphi\alpha' - \eta\beta' + \psi\gamma' + \sigma\varphi' - \gamma\psi' + \beta\eta' + \alpha\rho' + \varphi\sigma', \\ \beta'' = \eta\alpha' + \rho\beta' - \varphi\gamma' + \gamma\varphi' + \sigma\psi' - \alpha\eta' + \beta\rho' + \psi\sigma', \\ \gamma'' = -\psi\alpha' + \varphi\beta' + \rho\gamma' - \beta\varphi' + \alpha\psi' + \sigma\eta' + \gamma\rho' + \eta\sigma', \\ \varphi'' = \sigma\alpha' - \gamma\beta' + \beta\gamma' + \rho\varphi' - \eta\psi' + \psi\eta' + \varphi\rho' + \alpha\sigma', \\ \psi'' = \gamma\alpha' + \sigma\beta' - \alpha\gamma' + \eta\varphi' + \rho\psi' - \varphi\eta' + \psi\rho' + \beta\sigma', \\ \eta'' = -\beta\alpha' + \alpha\beta' + \sigma\gamma' - \psi\varphi' + \varphi\psi' + \rho\eta' + \eta\rho' + \gamma\sigma', \\ \rho'' = -\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \varphi\varphi' - \psi\psi' - \eta\eta' + \rho\rho' + \sigma\sigma', \\ \sigma'' = -\varphi\alpha' - \psi\beta' - \eta\gamma' - \alpha\varphi' - \beta\psi' - \gamma\eta' + \sigma\rho' + \rho\sigma'. \end{array} \right.$$

(1) COLE, *Amer. Jour. of Math.*, t. XII.

Si le deuxième déplacement est très petit, on a au premier ordre  $\varphi' = 1$ ,  $\sigma' = 0$  et  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$ ,  $\varphi'$ ,  $\psi'$ ,  $\eta'$  infiniment petits. Donc en posant

$$d\alpha = \alpha'' - \alpha, \quad \dots$$

on aura

$$(81) \quad \begin{cases} d\alpha = \rho\alpha' - \eta\beta' + \psi\gamma' + \sigma\varphi' - \gamma\psi' + \beta\eta', \\ d\beta = \eta\alpha' + \rho\beta' - \varphi\gamma' + \gamma\varphi' + \sigma\psi' - \alpha\eta', \\ d\gamma = -\psi\alpha' + \varphi\beta' + \rho\gamma' - \beta\varphi' + \alpha\psi' + \sigma\eta', \\ d\varphi = \sigma\alpha' - \gamma\beta' + \beta\gamma' + \rho\varphi' - \eta\psi' + \psi\eta', \\ d\psi = \gamma\alpha' + \sigma\beta' - \alpha\gamma' + \eta\varphi' + \rho\psi' - \varphi\eta', \\ d\eta = -\beta\alpha' + \alpha\beta' + \sigma\gamma' - \psi\varphi' + \varphi\psi' + \rho\eta', \\ d\varphi = -\alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma' - \varphi\varphi' - \psi\psi' - \eta\eta', \\ d\sigma = -\varphi\alpha' - \psi\beta' - \eta\gamma' - \alpha\varphi' - \beta\psi' - \gamma\eta', \end{cases}$$

d'où

$$(82) \quad \begin{aligned} ds^2 &= d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 + d\varphi^2 + d\psi^2 + d\eta^2 + d\rho^2 + d\sigma^2 \\ &= \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2 + \eta'^2. \end{aligned}$$

Si l'on suppose ce petit déplacement effectué en un temps  $dt$ , l'énergie cinétique  $T$  d'une hypersphère liée aux axes mobiles peut être facilement déduite des formules (74) et l'on trouve que

$$(83) \quad T dt^2 = 2A(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2 + \eta'^2) = 2A ds^2.$$

Nous pouvons exprimer géométriquement ces résultats en considérant les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\eta$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$  comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace à huit dimensions. Les deux relations (77) définissent alors dans cet espace une multiplicité  $\Gamma$  à six dimensions, sur laquelle une même rotation dans l'espace à quatre dimensions est représentée par deux points diamétralement opposés.

La correspondance entre les positions d'une hypersphère  $S_3$  liée aux axes mobiles dans l'espace à quatre dimensions, et les points de la multiplicité  $\Gamma$  est intrinsèque, un changement dans la position de référence revenant, d'après les formules (80), à un changement d'axes orthogonaux dans l'espace à huit dimensions. Ces formules définissent un sous-groupe à six paramètres du groupe des déplacements autour de l'origine dans cet espace; ce sous-groupe, étant transitif pour les points de la multiplicité  $\Gamma$ , admet, comme seul élément différentiel invariant, l'élément d'aire  $d\mathcal{A}$  de cette multiplicité. On doit donc

prendre comme définition de la probabilité élémentaire relative aux positions de l'hypersphère  $S_3$ .

$$(84) \quad dA = d\alpha.$$

résultat que l'on peut aussi déduire de la relation (83) qui prouve l'invariance de l'élément linéaire  $ds^2$  de la multiplicité  $\Gamma$  vis-à-vis des changements d'axes de référence dans l'espace à quatre dimensions.

*Mouvement brownien de rotation.* — Pour définir le mouvement brownien de rotation de l'hypersphère  $S_3$ , nous remarquerons qu'une petite rotation  $(\alpha', \beta', \gamma', \varphi', \psi', \eta')$  est la résultante de six rotations ordinaires indépendantes, de grandeurs  $2\alpha', 2\beta', 2\gamma', 2\varphi', 2\psi', 2\eta'$ , effectuées dans les six plans de coordonnées à deux dimensions, et qu'une série de petites rotations  $(\alpha'_1, \beta'_1, \dots), (\alpha'_2, \beta'_2, \dots)$  a pour résultante la rotation

$$(85) \quad \alpha' = \alpha'_1 + \alpha'_2 + \dots \quad \beta' = \beta'_1 + \beta'_2 + \dots \quad \dots$$

pourvu que  $\alpha', \beta', \dots$  soient encore petits. Ceci nous permet de caractériser le mouvement brownien relatif à un petit intervalle de temps  $\Delta t$ , par les relations moyennes

$$(86) \quad \begin{cases} \overline{\alpha'} = \overline{\beta'} = \dots = 0, & \overline{\alpha'\beta'} = \overline{\alpha'\gamma'} = \dots = 0, \\ \overline{\alpha'^2} = \overline{\beta'^2} = \overline{\gamma'^2} = \overline{\varphi'^2} = \overline{\psi'^2} = \overline{\eta'^2} = 2 \frac{\mathcal{R}}{4} \Delta t. \end{cases}$$

Comme d'après les formules (81) le déplacement du point représentatif correspondant à la petite rotation  $(\alpha', \beta', \dots)$  de l'hyperphère  $S_3$  est la résultante de six déplacements  $\alpha', \beta', \gamma', \varphi', \psi', \eta'$  effectuées suivant six directions orthogonales tangentes à la multiplicité  $\Gamma$ , il résulte des formules précédentes que ce point diffuse sur  $\Gamma$ , avec un coefficient égal à  $\frac{\mathcal{R}}{4}$ . Plus exactement si  $P d\alpha$  est la probabilité pour que l'un des deux points opposés qui représentent la position de l'hypersphère  $S_3$  se trouve à un certain instant sur l'élément  $d\alpha$  de  $\Gamma$ , la fonction  $P$  doit satisfaire à l'équation de la diffusion sur cette multiplicité.

Les équations (77) qui définissent  $\Gamma$  peuvent être remplacées par les deux suivantes :

$$(87) \quad \begin{cases} (\alpha + \varphi)^2 + (\beta + \psi)^2 + (\gamma + \eta)^2 + (\rho + \sigma)^2 = 1, \\ (\alpha - \varphi)^2 + (\beta - \psi)^2 + (\gamma - \eta)^2 + (\rho - \sigma)^2 = 1, \end{cases}$$

qui conduisent immédiatement à la représentation paramétrique

$$(88) \quad \begin{cases} \alpha + \varphi = \sin \varpi \sin \lambda \sin \mu, & \alpha - \varphi = \sin \chi \sin \nu \sin \tau, \\ \beta + \psi = \sin \varpi \sin \lambda \cos \mu, & \beta - \psi = \sin \chi \sin \nu \cos \tau, \\ \gamma + \eta = \sin \varpi \cos \lambda, & \gamma - \eta = \sin \chi \cos \nu, \\ \rho + \sigma = \cos \varpi, & \rho - \sigma = \cos \chi. \end{cases}$$

Avec ces variables, l'élément linéaire de  $\Gamma$  a pour expression

$$(89) \quad ds^2 = \frac{1}{2} (d\varpi^2 + \sin^2 \varpi d\lambda^2 + \sin^2 \varpi \sin^2 \lambda d\mu^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\nu^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \nu d\tau^2).$$

On en déduit pour l'élément d'aire :

$$(90) \quad d\mathcal{A} = \frac{1}{8} \sin^2 \varpi \sin \lambda \sin^2 \chi \sin \nu d\varpi d\lambda d\mu d\chi d\nu d\tau.$$

Remarquons que d'après les relations (79) on a

$$\rho + \sigma = \cos(\Phi - \Theta), \quad \rho - \sigma = \cos(\Phi + \Theta)$$

et par suite

$$(91) \quad \varpi = \Phi - \Theta, \quad \chi = \Phi + \Theta.$$

Or si les positions de l'hypersphère mobile  $S_3$  sont rapportées à sa position initiale, la probabilité d'une position donnée ne doit dépendre que des grandeurs  $2\Phi$  et  $2\Theta$  des rotations composantes du déplacement correspondant, et non de leur orientation. Par suite la fonction  $P$  ne doit dépendre que des variables  $\varpi$ ,  $\chi$  et  $t$ . Pour une telle fonction l'équation de la diffusion sur la multiplicité  $\Gamma$  s'écrit, pour un coefficient de diffusion  $\frac{\mathcal{R}}{4}$ ,

$$(92) \quad \frac{1}{\sin^2 \varpi} \frac{\partial}{\partial \varpi} \left( \sin^2 \varpi \frac{\partial P}{\partial \varpi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \chi} \frac{\partial}{\partial \chi} \left( \sin^2 \chi \frac{\partial P}{\partial \chi} \right) = \frac{2}{\mathcal{R}} \frac{\partial P}{\partial t}.$$

On doit avoir d'autre part

$$(93) \quad \oint_{\Gamma} P \, d\mathcal{L} = 2\pi^2 \int_0^\pi \int_0^\pi P(\varpi, \gamma, t) \sin^2 \varpi \sin^2 \gamma \, d\varpi \, d\gamma = 2$$

avec

$$P(\pi - \varpi, \pi - \gamma, t) = P(\varpi, \gamma, t).$$

Enfin pour  $t = 0$  la fonction  $P$  doit tendre vers zéro quels que soient  $\varpi$  et  $\gamma$ , sauf pour  $\varpi = \gamma = 0$  et  $\varpi = \gamma = \pi$ , cette fonction tendant alors vers l'infini. Nous pouvons satisfaire à ces conditions en posant

$$(94) \quad P(\varpi, \gamma, t) = g_1(\varpi, t) g_1(\gamma, t),$$

la fonction  $g_1$  étant la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$(95) \quad \frac{\partial^2 g_1}{\partial \varpi^2} + 2 \frac{\cos \varpi}{\sin \varpi} \frac{\partial g_1}{\partial \varpi} = \frac{2}{cR} \frac{\partial g_1}{\partial t},$$

qui tend vers zéro avec  $t$  quel que soit  $\varpi$ , sauf pour  $\varpi = 0$  ou  $\varpi = \pi$ , et qui satisfait aux conditions

$$(96) \quad \int_0^\pi g_1(\varpi, t) \sin^2 \varpi \, d\varpi = \frac{1}{\pi}, \quad g_1(\pi - \varpi, t) = g_1(\varpi, t).$$

Nous sommes ainsi ramenés à un problème identique à celui que nous avons résolu pages 18 et 19, et l'on voit de suite que

$$(97) \quad g_1(\varpi, t) = 2g(\varpi, 2t).$$

La probabilité pour que l'hypersphère  $S_3$  se trouve dans la position  $\varpi, \lambda, \mu, \gamma, \nu, \tau$  (à  $d\varpi, d\lambda, \dots$  près) à l'instant  $t$ , est donc

$$(98) \quad P \, dJ = \frac{1}{2} g(\varpi, 2t) g(\gamma, 2t) \sin^2 \varpi \sin \lambda \sin^2 \gamma \sin \nu \, d\varpi \, d\lambda \, d\mu \, d\gamma \, d\nu \, d\tau,$$

la fonction  $g$  étant donnée par la série (38) de la page 19. On doit d'ailleurs se rappeler que

$$(99) \quad \varpi = \Phi - \Theta, \quad \gamma = \Phi + \Theta.$$

La probabilité d'un déplacement donné dépend donc d'une façon symétrique de la somme et de la différence des grandeurs des deux rotations ordinaires composantes.

Les résultats de ce Chapitre ne se généralisent pas facilement au cas d'une hypersphère à un plus grand nombre de dimensions.

---

## CHAPITRE VII.

### PRODUIT ET ITÉRATION DES RÉPARTITIONS SPHÉRIQUES.

---

Nous avons jusqu'ici résolu les problèmes de mouvement brownien de rotation en montrant leur équivalence avec des problèmes de diffusion (ou de conductibilité thermique) sur des multiplicités fermées, et en intégrant les équations aux dérivées partielles correspondantes au moyen de développements en série de fonctions fondamentales. Ces problèmes peuvent être abordés par une voie toute différente que nous allons maintenant exposer.

Pour plus de brièveté nous ne reprendrons que l'étude du mouvement brownien de déplacement d'un point M sur la surface d'une sphère  $\Sigma$  de rayon  $r$ , qui représente de façon immédiate le mouvement brownien angulaire d'un rayon déterminé d'une sphère libre. Nous désignerons toujours par  $f(\omega, t) d\Omega$  la probabilité pour que le point M initialement au pôle se trouve au bout du temps  $t$  sur un élément  $d\Omega = \sin \omega d\omega d\lambda$  de  $\Sigma$ , situé à une distance sphérique  $\omega$  du pôle.

Considérons à partir de l'instant initial deux intervalles de temps successifs de durées  $t_1$  et  $t_2$ . Les conditions dans lesquelles se produit le mouvement brownien étant les mêmes à tout instant, la probabilité que le point M se trouve à l'instant  $t_1 + t_2$  dans l'élément  $d\Omega$  en ayant eu, à l'instant  $t_1$ , une position située sur un autre élément donné  $d\sigma = \sin \theta d\theta d\mu$  de la surface de la sphère est

$$(100) \quad f(\theta, t_1) d\sigma f(\alpha, t_2) d\Omega,$$

$\alpha$  étant la distance sphérique des éléments  $d\sigma$  et  $d\Omega$ . En faisant la somme des probabilités analogues à celle que nous venons de définir,

pour toutes les positions possibles de l'élément  $d\sigma$  sur  $\Sigma$ , nous obtiendrons la probabilité totale  $f(\omega, t_1 + t_2) d\Omega$  pour que le point M se trouve sur  $d\Omega$  à l'instant  $(t_1 + t_2)$ ; on a donc (après division par  $d\Omega$ )

$$(101) \quad f(\omega, t_1 + t_2) = \oint_{\Sigma} f(\theta, t_1) f(\alpha, t_2) d\sigma$$

avec

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \theta \cos \omega + \sin \theta \sin \omega \cos(\mu - \lambda), \\ d\sigma &= \sin \theta d\theta d\mu. \end{aligned}$$

Nous exprimerons cette relation fonctionnelle intégrale, qui traduit les caractères essentiels du mouvement brownien, en disant que la distribution de probabilité  $f(\omega, t_1 + t_2)$  résulte de la composition, ou du produit sphérique, des deux distributions  $f(\omega, t_1)$  et  $f(\omega, t_2)$ , et pour montrer comment cette condition détermine la fonction de probabilité  $f(\omega, t)$ , nous allons d'abord étudier *a priori* la composition de deux distributions quelconques.

*Composition de deux répartitions sphériques ou hypersphériques de révolution.* — A toute fonction  $\varphi(\omega)$  définie <sup>(1)</sup> entre 0 et  $\pi$ , nous ferons correspondre l'opération qui d'une « masse »  $p$  quelconque prise au pôle P d'une sphère  $\Sigma$  de rayon 1 conduit à une répartition de « matière » sur la surface de cette sphère telle que la densité superficielle (positive ou négative) ait au point de coordonnées sphériques  $(\omega, \lambda)$  la valeur  $p\varphi(\omega)$ .

Étant données deux telles répartitions de révolution  $\varphi(\omega)$  et  $\psi(\omega)$ , nous appellerons répartition résultante, ou *produit sphérique* des fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  et désignerons par  $\varphi\psi(\omega)$ , la répartition obtenue en effectuant d'abord, à partir d'une masse 1 prise au pôle P, la répartition  $\varphi$ , puis à partir de chaque élément  $d\sigma$  de  $\Sigma$  pris comme pôle, avec la masse  $\varphi(\theta) d\sigma$  qui s'y trouve, la répartition  $\psi$ , de sorte que

$$(102) \quad \varphi\psi(\omega) = \oint_{\Sigma} \varphi(\theta) \psi(\alpha) d\sigma$$

avec

$$(103) \quad \begin{cases} \cos \alpha = \cos \theta \cos \omega + \sin \theta \sin \omega \cos \mu, \\ d\sigma = \sin \theta d\theta d\mu. \end{cases}$$

---

(1) On peut supposer d'une façon générale que  $\varphi(\omega) d\omega$  est la différentielle au sens de Stieltjes d'une fonction quelconque.



Comme on a aussi

$$(104) \quad \begin{cases} \cos \theta = \cos \alpha \cos \omega + \sin \alpha \sin \omega \cos \nu, \\ d\sigma = \sin \alpha \, d\alpha \, d\nu, \end{cases}$$

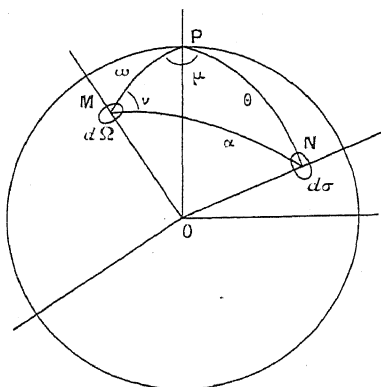


Fig. 2.

on voit que dans le produit sphérique l'ordre des opérations est indifférent

$$(105) \quad \underbrace{\varphi\psi}(\omega) = \underbrace{\psi\varphi}(\omega).$$

En posant

$$(106) \quad \cos \omega = u, \quad \varphi(\omega) = \Phi(u), \quad \psi(\omega) = \Psi(u),$$

nous écrirons de plus ( $-1 \leq u \leq +1$ )

$$(107) \quad \underbrace{\varphi\psi}(\omega) = \underbrace{\Phi\Psi}(u) = \int \int \Phi(v) \Psi(w) \frac{dv \, dw}{\sqrt{1-u^2-v^2-w^2+2uvw}}.$$

Plus généralement, nous appellerons produit hypersphérique d'ordre  $p$  de deux fonctions  $\varphi(\omega)$  et  $\psi(\omega)$ , et désignerons par  $\underbrace{\varphi\psi}_p(\omega)$

la fonction obtenue en remplaçant dans la définition précédente la surface sphérique ordinaire  $\Sigma$  par la « surface » à  $p$  dimensions  $\Sigma_p$  d'une hypersphère de rayon 1 dans l'espace à  $(p+1)^\circ$  dimensions :

$$(108) \quad \underbrace{\varphi\psi}_p(\omega) = \int_{\Sigma_p} \varphi(\theta) \psi(\alpha) \, d\sigma_N = \underbrace{\psi\varphi}_p(\omega),$$

les angles  $\theta = \widehat{PN}$ ,  $\alpha = \widehat{NM}$ ,  $\omega = \widehat{PM}$  étant reliés entre eux (et aux autres variables qui interviennent dans l'expression de  $d\sigma_N$ ) par la relation fondamentale de trigonométrie hypersphérique.

D'après ces définitions, si les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  représentent les répartitions de probabilité correspondant à deux opérations indépendantes, leur produit sphérique (ou hypersphérique) représente la répartition de probabilité composée de ces deux opérations effectuées successivement.

Pour étudier le produit sphérique des fonctions  $\varphi(\omega)$  et  $\psi(\omega)$  développons-les en séries de polynômes sphériques sous la forme

$$(109) \quad \begin{cases} 4\pi \varphi(\omega) = c_0 + \dots + (2n+1)c_n P_n(\cos\omega) + \dots \\ 4\pi \psi(\omega) = d_0 + \dots + (2n+1)d_n P_n(\cos\omega) + \dots \end{cases}$$

pour laquelle les coefficients sont donnés par les formules (1)

$$(110) \quad \begin{cases} c_n = 2\pi \int_0^\pi \varphi(\omega) P_n(\cos\omega) \sin\omega d\omega, \\ d_n = 2\pi \int_0^\pi \psi(\omega) P_n(\cos\omega) \sin\omega d\omega. \end{cases}$$

En substituant ces développements dans l'expression (102) du produit sphérique on obtient

$$4\pi \varphi\psi(\omega) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (2n+1)(2m+1) d_m \underline{P_n P_m}(\cos\omega).$$

(1) Pour une fonction  $\varphi(\omega)$  représentant une répartition de probabilité on aura

$$\oint \varphi(\omega) d\Omega = c_0 = 1$$

et  $\varphi(\omega)$  étant positif

$$|c_n| \leq 2\pi \int_0^\pi \varphi(\omega) |P_n(\cos\omega)| \sin\omega d\omega < c_0$$

car  $|P_n(\cos\omega)| \leq 1$ , donc  $|c_n| < 1$ .

Or étant données les relations (103), on sait que

$$(111) \quad \underline{P_n P_m(\cos \omega)} = \oint_{\Sigma} P_n(\cos \theta) P_m(\cos \alpha) d\sigma \\ = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \frac{4\pi}{2n+1} P_n(\cos \omega), & \text{si } m = n. \end{cases}$$

Il reste donc simplement

$$(112) \quad 4\pi \varphi \psi(\omega) = c_0 d_0 + \dots + (2n+1) c_n d_n P_n(\cos \omega) + \dots$$

Ainsi : En multipliant terme à terme les coefficients des développements de deux fonctions en série de polynômes sphériques  $\frac{2n+1}{4\pi} P_n(\cos \omega)$ , on obtient les coefficients correspondants du développement analogue de leur produit sphérique (1).

En particulier la multiplication sphérique par une fonction quelconque d'un polynôme de Legendre  $P_n(\cos \omega)$  le modifie seulement par un facteur constant, et les lois de probabilité de la forme  $1 + a P_n(\cos \omega)$ ,  $a$  étant tel que cette expression soit toujours positive, gardent cette même forme quand on les compose avec une répartition de probabilité quelconque (2).

De même en développant les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  en polynômes hyper-sphériques sous la forme

$$(113) \quad \begin{cases} S_p \varphi(\omega) = c_{0p} + \dots + \frac{2n+p-1}{n!} \frac{(p+n-2)!}{(p-1)!} c_{np} P_{np}(\cos \omega) + \dots, \\ S_p \psi(\omega) = d_{0p} + \dots + \frac{2n+p-1}{n!} \frac{(p+n-2)!}{(p-1)!} d_{np} P_{np}(\cos \omega) + \dots, \end{cases}$$

(1) Pour des répartitions de probabilité on aura  $c_0 = d_0 = 1$  et  $|c_n| < 1$ ,  $|d_n| < 1$ , d'où résulte bien que  $c_0 d_0 = 1$  et  $|c_n d_n| < 1$ .

(2) Par exemple les conditions de symétrie de l'onde lumineuse imposent (en basse fréquence) pour la répartition dans l'espace des directions d'émission des photo-électrons la loi

$$A \cos^2 \omega + B = 1 + a P_2(\cos \omega)$$

dont la forme subsiste bien, d'après ce que nous venons de voir, quelles que soient les dispersions subies par les électrons pendant leurs sorties des atomes (P. AUGER et F. PERRIN, *Jour de Phys.*, t. VIII, 1927, p. 93).

on démontre en utilisant les relations

$$(114) \quad \underbrace{P_{np} P_{mp}}_p(\cos \omega) = \begin{cases} 0, & \text{si } m \neq n, \\ S_p \frac{n!}{2n+p-1} \frac{(p-1)!}{(p+n-2)!} P_{np}(\cos \omega), & \text{si } m = n, \end{cases}$$

que

$$(115) \quad S_p \underbrace{\Phi \Psi}_p(\omega) = c_{0p} d_{0p} + \dots \\ + \frac{2n+p-1}{n!} \frac{(p+n-2)!}{(p-1)!} c_{np} d_{np} P_{np}(\cos \omega) + \dots$$

Les formules de définition (102) et (108) montrent que le produit sphérique ou hypersphérique de deux fonctions positives ou nulles dans l'intervalle fondamental  $0, \pi$  ou  $-1, +1$  est une fonction positive ou nulle dans cet intervalle. Cette propriété s'étend aux dérivées d'ordre quelconque par rapport à  $u = \cos \omega$ . En effet, en dérivant  $k$  fois par rapport à cette variable les développements (109) et (112), on obtient, en utilisant la deuxième des relations (58) de la page 25 et en posant  $p = 2k + 2, m = n - k$ ,

$$(116) \quad \begin{cases} \frac{d^k}{du^k} \Phi(u) = \Phi^{(k)}(u) = \frac{(2\pi)^k}{S_p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+p-1)}{m!} \frac{(p+m-2)!}{(p-1)!} c_n P_{mp}(u), \\ \frac{d^k}{du^k} \Psi(u) = \Psi^{(k)}(u) = \frac{(2\pi)^k}{S_p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+p-1)}{m!} \frac{(p+m-2)!}{(p-1)!} d_n P_{mp}(u), \end{cases}$$

$$(117) \quad \frac{d^k}{du^k} \underbrace{\Phi \Psi}(u) = \underbrace{\Phi \Psi^{(k)}}(u) \\ = \frac{(2\pi)^k}{S_p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+p-1)}{m!} \frac{(p+m-2)!}{(p-1)!} c_n d_n P_{mp}(u).$$

Formons le produit hypersphérique d'ordre  $p = 2k + 2$  de ces deux premières fonctions; d'après les formules (113) et (115), son développement s'écrit immédiatement

$$(118) \quad \underbrace{\Phi^{(k)} \Psi^{(k)}}_{2k+2}(u) = \frac{(2\pi)^{2k}}{S_p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+p-1)}{m!} \frac{(p+m-2)!}{(p-1)!} c_n d_n P_{mp}(u)$$

et en comparant avec la formule (117) on voit que

$$(119) \quad \underbrace{\Phi\Psi^{k_1}}(u) = \frac{1}{(2\pi)^k} \underbrace{\Phi^{k_1}\Psi^{k_1}}_{2k+2}(u).$$

Plus généralement on prouve de même la relation

$$(120) \quad \underbrace{\Phi\Psi^{k_1}}_p(u) = \frac{1}{(2\pi)^k} \underbrace{\Phi^{k_1}\Psi^{k_1}}_{p+2k}(u).$$

Il résulte notamment de ces formules que : *Si deux fonctions  $\Phi(u)$  et  $\Psi(u)$  ont leurs dérivées d'ordre  $k$  positives ou nulles dans tout l'intervalle fondamental  $-1, +1$ , la dérivée de même ordre de leur produit hypersphérique d'ordre quelconque  $\underbrace{\Phi\Psi}_p(u)$  est également positive ou nulle dans cet intervalle.*

Comme  $\frac{d}{du} = -\frac{1}{\sin\omega} \frac{d}{d\omega}$ , on voit encore que si les fonctions  $\varphi(\omega)$  et  $\psi(\omega)$  ont leurs dérivées premières négatives ou nulles entre 0 et  $\pi$  il en est de même de leur produit sphérique  $\underbrace{\varphi\psi}_1(\omega)$ , mais avec la variable  $\omega$  cette proposition n'est plus vraie pour les dérivées d'ordre supérieur.

Nous appellerons *itération sphérique* d'une fonction la multiplication sphérique de cette fonction par elle-même, et nous désignerons par  $\underbrace{\varphi}_q(\omega)$  la fonction résultant de  $(q-1)^e$  itérations sphériques de la fonction  $\varphi(\omega)$  (c'est-à-dire le produit sphérique de  $q$  fonctions identiques à  $\varphi$ ). D'après ce qui précède, on a

$$(121) \quad 4\pi \underbrace{\varphi}_q(\omega) = c_0^q + \dots + (2n+1)c_n^q P_n(\cos\omega) + \dots,$$

et si la fonction  $\varphi(\omega)$  n'est jamais croissante entre 0 et  $\pi$ , il en est de même de toutes les fonctions itérées  $\underbrace{\varphi}_q(\omega)$ .

*Résolution de l'équation fonctionnelle d'itération sphérique.* — Reprenons l'étude de l'équation intégrale fonctionnelle à laquelle satisfait la fonction de probabilité  $f(\omega, t)$ , en l'écrivant pour une fonction quelconque  $\varphi(\omega, t)$

$$(122) \quad \varphi(\omega, t_1 + t_2) = \oint \varphi(\theta, t_1) \varphi(\alpha, t_2) d\sigma.$$

En développant la fonction  $\varphi(\omega, t)$  en série de polynômes sphériques sous la forme ( $u = \cos \omega$ )

$$(123) \quad 4\pi \varphi(\omega, t) = 4\pi \Phi(u, t) = c_0(t) + \dots + (2n+1)c_n(t)P_n(u) + \dots,$$

on voit, d'après le théorème établi au paragraphe précédent sur la formation du produit sphérique de deux tels développements, que la condition précédente équivaut aux relations fonctionnelles ordinaires

$$(124) \quad c_n(t_1 + t_2) = c_n(t_1)c_n(t_2),$$

qui donnent

$$(125) \quad c_n(t) = e^{-a_n t - t^n},$$

les  $a_n$  et  $t_n$  étant des constantes. La solution générale de l'équation fonctionnelle intégrale considérée est donc représentée par le développement

$$(126) \quad 4\pi \varphi(\omega, t) = 4\pi \Phi(u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-a_n t - t^n} P_n(u),$$

sous la seule condition que la série ainsi formée soit convergente.

Dans le problème du mouvement brownien de rotation la fonction  $\varphi(\omega, t)$  doit représenter une répartition de probabilité entièrement rassemblée au pôle  $\omega = 0$  à l'instant initial; il faut donc

$$(127) \quad \begin{cases} \varphi(\omega, t) \geq 0, & c_0(t) = e^{-a_0 t - t^0} = 1, & \text{d'où } a_0 = 0; \\ \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(\omega, t) = 0 & \text{si } \omega \neq 0. \end{cases}$$

Il en résulte d'abord que le coefficient

$$e^{-a_n t - t^n} = 2\pi \int_0^\pi \varphi(\omega, t) P_n(\cos \omega) \sin \omega \, d\omega$$

doit être inférieur à 1 en tendant vers cette valeur quand  $t$  tend vers zéro, et par suite que  $t_n = 0$ ,  $a_n > 0$  (et non infini). On prouve alors facilement que la série

$$(128) \quad 4\pi \Phi(u, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{-a_n t} P_n(u)$$

sera convergente quels que soient  $t > 0$  et  $|u| \leq 1$ , si (condition



nécessaire et suffisante)  $\frac{a_n}{\log n}$  augmente indéfiniment avec  $n$  (toutes les séries obtenues en dérivant cette série par rapport à  $u$  ou à  $t$  sont alors également convergentes). Nous allons montrer qu'on peut déterminer les  $a_n$  (satisfaisant à cette condition) de façon que la fonction  $\Phi(u, t)$  soit toujours positive et que

$$(129) \quad \lim_{t=0} \frac{1}{t} \Phi(u, t) = \Phi'_t(u, 0) = D(u) \quad \text{pour } u \neq 1,$$

$D(u)$  étant une fonction positive quelconque donnée.

Remarquons d'abord que si la fonction  $\Phi$  existe on a

$$(130) \quad \frac{1}{t} 2\pi \int_{-1}^{+1} \Phi(u, t)(1-u) du = \frac{1}{t}(1 - e^{-at})$$

et que par suite cette expression tend, pour  $t=0$ , vers une limite finie positive  $a_1$ . D'autre part, on devra avoir, quelque grand que soit  $q$ ,

$$(131) \quad \Phi(u, t) = \underline{\Phi}_q\left(u, \frac{t}{q}\right),$$

d'après la formule de l'itération sphérique.

Considérons alors une fonction quelconque  $\Psi(u, t)$  satisfaisant aux conditions supplémentaires que nous imposons à la solution  $\Phi(u, t)$  de l'équation (122), c'est-à-dire telle que

$$(132) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi(u, t) \geq 0, \quad 2\pi \int_{-1}^{+1} \Psi(u, t) du = 1, \\ \lim_{t=0} \Psi(u, t) = 0, \\ \lim_{t=0} \frac{1}{t} \Psi(u, t) = \Psi'_t(u, 0) = D(u) \geq 0 \\ \lim_{t=0} \frac{1}{t} 2\pi \int_{-1}^{+1} \Psi(u, t)(1-u) du = p_1 > 0. \end{array} \right\} \text{ si } u \neq 1,$$

En se reportant à la définition de l'itération sphérique on démontre assez facilement que si la fonction  $\Psi(u, t)$  vérifie ces conditions, il en est de même de la fonction

$$\Psi_q\left(u, \frac{t}{n}\right),$$

quel que soit l'entier  $q$ . Cherchons si cette dernière fonction tend vers une limite quand  $q$  augmente indéfiniment.

La dernière des relations (132) peut s'écrire

$$\rho_1 = \lim_{t=0} \left[ \frac{1}{t} 2\pi \int_{-1}^{1-\varepsilon} \Psi(u, t) (1-u) du + \frac{1}{t} 2\pi \int_{1-\varepsilon}^1 \Psi(u, t) (1-u) du \right].$$

Pour une valeur donnée de  $\varepsilon$  le premier de ces termes tend vers

$$2\pi \int_{-1}^{1-\varepsilon} D(u) (1-u) du$$

quand  $t$  tend vers zéro; le deuxième terme a donc alors une limite que nous désignerons par  $\alpha(\varepsilon)$ , et l'on a

$$\rho_1 = 2\pi \int_{-1}^{1-\varepsilon} D(u) (1-u) du + \alpha(\varepsilon).$$

Si l'on fait tendre  $\varepsilon$  vers zéro le premier terme du second membre augmente en restant inférieur à  $\rho_1$  [car  $\alpha(\varepsilon)$  est nécessairement positif ou nul]; il tend donc vers une limite que nous désignerons par

$$2\pi \int_{-1}^{(+1)} D(u) (1-u) du;$$

$\alpha(\varepsilon)$  tend donc également vers une limite  $\alpha_0$  quand  $\varepsilon$  tend vers zéro, et l'on a donc

$$(133) \quad \rho_1 = 2\pi \int_{-1}^{(+1)} D(u) (1-u) du + \alpha_0$$

avec

$$(134) \quad \alpha_0 = \lim_{\varepsilon=0} \lim_{t=0} \frac{2\pi}{t} \int_{1-\varepsilon}^1 \Psi(u, t) (1-u) du \geq 0.$$

On démontre alors d'une façon analogue que l'expression

$$\frac{1}{t} 2\pi \int_{-1}^{(+1)} \Psi(u, t) (1-u)^m du$$

a une limite  $p_m$  quand  $t$  tend vers zéro, et que cette limite a pour



valeur (pour  $m \geq 2$ )

$$(135) \quad p_m = \lim_{t=0} \frac{2\pi}{t} \int_{-1}^{+1} \Psi(u, t) (1-u)^m du = 2\pi \int_{-1}^{(+1)} D(u) (1-u)^m du.$$

Écrivons le développement de la fonction  $\Psi(u, t)$  en polynomes sphériques, sous la forme

$$(136) \quad 4\pi \Psi(u, t) = 1 + \dots + (2n+1) [1 - \gamma_n(t)] P_n(u) + \dots$$

On a

$$(137) \quad \gamma_n(t) = 2\pi \int_{-1}^{+1} \Psi(u, t) [1 - P_n(u)] du,$$

et comme

$$(138) \quad 1 - P_n(u) = \frac{n(n+1)}{2} (1-u) - \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{16} (1-u)^2 + \dots \\ + (-1)^{n-1} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} (1-u)^n,$$

il résulte immédiatement des formules (133) et (135) que

$$(139) \quad \lim_{t=0} \frac{1}{t} \gamma_n(t) = \lim_{t=0} \frac{2\pi}{t} \int_{-1}^{+1} \Psi(u, t) [1 - P_n(u)] du \\ = \frac{n(n+1)}{2} \alpha_0 + 2\pi \int_{-1}^{(+1)} D(u) [1 - P_n(u)] du.$$

Or, en partant du développement (136) on obtient comme expression de la fonction itérée que nous voulons étudier

$$(140) \quad 4\pi \underline{\Psi}_q \left( u, \frac{t}{q} \right) = 1 + \dots + (2n+1) \left[ 1 - \gamma_n \left( \frac{t}{q} \right) \right]^q P_n(u) + \dots,$$

et la formule précédente montre immédiatement que le terme général de cette série, qu'on peut écrire

$$(2n+1) e^{-\frac{q}{t} \log \left[ 1 - \gamma_n \left( \frac{t}{q} \right) \right]^t} P_n(u),$$

tend vers

$$(2n+1) e^{-a_n t} P_n(u)$$

avec

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \alpha_0 + 2\pi \int_{-1}^{(+1)} D(u) [1 - P_n(u)] du$$

quand  $q$  augmente indéfiniment. La série correspondante est de la forme (128), et converge si  $\alpha_0$  n'est pas nul, car alors  $\frac{\alpha_n}{\log n}$  augmente indéfiniment avec  $n$  [quel que soit  $D(u)$ ]. Il en résulte que si  $\alpha_0$  est différent de zéro, la fonction  $\underline{\Psi}_q\left(u, \frac{t}{q}\right)$  tend vers une limite pour  $q$  infini, et que cette limite

$$(141) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\pi \Phi(u, t) = 1 + \dots + (2n+1) e^{-\alpha_n t} P_n(u) + \dots, \\ \alpha_n = \frac{n(n+1)}{2} \alpha_0 + 2\pi \int_{-1}^{n^{(+1)}} D(u) [1 - P_n(u)] du \end{array} \right.$$

satisfait à l'équation fonctionnelle (122), et en outre aux conditions (132) comme étant la limite d'une suite de fonctions qui y satisfont toutes.

Ainsi, bien que l'itération indéfinie de fonctions  $\Psi(u, t)$  très diverses puisse conduire à la même fonction  $\Phi(u, t)$ , pour aboutir à la fonction type Gauss

$$(142) \quad 4\pi F(u, t) = 1 + \dots + e^{-n(n+1)\mathcal{R}t} P_n(u) + \dots \quad \left(\mathcal{R} = \frac{\alpha_0}{2}\right),$$

obtenue dans les Chapitres précédents, on voit qu'il faut que  $D(u)$  soit identiquement nul, c'est-à-dire que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \Psi(u, t) = \Psi'_t(u, 0) \equiv 0, \quad (u \neq 1).$$

Comme exemple de fonctions très différentes satisfaisant aux conditions (132) avec  $D(u) \equiv 0$  et  $\alpha_0 \neq 0$ , on peut prendre

$$\Psi(u, t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi at} & \text{si } 1 \geq u \geq 1 - at \\ 0 & \text{si } 1 - at > u \geq -1 \end{cases} \quad \left(\alpha_0 = \frac{a}{2}\right)$$

et

$$\Psi(u, t) = \frac{1}{2\pi at} \frac{e^{-\frac{1-u}{at}}}{1 - e^{-\frac{2}{at}}}, \quad (\alpha_0 = a).$$

Cette deuxième fonction ayant toutes ses dérivées par rapport à  $u$  positives entre  $-1$  et  $+1$ , il en est de même de toutes les fonctions itérées et par suite de leur limite  $F(u, t)$ ; nous retrouvons ainsi par

une méthode différente cette propriété de la fonction  $F$  établie au Chapitre V.

Si  $\alpha_0$  est nul il est nécessaire, pour que la série (141) soit convergente, et par suite pour que  $\Psi_q(u, \frac{q}{t})$  ait une limite finie pour  $q$  infini, que  $D(u)$  augmente indéfiniment quand  $u$  tend vers 1. Sans insister sur les conditions que doit vérifier alors cette fonction, nous étudierons seulement l'exemple suivant :

$$D(u) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \frac{1}{(1-u)^{\frac{3}{2}}}, \quad (\alpha_0 = 0)$$

avec, si l'on veut,

$$\Psi(u, t) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \frac{1}{(1-u)^{\frac{3}{2}}} t & \text{pour } -1 \leq u < 1 - \frac{t^2}{2}, \\ \frac{1}{2\pi t} & \text{pour } 1 - \frac{t^2}{2} \leq u \leq 1. \end{cases}$$

La fonction  $4\pi\Psi_q(u, \frac{t}{q})$  tend alors vers la limite

$$(143) \quad 4\pi\Phi(u, t) = 1 + \dots + (2n+1)e^{-nt}P_n(u) + \dots \\ = \frac{1 - e^{-2t}}{(1 - 2ue^{-t} + e^{-2t})^{\frac{3}{2}}}.$$

[La sommation de la série sous forme finie s'obtient en faisant  $p = 2$ ,  $z = e^{-t}$  dans la formule (55, g) de la page 24.] Cette fonction de probabilité (positive ainsi que toutes ses dérivées par rapport à  $u$ ) est un exemple remarquable de fonction satisfaisant à l'équation fonctionnelle (122) et en général à toutes les conditions qui déterminent la loi de probabilité du mouvement brownien de rotation, sauf à la condition

$$(144) \quad D(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \Phi(u, t) \equiv 0.$$

Cette condition équivaut d'ailleurs, d'après la formule (135), aux conditions (1)

$$(145) \quad p_m = 0, \quad \text{quel que soit } m \geq 2,$$

---

(1) Il suffit même que l'un des  $p_m$  par exemple  $p_2$ , soit nul pour que l'on ait  $D(u) \equiv 0$  et par suite pour que tous les  $p_m$  soient nuls pour  $m \geq 2$ .

qui sont nécessaires pour qu'on puisse passer de l'équation fonctionnelle (122), qui exprime l'équivalence et l'indépendance des rotations successives, à l'équation aux dérivées partielles de la diffusion utilisée au début de ce travail.

Du point de vue physique on peut considérer la condition supplémentaire (144) ou (145) comme imposée par l'impossibilité d'un déplacement infiniment rapide à partir de la position initiale.

Des considérations analogues à celles que nous avons exposées dans ce Chapitre peuvent naturellement être développées dans le cas du mouvement brownien de déplacement sur une droite et de la loi ordinaire de Gauss sur les erreurs.

