ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

G. CERF

Sur les caractéristiques des équations et systèmes aux dérivées partielles du premier ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 44 (1927), p. 317-343

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1927_3_44__317_0>

SUR LES CARACTÉRISTIQUES

DES

ÉQUATIONS ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

PAR M. G. CERF

Considérons une équation aux dérivées partielles du premier ordre [1] : (E), à la fonction inconnue z des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0, \tag{1}$$

dont nous désignerons plus simplement le premier membre par la notation : $F(x_i, z, p_k)$. Nous supposons que la fonction F s'annule pour les valeurs x_i^0, z^0, p_k^0, qui définissent ainsi un élément intégral de (E), et qu'elle est holomorphe au voisinage de ces valeurs; nous supposerons de plus que les quantités

$$\frac{\partial F}{\partial p_i} = P_i, \qquad \frac{\partial F}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z} = X_i + p_i Z$$

ne sont pas toutes nulles pour x_i^0, z^0, p_k^0. Le système d'équations différentielles

$$\frac{dx_i}{P_i} = \frac{dz}{P_1 p_1 + \ldots + P_n p_n} = \frac{-dp_i}{X_i + p_i Z} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

admet une solution et une seule composée d'une simple infinité d'éléments du premier ordre (∞^1) : (x, z, p), dont chacun est un

[1] GOURSAT, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, 2e édition, p. 331.

élément intégral de (E), l'un d'eux étant l'élément x_i^0, z^0, p_k^0. Dans l'espace ($\mathcal{E}_{n+1}$) à $n+1$ dimensions (x_i, z), cette solution est représentée par un bandeau d'éléments du premier ordre qui constitue une multiplicité caractéristique de l'équation (E). Les bandeaux caractéristiques de l'équation (E) dépendent toujours de $2n-1$ constantes arbitraires; le support ponctuel d'un bandeau est en général une courbe qu'on appelle courbe caractéristique. On démontre que toute multiplicité intégrale de (E) est un lieu de caractéristiques.

Si la fonction F n'est soumise à aucune particularisation autre que celles qui ont été indiquées, ses courbes caractéristiques dépendent de $2n-1$ constantes arbitraires, chacune de ces courbes portant un bandeau caractéristique. Mais on sait qu'une équation linéaire se comporte différemment : chaque courbe caractéristique supporte ∞^{n-1} bandeaux caractéristiques et l'équation admet seulement ∞^n courbes caractéristiques; cette réduction concorde du reste avec les simplifications qui se présentent dans l'intégration de l'équation.

S. Lie signala le premier ([1]) qu'il existe, en dehors des équations linéaires, des équations aux dérivées partielles du premier ordre, que nous appellerons équations *pseudo-linéaires*, dont les ∞^{2n-1} bandeaux caractéristiques se répartissent en faisceaux tels que les bandeaux de chaque faisceau soient portés par la même courbe caractéristique. Il est clair que le nombre des constantes arbitraires dont dépendent les courbes caractéristiques relatives à une équation pseudo-linéaire est inférieur à $2n-1$; s'il est égal à $2n-k$ ($1<k<n$) nous dirons que l'équation pseudo-linéaire est de rang k; chaque courbe caractéristique supporte ∞^{k-1} bandeaux caractéristiques et par un point arbitraire de l'espace $\mathcal{E}_{n+1}$ il en passe ∞^{n-k}; si $k=1$ l'équation est du type général, si $k=n$, elle est linéaire.

Des remarques semblables peuvent être présentées relativement aux systèmes d'équations du premier ordre en involution. Soient ([2])

$$(3) \qquad F_1(x_i, z, p_k) = 0, \qquad \ldots, \qquad F_m(x_i, z, p_k) = 0$$

([1]) *Zur Theorie part. Dffglch. erster Ordnung nisbesonder über eine Klassification derselben* (*Göttinger Nachrichten*, 1872, p. 473-489).

([2]) Goursat, *loc. cit.*, p. 336.

un tel système. Le système linéaire

$$(4)\qquad [F_1, \Phi] = 0, \quad \ldots, \quad [F_m, \Phi] = 0$$

est un système complet. Soient $\Phi_1, \ldots, \Phi_{2n-2m+1}, F_1, \ldots, F_m$ un système de $2n - m + 1$ intégrales distinctes du système (4). Les équations

$$(5)\quad F_1 = 0, \quad \ldots, \quad F_m = 0, \quad \Phi_1 = C_1, \quad \ldots, \quad \Phi_{2n-2m+1} = C_{2n-2m+1},$$

où les C désignent des constantes arbitraires, représentent les multiplicités caractéristiques (à m dimensions) du système (3). Par un élément intégral non singulier x_i^0, z^0, p_k^0, il passe une multiplicité caractéristique dont les équations sont

$$F_1 = 0, \quad \ldots, \quad F_m = 0, \quad \Phi_1 = \Phi_1^0, \quad \ldots, \quad \Phi_{2n-2m+1} = \Phi_{2n-2m+1}^0.$$

Le support ponctuel d'une multiplicité caractéristique, nous l'appelons *variété caractéristique;* il est à m dimensions, sauf exceptions dont nous n'avons pas à nous préoccuper, et en général il supporte une seule multiplicité caractéristique. Toute multiplicité intégrale de (3) est un lieu de caractéristiques.

Si les fonctions F ne sont soumises à aucune particularisation, les variétés caractéristiques dépendent de $2n - 2m + 1$ paramètres; si les fonctions F sont linéaires, toutes les multiplicités caractéristiques issues des éléments intégraux ayant un point commun sont supportées par la même variété caractéristique à m dimensions et ces variétés ne dépendent que de $n - m + 1$ constantes arbitraires; nous apprendrons à construire des systèmes en involution où le nombre des paramètres dont dépendent les courbes caractéristiques peut être un nombre quelconque compris entre $n - m + 1$ et $2n - 2m + 1$ et que nous appellerons aussi systèmes pseudo-linéaires. Un système pseudo-linéaire qui possède $\infty^{2n-2m+2-k}$ variétés caractéristiques sera dit de rang k.

Dans le présent travail, nous ne pouvons songer à envisager tous les cas possibles, la question étant liée à celle, si complexe, des enveloppes dans un espace à $n + 1$ dimensions. Il est évident qu'on peut toujours, sans intégration, reconnaître si une équation, ou un système, est pseudo-linéaire, et dans l'affirmative déterminer son rang; mais, sans précautions, les calculs peuvent être très compliqués. Nous nous proposons en premier lieu d'indiquer une marche à suivre qui permet souvent de simplifier sensiblement les recherches; nous indiquerons ensuite, sur un exemple, que la classification adoptée, bien que n'étant pas invariante par rapport au groupe des transformations de contact, présente cependant de l'intérêt par les simplifications qu'apporte la réduction du nombre des paramètres dont dépendent les variétés caractéristiques; nous donnerons, surtout, le moyen de construire les équations et systèmes pseudo-linéaires à partir des systèmes d'équations de Pfaff.

Les équations et systèmes pseudo-linéaires se présentent tout naturellement quand on se propose de ramener au premier ordre un système différentiel quelconque en involution; par exemple, Lie (¹) voyait la véritable origine de la méthode de Darboux, pour les équations du second ordre à deux variables indépendantes, dans les propriétés d'une équation pseudo-linéaire à cinq variables; dans le dernier Mémoire qu'il a publié (²), il s'est du reste occupé de deux cas particuliers du problème que nous nous posons, ceux des équations de rang $n-1$ et $n-2$; il a pris comme point de départ le système d'équations de Monge auxquelles doivent satisfaire les paramètres de deux courbes caractéristiques infiniment voisines afin qu'elles se rencontrent; c'est le même système qui a servi plus tard à M. Engel (³) dans un Mémoire important, sur lequel nous reviendrons, et où il a donné, comme application d'une méthode générale, un moyen de reconnaître les plus simples des équations pseudo-linéaires. Ce système d'équations de Monge se rattache au problème général du calcul des variations : c'est à ce point de vue que s'est placé M. Cartan (⁴) quand il a repris le fond même du Mémoire de M. Engel.

La méthode que nous emploierons, plus terre à terre, consiste à faire une étude géométrique directe du problème de l'intégration d'une

(¹) *Berichte der Konigl. Sächs, Gesellsch. zu Leipzig*, vol. 47, 1895, p. 142.
(²) *Ibid.*, vol. 50, 1898, p. 113.
(³) *Ibid.*, vol. 57, 1905, p. 217.
(⁴) *Bull. de la Soc. math. de France*, t. 39, 1911, p. 29.

équation ou d'un système pseudo-linéaire; elle conduit à certains systèmes de Pfaff qu'il est aisé de traiter par les procédés du calcul extérieur.

1. *Quelques remarques préliminaires sur la géométrie des cônes et la théorie des enveloppes dans un espace à* $n+1$ *dimensions.* — Si des droites issues d'un même point M dépendent de $n-k$ paramètres essentiels, elles engendrent un cône de sommet M à $n-k+1$ dimensions $(1 \leq k \leq n-1)$. Si l'on associe à une génératrice fixe G les génératrices qui lui sont infiniment voisines, on détermine un élément plan à $n-k+1$ dimensions : E_{n+1}^{n-k+1}, osculateur au cône tout le long de G, et G est la droite commune à E_{n+1}^{n-k+1} et aux éléments osculateurs le long des génératrices infiniment voisines de G. Il peut se faire que chaque élément osculateur ne jouisse de cette propriété que relativement à une seule génératrice du cône; celui-ci possède alors ∞^{n-k} éléments osculateurs. Mais il peut arriver aussi que tout E_{n+1}^{n-k+1} envisagé soit, en général, osculateur au cône le long d'une infinité de génératrices : cela se présente, par exemple, dans l'espace à 4 dimensions, pour un cône dont la base est une surface développable ordinaire dans un espace à 3 dimensions. Toutes les génératrices le long desquelles un même élément E_{n+1}^{n-k+1} est osculateur sont celles qui sont situées dans l'élément plan commun à E_{n-k+1}^{n+1} et aux éléments osculateurs infiniment voisins, soit $E_{n+1}^{m}(m<n-k+1)$; les génératrices du cône se répartissent alors en $\infty^{n-m+k+1}$ faisceaux plans à m dimensions E_{n+1}^{m} dont chacun est contenu dans l'élément osculateur commun à toutes les droites du faisceau; il existe $\infty^{n-k+m+1}$ éléments osculateurs à $n-k+1$ dimensions.

Il peut se faire que le cône soit engendré par des éléments plans $E_{n+1}^{m'}(m'>m)$ dont chacun est un lieu de E_{n+1}^{m}; l'élément osculateur relatif à une génératrice G contient alors non seulement le E_{n+1}^{m} mais aussi le $E_{n+1}^{m'}$ relatif à cette génératrice; par un $E_{n+1}^{m'}$ passent $\infty^{m'-m}E_{n+1}^{n-k+1}$ osculateurs.

2. Nous nous occuperons dans ce paragraphe d'enveloppes de variétés planes ayant un point commun $M(x_i, z)$. Nous représentons indifféremment une telle variété par le système de Pfaff (6) qui définit

ses éléments linéaires à une dimension passant par M, ou par ses équations cartésiennes (6′); nous supposons les variétés à p dimensions et dépendant de $p-m$ paramètres essentiels ($1 \leqq m < p$); pour simplifier l'exposition, nous admettons qu'on puisse résoudre les équations par rapport à dz et aux différentielles de $x_1, \ldots, x_{n-p}$:

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi_0 = dz \quad - (a_{n-p+1}\, dx_{n-p+1} + \ldots + a_n\, dx_n) = 0, \\ \varphi_1 = dx_1 \quad - (b^1_{n-p+1}\, dx_{n-p+1} + \ldots + b^1_n\, dx_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-p} = dx_{n-p} - (b^{n-p}_{n-p+1}\, dx_{n-p+1} + \ldots + b^{n-p}_n\, dx_n) = 0; \end{cases}$$

$$(6') \quad \begin{cases} Z - z = a_{n+p+1}(X_{n-p+1} - x_{n-p+1}) + \ldots + a_n(X_n - x_n), \\ X_1 - x_1 = b^1_{n-p+1}(X_{n-p+1} - x_{n-p+1}) + \ldots + b^1_n(X_n - x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{n-p} - x_{n-p} = b^{n-p}_{n-p+1}(X_{n-p+1} - x_{n-p+1}) + \ldots + b^{n-p}_n(X_n - x_n), \end{cases}$$

les a et les b sont fonctions de (x_i, z) et de $p-m$ paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-m}$, nous supposons que ces fonctions sont analytiques; cela n'est pas nécessaire, mais nous le faisons cependant pour ne pas avoir à préciser, chaque fois que l'occasion s'en présentera, quelles sont les dérivées de ces fonctions dont il faut supposer l'existence et la continuité. Nous nous plaçons dans le cas où tout élément E^p_{n+1} ainsi défini admet en commun avec tous les éléments infiniment voisins (issus du même point M) un élément commun à m dimensions E^m_{n+1} ($m < p$); cet élément est dit élément caractéristique; dans ces conditions, les $(p-m)(n-p+1)$ équations obtenues en prenant les dérivées des équations (6′) par rapport aux λ se réduisent à $p-m$ distinctes d'entre elles; il existe $p-m$ formes de Pfaff en $dx_{n-p+1}, \ldots, dx_n$, distinctes entre elles : $\Omega_1, \ldots, \Omega_{p-m}$, telles que E^m_{n+1} soit déterminé par les équations (6) et (7) :

$$(7) \qquad \Omega_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Omega_{p-m} = 0.$$

Le lieu des E^m_{n+1} relatifs aux E^p_{n+1} issus de M est un cône C à p' dimensions : $m < p' \leqq p$. Un élément E^p_{n+1} relatif à une génératrice G de C contient les génératrices infiniment voisines de G; cela est évident pour celles qui appartiennent au même E^m_{n+1}; pour les autres, cela résulte de ce que les éléments à m dimensions infiniment voisins du E^m_{n+1} considéré sont aussi contenus dans le E^p_{n+1} relatif à G (comme cela se passe par exemple pour une surface développable ordinaire : $n = 2$, $p = 2$, $m = 1$). Nous disons que les éléments E^p_{n+1} enveloppent le cône C. Si $p' = p$, en appliquant au cône C les considérations du n° 1, on trouve comme éléments osculateurs les E^p_{n+1}.

Si $p' < p$, les éléments osculateurs de C sont à p' dimensions : $E^{p'}_{n+1}$; soit G une génératrice de C′ située dans un $E^{p'}_{n+1}$ déterminé et appartenant à un E^m_{n+1} aussi déterminé; ce dernier est contenu dans $E^{p'}_{n+1}$, qui lui-même est contenu dans tout E^p_{n+1} correspondant à E^m_{n+1} ; si, en particulier, E^m_{n+1} est aussi l'élément caractéristique de $E^{p'}_{n+1}$, alors par chaque $E^{p'}_{n+1}$ passent $\infty^{p-p'} E^p_{n+1}$ qui admettent tous comme élément caractéristique le E^m_{n+1} envisagé (c'est ce qui se produit par exemple si $m = 1$).

Supposons que, dans ce cas particulier, les équations des éléments $E^{p'}_{n+1}$ soient :

$$(8) \quad \begin{cases} \psi_0 = dz - (A_{n-p'+1}\, dx_{n-p'+1} + \ldots + A_n\, dx_n) = 0, \\ \psi_1 = dx_1 - (B^1_{n-p'+1}\, dx_{n-p'+1} + \ldots + B^1_n\, dx_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_{n-p'} = dx_{n-p'} - (B^{n-p'}_{n-p'+1}\, dx_{n-p'+1} + \ldots + B^{n-p'}_n\, dx_n) = 0, \end{cases}$$

où les A, B dépendent en outre des (x_i, z) de $p' - m$ paramètres : $\mu_{p-p'+1}, \ldots, \mu_{p-m}$; chaque expression φ_j du système (6) est une fonction linéaire de ψ_j et $\psi_{n-p+1}, \ldots, \psi_{n-p}$, dont les coefficients dépendent de $p - p'$ paramètres : $\mu_1, \ldots, \mu_{p-p'}$.

Mais des circonstances beaucoup plus complexes peuvent se présenter, l'élément caractéristique de $E^{p'}_{n+1}$ étant contenu dans E^m_{n+1} ; nous n'aurons pas à nous servir de l'analyse détaillée des différents cas possibles et nous n'insistons pas.

Il existe, en général, un système de $\infty^{n-m} E^n_{n+1}$ qui enveloppe le cône C au sens qui vient d'être dit, ce sont ceux qui contiennent les $\infty^{p-m} E^p$; l'équation de ces éléments est

$$\varphi_0 = \lambda_{p-m+1}\varphi_1 + \ldots + \lambda_{n-m}\varphi_{n-p}$$

et il est clair que l'élément caractéristique d'un tel E^n_{n+1} est un E^m_{n+1} de la famille précédemment déterminée; par chaque E^p_{n+1} il passe $\infty^{n-p} E^n_{n+1}$.

Mais il peut arriver que les $\infty^{p-m} E^p_{n+1}$ donnés soient contenus dans moins de $\infty^{n-m} E^n_{n+1}$; en laissant ce cas de côté, remarquons encore qu'il est possible que les $\infty^{n-m} E_{n+1}^{n}$ que nous avons obtenus se répartissent d'une infinité de manières en ∞^{p-m} faisceaux, tous les éléments d'un même faisceau contenant un même élément à p dimensions, l'ensemble des éléments de base enveloppant à son tour le cône C : c'est le cas si $m = 1$.

3. Supposons maintenant que les éléments E_{n+1}^{p} donnés dépendent de $p - m + r$ paramètres essentiels $(0 < r < m)$ et qu'ils soient contenus dans $\infty^{n-m} E_{n+1}^{n}$; supposons de plus que l'élément caractéristique soit à m dimensions, ce qui conduit encore à introduire le système (7) de $p - m$ équations de Pfaff avec un sens analogue. Comme précédemment, tout E_{n+1}^{p} qui contient une génératrice G contient aussi les génératrices infiniment voisines de G. Le cône C est au plus à p dimensions, mais ce nombre ne peut être atteint : les E_{n+1}^{p} devraient être les éléments osculateurs de C, ce qui est incompatible avec l'hypothèse d'une valeur positive pour r. Si le cône C à p' dimensions $(m < p' < p)$, nous dirons que le système d'éléments E_{n+1}^{p} considéré surenveloppe le cône C; il est bon d'observer que nous n'excluons pas le cas où un E_{n+1}^{p} contient en outre du E_{n+1}^{m} qui lui est propre une infinité continue de tels éléments. Les $\infty^{n-m} E_{n+1}^{n}$ envisagés au début de ce paragraphe enveloppent le cône C, car leurs éléments caractéristiques sont les E_{n+1}^{m}.

4. *Cône caractéristique d'une équation aux dérivées partielles.* — Soit M un point de coordonnées (x_i, z) et tel que $P_1, P_2, \ldots, P_n$ n'y soient pas tous nuls; les tangentes aux courbes caractéristiques de l'équation (1) qui passent en M engendrent un cône, le cône caractéristique C; on en obtient l'équation en éliminant $p_1, p_2, \ldots, p_n$ entre les relations (1) et (2) :

$$F(x_i, z, p_k) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dx_1}{P_1(x_i, z, p_k)} = \ldots = \frac{dx}{P(x_i, z, p_k)} = \frac{dz}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots + P_n p_n}. \tag{2}$$

Quand la fonction F n'est soumise à aucune particularisation, et que M est un point arbitrairement choisi, l'élimination des p entre les $n + 1$ équations précédentes procure une seule équation de Monge et le cône caractéristique est à n dimensions; à chaque génératrice G du cône est tangente une seule courbe caractéristique et correspond un système de valeurs bien déterminées pour les p qui détermine l'élément intégral porté par la courbe au point M; la considération de toutes les génératrices du cône C permet d'obtenir tous les éléments intégraux portés par M.

Les éléments intégraux sont les éléments osculateurs au cône C. — Il faut montrer que E''_{n+1} contient non seulement G mais aussi les génératrices de C infiniment voisines de G. Pour simplifier le calcul, supposons l'équation (1) résolue par rapport à p_1 sous la forme

$$p_1 = f(x_i, z, p_2, \ldots, p_n).$$

L'équation d'un élément intégral est

$$Z - z = f(X_1 - x_1) + p_2(X_2 - x_2) + \ldots + p_n(X_n - x_n);$$

on vérifie d'abord que la droite issue de M admettant pour paramètres de direction

$$-1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_n, \quad -f + p_2 P_2 + \ldots + p_n P_n$$

se trouve dans E''_{n+1}, c'est G; on constate ensuite qu'il en est de même pour les droites admettant pour paramètres de direction :

$$-1, \quad P_2 + dP_2, \ \ldots, \quad P_n + dP_n,$$
$$-f + p_2 P_2 + \ldots + p_n P_n + d(-f + p_2 P_2 + \ldots + p_n P_n),$$

car

$$d(-f + p_2 P_2 + \ldots + p_n P_n) = p_2 P_2 + \ldots + p_n dP_n.$$

Supposons à présent que F soit telle que C admette moins de n dimensions, soit $n - k + 1 (1 < k < n)$; il possède alors ∞^{n-k} génératrices, chacune d'elles est contenue dans ∞^{k-1} éléments intégraux. La démonstration précédente s'applique encore : chaque élément intégral contient non seulement la génératrice à laquelle il est relatif, mais aussi les génératrices infiniment voisines; il contient donc l'élément E^{n-k+1}_{n+1} osculateur à C le long de G. Chaque génératrice possède son élément osculateur propre, car il est nécessaire qu'il y ait ∞^{n-k} de ces éléments afin qu'ils puissent porter l'ensemble des ∞^{n-1} éléments intégraux de l'équation en M répartis en ∞^{n-k} faisceaux de ∞^{k-1} éléments.

5. *Cône caractéristique d'un système en involution.* — Soit un système en involution de m équations; d'un point M sont issus ∞^{n-m} éléments intégraux du système E^n_{n+1}, qui sont les éléments intégraux communs aux m équations. Chacun de ces éléments est relatif à une génératrice $G_1, \ldots, G_m$ des cônes caractéristiques $C_1, \ldots, C_m$; nous nous plaçons dans le cas où il est impossible de déduire du système en involution une relation indépendante des p, cas auquel on peut toujours se ramener; les directions de ces m génératrices, en un point M arbitrairement choisi, sont alors distinctes pour un élément intégral quelconque; elles déterminent un élément à m dimensions E^m_{n+1}, tangent à une multiplicité caractéristique du système; E^m_{n+1} est contenu dans E^n_{n+1}; une droite quelconque de E^m_{n+1}, issue de M, est génératrice du cône caractéristique d'une équation convenablement choisie faisant partie du système donné. En général, les ∞^{n-m} E^m_{n+1} ainsi déterminés engendrent un cône Γ, à n dimensions : *les éléments osculateurs à* Γ *sont les éléments intégraux du système.* Cela résulte de ce que les éléments à m dimensions infiniment voisins de E^m_{n+1} sont déterminés par m droites convenablement choisies parmi $G_1, \ldots, G_m$ et les génératrices infiniment voisines de celles-là dans les cônes $C_1, \ldots, C_m$; par conséquent E^n_{n+1} contient non seulement E^m_{n+1} mais aussi les éléments infiniment voisins; E^n_{n+1} est l'élément osculateur commun à toutes les génératrices situées dans E^m_{n+1}.

Mais il peut se faire que Γ soit à moins de n dimensions, soit $p' > m$ et $E^{p'}_{n+1}$ un de ses éléments osculateurs; il contient les E^m_{n+1} relatifs à ses génératrices et il est contenu dans les E^n_{n+1} correspondants; ceux-ci enveloppent le cône Γ, car E^m_{n+1} est commun à E^n_{n+1} et aux éléments intégraux infiniment voisins. Il peut arriver que l'élément caractéristique de $E^{p'}_{n+1}$ soit un E^m_{n+1} commun alors à toutes les génératrices de Γ relatives à $E^{p'}_{n+1}$; cela se produit par exemple lorsque $m = 1$. C'est un cas particulier important duquel nous nous occuperons spécialement.

6. *Équations et systèmes semi-linéaires.* — On sait qu'une équation ou un système en involution à n variables indépendantes sont dits semi-linéaires s'ils admettent une intégrale complète, dont le support ponctuel ait moins de n dimensions. En général une intégrale complète dépend de $n + 1 - m$ paramètres arbitraires; si p est le nombre de

dimensions du support, par un point M il passe ∞^{p-m} intégrales de l'intégrale complète, et M supporte $\infty^{p-m} E^p_{n+1}$, dont chacun détermine ∞^{n-p} éléments intégraux, et l'on obtient ainsi les ∞^{n-m} éléments intégraux issus de M; si p est supérieur au nombre de dimensions du cône caractéristique, les éléments E^p_{n+1} enveloppent le cône.

Mais cela suppose que les E^p_{n+1} supportés par le même point sont tous situés dans des E^n_{n+1} différents; si un même E^n_{n+1} intégral contient une infinité continue de ces E^p_{n+1}, le nombre de paramètres que nous avons indiqué pour définir une intégrale complète n'est plus suffisant; on conçoit ainsi qu'une équation semi-linéaire (ou un système) puisse admettre une intégrale complète à $p < n$ dimensions dépendant de $n + 1 - m + r$ paramètres arbitraires sans qu'il soit possible de diminuer ce nombre; si p est supérieur au nombre de dimensions du cône caractéristique, les éléments E^p_{n+1} ainsi déterminés en chaque point surenveloppent ce cône.

Nous dirons, dans l'un et l'autre cas, que les éléments E^p_{n+1} forment un système d'éléments intégraux à p dimensions; il résulte de la théorie générale qu'il existe alors nécessairement des systèmes d'éléments intégraux à $p+1, \ldots, n-1$ dimensions.

7. *Le système d'éléments intégraux à p dimensions est unique.* — Plaçons-nous d'abord dans le cas où l'intégrale complète à p dimensions dépend $n - m + 1$ paramètres; posons

$$n - m + 1 = h, \qquad n - p + 1 = k.$$

Pour simplifier, nous supposons les équations résolues sous la forme

$$(9) \qquad \begin{cases} z = g(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_h), \\ x_1 = g_1(x_k, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_h), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{k-1} = g_{k-1}(x_k, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_h). \end{cases}$$

Les éléments E^{n-k+1}_{n+1} ont pour équations

$$(10) \qquad \begin{cases} \varphi_0 = dz - a_k\, dx_k - \ldots - a_n\, dx_n = 0, \\ \varphi_1 = dx_1 - b'_k\, dx_k - \ldots - b'_n\, dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_{k-1} = dx_{k-1} - b^{k-1}_k\, dx_k - \ldots - b^{k-1}_n\, dx_n = 0, \end{cases}$$

avec

$$a_j = \frac{\partial g}{\partial x_j}, \qquad b_j^i = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}.$$

Les éléments intégraux à n dimensions, définis par les p admettent pour équations

$$(11) \qquad \left\{\begin{array}{l} p_k = a_k - \sum_1^{k-1} {}_i\, p_i b_k^i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ p_n = a_n - \sum_1^{k-1} {}_i\, p_i b_n^i. \end{array}\right.$$

Le système en involution (ou l'équation si $h = n$) est obtenu par l'élimination des h paramètres α entre les relations (9) et (11) au nombre de $k + n - k + 1 = n + 1$. Posons

$$\beta_i = \frac{\partial g}{\partial \alpha_i} - p_1 \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_i} - \dots - p_{k-1} \frac{\partial g_{k-1}}{\partial \alpha_i} \qquad (i = 1, 2, \dots, h).$$

Il résulte des relations (11), que sur les surfaces intégrales du système la relation suivante est vérifiée :

$$dz - p_1\, dx_1 - \dots - p_n\, dx_n = \sum_k^1 {}_i\, \beta_i\, d\alpha_i.$$

Une surface intégrale quelconque est déterminée par des équations telles que

$$(12) \qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 = \varpi_1(\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_h), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \alpha_l = \varpi_l(\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_h), \end{array}\right.$$

les fonctions ϖ étant arbitraires et l un des nombres entiers 1, 2, ..., $n - 1$, il en résulte

$$(13) \qquad \left\{\begin{array}{l} \beta_1 \dfrac{\partial \varpi_1}{\partial \alpha_{l+1}} + \dots + \beta_l \dfrac{\partial \varpi_l}{\partial \alpha_{l+1}} + \beta_{l+1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_1 \dfrac{\partial \varpi_1}{\partial \alpha_h} + \dots + \beta_l \dfrac{\partial \varpi_l}{\partial \alpha_h} + \beta_h = 0, \end{array}\right.$$

l'intégrale en question est obtenue par élimination de $\alpha_1 \dots \alpha_h$,

$p_1 \ldots p_{k-1}$, soit $h+k-1$ quantités, entre les équations (9), (12) et (13) au nombre de $k+l+h-l=k+h$. En général, l'intégrale est donc à n dimensions; mais admettons qu'elle soit à $n-k+1$ dimensions. Cela exige d'abord évidemment que $h-l<k$. D'ailleurs, sur une intégrale quelconque, les α étant reliés par les relations (12) et (13), on peut écrire

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{\partial g}{\partial \alpha_1}\, d\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial \alpha_h}\, d\alpha_h = \sum_{l+1}^{h} {}_j\, X_{0,j}\, d\alpha_j,\\ \varphi_1 &= \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_1}\, d\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial g_1}{\partial \alpha_h}\, d\alpha_h = \sum_{l+1}^{h} {}_j\, X_{1,j}\, d\alpha_j,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \varphi_{k-1} &= \frac{\partial g_{k-1}}{\partial \alpha_1}\, d\alpha_1 + \ldots + \frac{\partial g_{k-1}}{\partial \alpha_h}\, d\alpha_h = \sum_{l+1}^{h} {}_j\, X_{k-1,j}\, d\alpha_j, \end{aligned}\right.$$

en posant

$$X_{u,v} = \frac{\partial g_u}{\partial \alpha_1}\frac{\partial \varpi_1}{\partial \alpha_v} + \ldots + \frac{\partial g_u}{\partial \alpha_l}\frac{\partial \varpi_l}{\partial \alpha_v} + \frac{\partial g_u}{\partial \alpha_v}$$
$$(u = 0, 1, \ldots, k-1;\ v = l+1, \ldots, h).$$

Pour que l'intégrale soit à $n-k+1$ dimensions, il faut que les relations (13) où $\alpha_1 \ldots \alpha_l$ sont exprimés par (12) en $\alpha_{l+1} \ldots \alpha_h$ procurent $h-l$ relations indépendantes des p et permettant de calculer $\alpha_{l+1} \ldots \alpha_h$ en x_i, z. Ordonnées par rapport aux p, les équations (13) s'écrivent

$$(13)'\quad \left\{\begin{aligned} &X_{0,l+1} - p_1 X_{1,l+1} - \ldots - p_{k-1} X_{k-1,l+1} = 0,\\ &X_{0,l+2} - p_1 X_{1,l+2} - \ldots - p_{k-1} X_{k-1,l+2} = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &X_{0,h} \;\; - p_1 X_{1,h} \;\; - \ldots - p_{k-1} X_{k-1,h} \;\; = 0, \end{aligned}\right.$$

on voit aisément que, puisqu'elles doivent donner $h-l$ relations indépendantes des p, chacun des coefficients $X_{u,v}$ doit s'exprimer linéairement au moyen de $h-l$ expressions telles que $\alpha - A(x_i, z)$, c'est-à-dire que, sur la multiplicité considérée, les X, donc les seconds membres des relations (14), sont nuls.

Cela démontre que toute intégrale à $n-k+1$ dimensions (non singulière) est « enveloppée », quant aux éléments à $n-k+1$

dimensions par des solutions appartenant à l'intégrale complète donnée (9), donc aussi que la propriété énoncée au début de ce numéro est vérifiée lorsque l'intégrale (9) dépend de $n-p+1$ paramètres.

Supposons maintenant $h=n-p+1+r$, sans qu'il soit possible, en particularisant les paramètres, d'obtenir une autre intégrale complète; toutes les relations que nous avons établies subsistent et les X jouissent encore de la propriété indiquée; dans ce cas encore le système d'éléments intégraux à p dimensions est unique.

8. *Conoïde caractéristique* [1]. — Les caractéristiques issues d'un même point M engendrent une multiplicité intégrale de l'équation ou du système en involution considéré qu'on appelle le conoïde caractéristique en M. Le nombre de dimensions du support ponctuel de cette multiplicité est évidemment au plus égal au nombre des paramètres dont dépendent les caractéristiques issues de M, augmenté de m, nombre de dimensions d'une variété caractéristique; il est d'ailleurs au moins égal au nombre de dimensions du cône caractéristique, celui-ci étant inférieur à n si l'équation est pseudo-linéaire.

Un exemple simple [2] montre que le nombre de dimensions du conoïde caractéristique peut être supérieur à celui du cône. L'équation

$$p_1+\frac{p_2^2}{p_3}+x_1-x_2=0,$$

à trois variables indépendantes, admet un cône caractéristique à deux dimensions défini par les deux équations de Monge

$$dz=(x_2^0-x_1^0)\,dx_1,\qquad 4\frac{dx_3}{dx_1}+\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2=0,$$

tandis que les courbes caractéristiques dépendant de cinq paramètres il en passe par un point ∞^2 qui engendrent le conoïde caractéristique à trois dimensions; à chaque génératrice du cône sont tangentes ∞' courbes caractéristiques.

---

(1) Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes*, p. 289.
(2) Goursat, *Équations du premier ordre*, p. 332.

Par un point d'un conoïde caractéristique, il peut passer une infinité de variétés caractéristiques; dans des cas étendus, il n'en passe qu'une; quand par exemple l'élément caractéristique de l'élément osculateur au cône caractéristique est E^m_{n+1}; on connaît alors quel est le nombre de paramètres dont dépendent les courbes ou variétés caractéristiques dès que l'on sait quel est le nombre de dimensions du conoïde caractéristique; les considérations qui suivent s'appliquent surtout à ce cas. Remarquons qu'une équation pseudo-linéaire est nécessairement semi-linéaire, mais que la réciproque n'est pas vraie : une équation semi-linéaire peut admettre un cône caractéristique à n dimensions, celui-ci étant engendré par les éléments plans à $n-k+1$ dimensions.

9. I. Supposons que $n-k+1$ soit au moins égal au nombre de dimensions p' du cône caractéristique C et qu'il existe un système d'éléments intégraux à $n-k+1$ dimensions : proposons-nous de le déterminer. Nous avons vu que ces éléments enveloppent ou surenveloppent C; et l'équation de ce dernier s'obtient aisément comme nous l'avons indiqué. Dans le cas où l'élément caractéristique des E^{n-k+1}_{n+1} est le même que celui de l'élément osculateur à p' dimensions auquel il est relatif, on forme sans difficulté les équations des systèmes d'éléments enveloppant ou surenveloppant, à $n-k+1$ dimensions. Parmi ces systèmes, il en est un seul qui constitue un système d'éléments intégraux, il n'est pas nécessaire d'effectuer d'intégration pour l'obtenir. Comme, d'autre part, le nombre de paramètres dont dépendent les éléments d'un système surenveloppant est nécessairement limité, on peut, au moyen d'un nombre fini d'opérations simples, reconnaître si une équation ou un système admet une intégrale complète à $n-k+1$ dimensions.

Dans le cas général, il pourra se faire que la méthode indiquée ne soit pas plus simple que celle qui consiste à faire directement les calculs, comme nous l'avons signalé au début.

II. Dans le cas particulier où nous venons de nous placer, un élément E^{n-k+1}_{n+1} est relatif à une caractéristique bien déterminée, courbe ou variété; par un point d'une multiplicité intégrale à $n-k+1$

dimensions, il ne peut donc passer en général qu'une multiplicité caractéristique située sur l'intégrale, et non une infinité continue : l'élément E^m_{n+1} de cette caractéristique est l'élément caractéristique de l'$E^{p'}_{n+1}$ contenu dans l'E^{n-k+1}_{n+1} envisagé. Il n'est pas exclu qu'un E^{n-k+1}_{n+1} contienne une infinité continue d'éléments E^m_{n+1}, mais il n'est, dans ce cas, relatif qu'à l'un d'eux.

Par un point quelconque d'un conoïde caractéristique, il ne passe alors qu'une variété caractéristique; si les conoïdes sont à $n - k + 1$ dimensions, il y a $\infty^{2n+2-2m-k}$ variétés caractéristiques. Il n'existe pas d'intégrale complète dont le nombre de dimensions, au moins égal à celui du cône caractéristique, soit inférieur à celui du conoïde caractéristique : supposons, en effet, qu'il existe une telle intégrale et soit $n - K + 1$ le nombre de ses dimensions $(K > k)$; chacune de ses multiplicités intégrales porte $\infty^{n+1-m-k}$ variétés caractéristiques; comme celles-ci sont toutes portées par l'intégrale complète, il en résulte qu'elles dépendent au plus de

$$n + 1 - m - K + n + 1 - m = 2n + 2 - 2m - K,$$

ce qui implique contradiction avec le nombre de paramètres qui vient d'être calculé (nous avons supposé implicitement que les éléments de l'intégrale complète enveloppent et ne surenveloppent pas le cône caractéristique).

En résumé, pour reconnaître si une équation ou un système est pseudo-linéaire et dans l'affirmative déterminer son rang, on commence par rechercher s'il appartient à la classe que nous avons particulièrement étudiée (toutes les équations en font partie) : on forme le système de Pfaff qui détermine les éléments $E^{p'}_{n+1}$ osculateurs aux cônes caractéristiques et l'on vérifie si l'élément caractéristique d'un $E^{p'}_{n+1}$ est un E^m_{n+1}, les équations des E^m_{n+1} étant données directement par celles du système. Dans l'affirmative, et si le système de Pfaff ainsi formé admet des intégrales à p' dimensions dépendant de $n + 1 - m$ constantes arbitraires, il en admet certainement qui dépendent de $n + 1$ constantes arbitraires (conoïdes caractéristiques), et l'équation ou le système admet : $\infty^{n+1-p'-2m}$ courbes ou variétés caractéristiques.

Si les éléments osculateurs aux cônes ne constituent pas un système d'éléments intégraux, on cherche s'il existe un tel système constitué par des éléments à $p'+1$, $p'+2$, ... dimensions, soient $n-k+1>p'$ le nombre (minimum) trouvé et Σ le système de Pfaff obtenu ($k>1$); si les éléments E_{n+1}^{n-k+1} enveloppent les cônes caractéristiques, $n-k+1$ est le nombre de dimensions des conoïdes caractéristiques, le système admet $\infty^{2n+2-2m-k}$ variétés caractéristiques; cette circonstance se présente quand on a affaire à une seule équation, $m=1$, et elle admet ∞^{2n-k} courbes caractéristiques.

Si les éléments E_{n+1}^{n-k+1} surenveloppent les cônes caractéristiques, admettons que ceux d'entre eux qui sont supportés par un point arbitraire dépendent de $n+1-m-k+r$ paramètres arbitraires; l'intégrale complète correspondante dépend de $n+1-m+r$ paramètres et les variétés caractéristiques de

$$n+1-m+r+n-k+1-m=2n+2-2m-k-r$$

paramètres au plus; d'autre part, les conoïdes caractéristiques étant à $n-k+1$ dimensions au moins, les variétés caractéristiques dépendent de $2n+2-2m-k$ paramètres au moins. Dans chaque cas particulier, il conviendra de préciser davantage par des considérations directes.

IV. Si nous nous plaçons maintenant dans l'hypothèse la plus générale relative à un système en involution, les considérations précédentes ne peuvent servir que médiocrement. Retenons simplement la formation du système Σ des éléments intégraux.

10. *Compléments relatifs au système* Σ. — Le système de Pfaff Σ qui détermine les éléments intégraux du nombre minimum de dimensions (au moins égal à celui du cône caractéristique) jouit en définitive des propriétés suivantes, dans l'énoncé desquelles nous conservons toutes les notations précédentes. Σ comprend k équations où *figurent* $2n+2-k-m+r$ variables : les (x_i, z), soient $n+1$, et les $n+1-k-m+r$ paramètres λ, qui définissent l'orientation d'un E_{n+1}^{n-k+1} autour d'un point arbitraire $M(x_i, z)$, et dont les différentielles ne figurent pas dans les équations; chaque élément E_{n+1}^{n-k+1} représenté par Σ admet avec les éléments de même définition infiniment voisins

un élément E^m_{n+1} commun. Σ admet d'autre part des solutions à $n-k+1$ dimensions, dont les « projections » dans l'espace (x_i, z) sont aussi à $n-k+1$ dimensions; ces solutions remplissent d'ailleurs tout l'espace (x_i, z, λ_j), puisque, en chaque point M, les paramètres λ sont essentiels et que nous avons exclu le cas où l'on peut déduire du système en involution donné une relation où ne figurent que les coordonnées de M; de plus elles dépendent de $n+1-m-r$ paramètres au moins.

Nous allons montrer que le système Σ est de classe

$$2n+2-k-2m+r=\gamma.$$

Cela signifie que γ est le nombre minimum d'arguments au moyen desquels on peut exprimer les équations de Σ, ces arguments sont obtenus par l'intégration d'un système complètement intégrable qu'on appelle *système caractéristique de* Σ, soit Σ_1. Ce dernier n'est autre chose que le système associé [1] aux formes $\varphi_0\,\varphi_1\,\ldots\,\varphi_{k-1}$, qui figurent dans les premiers membres des équations de Σ

$$(15)\qquad \Sigma \qquad \varphi_0=0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{k-1}=0,$$

et

$$[\varphi_0\ldots\varphi_{k-1}\varphi'_0], \qquad \ldots, \qquad [\varphi_0\ldots\varphi_{k-1}\varphi'_{k-1}];$$

φ'_i désigne la *dérivée extérieure* de φ_i et $[\quad]$ est le symbole de la *multiplication extérieure*.

Or Σ devant admettre des solutions à $n-k+1$ dimensions n'établissant aucune relation entre $x_k\ldots x_n$, on peut trouver des relations

$$(16)\quad \omega_j=d\lambda_j-\rho_{jk}\,dx_k-\ldots-\rho_{jn}\,dx_n=0, \qquad j=1, 2, \ldots, n-k+1-m+r$$

qui prolongent le système Σ, c'est-à-dire annulent $\varphi'_0\ldots\varphi'_{k-1}$, cela entraîne que ces formes quadratiques extérieures peuvent se mettre sous la forme

$$\varphi'_i=\sum_{1}^{n-k+1-m}{}_j\ \omega_j\Phi_{ij} \qquad (\text{mod}\ \varphi_0\ldots\varphi_{k-1})$$
$$(i=0, 1, \ldots, k-1).$$

---

[1] CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux*, p. 101.

Les Φ_{ij} sont des expressions de Pfaff qui représentent les dérivées partielles, au sens ordinaire du mot, des φ par rapport aux paramètres λ; puisque chaque élément Σ_{n+1}^{n-k+1} contient un E_{n+1}^m commun à tous les E_{n+1}^{n-k+1} qui lui sont infiniment voisins, ces formes Φ_{ij} s'expriment linéairement au moyen des seules formes $\Omega_1 \ldots \Omega_{n-k+1-m}$ analogues à celles que nous avons considérées au n° 2 et qui sont indépendantes entre elles et indépendantes de formes φ.

Le système caractéristique de Σ s'obtient alors en lui adjoignant les équations (16) et (17)

$$\Omega_1 = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_{n-k+1-m} = 0. \tag{17}$$

Toutes ces équations sont indépendantes, leur nombre est égal à

$$k + (n - k + 1 - m + r) + (n - k + 1 - m) = 2n + 2 - k - 2m + r = \gamma.$$

Soit $y_1, y_2, \ldots, y_{2n+2-k-2m+r}$ un système d'intégrales de Σ_1; ce sont γ fonctions indépendantes des $2n + 2 - k - m$ arguments (x_i, z, λ_j). L'élimination des λ entre les relations

$$y_i = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \gamma),$$

où les c_i sont des constantes arbitraires conduit à

$$\gamma - (n - k + 1 - m - r)$$

soit $n + 1 - m$ relations, entre les (x_i, z) qui définissent des variétés V_m à m dimensions de l'espace (x_i, z); le nombre des relations obtenues par l'élimination des λ n'est pas supérieur à celui qui vient d'être indiqué par suite de la présence des équations (16) dans Σ_1, ces équations étant évidemment indépendantes par rapport aux λ. D'ailleurs toute direction située sur une variété V_m satisfait aux relations (15) et (17) qui définissent l'élément E_{n+1}^m générateur du cône caractéristique : les V_m sont les variétés caractéristiques. Elles dépendent *de γ paramètres au plus;* elles dépendent exactement de γ paramètres si $r = 0$, d'après ce que nous avons vu précédemment, dans le cas particulier qui nous a surtout occupé.

11. *Applications.* — La méthode que nous avons présentée conduit

à des résultats particulièrement simples lorsque le nombre de dimensions est le même pour les conoïdes et les cônes caractéristiques. Dans ce cas, l'équation, ou le système, admettent le nombre minimum de courbes, ou de variétés, caractéristiques compatible avec le nombre de dimensions des cônes caractéristiques; le système Σ s'écrit immédiatement : c'est celui qui détermine les éléments osculateurs aux cônes et il suffit de constater qu'il admet des solutions à p' dimensions dépendant de $n+1-m$ constantes arbitraires au moins.

Dans un Mémoire précédemment cité, M. Engel, par application d'une méthode générale qui lui est due, a traité, pour le cas d'une seule équation ($m=1$) et du cône et du conoïde caractéristiques au même nombre de dimensions, la question qui vient de nous occuper. Il a obtenu la proposition suivante, dont nous adaptons l'énoncé à notre vocabulaire :

« Si le cône caractéristique d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre non linéaire est à $n+k+1$ dimensions, la condition nécessaire et suffisante pour que les ∞^{2n-1} bandeaux caractéristiques soient supportés par le nombre minimum, c'est-à-dire par ∞^{2n-k} courbes caractéristiques, est que parmi les conditions de rencontre des courbes infiniment voisines de la famille constituée par les courbes caractéristiques, il se trouve exactement k équations de Pfaff indépendantes. »

Cette proposition est importante parce qu'elle met en évidence que les courbes caractéristiques constituent ce que M. Cartan a appelé une famille de M. Engel. Les conditions imposées au premier membre F de l'équation donnée contiennent les dérivées de F jusqu'au troisième ordre; il semble que, dans des cas étendus, les conditions auxquelles nous sommes arrivées, et qui s'appliquent à l'ensemble de la question, conduisent à des calculs plus simples.

Il peut se faire, par exemple, que la seule condition, pour le système Σ d'être de classe $2n-k$ suffise pour qu'il admette le nombre requis d'intégrales à $n-k+1$ dimensions; c'est ce que nous allons montrer.

A toute intégrale de Σ, considérée dans l'espace des y, correspond son image dans l'espace (x_i, z, λ_j), avec une dimension de plus; dans le premier espace, il existe toujours des intégrales à une dimension, donc dans le deuxième des intégrales à deux dimensions; par conséquent, si $n-k+1=2$, ou bien $k=n-1$, la condition qui concerne la classe est suffisante : c'est le premier cas étudié par Lie et qui correspond aux équations pseudo-linéaires qui viennent immédiatement après les équations linéaires.

D'une façon plus générale, on sait qu'un système de Pfaff admet des solutions dont le nombre maximum de dimensions est au moins égal au quotient à une unité près par défaut du nombre total des variables par le nombre des équations augmenté de 1; ces solutions dépendent de fonctions arbitraires, ce qui nous permet de nous occuper seulement du nombre de dimensions.

Supposons d'abord $m=1$; dans l'espace des y, la division à effectuer est celle de $2n-k$ par $k+1$; dans l'espace des (x_i, z, λ_j) nous sommes donc assurés d'obtenir des intégrales dont le nombre de dimensions est au moins égal au plus grand entier contenu dans $\frac{2n-k}{k+1}+1$; la condition relative à la classe suffira donc si

$$\frac{2n-k}{k+1}+1 \geqq n-k+1$$

ou

$$k \geqq \frac{n+\sqrt{n^2-4n}}{2},$$

le plus petit zéro du trinome en k étant inférieur à 2. On retrouve la solution $k=n-1$; pour $n>4$ il n'y en a pas d'autres. Pour $n=4$, on trouve $k=n-2$ qui donne le seul autre cas possible d'équation pseudo-linéaire. Pour les équations à cinq variables, la condition de classe suffit donc, et *a fortiori* pour celle à quatre variables.

12. Examinons en détail ce qui se passe dans l'espace à quatre dimensions. Nous considérons une équation admettant un système d'éléments intégraux à deux dimensions, le système Σ est un système de deux équations à cinq variables, x_1, x_2, x_3, z, et un paramètre λ; il doit admettre des solutions à deux dimensions dépendant de trois constantes arbitraires. Le système qu'on obtient en le prolongeant est celui qui définit ses éléments singuliers; il doit être complètement

intégrable ([1]). Σ est donc réductible, en général, à la forme

$$dy_2 - y_4\, dy_1 = 0,$$
$$dy_3 - y_5\, dy_1 = 0,$$

y_1, y_2, y_3 désignant les intégrales du système qui définit les éléments singuliers, les caractéristiques sont définies par $y_i = c_i$, elles dépendent en général de cinq constantes arbitraires; les solutions à deux dimensions sont $y_1 = c'_1$, $y_2 = c'_2$, $y_3 = c'_3$, mais nous n'avons fait jusqu'ici que supposer l'équation semi-linéaire. Pour qu'elle soit de plus pseudo-linéaire, il faut que le cône caractéristique soit à deux dimensions et cela suffit; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le système Σ soit de classe 4, ce qui revient à la condition que l'enveloppe des éléments à deux dimensions admette un élément caractéristique à deux dimensions. Le système Σ est réductible alors à l'une des formes canoniques

$$dy_2 - y_3\, dy_1 = 0, \qquad dy_1 = 0,$$
$$dy_3 - y_4\, dy_1 = 0, \qquad dy_2 - y_3\, dy_4 = 0.$$

Les équations des caractéristiques s'obtiennent en éliminant λ entre les quatre équations $y_i = c_i$. Il existe des solutions à deux dimensions dépendant d'une fonction arbitraire

$$\begin{array}{l} y_2 = f(y_1), \\ y_3 = f'(y_1), \\ y_4 = f''(y_1), \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = c_1, \\ y_2 = \varphi(y_4), \\ y_3 = \varphi'(y_4); \end{array} \right.$$

leur détermination revient en somme à ramener une équation de Pfaff de classe 4 à cinq variables à sa forme canonique, pour le premier cas, et pour le deuxième à intégrer une équation du premier ordre à trois variables, mais où figure un paramètre.

L'intégration de l'équation donnée s'achève aisément; dans le premier cas, par exemple, si F est une fonction arbitraire de deux arguments, la solution générale s'obtient par élimination de λ entre les deux relations

$$y_3 = F(y_1, y_2), \qquad y_4 - F_{y_2} \cdot y_3 = F_{y_1}.$$

([1]) Goursat, *Leçons sur le théorème de Pfaff*, p. 308.

Ces résultats s'interprètent facilement si l'on représente une caractéristique par un élément du deuxième ordre d'un plan à deux dimensions ordinaire.

13. On peut faire sur les systèmes en involution de m équations les raisonnements que nous venons de présenter lorsque $m=1$; il suffit, dans les calculs, de remplacer n par $n+1-m$. On constate ainsi que la condition de classe suffit pour assurer qu'un système est pseudo-linéaire si m étant au moins égal à $n-3$, k est égal à $n-m$ ou $n-1-m$.

Tout cela suppose d'ailleurs que le système Σ soit un système général de classe $2n+2-k-2m$; dans chaque cas où il admet des solutions d'un nombre maximum de dimensions supérieur à celui du cas général, la condition de classe pourra être décisive pour des valeurs de k inférieures à celles que nous avons envisagées.

14. *Sur la détermination des équations et systèmes pseudo-linéaires.* — Nous allons énoncer et démontrer une proposition qui permet de construire des équations et systèmes pseudo-linéaires d'une très grande généralité; c'est, en quelque sorte, une réciproque des résultats obtenus au n° 12.

Considérons un système U de k équations de Pfaff de classe $\gamma(1<k<\gamma)$ et désignons par $y_1, y_2, \ldots, y_\gamma$ un système de variables caractéristiques; supposons que les relations

$$\psi_l(y_1, \ldots, y_\gamma; a_1, \ldots, a_{n+1}) = 0 \qquad (18)$$
$$(l=1, 2, \ldots, \rho;\ k<\rho<n+1 \leqq \gamma),$$

où les $a_1, \ldots, a_{n+1}$ sont des constantes arbitraires, en définissent ∞^{n+1} multiplicités intégrales à $\gamma-\rho$ dimensions qui remplissent tout l'espace $(y_1, y_2, \ldots, y_\gamma)$ et ne satisfont ni à une équation linéaire aux dérivées partielles, ni à une équation de Pfaff indépendante des précédentes; les équations

$$\psi_l(c_1, c_2, \ldots, c_\gamma; x_1, \ldots, x_n, z) = 0 \qquad (19)$$

définissent alors ∞^γ variétés à $n+1-\rho(=m)$ dimensions dans l'espace (x_i, z) qui sont en général les variétés caractéristiques d'un système en involution de m équations aux dérivées partielles du premier ordre.

D'aprés les hypothèses, les relations (18) peuvent certainement être résolues par rapport à ρ des arguments y que nous supposerons être $y_1, \ldots y_\rho$. Opérons dans le système U le changement de variables défini par les relations (20) et (21):

$$\psi_l(y_1, \ldots, y_\gamma; x_1, \ldots, x_n, z) = 0, \tag{20}$$

$$y_{\rho+1} = \lambda_1 \ldots y_\gamma = \lambda_{\gamma-\rho}. \tag{21}$$

Le système T transformé de U est un système de k équations à $n+1+\gamma-\rho$ variables; les différentielles des λ n'y figurent pas puisque les relations (18), $a_1, \ldots, a_{n+1}$ étant constants, définissent des multiplicités intégrales du système U. En tout point de l'espace (x_i, z), T définit $\infty^{\gamma-\rho}$ éléments E_{n+1}^{n-k+1}, non nécessairement distincts. T est de classe γ et un système de variables caractéristiques, y_j, est défini par les relations (20) et (21). Projetées dans l'espace (x_i, z), les multiplicités caractéristiques de T donnent des variétés V_{n+1}^m à m dimensions qui admettent pour équations les relations (20) où l'on a donné aux y des valeurs constantes, c'est-à-dire les relations (19); elles sont bien à $m = n+1-\rho$ dimensions, sans quoi les multiplicités définies par (18) ne rempliraient pas tout l'espace des (γ); elles dépendent de γ paramètres essentiels puisque dans l'espace des (y) les multiplicités (18) ne satisfont pas à une équation aux dérivées partielles, linéaire. En chaque point d'une V_{n+1}^m est associé un élément E_{n+1}^{n-k+1} par les valeurs des λ qui servent à déterminer la variété. Par un point $M(x_i, z)$ il passe $\infty^{\gamma-\rho}$ V_{n+1}^m, mais leurs éléments E_{n+1}^m dépendent seulement de $\gamma-\rho$ paramètres, au plus.

Les multiplicités intégrales de U et T se correspondent : à une multiplicité intégrale de U sur laquelle on peut exprimer les y au moyen de σ paramètres t, correspond une multiplicité intégrale de T dont la projection dans l'espace (x_i, z) a pour équations le résultat de l'élimination des t des équations (20), après qu'on y a exprimé les y en fonction de ces paramètres; elle est donc à $n+1-(\rho-\sigma)$ dimensions, au plus. Réciproquement, les équations d'une multiplicité intégrale de T s'expriment en y et définissent une multiplicité intégrale de U.

En particulier, considérons les multiplicités intégrales de U définies par les relations (18); il correspond à chacune d'elles une multiplicité intégrale de T dont les équations de la projection dans (x_i, z) s'obtiennent en éliminant les y des relations (18) et (20); en généralisant, pour l'instant, une expression déjà employée, nous dirons que c'est le conoïde caractéristique au point $(a_1, \ldots, a_{n+1})$. Les multiplicités (18) ne satisfaisant à aucune relation de Pfaff distincte de celles de U, les conoïdes sont à $n-k+1$ dimensions au moins; comme ces derniers sont engendrés par $\infty^{\gamma-\rho}$ variétés à m dimensions, ils sont à

$$\gamma - \rho + m = n + 1 + \gamma - 2\rho$$

dimensions au plus.

Les conoïdes caractéristiques dépendent bien de $n+1$ paramètres : Soit le conoïde de M; supposons qu'il le soit aussi de M' : toutes les variétés V_{n+1}^m qui passent en M passent en M' et réciproquement; pour que les conoïdes dépendent de moins de $n+1$ paramètres il faut donc que toutes les V_{n+1}^m issues d'un point quelconque aient en commun une variété à μ dimensions $(\mu < m)$: soit W_{n+1}^μ. Toute V_{n+1}^m doit être engendrée par des W_{n+1}^μ, et par un point d'une V_{n+1}^m passe une seule W_{n+1}^μ; chaque V_{n+1}^m contient alors $\infty^{m-\mu} W_{n+1}^\mu$; toute W_{n+1}^μ est commune à $\infty^{\gamma-\rho} V_{n+1}^m$, il y a donc $\infty^{m+\rho-\mu} W_{n+1}^\mu$; or $m+\rho-\mu = n+1-\mu$ qui est inférieur à γ, le système U serait de classe inférieure à γ.

Dès lors, par chaque V_{n+1}^m il passe au moins ∞^m conoïdes; car quel que soit son nombre de dimensions possibles, chaque conoïde porte au moins $\infty^{\gamma-\rho} V_{n+1}^m$; de plus, tous les conoïdes qui passent par une même V_{n+1}^m admettent en chaque point de cette variété un élément E_{n+1}^{n-k+1} commun.

Supposons maintenant, ce qui sera le cas général, que tous les éléments E_{n+1}^{n-k+1} passant par un point M soient contenus dans ∞^{n-m} éléments E_{n+1}^n, alors ces éléments sont les éléments intégraux d'un système en involution de m équations aux dérivées partielles qui admettent pour variétés caractéristiques les V_{n+1}^m : cela résulte de ce que les éléments E_{n+1}^{n-k+1} enveloppent ou surenveloppent les cônes engendrés par les éléments E_{n+1}^m, les conoïdes que nous avons considérés jusqu'ici étant des intégrales du système en involution déterminé.

Nous avons supposé $n+1-k \leqq n+1-\gamma-2\rho$, c'est-à-dire $2\rho \leqq \gamma+k$.

15. *Applications.* — On songe immédiatement à prendre comme système U un système provenant d'une équation aux dérivées partielles quelconque. Lie a déjà donné l'exemple du système U_1 de trois équations à sept variables fourni par une équation du second ordre à deux variables indépendantes : $k=3$, $\gamma=7$, $\rho=5$. Il a considéré un système de solutions dépendant de six constantes : $n=5$; il a obtenu par conséquent une équation pseudo-linéaire à cinq variables indépendantes qui admet ∞^7 courbes caractéristiques au lieu de ∞^9 dans le cas général; les conoïdes caractéristiques sont à trois dimensions et les intégrales de l'équation du second ordre correspondent aux solutions à trois dimensions de celle du premier, en général.

Prenons une famille de solutions dépendant de sept constantes arbitraires, $n=6$; nous obtiendrons, en général, un système en involution de deux équations du premier ordre à six variables indépendantes, qui admet ∞^7 variétés caractéristiques à deux dimensions au lieu de ∞^9.

On n'éprouve par conséquent aucune difficulté à former des exemples, mais il faut toujours s'assurer que le système de Pfaff obtenu peut représenter un système d'éléments intégraux.

Des circonstances particulières peuvent se présenter qui conduisent à des résultats intéressants : signalons l'importance de la condition imposée aux multiplicités représentées par les relations (18) de ne pas satisfaire à une équation de Pfaff distincte de celles de U.

Reprenons l'exemple de Lie et supposons que les ∞^6 solutions considérées ne satisfassent pas à la condition que nous venons de rappeler; il se produit alors une profonde modification dans les résultats. Il faut prendre $k=4$, γ, ρ et n n'étant pas modifiés ; l'équation pseudo-linéaire à laquelle on est conduit possède des conoïdes caractéristiques qui sont en général à deux dimensions, tandis que précédemment ils étaient à trois dimensions, on peut donc obtenir, sans intégration, des solutions à trois dimensions de l'équation du premier ordre dépendant de fonctions arbitraires d'une variable; elles ne satisfont pas toutes certainement au système U_1. En nous réservant de revenir sur ce point, nous insistons seulement sur le fait que les conoïdes caractéristiques étant à deux dimensions, comme conséquence de notre théorie l'équation du premier ordre à laquelle nous parvenons ne doit admettre que ∞^6 courbes caractéristiques; autrement dit, le système obtenu en adjoignant à U_1 la nouvelle équation de Pfaff doit être de classe 6 au lieu de classe 7 comme on pourrait le croire.

Or, c'est ce qu'on vérifie sur un exemple classique très simple : supposons que l'équation du second ordre envisagée admette un invariant H du deuxième ordre également; choisissons ∞^5 solutions de l'équation satisfaisant également à (22)

$$H = c, \tag{22}$$

c étant une constante arbitraire; nous obtenons, en comptant c, en général ∞^6 solutions de l'équation du second ordre qui satisfont non seulement au système U, mais à (23)

$$dH = 0. \tag{23}$$

Il résulte de la théorie de l'équation du second ordre que le système de Pfaff obtenu en adjoignant (23) à U_1 est de classe 6, ce que nous avions précisément prévu.

Cette application met par conséquent en évidence que les développements précédents ne seront peut-être pas sans intérêt pour la théorie des équations aux dérivées partielles.