

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ELIE CARTAN

Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (deuxième partie)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 42 (1925), p. 17-88

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1925_3_42__17_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1925, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR
LES VARIÉTÉS A CONNEXION AFFINE

ET
LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALISÉE

(DEUXIÈME PARTIE)

PAR M. E. CARTAN.



La première Partie de ce Mémoire a paru dans ce même journal (¹). Dans cette seconde Partie je poursuis l'étude purement géométrique des variétés à connexion affine ou métrique. Dans un premier Chapitre, j'étudie le groupe des déplacements associé à un point d'une variété : à tout contour fermé partant d'un point donné de la variété et y revenant est associé un déplacement : tous ces déplacements forment le groupe en question. Les groupes associés aux différents points de la variété sont tous homologues entre eux : c'est le théorème d'homogénéité. Je montre comment on peut déterminer la nature de ce groupe pour une variété donnée. Je signale un résultat au premier abord paradoxal : si la variété est sans torsion, le déplacement associé à un contour *infinitement petit* partant d'un point et y revenant laisse ce point invariant : *cela n'est plus vrai* (à moins que la variété ne soit un espace affine proprement dit) pour un contour *fini* quelconque.

Les autres Chapitres sont consacrés à l'étude approfondie des tenseurs de torsion et de courbure. Je montre comment on peut effectuer leur décomposition en tenseurs *irréductibles*. J'en déduis une méthode, appliquée effectivement pour $n = 3$, pour former tous les *invariants intégraux* (scalaires ou vectoriels) attachés à la variété, au moins ceux dont les coefficients dépendent *linéairement* des composantes des tenseurs de courbure et de torsion. Certains de ces invariants intégraux

(¹) *Ann. Éc. Norm.*, 3^e série, t. XL, 1923, p. 325-412; t. XLI, 1924, p. 1-25.

Ann. Éc. Norm., (3), XLII. — JANVIER 1925.

avaient déjà été formés directement dans la première Partie du Mémoire. J'indique quels sont tous ces invariants intégraux dans le cas des variétés à quatre dimensions à connexion métrique ou euclidienne et à torsion nulle. Le Mémoire se termine par l'application de la même méthode à la détermination de toutes les formes possibles de l'*action élémentaire* dans la théorie de M. Weyl. Je donne enfin quelques indications sur les formes possibles de la « quantité de mouvement-énergie » élémentaire dans la même théorie.

CHAPITRE VI.

LE GROUPE DES DÉPLACEMENTS AFFINES ASSOCIÉ A UN POINT D'UNE VARIÉTÉ A CONNEXION AFFINE.

87. Nous avons vu au Chapitre II qu'étant donnée une variété à connexion affine, à tout contour fermé infiniment petit partant d'un point \mathbf{m} de la variété et y revenant est associé un déplacement affine infinitésimal de composantes

$$\Omega^i = A_{\alpha\beta}^i[\omega^\alpha\omega^\beta], \quad \Omega'_i = A'_{i\alpha\beta}[\omega^\alpha\omega^\beta].$$

Si l'on fait varier le contour fermé, on obtient une famille linéaire de déplacements

$$\Omega^i = e^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta}^i, \quad \Omega'_i = e^{\alpha\beta} A'_{i\alpha\beta},$$

dépendant des paramètres arbitraires $e^{\alpha\beta} = -e^{\beta\alpha}$. En général ces déplacements infinitésimaux n'engendrent pas un groupe ⁽¹⁾.

Il n'en est plus de même si l'on considère tous les contours fermés possibles (finis) partant de \mathbf{m} et y revenant. A chacun d'eux est associé, par le procédé indiqué au n° 34, un déplacement affine fini de l'espace affine tangent en \mathbf{m} . Il est évident que tous ces déplacements forment un groupe (continu), car si l'on considère deux d'entre eux

(1) Cela veut dire que les crochets deux à deux des transformations infinitésimales

$$X_{\alpha\beta}f = (A_{\alpha\beta}^i - A'_{k\alpha\beta}x^k) \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

ne s'expriment pas nécessairement d'une manière linéaire au moyen des $X_{\alpha\beta}f$.

\mathfrak{O} et \mathfrak{O}' , et si (\mathfrak{E}) et (\mathfrak{E}') sont les deux contours fermés auxquels ils sont associés, le déplacement \mathfrak{O}'' obtenu en effectuant d'abord \mathfrak{O} , puis \mathfrak{O}' , est évidemment associé au contour fermé (\mathfrak{E}'') obtenu en décrivant d'abord (\mathfrak{E}) , puis (\mathfrak{E}') : c'est donc encore un des déplacements associés à \mathfrak{m} .

Il résulte de là qu'à tout point \mathfrak{m} de la variété est associé un groupe g de déplacements affines. Lorsqu'on fait choix d'un système de référence pour l'espace affine tangent en \mathfrak{m} , ce groupe affecte une forme analytique déterminée; il est engendré en particulier par certaines transformations infinitésimales déterminées.

88. Considérons maintenant deux points différents \mathfrak{m} et \mathfrak{m}' de la variété. A ces deux points sont associés deux groupes g et g' . Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME D'HOMOGÉNÉITÉ. — *Les groupes associés aux différents points de la variété sont des sous-groupes homologues du groupe affine G .*

Rappelons que deux sous-groupes g et g' d'un groupe G sont dits homologues si les équations qui les définissent analytiquement peuvent être ramenées les unes aux autres par un changement de variables défini par une transformation du groupe G , ou encore s'il existe une transformation T du groupe G telle que le sous-groupe g' soit identique au sous-groupe $T^{-1}gT$.

Pour démontrer le théorème d'homogénéité, désignons par S' une transformation quelconque du groupe g' , correspondant à un certain contour fermé \mathfrak{E}' partant de \mathfrak{m}' et y revenant. Considérons alors le contour fermé (\mathfrak{E}) obtenu en partant de \mathfrak{m} , joignant \mathfrak{m} à \mathfrak{m}' par un chemin déterminé (γ) , décrivant (\mathfrak{E}') et revenant à \mathfrak{m} par le chemin γ parcouru en sens inverse. Soit alors T le déplacement affine que subit l'espace affine tangent en \mathfrak{m} quand on va de \mathfrak{m} à \mathfrak{m}' par le chemin γ . Au contour (\mathfrak{E}) est associé le déplacement obtenu en composant successivement les déplacements T , S' et T^{-1} . Autrement dit, tout déplacement de la forme $TS'T^{-1}$ appartient à g , si S' appartient à g' . Il y a une réciproque évidente. On en conclut la formule

$$(1) \quad g = Tg'T^{-1}.$$

89. De ce théorème nous allons déduire une première application importante. *Est-il possible que le groupe g associé à un point arbitraire \mathbf{m} de la variété laisse fixe le point \mathbf{m} ?*

Il est d'abord évident que s'il en est ainsi, le déplacement infinitésimal associé à un contour infiniment petit devra jouir de la propriété de laisser fixe le point \mathbf{m} . On aura donc nécessairement

$$\Omega' = 0;$$

autrement dit, *la variété sera sans torsion.*

Mais cela ne suffit pas. En effet, considérons deux points infiniment voisins \mathbf{m} et \mathbf{m}' et rapportons l'espace affine (E') tangent en \mathbf{m}' à l'espace affine (E) tangent en \mathbf{m} . D'après la formule (1) les opérations du groupe g [effectuées dans l'espace (E)] et les opérations du groupe g' (rapportées au même espace) sont les *mêmes*. Or ces dernières laissent fixe le point \mathbf{m}' [ou plutôt le point de (E) qui correspond à \mathbf{m}']. Donc le groupe g doit laisser fixes, non seulement le point \mathbf{m} de (E) , mais tous les points infiniment voisins. Autrement dit, le groupe g se réduit à la transformation identique. Donc les Ω'_i sont tous nuls et la variété est elle-même un espace affine proprement dit. Par suite :

Il n'y a que l'espace affine proprement dit dans lequel le groupe g associé à un point \mathbf{m} quelconque laisse fixe ce point \mathbf{m} .

Nous voyons par là que la propriété d'une variété à connexion affine d'être sans torsion ne signifie la *stabilité* du point \mathbf{m} que relativement à un contour fermé *infiniment petit* partant de \mathbf{m} et y revenant.

Cherchons au contraire si le groupe g associé à un point arbitraire \mathbf{m} peut ne se composer que de *translations*, c'est-à-dire laisser invariants tous les vecteurs. Il faut évidemment pour cela que les formes Ω'_j soient toutes nulles, c'est-à-dire que la variété soit *sans courbure*. Mais ici cela suffit, car dans ce cas les équations

$$d\xi^i + \xi^k \omega_k^i = 0$$

qui définissent le transport d'un vecteur sont *complètement intégrables*; on peut donc prendre en tous les points \mathbf{m} des systèmes de référence équipollents entre eux, et par suite le groupe g ne contiendra que des translations. Donc *pour que le groupe g ne contienne que des translations, il faut et il suffit que la variété soit sans courbure*. Dans ce cas,

comme nous l'avons déjà remarqué, on pourra supposer les composantes ω'_i de la rotation de l'espace affine toutes nulles.

Le groupe γ associé à un point de la variété.

90. Avant de chercher à déterminer quel est le groupe g associé à un point \mathbf{m} d'une variété donnée, considérons l'effet produit par ce groupe sur les *vecteurs* de l'espace; cet effet se traduit analytiquement par des transformations linéaires et homogènes sur les composantes ξ^i du vecteur auquel le groupe g est appliqué. Ces transformations forment évidemment un groupe γ , et tous les groupes γ associés aux différents points de la variété sont homologues entre eux vis-à-vis du groupe général des transformations linéaires et homogènes. Il en résulte qu'on doit pouvoir choisir le système de référence attaché à chaque point \mathbf{m} de manière que tous ces groupes γ soient définis analytiquement par les *mêmes* équations. Voici comment on peut théoriquement opérer.

Choisissons arbitrairement le système de référence d'un point particulier \mathbf{m}_0 . Pour fixer le système de référence attaché à un point quelconque \mathbf{m} , choisissons arbitrairement un chemin (\mathcal{C}) allant de \mathbf{m}_0 à \mathbf{m} et prenons pour système de référence en \mathbf{m} celui qui, *en suivant ce chemin*, est équipollent au système de référence de \mathbf{m}_0 .

On a, dans ces conditions, en considérant les expressions analytiques des groupes γ et γ_0 ,

$$\gamma_0 = \gamma.$$

Allons maintenant de \mathbf{m}_0 à \mathbf{m} par un autre chemin quelconque (\mathcal{C}') et soit T la transformation que subissent les vecteurs de l'espace affine quand on suit ce chemin de \mathbf{m}_0 à \mathbf{m} ; on aura, en allant de \mathbf{m}_0 à \mathbf{m} par ce chemin, décrivant ensuite un contour fermé partant de \mathbf{m} et y revenant, suivant enfin de \mathbf{m} à \mathbf{m}_0 le chemin primitivement choisi,

$$\gamma_0 = T\gamma.$$

Il résulte de là que T est une transformation du groupe γ .

On peut montrer maintenant par un raisonnement analogue que si l'on va d'un point quelconque \mathbf{m} à un autre point quelconque \mathbf{m}' par un

chemin arbitraire, les vecteurs subissent une transformation appartenant au groupe fixe γ .

Il résulte de là que *si le groupe γ est défini par les r transformations infinitésimales*

$$(2) \quad X_s f = (a^i)_s \xi^i \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \quad (s = 1, 2, \dots, r),$$

les composantes ω_i^j de la rotation de l'espace affine seront de la forme

$$(3) \quad \omega_i^j = (a_i^j)_s \varpi^s,$$

avec r expressions de Pfaff a priori arbitraires ϖ^s .

91. Réciproquement supposons qu'on puisse mettre, par un choix convenable des systèmes de référence attachés aux différents points de la variété, les composantes ω_i^j sous la forme (3), où les constantes $(a_i^j)_s$ sont les coefficients des transformations infinitésimales d'un certain groupe linéaire et homogène γ . Je dis que *le groupe qui indique comment le groupe g associé à un point \mathbf{m} transforme les vecteurs est γ ou un sous-groupe de γ .*

En effet, la transformation des vecteurs, quand on suit un chemin donné, est fournie par l'intégration d'un système d'équations différentielles

$$d\xi^i + \xi^k (a_k^i)_s \varpi^s = 0;$$

cette intégration revient à la composition d'une infinité de transformations infiniment petites *appartenant toutes au groupe γ* ; elle fournit donc une transformation de γ .

92. Il résulte de là une méthode pour reconnaître si le groupe g associé à un point \mathbf{m} de la variété transforme les vecteurs suivant des opérations appartenant toutes à un groupe linéaire et homogène donné γ ou à un de ses homologues. On choisira pour cela en chaque point \mathbf{m} un système de référence *aussi général que possible*, ce qui introduira n^2 paramètres, et l'on cherchera à déterminer ces paramètres de manière à avoir les formules (3), avec des expressions ϖ^s convenablement choisies. On pourra pour cela exprimer que les ω_i^j satisfont à $n^2 - r$ relations linéaires et homogènes à coefficients constants

$$(4) \quad \alpha_j^i \omega_i^j = 0, \quad \beta_j^i \omega_i^j = 0, \quad \dots, \quad \lambda_j^i \omega_i^j = 0.$$

On aura ainsi à intégrer un système de Pfaff à n^2 fonctions inconnues. Pour discuter ce système, on dérivera extérieurement ces équations, ce qui donnera par exemple, pour la première,

$$\alpha'_j [\omega^k_i \omega'_k] + \Omega'_i = 0.$$

Or la somme $\alpha'_j [\omega^k_i \omega'_k]$ est nulle si l'on tient compte des équations (4), ou, ce qui revient au même, des équations équivalentes (3); car on a

$$\alpha'_j [\omega^k_i \omega'_k] = \alpha'_j [(a^k_i)_s (a'_k)_t - (a^k_t)_s (a'_k)_i] [\varpi^s \varpi^t].$$

Or les transformations (2) forment un groupe par hypothèse; on a donc

$$(\mathbf{X}_s \mathbf{X}_t) f = [(a^k_i)_s (a'_k)_t - (a^k_t)_s (a'_k)_i] \xi^i \frac{\partial f}{\partial \xi^j} = c_{st\rho} \mathbf{X}_\rho f = c_{st\rho} (a_i)_\rho \xi^i \frac{\partial f}{\partial \xi^j},$$

d'où

$$\alpha'_j [\omega^k_i \omega'_k] = \alpha'_j c_{st\rho} (a'_i)_\rho [\varpi^s \varpi^t] = 0.$$

En définitive, la dérivation extérieure des équations (4) conduit aux relations

$$(5) \quad \alpha'_j \Omega'_i = 0, \quad \beta'_j \Omega'_i = 0, \quad \dots, \quad \lambda'_j \Omega'_i = 0.$$

Elles expriment simplement que la transformation de vecteurs associée à un contour fermé infiniment petit appartient à γ .

Les relations (5) donneront, en annulant dans les premiers membres les coefficients des différents produits $[\omega^\alpha \omega^\beta]$, un certain nombre ⁽¹⁾ d'équations finies par rapport aux paramètres inconnus. *Il faudra que ces équations soient compatibles.* S'il en est ainsi on les résoudra par rapport au plus grand nombre possible d'inconnues; en portant dans les équations (4), on obtiendra de nouvelles équations de Pfaff. Il pourra arriver qu'il y ait des combinaisons linéaires de ces équations ne contenant plus les différentielles des paramètres inconnus; on exprimera alors que ces combinaisons sont identiquement nulles, ce qui conduira à de nouvelles relations finies entre les paramètres. Il faudra qu'elles soient compatibles. Si elles le sont, on obtiendra, en en tenant compte, un nouveau système (4) et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à une impossibilité ou à un système dont les premiers membres sont linéai-

(1) En général $\frac{n(n-1)}{2} (n^2 - r)$.

rement indépendants par rapport aux différentielles des fonctions inconnues. Dans ce dernier cas, le système sera complètement intégrable, puisque la dérivation extérieure conduirait aux relations (5), par hypothèse vérifiées.

En définitive on a une méthode régulière pour déterminer le *groupe* γ associé à un point arbitraire de la variété. Il suffit pour cela d'essayer successivement tous les groupes linéaires et homogènes γ qui sont de types distincts.

En particulier le groupe γ se réduira à la transformation identique si les formes Ω_i^j sont toutes nulles, car alors les équations à n^2 inconnues

$$\omega_i^j = 0$$

seront complètement intégrables. Nous retrouverons le résultat démontré directement plus haut.

Exemple I. — Cherchons dans quel cas le groupe g laissera invariantes n directions non parallèles à un même plan à $n - 1$ dimensions. Si l'on prend ces directions pour axes de coordonnées, les coefficients (a_i^j) des formules (2) seront nulles pour $j \neq i$. Le système de Pfaff (4) sera donc

$$\omega_i^j = 0 \quad (i \neq j)$$

et conduira aux $n(n - 1)$ relations

$$\Omega_i^j = 0 \quad (i \neq j).$$

Si le système de Pfaff est compatible, on pourra donc réduire les formules de structure de la variété à

$$(\omega^i)' = [\omega^i \omega_j^i] + \Omega^i,$$

$$(\omega_i^j)' = \Omega_i^j.$$

Si la variété est de plus à torsion nulle, chacune des équations $\omega^i = 0$ est complètement intégrable; il existera donc dans la variété n familles d'hypersurfaces à $n - 1$ dimensions dépendant d'un paramètre telles que les hypersurfaces de chaque famille soient en chacun de leurs points tangentes à $n - 1$ des directions stables attachées à ce point. On aura par exemple

$$\omega^i = P_i du^i, \quad \omega_i^j = -\frac{dP_i}{P_i} + Q_i du_i, \quad \Omega_i^j = [dQ_i du^j].$$

Exemple II. — Cherchons dans quel cas le groupe g conserve les volumes. La relation qui devra exister entre les coefficients $(a_i^j)_s$ des transformations infinitésimales de γ sera alors

$$(a_1^1)_s + (a_2^2)_s + \dots + (a_n^n)_s = 0.$$

On aura donc à considérer le système de Pfaff

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 + \dots + \omega_n^n = 0,$$

qui, dérivé extérieurement, donne

$$\Omega_1^1 + \Omega_2^2 + \dots + \Omega_n^n = 0.$$

Et cette relation ne contient pas les n^2 paramètres arbitraires inconnus qui interviennent dans le choix le plus général possible du système de référence attaché au point m . Cela tient en effet à ce que, d'après les formules (11) du Chapitre I, on a

$$(\Omega_1^1)' + (\Omega_2^2)' + \dots + (\Omega_n^n)' = 0 \quad (1).$$

Donc la condition cherchée est simplement

$$\Omega_1^1 + \Omega_2^2 + \dots + \Omega_n^n = 0,$$

ce qui donne en réalité $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions : $A_{i\alpha\beta}^i = 0$.

Exemple III. — Considérons enfin le cas où le groupe γ laisserait invariant l'ensemble des directions parallèles aux génératrices d'un cône du second ordre non dégénéré, cône que nous supposerons imaginaire et par suite réductible à l'équation

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2 = 0.$$

Dans ce cas-là on pourra choisir les systèmes de référence de manière à avoir

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0 (i \neq j), \quad \omega_1^1 = \omega_2^2 = \dots = \omega_n^n.$$

(1) Si les coefficients de la forme Ω_i^i dépendaient effectivement de l'un des n^2 paramètres, la différentielle de ce paramètre ne pourrait pas s'éliminer du covariant trilineaire $(\Omega_i^i)'$. La particularité qui se présente ici tient à ce que le sous-groupe γ est invariant dans le groupe général des rotations.

Les équations de structure seront alors de la forme

$$\begin{aligned}(\omega^i)' &= [\omega_i \omega] + [\omega^k \omega'_k] + \Omega^i, \\(\omega'_i)' &= [\omega'_i \omega'_k] + \Omega'_i, \\ \omega' &= \Omega.\end{aligned}$$

La variété sera à *connexion métrique*. Si en outre le groupe γ conserve les volumes, on aura $\omega = 0$; la variété sera à *connexion euclidienne*.

Détermination du groupe g associé à un point de la variété.

93. La détermination du groupe g peut se faire par une méthode analogue à celle qui a été suivie dans l'étude du groupe γ . Mais il faut pour cela généraliser un peu les systèmes de référence adoptés. Jusqu'à présent nous avons supposé que l'espace affine tangent en \mathbf{m} était repéré par un système de coordonnées ayant pour origine le point \mathbf{m} lui-même. Prenons maintenant un système tout à fait général ayant pour origine un point quelconque de l'espace affine; soient

$$a^1, a^2, \dots, a^n$$

les coordonnées du point \mathbf{m} dans ce système. La correspondance entre les points (x^i) de l'espace affine du point \mathbf{m} et les points $(x^i + dx^i)$ de l'espace affine du point infiniment voisin \mathbf{m}' sera analytiquement donnée par $n + n^2$ expressions de Pfaff ϖ^i, ω'_i , suivant les formules

$$(6) \quad dx^i + \varpi^i + x^k \omega'_k = 0.$$

Les relations entre les nouvelles formes ϖ^i et les anciennes ω^i s'obtiennent en exprimant qu'au point \mathbf{m} de coordonnées (a^i) du premier espace correspond le point $\mathbf{m}' - \omega^i \mathbf{e}_i$ de coordonnées $(a^i + da^i - \omega^i)$ du second espace. On a donc

$$(7) \quad da^i - \omega^i + \varpi^i + a^k \omega'_k = 0.$$

Cela posé, si le groupe g est supposé connu, nous pourrons toujours choisir les systèmes de référence attachés aux divers points de la variété de manière que, dans chacun de ces systèmes de référence, le groupe s'exprime par les mêmes équations et, de plus, que le changement de coordonnées infiniment petit qui repère l'un par rapport à l'autre deux espaces affines tangents en deux points infiniment voisins

s'exprime analytiquement comme une transformation du groupe g . Autrement dit, nous pouvons toujours supposer que la transformation infinitésimale définie par les équations (6) appartient au groupe g .

La réciproque est bien évidente, car l'intégration des équations (6) le long d'un chemin quelconque donnera une transformation du groupe g puisqu'elle reviendra à la composition d'une infinité de transformations infiniment petites de ce groupe.

94. Voici maintenant comment on pourra reconnaître si le groupe associé à un point de la variété est un groupe g donné à l'avance (ou homologue à ce groupe, ou plutôt homologue à un de ses sous-groupes). Si les équations

$$\delta x^i + e^i + x^k e_k^i = 0$$

représentent la transformation infinitésimale la plus générale de ce groupe, il y aura entre les composantes e^i, e_k^i de cette transformation un certain nombre de relations linéaires et homogènes à coefficients constants

$$\alpha_i e^i + \alpha_k^i e_k^i = 0, \quad \beta_i e^i + \beta_k^i e_k^i = 0, \quad \dots, \quad \lambda_i e^i + \lambda_k^i e_k^i = 0.$$

Cela posé, on attachera à chaque point m de la variété un système de référence aussi général que possible (ce qui introduira $n^2 + n$ paramètres arbitraires) et l'on cherchera à déterminer ces paramètres par les relations

$$(8) \quad \alpha_i \varpi^i + \alpha_k^i \omega_k^i = 0, \quad \beta_i \varpi^i + \beta_k^i \omega_k^i = 0, \quad \dots, \quad \lambda_i \varpi^i + \lambda_k^i \omega_k^i = 0.$$

En particulier on dérivera extérieurement ces équations, ce qui donnera

$$(9) \quad \alpha_i \Pi^i + \alpha_k^i \Omega_k^i = 0, \quad \beta_i \Pi^i + \beta_k^i \Omega_k^i = 0, \quad \dots, \quad \lambda_i \Pi^i + \lambda_k^i \Omega_k^i = 0,$$

en posant

$$\Pi^i = \Omega^i - \alpha^k \Omega_k^i.$$

Les équations (9) donneront un certain nombre d'équations finies entre les paramètres inconnus. Il faudra qu'elles soient compatibles. On les résoudra et on les portera dans les équations (8) et ainsi de suite.

95. *Exemple 1.* — Cherchons dans quel cas le groupe g est le groupe le plus général des rotations autour d'un point fixe. En choisissant ce point comme origine des coordonnées, les composantes e^i

de la transformation infinitésimale la plus générale du groupe sont nulles. Les équations (8) se réduisent donc à

$$\varpi^1 = 0, \quad \varpi^2 = 0, \quad \dots, \quad \varpi^n = 0,$$

c'est-à-dire, d'après (7),

$$da^i - \omega^i + a^k \omega'_k = 0.$$

Ce système de n équations de Pfaff en a^1, \dots, a^n doit admettre une solution.

S'il en est ainsi, on pourra toujours supposer le système de référence choisi de manière que le point m ait toutes ses coordonnées nulles, sauf $a^1 = 1$. On aura alors

$$\omega^i = \omega'_i.$$

Ces dernières relations caractérisent les variétés répondant à la question.

Exemple II. — Cherchons dans quel cas le groupe g est un groupe de *translations* à r paramètres. On pourra toujours alors le supposer défini par les translations infinitésimales

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x^r},$$

ce qui correspond aux relations

$$\varpi^{r+1} = \dots = \varpi^n = 0, \quad \omega'_i = 0,$$

ou encore

$$\omega'_i = 0, \quad da^{r+1} - \omega^{r+1} = \dots = da^n - \omega^n = 0.$$

Par suite, les composantes de rotation ω'_i sont toutes nulles et les expressions $\omega^{r+1}, \dots, \omega^n$ sont des différentielles exactes.

Exemple III. — Considérons enfin, pour $n = 3$, le cas où le groupe g serait un groupe à un paramètre de mouvements hélicoïdaux. On pourrait alors supposer le groupe g défini par la transformation infinitésimale

$$x^1 \frac{\partial f}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial f}{\partial x^1} + k \frac{\partial f}{\partial x^3}.$$

Dans ce cas les équations (6) se réduiraient à

$$\begin{aligned} dx^1 - x^2 \varpi &= 0, \\ dx^2 + x^1 \varpi &= 0, \\ dx^3 + k \varpi &= 0. \end{aligned}$$

On aurait donc

$$\begin{aligned} \omega_1^2 + \omega_2^1 &= 0, & \omega_1^1 &= \omega_1^3 = \omega_2^2 = \omega_2^3 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = \omega_3 = 0, \\ da^1 - \omega^1 + a^2 \omega_2^1 &= 0, \\ da^2 - \omega^2 + a^1 \omega_1^2 &= 0, \\ da^3 - \omega^3 + k \omega_1^2 &= 0. \end{aligned}$$

Remarquons que dans ce cas les relations

$$\Omega^1 - a^2 \Omega_2^1 = \Omega^2 - a^1 \Omega_1^2 = \Omega^3 - k \Omega_1^2 = 0$$

sont incompatibles avec une variété à torsion nulle, sinon en effet tous les Ω_i^j seraient nuls et le groupe g se réduirait à la transformation identique (1).

CHAPITRE VII.

LE TENSEUR DE TORSION ET LE TENSEUR DE COURBURE D'UNE VARIÉTÉ A CONNEXION AFFINE.

96. Considérons dans un espace affine (2) un être géométrique, ou plutôt un ensemble d'êtres géométriques se déduisant les uns des autres par une transformation affine. Si l'on choisit un système de coordonnées affines, cet être géométrique est défini analytiquement par un certain nombre (que nous supposons fini) de quantités $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$, que nous appellerons ses coordonnées. Lorsqu'on fait un changement de coordonnées, ces quantités subissent une transformation et toutes les transformations qui correspondent à tous les changements de coordonnées possibles forment évidemment un groupe. Nous dirons que l'ensemble des quantités γ_i constitue un tenseur à p composantes. Nous réservons plus spécialement le nom de tenseurs au cas où le

(1) La question traitée dans ce Chapitre prête à des développements très importants dont on trouvera un aperçu dans une Conférence sur *La Théorie des groupes et les recherches récentes de Géométrie différentielle* faite au Congrès international de mathématiques de Toronto (août 1924) et parue dans *l'Enseignement mathématique* (1925).

(2) Tout ce qui suit pourrait s'appliquer, *mutatis mutandis*, à un espace à groupe fondamental quelconque.

groupe des transformations effectuées sur les y_i est *linéaire*. Les coordonnées d'un point, les composantes d'un vecteur, les coefficients de l'équation d'une quadrique, etc. constituent autant de tenseurs.

Considérons maintenant une variété à connexion affine à n dimensions. Nous appellerons tenseur attaché à un point \mathbf{m} de cette variété un ensemble de quantités qui subiront une transformation linéaire lorsqu'on changera le système de référence (d'origine \mathbf{m}) attaché à l'espace affine tangent en \mathbf{m} . Il existe deux tenseurs remarquables attachés à un point \mathbf{m} de la variété, c'est le *tenseur de torsion* dont les composantes sont les coefficients $A'_{\alpha\beta}$ et le *tenseur de courbure* dont les composantes sont les coefficients $A^i_{\alpha\beta}$.

Quand on effectue un changement du système de référence d'origine \mathbf{m} , il est bien clair que les $A'_{\alpha\beta}$ subissent une substitution linéaire et qu'il en est de même des $A^i_{\alpha\beta}$. Les premiers coefficients permettent de définir, comme nous l'avons vu, une *translation* associée à tout contour fermé infiniment petit partant de \mathbf{m} et y revenant, et les derniers permettent de définir dans les mêmes circonstances une *rotation*.

Étude du tenseur de torsion.

97. Les composantes de tout tenseur attaché au point \mathbf{m} subissent une substitution linéaire (et homogène) quand on effectue un changement du système de référence d'origine \mathbf{m} . Le tenseur sera dit *irréductible* lorsqu'il sera impossible de trouver un certain nombre de combinaisons linéaires (à coefficients constants) des composantes du tenseur donné formant pour elles-mêmes un tenseur.

Nous allons chercher à décomposer le tenseur de torsion en tenseurs irréductibles (1).

(1) Au moment de la rédaction de ce Mémoire (décembre 1922), je regardais comme très vraisemblable, mais sans en avoir de démonstration, le théorème d'après lequel tout tenseur attaché à un groupe linéaire *simple ou semi-simple* est décomposable en tenseurs irréductibles. M. H. Weyl a réussi tout récemment à démontrer cet important théorème [*Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung* (Gött. Nachr., 1924)]; voir aussi : *Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuierlichen Gruppen* (Sitzungsb. Berlin, 1924, p. 338-345). L'application d'une méthode due à Hurwitz (Gött. Nachr., 1897, p. 71) lui permet d'étendre aux groupes continus linéaires simples ou semi-simples le théorème classique d'après lequel tout groupe linéaire formé d'un nombre *fini* de substitutions laisse invariante une forme d'Hermite. M. H. Weyl n'a publié de démonstration que pour les quatre grandes classes de groupes simples.

Partons pour cela de la remarque que le vecteur

$$\mathbf{e}_1 \Omega^1 + \mathbf{e}_2 \Omega^2 + \dots + \mathbf{e}_n \Omega^n = \mathbf{e}_i A^i_{jk} [\omega^j \omega^k]$$

a une signification intrinsèque (indépendante du système de référence), puisque c'est la translation associée à un élément à deux dimensions de la variété. Introduisons alors un vecteur arbitraire (x^i) et deux systèmes de variables u_i et v_i et considérons le vecteur

$$\mathbf{e}_i x^i (u_j v_k - u_k v_j) [\omega^j \omega^k].$$

Effectuons un changement du système de référence, en convenant d'effectuer sur les u_i et les v_i une substitution linéaire telle que les deux sommes $u_i \omega^i$ et $v_i \omega^i$ ne soient pas altérées (1). On voit alors que les A^i_{jk} , par un changement de coordonnées, subissent la même substitution linéaire que les quantités $x^i (u_j v_k - u_k v_j)$.

Or j'ai démontré que si l'on considère la quantité $x^i (u_2 v_3 - v_3 u_2)$ et toutes celles qui s'en déduisent par un changement arbitraire de coordonnées, toutes ces quantités forment un tenseur irréductible. On peut remarquer que les équations

$$x^1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0$$

définissent la première un hyperplan à $n - 1$ dimensions et chacune des deux dernières un point, et que *chacun de ces deux points est dans l'hyperplan*. Par suite le tenseur irréductible dont il est question plus haut contiendra toutes les combinaisons des quantités $x^i (u_j v_k - u_k v_j)$ qui seront de la forme

$$a_i x^i (b^j u_j c^k v_k - b^j v_j c^k u_k) = a_i x^i (b^j c^k - b^k c^j) (u_j v_k - u_k v_j),$$

où les coefficients a_i , b^j , c^k satisfont aux deux relations

$$(1) \quad a_i b^i = 0, \quad a_i c^i = 0.$$

Si nous revenons aux coefficients A^i_{jk} , nous voyons que nous obtenons un premier tenseur irréductible \mathfrak{T} formé avec ces coefficients en considérant toutes les combinaisons linéaires de la forme

$$(2) \quad a_i (b^j c^k - b^k c^j) A^i_{jk},$$

où les a_i , b^j , c^k satisfont uniquement aux relations (1). La forme (2)

(1) Cela veut dire, suivant une terminologie aujourd'hui classique, que les u_i sont des variables covariantes, les ω^i étant contravariantes.

avec les indéterminées a^i, b^j, c^k liées par les relations (1), est la *forme génératrice* du tenseur \mathfrak{C} .

Chaque composante possible du tenseur \mathfrak{C} est de la forme

$$\alpha_i^{jk} A_{jk}^i$$

avec des coefficients constants α_i^{jk} . Cherchons à déterminer toutes les relations linéaires identiques qui existent entre ces coefficients. Soit

$$h_{jk}^i \alpha_i^{jk} = 0$$

une d'entre elles. On aura, *en tenant compte des seules relations (1)*,

$$h_{jk}^i a_i (b^j c^k - b^k c^j) = 0;$$

par suite on aura une *identité* en a^i, b^j, c^k de la forme

$$h_{jk}^i a_i (b^j c^k - b^k c^j) \equiv \lambda_i c^i a_k b^k + \mu_i b^i a_k c^k,$$

avec des coefficients *constants* λ_i, μ_i . L'identification des termes en $a_i b^i c^i$ montre que l'on a $\lambda_i = -\mu_i$; par suite

$$h_{jk}^i a_i (b^j c^k - b^k c^j) \equiv \mu_i a_k (b^i c^k - b^k c^i).$$

Comme le premier membre ne peut être identiquement nul que si tous les h_{ij}^k sont nuls, nous voyons que les seules valeurs possibles non nulles des constantes h_{ik}^i sont données par l'identification

$$h_{ik}^i = \mu_i,$$

ce qui donne en tout n relations entre les α_i^{jk} , à savoir

$$\alpha_k^{1k} = 0, \quad \alpha_k^{2k} = 0, \quad \dots, \quad \alpha_k^{nk} = 0.$$

En définitive, nous obtenons un *premier tenseur irréductible de torsion* dont les composantes, au nombre de $\frac{n(n+1)(n-2)}{2}$, sont les quantités

$$\alpha_i^{jk} A_{jk}^i,$$

pour lesquelles on a

$$\alpha_k^{ik} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

98. Nous allons maintenant démontrer l'existence d'un second tenseur irréductible. Partons pour cela d'un vecteur arbitraire a^i et

considérons l'expression

$$a^i u_i x^k v_k - a^i v_i x^k u_k;$$

les coefficients des a^i constituent évidemment un tenseur irréductible dont la $i^{\text{ième}}$ composante est

$$x^k (u_i v_k - v_i u_k),$$

ce qui conduit à un nouveau tenseur irréductible, à n composantes :

$$A_{1k}^k, A_{2k}^k, \dots, A_{nk}^k.$$

En résumé, nous avons décomposé le tenseur de torsion à $\frac{n^2(n-1)}{2}$ composantes en deux tenseurs irréductibles ε et ε' qui ont respectivement $\frac{n(n+1)(n-2)}{2}$ et n composantes. On peut du reste démontrer qu'il n'y a pas d'autre tenseur irréductible formé avec des combinaisons linéaires des A_{jk}^i .

99. On peut donner une définition plus directe du tenseur ε' , en remarquant que l'expression de Pfaff

$$A_{ij}^i \omega^j,$$

dont les coefficients sont les composantes de ε' changées de signe, est égale à

$$\frac{\partial \Omega^1}{\partial \omega^1} + \frac{\partial \Omega^2}{\partial \omega^2} + \dots + \frac{\partial \Omega^n}{\partial \omega^n}.$$

Mais on peut avoir une interprétation géométrique plus concrète de cette forme de Pfaff.

Donnons-nous pour cela un vecteur infiniment petit ω^i issu de \mathbf{m} ; c'est le vecteur $\mathbf{m}' - \mathbf{m} = d\mathbf{m}$. Considérons alors un vecteur infiniment petit quelconque (x^i) issu de \mathbf{m} et le parallélogramme construit sur le vecteur (x^i) et le vecteur (ω^i) . Au contour de ce parallélogramme parcouru en partant de \mathbf{m} dans le sens \mathbf{mm}' , est associée une translation infiniment petite dont les composantes, qui dépendent évidemment du vecteur \mathbf{x} , sont

$$\Omega^i = A_{jk}^i (\omega^j x^k - \omega^k x^j);$$

si nous faisons subir à l'extrémité du vecteur \mathbf{x} cette translation, nous obtiendrons le vecteur infiniment peu différent \mathbf{x}' de composantes

$$x'^i = x^i + \Lambda^i_{jk}(\omega^j x^k - \omega^k x^j).$$

La formule précédente définit, *quand le point \mathbf{m}' est donné*, une transformation affine infinitésimale portant sur le vecteur variable (x^i) . Si on l'applique à n vecteurs \mathbf{x} non situés dans une même multiplicité plane à $n - 1$ dimensions, ils sont transformés en n autres vecteurs \mathbf{x}' et le volume du parallélépipède formé par ces vecteurs a subi une variation correspondant à un coefficient de dilatation n -uple égal précisément à la forme de Pfaff

$$\Lambda^i_{ji} \omega^j.$$

Autrement dit, cette forme de Pfaff représente le coefficient de dilatation de volume dans la transformation affine que nous avons attachée au vecteur (ω^i) .

Il résulte en particulier de ce qui précède que, dans une variété à connexion affine pour laquelle le tenseur $\bar{\varepsilon}$ n'est pas nul, *il existe une forme de Pfaff à signification intrinsèque* (indépendante de tout choix particulier du système de référence) *attachée à tout déplacement infiniment petit sur la variété*; autrement dit, *la variété admet un invariant intégral linéaire (scalaire)*

$$\int \Lambda^i_{ji} \omega^j.$$

100. Cherchons maintenant à caractériser les variétés pour lesquelles le tenseur irréductible $\bar{\varepsilon}$ est nul. S'il en est ainsi, les seuls coefficients de torsion différents de zéro sont les Λ^i_{ji} et l'on peut de plus poser

$$\Lambda^i_{ji} = a_i,$$

avec n quantités a_i . En posant ⁽¹⁾

$$a_1 \omega^1 + a_2 \omega^2 + \dots + a_n \omega^n = \bar{\omega},$$

on obtient

$$\Omega^i = [\bar{\omega} \omega_i].$$

(1) On voit que l'invariant intégral dont il est question plus haut est égal à $n \int \bar{\omega}$.

La translation associée à un contour fermé infiniment petit est alors

$$\mathbf{e}_i[\varpi \omega_i] = [\varpi d\mathbf{m}].$$

Cela posé, considérons un parallélogramme infiniment petit ayant \mathbf{m} pour un de ses sommets; nous pouvons toujours, sans changer la translation qui lui est associée, supposer que l'un de ses côtés (y^i) est dans l'hyperplan (P) d'équation $a_i x^i = 0$; soit x^i l'autre; la translation associée sera alors

$$a_k x^k (y^1 \mathbf{e}_1 + \dots + y^n \mathbf{e}_n),$$

elle se fera donc suivant l'intersection (y^i) du plan du parallélogramme avec l'hyperplan (P), et par suite suivant une direction du plan du parallélogramme.

On peut retrouver ce résultat et en même temps démontrer la réciproque en se référant à la forme génératrice

$$a_i (b^j c^k - b^k c^j) \Lambda_{jk}^i$$

du tenseur ϖ , où les paramètres a^i, b^i, c^i sont assujettis aux seules relations

$$a_i b^i = 0, \quad a_i c^i = 0.$$

Dire que pour une variété donnée, le tenseur ϖ est nul, c'est dire que la forme génératrice est identiquement nulle si l'on tient compte des relations qui existent entre les paramètres qu'elle contient. Or cela exprime que si l'on considère en un point \mathbf{m} le parallélogramme construit sur deux vecteurs (b^i), (c^i) infiniment petits arbitraires, *la translation associée à ce parallélogramme est représentée par un vecteur*

$$\mathbf{e}_i \Lambda_{jk}^i (b^j c^k - b^k c^j)$$

situé dans le plan du parallélogramme.

101. Considérons en particulier une variété à courbure nulle pour laquelle le tenseur ϖ soit nul; elle aura des équations de structure de la forme

$$(\omega^i)' = [\varpi \omega^i], \quad \omega_i^j = 0.$$

On en déduit

$$[\varpi' \omega^1] = [\varpi' \omega^2] = \dots = [\varpi' \omega^n] = 0;$$

par suite, si $n > 2$, le covariant bilinéaire ϖ' de la forme ϖ est nul et

ϖ est une différentielle exacte $\frac{dV}{V}$. On voit alors facilement que les formes $\frac{1}{V} \omega^i$ sont aussi des différentielles exactes, de sorte qu'on peut poser

$$\omega^i = V du^i.$$

Les hypersurfaces $V = \text{const.}$ sont en chacun de leurs points tangentes à l'hyperplan $\varpi = 0$, de sorte que la translation associée à un parallélogramme infiniment petit se fait suivant l'intersection du plan de ce parallélogramme et de l'hyperplan tangent à l'hypersurface $V = \text{const.}$ passant par \mathbf{m} . On verra facilement que le groupe g associé à un point \mathbf{m} est à $n - 1$ paramètres et formé des translations parallèles à l'hyperplan tangent à l'hypersurface $V = \text{const.}$ passant par \mathbf{m} .

Étude du tenseur de courbure.

102. Nous allons encore décomposer le tenseur de courbure, qui admet $\frac{n^3(n-1)}{2}$ composantes, en des tenseurs irréductibles. On montrera facilement ici que ces composantes A^i_{jkl} se transforment, par un changement de coordonnées, de la même manière que les expressions

$$u_i x^j (v_k w_l - v_l w_k),$$

où les x^i sont les composantes d'un vecteur arbitraire, et les u_i, v_i, w_i trois séries de variables covariantes (se transformant comme les \mathbf{e}_i). Or on peut démontrer que si l'on considère l'expression

$$x^1 u_2 (v_2 w_3 - v_3 w_2)$$

et toutes celles qu'on en déduit par un changement de coordonnées arbitraire, elles forment un tenseur irréductible. Par suite les quantités

$$a_i x^i b^j u_j (b^k c^l - b^l c^k) (v_k w_l - v_l w_k),$$

où les paramètres arbitraires a_i, b^i, c^i sont assujettis aux deux seules relations

$$(1) \quad a_i b^i = 0, \quad a_i c^i = 0,$$

fournissent toutes les composantes de ce tenseur irréductible. Autre-

ment dit, la forme

$$a_i b^j (b^k c^l - b^l c^k) A_{jkl}^i$$

définit la forme génératrice d'un tenseur de courbure irréductible. Chaque composante de ce tenseur est de la forme

$$\alpha_i^{jkl} A_{jkl}^i,$$

avec des coefficients α_i^{jkl} constants. Cherchons à déterminer toutes les relations linéaires à coefficients constants

$$h_{jkl}^i \alpha_i^{jkl} = 0,$$

qui existent entre ces coefficients. Elles seront caractérisées par la condition que la relation

$$h_{jkl}^i a_i b^j (b^k c^l - b^l c^k) = 0$$

ait lieu toutes les fois que l'on a

$$a_i b^i = 0, \quad a_i c^i = 0;$$

autrement dit, on devra avoir l'identité en a^i, b^i, c^i :

$$h_{jkl}^i a_i b^j (b^k c^l - b^l c^k) \equiv \lambda(b, c) a_i b^i - \mu(b) a_i c^i,$$

où $\lambda(b, c)$ désigne une forme bilinéaire en b^i et c^i et $\mu(b)$ une forme quadratique en b^i :

$$\lambda(b, c) = \lambda_{jk} b^j c^k, \quad \mu(b) = \mu_{jk} b^j b^k \quad (\mu_{jk} = \mu_{kj}).$$

L'identification donne

$$\mu_{ii} = \lambda_{ii}, \quad \mu_{ij} = \frac{1}{2}(\lambda_{ij} + \lambda_{ji}),$$

de sorte que le second membre de l'identité prend la forme

$$\lambda_{ii} a_k b^i (b^k c^i - b^i c^k) + \lambda_{ij} a_k b^i (b^k c^j - b^j c^k).$$

On voit immédiatement que, parmi les relations qui existent entre les coefficients α_i^{jkl} , il y a les n^2 suivantes :

$$(3) \quad \alpha_k^{jk} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Mais il y en a d'autres correspondant au cas où les polynomes $\lambda(b, c)$

et $\mu(b)$ sont identiquement nuls. Ce sont les relations, en nombre $\frac{n^2(n-1)(n-2)}{6}$:

$$(3 \text{ bis}) \quad \alpha_i^{jkl} + \alpha_i^{kjl} + \alpha_i^{ljk} = 0 \quad (i=1, \dots, n; \quad j \neq k \neq l=1, 2, \dots, n).$$

On démontre sans difficulté que les relations (3) et (3 bis) sont indépendantes; elles définissent donc un tenseur irréductible dont le nombre des composantes est

$$\frac{n^3(n-1)}{2} - n^2 - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n^2(n^2-4)}{3}.$$

103. La forme des relations (3) et (3 bis) nous conduit à penser que les quantités

$$(4) \quad A_{ijk}^k \quad (i, j=1, 2, \dots, n)$$

d'une part, les quantités

$$(5) \quad B_{ijkl}^i = A_{jkl}^j + A_{klij}^i + A_{ijlk}^i \quad (i=1, \dots, n; \quad j \neq k \neq l=1, \dots, n)$$

d'autre part, forment deux nouveaux tenseurs.

En effet d'abord les quantités A_{ijk}^k se transforment comme les quantités

$$x^k u_i (v_j w_k - v_k w_j) = u_i v_j x^k w_k - u_i v_j x^k v_k,$$

ou encore comme les quantités $u_i v_j$. Elles forment donc un tenseur, mais qui n'est pas irréductible. On peut le décomposer en deux tenseurs irréductibles, l'un symétrique, isomorphe au tenseur $u_i u_j$, l'autre alterné, isomorphe au tenseur $u_i v_i - u_j v_j$. Le premier aura pour composantes, en nombre $\frac{n(n+1)}{2}$,

$$(6) \quad a_{ij} = a_{ji} = \frac{1}{2} (A_{ijk}^k + A_{jik}^k);$$

le second aura pour composantes, en nombre $\frac{n(n-1)}{2}$,

$$(7) \quad b_{ij} = -b_{ji} = A_{ijk}^k - A_{jik}^k.$$

Le premier est formé des coefficients de la forme différentielle qua-

dratique

$$(6') \quad a_{ij} \omega^i \omega^j = A_{ijk}^k \omega^i \omega^j = - \omega^i \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial \omega^k},$$

le second est formé des coefficients de la forme extérieure

$$(7') \quad b_{ij} [\omega^i \omega^j] = A_{jkl}^k [\omega^i \omega^j] = - \left[\omega^i \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial \omega^k} \right].$$

104. Passons maintenant aux quantités (5); elles se transforment comme les quantités

$$x^i \begin{vmatrix} u_j & u_k & u_l \\ v_j & v_k & v_l \\ w_j & w_k & w_l \end{vmatrix}.$$

Or on peut démontrer que la quantité

$$x^i \begin{vmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ v_2 & v_3 & v_4 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$

et celles qu'on en déduit par un changement arbitraire de coordonnées forment un tenseur irréductible. Les composantes de ce tenseur peuvent être obtenues en remplaçant x^i par $a_i x^i$, u_2 par $b^i u_i$, u_3 par $c^i u_i$ et u_4 par $d^i u_i$, où les a_i, b^i, c^i, d^i sont des constantes arbitraires satisfaisant aux relations

$$a_i b^i = 0, \quad a_i c^i = 0, \quad a_i d^i = 0.$$

On obtient alors le tenseur symbolisé par la forme génératrice

$$a_i x^i \begin{vmatrix} b^j & b^k & b^l \\ c^j & c^k & c^l \\ d^j & d^k & d^l \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_j & u_k & u_l \\ v_j & v_k & v_l \\ w_j & w_k & w_l \end{vmatrix}.$$

En revenant aux quantités (5), on aura la forme génératrice

$$a_i \begin{vmatrix} b^j & b^k & b^l \\ c^j & c^k & c^l \\ d^j & d^k & d^l \end{vmatrix} B_{jkl}^i.$$

On obtiendra donc finalement un tenseur irréductible dont toutes les

composantes seront de la forme

$$\beta_i^{jkl} B_{jkl}^i.$$

Cherchons quelles sont les relations linéaires

$$h_{jkl}^i \beta_i^{jkl} = 0$$

qui existent entre les coefficients de ces composantes. On les obtiendra en exprimant que l'on a l'identité

$$h_{jkl}^i a_i \begin{vmatrix} b^j & b^k & b^l \\ c^j & c^k & c^l \\ d^j & d^k & d^l \end{vmatrix} \equiv \lambda(c, d) a_i b^i + \mu(d, b) a_i c^i + \nu(b, c) a_i d^i,$$

où $\lambda(c, d)$ est une forme bilinéaire par rapport aux b^i et c^i , et où $\mu(d, b)$ et $\nu(b, c)$ sont deux autres formes bilinéaires.

L'identité précédente conduit à $h_{jkl}^i = 0$ si le second membre est identiquement nul. L'identification dans le cas général montre que le second membre est de la forme

$$\lambda_{ij} a_k \begin{vmatrix} b^k & b^i & b^j \\ c^k & c^i & c^j \\ d^k & d^i & d^j \end{vmatrix} \quad (\lambda_{ij} + \lambda_{ji}) = 0.$$

Les seules relations existant entre les coefficients h_{jkl}^i sont donc les $\frac{n(n-1)}{2}$ suivantes :

$$\beta_k^{kij} = 0 \quad (i \neq j = 1, 2, \dots, n).$$

Nous arrivons donc à un quatrième tenseur irréductible dont les composantes, au nombre de $\frac{n(n^2-1)(n-3)}{6}$, sont formées des combinaisons

$$\beta_i^{jkl} B_{jkl}^i = \beta_i^{jkl} (\Lambda_{jkl}^i + \Lambda_{klij}^i + \Lambda_{ljk}^i)$$

pour lesquelles on a les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations

$$\beta_n^{nij} = 0 \quad (i \neq j = 1, \dots, n).$$

104 bis. Nous sommes enfin conduits à considérer les $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons

$$B_{kij}^k \quad (i \neq j = 1, \dots, n);$$

elles se transforment entre elles comme les quantités

$$x^k \begin{vmatrix} u_k & u_i & u_j \\ v_k & v_i & v_j \\ w_k & w_i & w_j \end{vmatrix} = x^k u_k (v_i w_j - v_j w_i) + x^k v_k (w_i u_j - w_j u_i) + x^k w_k (u_i v_j - u_j v_i)$$

ou encore comme les quantités

$$u_i v_j - u_j v_i;$$

et les forment donc un dernier tenseur alterné irréductible à $\frac{n(n-1)}{2}$ composantes. On constate facilement que ces composantes sont les coefficients de la forme différentielle extérieure

$$\Omega_i^i - \left[\omega^i \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial \omega^k} \right].$$

105. En définitive, nous avons démontré l'existence de cinq tenseurs irréductibles formés avec les coefficients du tenseur général de courbure. Le premier, à $\frac{n^2(n^2-4)}{3}$ composantes, est formé des combinaisons linéaires

$$\alpha_i^{hkl} \Lambda_{ijkl},$$

pour lesquelles on a

$$\alpha_k^{jk} = 0, \quad \alpha_i^{jkl} + \alpha_i^{kjl} + \alpha_i^{ljk} = 0.$$

Le second, à $\frac{n(n^2-1)(n-3)}{6}$ composantes, est formé des combinaisons linéaires

$$\beta_i^{jkl} (\Lambda_{ijkl} + \Lambda_{klij} + \Lambda_{ljk}),$$

pour lesquelles on a

$$\beta_k^{kj} = 0.$$

Le troisième, à $\frac{n(n+1)}{2}$ composantes, est formé des coefficients de la forme différentielle quadratique algébrique

$$\omega^i \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial \omega^k}.$$

Le quatrième, à $\frac{n(n-1)}{2}$ composantes, est formé des coefficients de la

forme différentielle quadratique extérieure

$$\left[\omega^i \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial \omega^k} \right].$$

Enfin le cinquième, à $\frac{n(n-1)}{2}$ composantes, est formé des coefficients de la forme différentielle quadratique extérieure

$$\Omega_i^i - \left[\omega^i \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial \omega^k} \right].$$

On peut vérifier facilement que toute combinaison linéaire des A_{ik}^i est décomposable, d'une manière et d'une seule, en cinq autres combinaisons linéaires appartenant respectivement aux cinq tenseurs irréductibles. On peut remarquer enfin que la décomposition du tenseur total de courbure en tenseurs irréductibles est possible d'une infinité de manières, car les deux derniers tenseurs étant isomorphes, on peut effectuer sur les deux formes extérieures qui les définissent une substitution linéaire à coefficients constants quelconques. En particulier on pourra substituer au dernier tenseur le tenseur, également irréductible, défini par la forme Ω_i^i . Sous la réserve précédente on peut démontrer que la décomposition en tenseurs irréductibles n'est possible que d'une manière (sauf pour $n = 4$, cas où le second et le troisième tenseur sont isomorphes).

Interprétation géométrique des tenseurs irréductible de courbure.

106. Il est possible de caractériser géométriquement les variétés pour lesquelles le premier tenseur de courbure est nul. Considérons en effet un parallélogramme infiniment petit construit sur les deux vecteurs $x^1 \mathbf{e}_1$ et $y^2 \mathbf{e}_2$. A ce parallélogramme est associée une rotation affine infiniment petite qui fait subir en particulier aux vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 les variations

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{e}_1 &= \Omega_1^i \mathbf{e}_i = A_{112}^i x^1 y^2 \mathbf{e}_i, \\ \Delta \mathbf{e}_2 &= \Omega_2^i \mathbf{e}_i = A_{212}^i x^1 y^2 \mathbf{e}_i. \end{aligned}$$

Or pour $i > 2$ les coefficients A_{112}^i , A_{212}^i sont tous nuls; donc les vecteurs \mathbf{e}_i et \mathbf{e}_2 restent, après la rotation, parallèles au plan du parallélogramme. Autrement dit, *tout plan à deux dimensions passant par m,*

transporté parallèlement le long d'un contour fermé infiniment petit situé dans ce plan, se retrouve, une fois le contour décrit, parallèle à lui-même.

Réciproquement supposons cette propriété vérifiée. Considérons le parallélogramme infiniment petit construit sur les deux vecteurs

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = y^i \mathbf{e}_i.$$

Tout vecteur \mathbf{z} subira, après un transport parallèle le long du contour de ce parallélogramme, la variation

$$\Delta \mathbf{z} = z^i \Lambda_{i\alpha\beta}^k (x^\alpha y^\beta - x^\beta y^\alpha) \mathbf{e}_k.$$

Par hypothèse la variation du vecteur \mathbf{x} sera parallèle au plan du parallélogramme. On aura donc n identités de la forme

$$x^i \Lambda_{i\alpha\beta}^k (x^\alpha y^\beta - x^\beta y^\alpha) \equiv \lambda(x, y) x^k - \mu(x) y^k,$$

où $\lambda(x, y)$ désigne une forme bilinéaire et μ une forme quadratique indépendantes de k , ou, ce qui revient au même, on aura une identité

$$x^i u_k \Lambda_{i\alpha\beta}^k (x^\alpha y^\beta - x^\beta y^\alpha) \equiv \lambda(x, y) x^k u_k - \mu(x) y^k u_k.$$

Cette identité exprime que la forme génératrice du premier tenseur de courbure est identiquement nulle, autrement dit que *ce premier tenseur est nul*.

107. Avant de caractériser géométriquement les variétés dont le second tenseur irréductible de courbure est nul, donnons une interprétation du tenseur B_{μ}^i . Pour cela, considérons le parallélépipède construit sur trois vecteurs infiniment petits

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = y^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{z} = z^i \mathbf{e}_i$$

issus du point \mathbf{m} . Si nous transportons le vecteur \mathbf{x} parallèlement à lui-même le long du contour du parallélogramme construit sur \mathbf{y} et \mathbf{z} , il subira une certaine variation infiniment petite $\Delta \mathbf{x}$; de même le vecteur \mathbf{y} transporté parallèlement à lui-même le long du contour du parallélogramme construit sur \mathbf{z} et \mathbf{x} , subira une variation $\Delta \mathbf{y}$; on aura de même une variation $\Delta \mathbf{z}$. La somme géométrique $\Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{y} + \Delta \mathbf{z}$ est un vecteur attaché au parallélépipède et dont l'expression, facile à cal-

culer, est

$$- e_k B_{\alpha\beta\gamma}^k \begin{vmatrix} x^\alpha & x^\beta & x^\gamma \\ y^\alpha & y^\beta & y^\gamma \\ z^\alpha & z^\beta & z^\gamma \end{vmatrix}.$$

En définitive nous pouvons donc associer à tout élément à trois dimensions de la variété un vecteur dont les composantes, qui sont des éléments d'intégrales triples, sont

$$B_{\alpha\beta\gamma}^k [\omega^\alpha \omega^\beta \omega^\gamma] \quad (k = 1, \dots, n).$$

On peut encore définir ce vecteur d'une autre manière. Considérons un volume à trois dimensions limité par une surface fermée infiniment petite, et prenons un point \mathbf{a} quelconque à l'intérieur du volume. A tout élément de la surface qui limite le volume est associé un déplacement infiniment petit qui, appliqué au vecteur $\mathbf{a} - \mathbf{m}$, fait subir à ce vecteur une certaine variation; la somme de toutes ces variations est représentée par la forme cubique extérieure vectorielle

$$e_k B_{\alpha\beta\gamma}^k [\omega^\alpha \omega^\beta \omega^\gamma].$$

Cela posé, prenons en particulier un parallélépipède construit sur trois vecteurs infiniment petits $x^1 \mathbf{e}_1, y^2 \mathbf{e}_2, z^3 \mathbf{e}_3$; le vecteur associé à ce parallélépipède sera

$$e_k B_{123}^k x^1 y^2 z^3.$$

Si le deuxième tenseur de courbure est nul, les coefficients B_{123}^k seront tous nuls pour $k > 3$; autrement dit, *le vecteur associé au parallélépipède sera dans le même plan à trois dimensions que le parallélépipède lui-même.*

Réciproquement supposons que cette propriété ait lieu pour tout parallélépipède élémentaire. On aura, quelles que soient les quantités x^i, y^i, z^i , les identités

$$B_{jkl}^i \begin{vmatrix} x^j & x^k & x^l \\ y^j & y^k & y^l \\ z^j & z^k & z^l \end{vmatrix} \equiv \lambda(y, z) x^i + \mu(z, x) y^i + \nu(x, y) z^i,$$

avec trois formes bilinéaires λ, μ, ν , indépendantes de l'indice i . Au-

trement dit, on aura l'identité

$$B_{jkl}^i u_l \begin{vmatrix} x^j & x^k & x^l \\ y^j & y^k & y^l \\ z^j & z^k & z^l \end{vmatrix} \equiv \lambda(y, z) x^i u_i + \mu(z, x) y^i u_i + \nu(x, y) z^i u_i.$$

Or cette identité exprime précisément que la forme génératrice du second tenseur irréductible de courbure est nulle, c'est-à-dire que ce tenseur lui-même est nul.

108. Pour interpréter le troisième tenseur irréductible, défini par la forme quadratique

$$A_{ijk}^k \omega^i \omega^j,$$

considérons le vecteur infiniment petit $\mathbf{m}' - \mathbf{m} = \omega^i \mathbf{e}_i$, et en même temps un autre vecteur infiniment petit variable $x^i \mathbf{e}_i$; quand on transporte le premier parallèlement à lui-même le long du contour du parallélogramme formé par les deux vecteurs, il subit une petite variation

$$- \omega^i \mathbf{e}_k A_{i\alpha\beta}^k (\omega^\alpha x^\beta - \omega^\beta x^\alpha);$$

ajoutons géométriquement ce petit vecteur au vecteur \mathbf{x} ; nous définissons ainsi une transformation affine infiniment petite sur le vecteur variable \mathbf{x} ; elle est définie par les formules

$$\delta x^k = - A_{i\alpha\beta}^k \omega^i \omega^\alpha x^\beta.$$

Le coefficient de dilatation correspondant à cette transformation est égal à

$$- A_{i\alpha k}^k \omega^i \omega^\alpha,$$

c'est-à-dire à la forme quadratique à interpréter.

Nous remarquons que si cette forme quadratique n'est pas nulle, elle définit une *métrique intrinsèque* sur la variété.

109. Le quatrième tenseur irréductible, défini par la forme extérieure

$$A_{ijk}^i [\omega^j \omega^k],$$

s'interprète d'une manière analogue. Considérons sur la variété deux vecteurs infiniment petits fixes $\omega^i \mathbf{e}_i$ et $\omega^i \mathbf{e}_i$ et un troisième vecteur

variable $x^i \mathbf{e}_i$. Le premier vecteur transporté parallèlement le long du contour du parallélogramme formé par les deux autres subit une certaine variation; de même le second vecteur transporté parallèlement à lui-même le long du contour du parallélogramme formé par le premier et le troisième vecteur subit une autre variation. En ajoutant au vecteur \mathbf{x} la première variation et retranchant la seconde, on obtient un vecteur $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$, avec

$$\delta x^k = \Lambda_{\alpha\beta}^k \omega^\alpha (\omega^\beta x^\beta - \omega^\beta x^\alpha) - \Lambda_{i\alpha\beta}^k \omega^i (\omega^\alpha x^\beta - \omega^\beta x^\alpha) = \Lambda_{ij\beta}^k (\omega^i \omega^j - \omega^j \omega^i) x^\beta.$$

On a ainsi une transformation affine infiniment petite de vecteurs comportant un coefficient de dilatation

$$\Lambda_{ijk}^k (\omega^i \omega^j - \omega^j \omega^i),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Lambda_{ijk}^k [\omega^i \omega^j].$$

On pourrait procéder autrement et se borner à considérer la variation subie par le vecteur \mathbf{x} quand on le déplace parallèlement à lui-même le long d'un contour fermé donné; il subirait alors la rotation associée au contour, ce qui produirait une variation

$$\Delta \mathbf{x} = -x^i \Lambda_{\alpha\beta}^k [\omega^\alpha \omega^\beta] \mathbf{e}_k;$$

le coefficient de dilatation correspondant serait

$$-\Lambda_{kij}^k [\omega^i \omega^j] = -\Omega_k^k;$$

on trouve ainsi le cinquième tenseur irréductible, dont on a une interprétation géométrique.

Remarquons que nous avons été conduits à des formes différentielles, scalaires ou vectorielles, ayant une signification géométrique intrinsèque; on peut encore dire qu'on a des *invariants intégraux*, scalaires ou vectoriels; ce sont les invariants

$$\int \sqrt{\Lambda_{ijk}^k \omega^i \omega^j},$$

$$\iint \Lambda_{ijk}^k [\omega^i \omega^j] = - \iint \left[\omega^i \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial \omega^j} \right],$$

$$\iint \Omega_i^i.$$

Enfin on a l'invariant intégral cubique *vectoriel* déjà signalé (n° 39)

$$\int \int \int \mathbf{e}_i [\omega^k \Omega_k^i] = \int \int \int \mathbf{e}^i B_{\alpha\beta\gamma}^i [\omega^\alpha \omega^\beta \omega^\gamma].$$

On peut remarquer que l'invariant intégral $\int \int \Omega_i^i$ satisfait à la loi de conservation, c'est-à-dire que l'intégrale étendue à une surface fermée est nulle; cela résulte en effet de la formule

$$(\Omega_i^i)' + [\Omega_k^i \omega_k^i] - [\omega_k^i \Omega_k^i] = 0 \quad \text{ou} \quad (\Omega_i^i)' = 0.$$

C'est ce qui a conduit M. Eddington, dans le cas $n = 4$, à l'identifier avec le champ électromagnétique.

Cas particulier des variétés à torsion nulle.

110. Dans le cas particulier des variétés à torsion nulle, le nombre des tenseurs de courbure se réduit. Le théorème général de conservation donne en effet [formule (7), n° 36],

$$[\omega^k \Omega_k^i] = 0 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Il en résulte que tous les B_{jkl}^i sont nuls d'eux-mêmes. Par suite le second tenseur irréductible de courbure disparaît, ainsi que le cinquième. Il reste donc le premier à $\frac{n^2(n^2-4)}{3}$ composantes, le troisième défini par la forme quadratique $\omega^i \frac{\partial \Omega_k^i}{\partial \omega^k}$, et le quatrième défini indifféremment par la forme extérieure $\left[\omega^i \frac{\partial \Omega_k^i}{\partial \omega^k} \right]$ ou par la forme extérieure $\Omega_i^i ({}^1)$.

On voit que dans ce cas le vecteur associé à un élément à trois dimensions de la variété est toujours nul, mais *cette propriété n'est pas caractéristique des variétés à torsion nulle.*

(¹) Dans le cas d'une torsion nulle, M. Eddington a déterminé ces deux derniers tenseurs, qui lui ont permis de définir une métrique et un champ électromagnétique dans un Univers à quatre dimensions à connexion affine.

CHAPITRE VIII.

LES TENSEURS DE COURBURE ET DE TORSION DES VARIÉTÉS
À CONNEXION MÉTRIQUE.

III. Nous allons indiquer rapidement les propriétés essentielles des tenseurs de torsion et de courbure dans le cas général, en signalant les cas d'exception sur lesquels nous reviendrons ensuite.

Nous admettons les théorèmes suivants, qui peuvent se déduire facilement des résultats de mon Mémoire sur les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane⁽¹⁾.

Si l'on désigne par x^i, y^i, z^i, t^i les composantes de quatre vecteurs arbitraires, chacun des tenseurs

$$\begin{vmatrix} x^i & x^j \\ y^i & y^j \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x^i & x^j & x^k \\ y^i & y^j & y^k \\ z^i & z^j & z^k \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x^i & x^j & x^k & x^l \\ y^i & y^j & y^k & y^l \\ z^i & z^j & z^k & z^l \\ t^i & t^j & t^k & t^l \end{vmatrix}$$

est irréductible. Il y a exception :

Pour $n = 4$, cas où le tenseur $|x^i y^j|$ se décompose en deux tenseurs irréductibles conjugués à 3 composantes

$$|x_i y_j| + \varepsilon \sqrt{g} |x^k y^l| \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

où (ijk) désigne une permutation paire quelconque des indices 1, 2, 3;

Pour $n = 6$, cas où le tenseur $|x^i y^j z^k|$ se décompose en deux tenseurs irréductibles conjugués à 10 composantes

$$|x_i y_j z_k| + \varepsilon \sqrt{-g} |x^l y^m z^n| \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

en désignant par $(ijklm)$ une permutation paire quelconque des indices 1, 2, 3, 4, 5;

Pour $n = 8$, cas où le tenseur $|x^i y^j z^k t^l|$ se décompose en deux tenseurs

⁽¹⁾ Bull. Soc. math. de France, t. XLI, 1913, p. 53-96.

irréductibles conjugués à 35 composantes

$$|x_i y_j z_k t_l| + \varepsilon \sqrt{g} |x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta| \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

en désignant par $(ijkl\alpha\beta\gamma)$ une permutation paire quelconque des indices 1, 2, ..., 7.

Nous admettrons aussi le théorème suivant qui peut se déduire également du Mémoire cité plus haut :

Chacune des formes ($n \neq 4$),

$$a_i(a_j b_k - b_j a_k) x^i (y^j z^k - z^j y^k), \\ (a_i b_j - b_i a_j) (a_k b_l - b_k a_l) (x^i y^j - x^j y^i) (z^k t^l - z^l t^k),$$

où les a_i et les b_i sont des paramètres assujettis aux seules relations

$$a_i a^i = 0, \quad a_i b^i = 0, \quad b_i b^i = 0,$$

engendre un tenseur irréductible dont les composantes sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des

$$x^i (y^j z^k - z^j y^k), \\ (x^i y^j - x^j y^i) (z^k t^l - t^k z^l).$$

Il en est de même, pour $n \neq 6$, de la forme

$$a_i |a_j b_k c_l| x^i |y^j z^k t^l|,$$

où les paramètres a_i, b_i, c_i satisfont aux relations

$$a_i a^i = b_i b^i = c_i c^i = a_i b^i = a_i c^i = b_i c^i = 0.$$

Enfin on peut démontrer facilement aussi que la forme

$$(a_i x^i)^2,$$

où les paramètres a_i sont liés par la seule relation

$$a_i a^i = 0,$$

engendre un tenseur irréductible. Les $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ composantes de ce tenseur sont

$$x_1 x^1 - x_n x^n, \quad \dots, \quad x_{n-1} x^{n-1} - x_n x^n, \quad x^i x^j \quad (i \neq j = 1, 2, \dots, n).$$

112. *Le premier tenseur irréductible de torsion.* — Les composantes Λ_{jk}^i du tenseur de torsion se transforment comme les quantités

$$x^i(y_j z_k - z_j y_k).$$

D'après ce que nous avons vu plus haut, la forme

$$a_i(a^j b^k - b^j a^k) x^i (y_j z_k - z_j y_k),$$

où les a_i et les b_i sont des paramètres assujettis à satisfaire aux relations

$$a_i a^i = 0, \quad a_i b^i = 0, \quad b_i b^i = 0,$$

engendre un tenseur irréductible. Il en est donc de même de la forme

$$a_i(a^j b^k - b^j a^k) \Lambda_{jk}^i.$$

Cherchons les relations linéaires qui existent entre les coefficients α_i^{jk} des composantes

$$\alpha_i^{jk} \Lambda_{jk}^i$$

de ce tenseur. Soit

$$h_{jk}^i \alpha_i^{jk} = 0$$

une de ces relations. L'équation

$$h_{jk}^i a_i (a^j b^k - b^j a^k) = 0$$

sera vérifiée pour tout système de valeurs des a^i et b^i satisfaisant à

$$a_i a^i = 0, \quad a_i b^i = 0, \quad b_i b^i = 0.$$

On en déduit sans difficulté l'existence d'une *identité* de la forme

$$h_{jk}^i a_i (a^j b^k - b^j a^k) \equiv \lambda(b) a_i a^i - \mu(a) a_i b^i,$$

où $\lambda(b)$ désigne une forme linéaire par rapport aux b^i et $\mu(a)$ une forme linéaire par rapport aux a^i . On voit immédiatement que les coefficients de ces deux formes doivent être les mêmes, de sorte que l'identité s'écrit

$$h_{jk}^i a_i (a^j b^k - b^j a^k) \equiv \lambda_k a_i (a^i b^k - b^i a^k).$$

On a un premier système de constantes h_{jk}^i admissibles en prenant

$$h_{1k}^1 = h_{2k}^2 = \dots = h_{nk}^n = \lambda_k, \quad h_{jk}^i = 0 \quad (i \neq j \neq k),$$

les λ_k désignant des constantes arbitraires. Il n'y aura plus alors qu'à ajouter à la solution précédente la plus générale de celles qui réalisent l'identité

$$h_{ijk} \alpha^i (a^j b^k - b^j a^k) = 0 \quad (h_{ijk} = g_{ii} h'_{jk}),$$

et qui s'obtient manifestement en prenant

$$h_{ijk} = h_{jki} = h_{kij} \quad (i \neq j \neq k = 1, \dots, n).$$

En résumé, *le premier tenseur irréductible de torsion est formé par les quantités $\alpha_i^{kj} \Lambda_{jk}^i$, où les coefficients α_i^{jk} satisfont aux relations*

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha_k^{ki} = 0 & (i = 1, 2, \dots, n), \\ \alpha^{ijk} + \alpha^{jki} + \alpha^{kij} = 0 & (i \neq j \neq k = 1, \dots, n). \end{cases}$$

Le nombre des composantes distinctes de ce tenseur est égal à $\frac{n(n^2-4)}{3}$.

Nous avons déjà eu l'occasion (69) de parler de ce tenseur et d'en donner une interprétation géométrique. *Ce tenseur est décomposable si $n = 4$.*

113. *Le deuxième tenseur irréductible de torsion.* — La forme des dernières équations (1) nous conduit à considérer les quantités

$$B_{ijk} = \Lambda_{ijk} + \Lambda_{jki} + \Lambda_{kij} \quad (i \neq j \neq k = 1, \dots, n).$$

Elles se transforment comme les quantités $[x_i y_j z_k]$: elles forment donc un tenseur irréductible ($n \neq 6$) à $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ composantes. Ces composantes sont les coefficients de la forme cubique extérieure

$$[\omega^1 \Omega_1] + [\omega^2 \Omega_2] + \dots + [\omega^n \Omega_n],$$

qui est de poids 2. Dans le cas $n = 6$ ce tenseur se décompose en deux tenseurs irréductibles conjugués, réels si $g < 0$. Chacun d'eux a pour composantes les coefficients de la forme

$$[\omega^1 \Omega_1] + [\omega^2 \Omega_2] + \dots + [\omega^6 \Omega_6] + \varepsilon \sqrt{-g} \{ (ijklmn) A^{ijk} [\omega^l \omega^m \omega^n] \}.$$

Le troisième tenseur irréductible de torsion. — Il a pour composantes les n quantités

$$A_{ki}^k \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

qui sont les coefficients de la forme de Pfaff

$$\frac{\partial \Omega^1}{\partial \omega^1} + \frac{\partial \Omega^2}{\partial \omega^2} + \dots + \frac{\partial \Omega^n}{\partial \omega^n};$$

cette forme est un invariant absolu, indépendant du choix de l'unité de longueur.

114. *Le tenseur de courbure d'homothétie.* — Il a pour composantes les coefficients A_{ij} de la forme Ω ; il est donc, d'après un des théorèmes énoncés plus haut, irréductible, à $\frac{n(n-1)}{2}$ composantes, à moins que n ne soit égal à 4.

115. *Le premier tenseur irréductible de courbure de rotation.* — Les coefficients A_{ijkl} de Ω_{ij} se transforment évidemment, puisqu'on a

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0,$$

comme les quantités

$$(x_i y_j - y_i x_j)(z_k t_l - z_l t_k).$$

Nous avons vu que la forme

$$(a^i b^j - b^i a^j)(a^k b^l - b^k a^l)(x_i y_j - y_i x_j)(z_k t_l - z_l t_k)$$

engendre ($n \neq 4$) un tenseur irréductible, quand on y regarde les a^i et les b^i comme des paramètres assujettis aux trois seules relations

$$(2) \quad a_i a^i = 0, \quad a_i b^i = 0, \quad b_i b^i = 0.$$

Il en sera de même par suite de la forme

$$(a^i b^j - b^i a^j)(a^k b^l - b^k a^l) A_{ijkl}.$$

Soit

$$\alpha^{ijkl} A_{ijkl}$$

une quelconque des composantes de ce tenseur. Ce tenseur sera défini si l'on connaît le système complet des relations linéaires qui existent entre les α^{ijkl} . Si

$$h_{ijkl} \alpha^{ijkl} = 0$$

est une de ces relations, on devra avoir

$$h_{ijkl} (a^i b^j - b^i a^j)(a^k b^l - b^k a^l) = 0$$

pour tout système de valeurs des a^i et des b^i satisfaisant aux relations (2). On déduit sans difficulté de là l'existence d'une *identité* de la forme

$$(3) \quad h_{ijkl}(a^i b^j - b^i a^j)(a^k b^l - b^k a^l) \equiv \lambda(b) a_i a^i + \mu(a) b_i b^i - \rho(a, b) a_i b^i,$$

où $\lambda(b)$ désigne une forme quadratique en b^i , $\mu(a)$ une forme quadratique en a^i et $\rho(a, b)$ une forme bilinéaire en a^i, b^i . On peut toujours supposer, en tenant compte de ce que le premier membre ne change pas quand on échange entre elles les lettres a^i et b^i , que λ et μ sont la même forme quadratique de leurs arguments et par suite que ρ est une forme bilinéaire symétrique. Le fait que le premier membre ne change pas quand on remplace b^i par $b^i + k a^i$, où k désigne une constante arbitraire, montre que ρ est le double de la forme polaire de λ . Le second membre de l'identité peut par suite s'écrire

$$\lambda_{ij}(a^i b_k - b^i a_k)(a^j b^k - b^j a^k) \quad (\lambda_{ij} = \lambda_{ji}).$$

Une première manière de satisfaire à l'identité (3) est donc de poser

$$h_{j_1}^1 = h_{j_2}^2 = \dots = h_{j_n}^n = h_{j_1}^1 = \dots = h_{j_n}^n = \lambda_{ij}.$$

Pour obtenir la solution la plus générale du problème, il faut ajouter à la solution précédente celle qui vérifie l'identité

$$h_{ijkl}(a^i b^j - b^i a^j)(a^k b^l - b^k a^l) \equiv 0,$$

et qu'on obtient en donnant aux h_{ijkl} des valeurs telles qu'on ait

$$h_{ijkl} = h_{iklj} = h_{ljk} \quad (j \neq k \neq l).$$

Par suite *les relations entre les α^{ijkl} qui définissent le tenseur cherché sont*

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha_k^{ijk} + \alpha_k^{jki} = 0 & (i, j = 1, 2, \dots, n), \\ \alpha^{ijkl} + \alpha^{iklj} + \alpha^{iljk} = 0 & (j \neq k \neq l). \end{cases}$$

On vérifie facilement que ces relations sont indépendantes. *Elles définissent donc un premier tenseur irréductible de courbure à*

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n-3)}{12}$$

composantes. Ce tenseur est décomposable pour $n = 4$.

116. *Le second tenseur irréductible de courbure.* — Les quantités

$$\Lambda_{ijk}^k + \Lambda_{jik}^k$$

se transforment entre elles comme $x_i x_j$; par suite, d'après ce que nous avons vu plus haut, *elles conduisent à un second tenseur irréductible à*

$$\frac{(n-1)(n+2)}{2} \text{ composantes}$$

$$\Lambda_{ii}^i - \Lambda_{ii}^i, \dots, \Lambda_{n-1, i}^i - \Lambda_{ii}^i, \quad \Lambda_{ijk}^k + \Lambda_{jik}^k \quad (i \neq j = 1, \dots, n).$$

Ces composantes sont les coefficients de la forme quadratique invariante absolue

$$\Lambda_{ijk}^k \omega^i \omega^j - \frac{1}{n} \Lambda_{ij}^i \omega_k \omega^k.$$

117. *Le tenseur scalaire de courbure.* — Quant à la somme

$$\Lambda_{ij}^j,$$

elle constitue un tenseur scalaire, la *courbure totale* changée de signe.

118. *Le troisième tenseur irréductible de courbure.* — Les dernières relations (4) conduisent à considérer les quantités

$$B_{ijkl} = \Lambda_{ijkl} + \Lambda_{iklj} + \Lambda_{iljk} \quad (j \neq k \neq l)$$

qui jouissent de la propriété de ne pas changer quand on effectue sur les indices j, k, l une substitution paire quelconque et de changer de signe quand on effectue une substitution impaire. Ces quantités se transforment entre elles comme les quantités

$$x_i | y_j z_k t_l |.$$

La forme

$$a^i | a^j b^k c^l | x_i | y_j z_k t_l |$$

engendre un tenseur irréductible, si l'on y regarde les paramètres a_i, b_i, c_i comme assujettis aux seules relations

$$(5) \quad a_i a^i = b_i b^i = c_i c^i = a_i b^i = a_i c^i = b_i c^i = 0.$$

Il en est donc de même de la forme

$$a^i | a^j b^k c^l | B_{ijkl}.$$

Soit

$$\beta^{ijkl} B_{ijkl}$$

la composante la plus générale de ce tenseur; les coefficients β^{ijkl} sont liés par un certain nombre de relations

$$h_{ijkl} \beta^{ijkl} = 0$$

que nous allons déterminer.

Les coefficients h_{ijkl} de ces relations sont déterminés par la condition que l'équation

$$h_{ijkl} a^i | a^j b^k c^l | = 0$$

soit une conséquence des équations (5). On démontre sans difficulté que cela revient à l'existence d'une identité de la forme

$$h_{ijkl} a^i | a^j b^k c^l | \equiv \lambda(b, c) a_i a^i + \mu(a, c) a_i b^i + \rho(a, b) a_i c^i$$

avec trois formes bilinéaires λ, μ, ρ . On voit facilement que le second membre a la forme

$$\lambda_{ij} a_k | a^k b^i c^j |;$$

on a donc un premier choix possible des constantes h en prenant

$$h_{1ij}^1 = h_{2ij}^2 = \dots = h_{nij}^n.$$

Il suffira ensuite de trouver la manière la plus générale de satisfaire à l'identité

$$h_{ijkl} a^i | a^j b^k c^l | \equiv 0,$$

ce qui conduit à prendre

$$h_{ijkl} = -h_{jikl} = h_{kijl} = -h_{ilkj} \quad (i \neq j \neq k \neq l).$$

On a donc un troisième tenseur irréductible de courbure en prenant les quantités

$$\beta^{ijkl} B_{ijkl}$$

pour lesquelles les coefficients β^{ijkl} satisfont aux relations

$$\beta_k^{kij} = 0, \quad \beta^{ijkl} - \beta^{jtkl} + \beta^{kijl} - \beta^{ljjk} = 0 \quad (i \neq j \neq k \neq l) = 0.$$

Ce tenseur est à $\frac{n(n-1)(n+2)(n-3)}{8}$ composantes.

Il y a exception pour $n=6$, auquel cas le tenseur précédent se décompose en deux tenseurs irréductibles à 45 composantes.

119. *Le quatrième tenseur irréductible de courbure.* — Partons maintenant des quantités

$$B_{kij}^k = \Lambda_{ikj}^k - \Lambda_{jki}^k;$$

elles forment un tenseur irréductible à $\frac{n(n-1)}{2}$ composantes, isomorphe au tenseur $[x_i y_j]$, dont les composantes sont les coefficients de la forme

$$\Lambda_{ikj}^k [\omega^i \omega^j].$$

Le tenseur est décomposable si $n = 4$.

120. *Le cinquième tenseur irréductible de courbure.* — Il provient des quantités

$$B_{ijkl} - B_{jikl} + B_{kijl} - B_{iljk} = 2(\Lambda_{ijkl} + \Lambda_{klij} + \Lambda_{jkil} + \Lambda_{iljk} + \Lambda_{kijl} + \Lambda_{jtki})$$

qui se transforment entre elles comme les quantités $[x_i y_j z_k t_l]$.

Elles forment donc, si $n \neq 8$, un nouveau et dernier tenseur irréductible à $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ composantes. Ce tenseur se décompose en deux autres dans le cas $n = 8$. Les composantes sont les coefficients de la forme scalaire

$$[\omega^i \omega^j \Omega_{ij}].$$

En résumé, nous avons décomposé le tenseur général de la courbure de rotation en six tenseurs irréductibles, dont un tenseur scalaire, qui ont respectivement un nombre de composantes égal à

$$1, \frac{n(n+1)(n+2)(n-3)}{12}, \frac{(n-1)(n+2)}{2}, \frac{n(n-1)(n+2)(n-3)}{8}, \\ \frac{n(n-1)}{2}, \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Le nombre de tenseurs irréductibles s'élève à 7 pour $n = 6$ et $n = 8$, à 8 pour $n = 4$.

Je laisse de côté l'interprétation géométrique des différents tenseurs obtenus pour examiner ce qui se passe dans le cas particulier des variétés à torsion nulle (variétés de H. Weyl et variétés de Riemann).

121. *Cas des variétés de H. Weyl.* — Dans ce cas-là on a les identités

$$[\omega^i \Omega] + [\omega^k \Omega_k^i] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

qui donnent les relations

$$\begin{aligned} A_{ijkl} + A_{iklj} + A_{iljk} &= 0 \quad (i \neq j \neq k \neq l), \\ A_{ij}^1 - A_{ji}^1 &= A_{ij}^2 - A_{ji}^2 = \dots = A_{ij}. \end{aligned}$$

Par suite, les troisième et cinquième tenseurs irréductibles de courbure de rotation sont nuls d'eux-mêmes et le quatrième se confond avec le tenseur de courbure d'homothétie. Il reste donc en tout :

- 1° Un tenseur à $\frac{n(n+1)(n+2)(n-3)}{12}$ composantes;
- 2° Un tenseur à $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ composantes;
- 3° Un tenseur à $\frac{n(n-1)}{2}$ composantes;
- 4° Un tenseur scalaire.

122. *Cas des variétés de Riemann.* — Dans ce cas le tenseur de courbure d'homothétie disparaît à son tour et il reste :

- Un tenseur à $\frac{n(n+1)(n+2)(n-3)}{12}$ composantes;
- Un tenseur à $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$ composantes;
- Un tenseur scalaire.

CHAPITRE IX.

LES VARIÉTÉS A CONNEXION MÉTRIQUE A TROIS DIMENSIONS.

Le tenseur de torsion.

123. Les résultats obtenus dans le cas général sont valables pour $n = 3$. Le tenseur de torsion se décompose en trois tenseurs irréductibles :

- 1° Un tenseur à cinq composantes :

$$A_{21}^2 - A_{31}^3, \quad A_{32}^2 - A_{12}^1, \quad A_{13}^1 - A_{23}^2, \quad A_{123} - A_{312}, \quad A_{231} - A_{312};$$

Ann. Éc. Norm., (3), XLII. — FÉVRIER 1925.

2° *Un tenseur scalaire :*

$$A_{123} + A_{231} + A_{312};$$

3° *Un tenseur à trois composantes :*

$$A_{21}^2 + A_{31}^3, \quad A_{32}^3 + A_{12}^1, \quad A_{13}^1 + A_{23}^2,$$

dont nous allons donner des interprétations géométriques.

124. *Interprétation géométrique du tenseur à cinq composantes.* — Considérons en un point \mathbf{m} de la variété une petite aire plane orientée, et appelons torsion en \mathbf{m} du plan de cette aire le quotient par $d\sigma$ de la translation associée au contour de cette aire parcouru dans le sens direct. C'est un certain vecteur qui est bien défini, *une fois choisie l'unité de longueur en \mathbf{m}* (1). Cela posé, il est facile de caractériser les variétés pour lesquelles le premier tenseur irréductible de torsion est nul. L'égalité

$$A_{123} - A_{312} = 0$$

montre en effet que si l'on considère en \mathbf{m} trois faces planes rectangulaires (23), (31), (12), définies par trois vecteurs rectangulaires $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ rangés dans un certain ordre, la projection sur l'arête (1) de la torsion de la face opposée (23) est égale à la projection sur l'arête (3) de la torsion de la face opposée (12), et aussi à la projection sur l'arête (2) de la torsion de la face opposée (31). Cette projection est du reste indépendante des vecteurs rectangulaires choisis, autrement dit *la composante normale de la torsion d'un élément plan quelconque est, en chaque point, indépendante de cet élément plan.*

La réciproque est vraie, et se démontre facilement par le calcul.

125. *Interprétation géométrique du tenseur à trois composantes.* — Les composantes de ce tenseur sont les coefficients de la forme de Pfaff invariante

$$\frac{\partial \Omega^1}{\partial \omega^1} + \frac{\partial \Omega^2}{\partial \omega^2} + \frac{\partial \Omega^3}{\partial \omega^3}.$$

(1) C'est l'inverse d'une longueur.

Cette forme est indépendante du choix de l'unité de longueur. Sa valeur en un point \mathbf{m}' infiniment voisin de \mathbf{m} peut s'interpréter géométriquement en se plaçant dans le cas particulier $\omega^2 = \omega^3 = 0$; on obtient alors

$$(\Lambda_{21}^2 + \Lambda_{31}^3)\omega^1.$$

Considérons, avec un vecteur \mathbf{e}_1 passant par \mathbf{m}' , deux autres vecteurs rectangulaires \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 ; ces trois vecteurs déterminent trois faces planes rectangulaires. *La quantité à évaluer est alors égale à la projection sur l'axe (2) de la torsion de la face (21) augmentée de la projection sur l'axe (3) de la torsion de la face (31), le tout multiplié par la distance \mathbf{mm}' .*

Ce tenseur peut aussi être interprété comme un vecteur attaché à tout point de la variété ; mais, de ce point de vue, ce vecteur change avec le choix de l'unité de longueur. L'élément plan perpendiculaire à ce vecteur se caractérise facilement par ce qui vient d'être dit.

126. *Interprétation géométrique du tenseur scalaire de torsion.* — Ce tenseur, qu'on peut appeler la torsion scalaire, s'interprète de lui-même comme étant la somme des projections sur trois axes rectangulaires issus de \mathbf{m} des torsions des éléments plans orientés qui leur sont respectivement perpendiculaires. Cette torsion scalaire est le coefficient de la forme déjà rencontrée

$$[\omega^1 \Omega_1] + [\omega^2 \Omega_2] + [\omega^3 \Omega_3],$$

qui est attachée à un élément de volume de la variété ; cette forme n'est pas indépendante du choix de l'unité de longueur ; elle est de poids 2, tandis que la torsion scalaire est de poids -1 (inverse d'une longueur).

Ajoutons que, d'après ce qui a été vu au n° 66, *les variétés pour lesquelles les lignes droites réalisent une valeur stationnaire de la longueur sont celles pour lesquelles les deux tenseurs irréductibles non scalaires sont nuls.* Ces variétés ont en chaque point une torsion indépendante de l'élément de surface par rapport auquel on la détermine. On a

$$\Omega_1 = \alpha [\omega^2 \omega^3], \quad \Omega_2 = \alpha [\omega^3 \omega^1], \quad \Omega_3 = \alpha [\omega^1 \omega^2].$$

Le tenseur de courbure.

127. Le tenseur de courbure d'homothétie est irréductible.

Quant au tenseur de courbure de rotation, il se décompose en trois tenseurs irréductibles :

1° *Un tenseur à cinq composantes :*

$$A_{23}^{23} - A_{12}^{12}, \quad A_{31}^{31} - A_{12}^{12}, \quad A_{31,12} + A_{21,13}, \quad A_{12,23} + A_{32,21}, \quad A_{23,31} + A_{13,32};$$

2° *Un tenseur à trois composantes :*

$$A_{31,12} - A_{21,13}, \quad A_{12,23} - A_{32,21}, \quad A_{23,31} - A_{13,32};$$

3° *Un tenseur scalaire :*

$$A_{23}^{23} + A_{31}^{31} + A_{12}^{12}.$$

128. *Interprétation du tenseur à cinq composantes.* — Appelons *courbure* d'un élément plan passant par m le quotient (affecté d'un signe convenable) par l'aire de l'élément de l'angle dont α tourné la projection sur le plan de cet élément d'un vecteur situé initialement dans le plan de l'élément et transporté le long du contour de cet élément de manière à rester de proche en proche équipollent à lui-même.

Cela posé, on démontre facilement, comme dans le cas des variétés à deux dimensions, que la courbure de l'élément plan formé par les deux vecteurs rectangulaires e_i, e_j est A_{ij}^{ij} .

On voit d'après cela que *si pour une variété le tenseur de courbure à cinq composantes est nul, la courbure en un point est la même pour tous les éléments plans passant par m* ; elle est indépendante de la direction de plan choisie en m . On démontre facilement la réciproque.

129. *Interprétation du tenseur à trois composantes.* — Les composantes de ce tenseur sont les coefficients de la forme vectorielle

$$[\omega^i (de_i)'] = e_k [\omega^i \Omega_k^i],$$

qui a évidemment une signification intrinsèque, indépendante du choix de l'unité de longueur. C'est un vecteur attaché à un élément de

volume de la variété, et dont l'expression complète est

$$[(A_{312}^1 - A_{213}^1)\mathbf{e}_1 + (A_{123}^2 - A_{321}^2)\mathbf{e}_2 + (A_{231}^3 - A_{132}^3)][\omega^1\omega^2\omega^3].$$

Pour interpréter géométriquement cette expression, définissons d'abord ce qu'on appelle la *courbure d'un élément plan orienté par rapport à un autre élément plan orienté*. Si l'on définit un sens positif de rotation dans chaque élément plan et si l'on prend dans le premier un contour fermé infiniment petit supposé parcouru dans le sens direct, un vecteur, initialement dans le plan du second élément et transporté par équipollence le long de ce contour, prendra une position finale dont la projection, sur le plan du second élément, fera un certain angle ε avec le vecteur initial; c'est le quotient (algébrique) de cet angle ε par l'aire qui limite le contour décrit qui définit la courbure relative considérée. Si les deux éléments plans coïncident, on retrouve la courbure précédemment définie.

Cela posé, construisons en un point \mathbf{m} trois vecteurs rectangulaires, qui déterminent trois directions positives (1), (2), (3), et trois éléments plans orientés (23), (31), (12) que nous pourrons encore numéroter (1), (2), (3). La forme associée à un élément de volume est alors égale à un vecteur dont la projection sur la direction (i) est le produit du volume de l'élément par la différence entre la courbure de l'élément plan (j) par rapport à l'élément plan (k) et la courbure de l'élément plan (k) par rapport à l'élément plan (j), les trois indices i, j, k formant une permutation paire.

Le quotient de ce vecteur par l'élément de volume $d\tau$ est un vecteur définissant ce qu'on pourrait appeler la courbure *gauche* de la variété en \mathbf{m} , le mot gauche se rapportant à la non-réciprocité des courbures relatives de deux éléments plans.

Les variétés pour lesquelles le second tenseur irréductible de courbure est nul sont caractérisées par la propriété que la courbure relative de deux éléments plans est réciproque.

130. *Le tenseur scalaire de courbure*. — Il définit, changé de signe, ce qu'on appelle la courbure totale de la variété en \mathbf{m} ; elle est égale à la

somme des courbures de trois éléments plans rectangulaires quelconques passant par \mathbf{m} .

Les variétés à torsion nulle.

131. Dans le cas des variétés à torsion nulle, *le tenseur de courbure de rotation à trois composantes se confond*, comme nous l'avons vu plus haut, *avec le tenseur de courbure d'homothétie*. On a, d'une manière plus précise,

$$\begin{aligned} A_{213}^1 - A_{312}^1 &= A_{23}, \\ A_{321}^2 - A_{123}^2 &= A_{31}, \\ A_{132}^3 - A_{231}^3 &= A_{12}, \end{aligned}$$

formules qui seraient susceptibles d'une interprétation géométrique. *La non-réciprocité de la courbure relative de deux éléments plans tient, lorsqu'il n'y a pas de torsion, à la non-conservation de la longueur d'un vecteur quand on le transporte par équipollence le long d'un contour fermé.*

Si la courbure d'homothétie est nulle, c'est-à-dire si la variété est à connexion euclidienne (et à torsion nulle), autrement dit *si l'on a affaire à une variété de Riemann, il y a réciprocité pour la courbure relative de deux éléments plans.*

132. *Sur une variété remarquable à connexion métrique.* — Cherchons si une variété à connexion métrique (ou euclidienne) peut avoir le même degré d'homogénéité que l'espace euclidien. S'il en est ainsi, à chaque point de la variété ne peut être attachée *aucune direction privilégiée*, par suite la courbure d'homothétie est nulle et les tenseurs (de torsion et de courbure) à trois composantes sont également nuls. Il en est de même des tenseurs à cinq composantes, car, comme on le voit de suite, à chacun d'eux est associé un cône du second ordre capable d'un trièdre trirectangle et les axes de ce cône seraient des directions privilégiées. En définitive, il ne doit rester que la torsion scalaire et la courbure scalaire; et les formules de structure se

réduisent à

$$\begin{aligned} (\omega^1)' &= [\omega^2 \omega_2^1] + [\omega^3 \omega_3^1] + a[\omega^2 \omega^3], \\ (\omega^2)' &= [\omega^1 \omega_1^2] + [\omega^3 \omega_3^2] + a[\omega^3 \omega^1], \\ (\omega^3)' &= [\omega^1 \omega_1^3] + [\omega^2 \omega_2^3] + a[\omega^1 \omega^2]; \\ (\omega_{23})' &= [\omega_2^1 \omega_{13}] + b[\omega^2 \omega^3], \\ (\omega_{31})' &= [\omega_3^2 \omega_{21}] + b[\omega^3 \omega^1], \\ (\omega_{12})' &= [\omega_1^3 \omega_{32}] + b[\omega^1 \omega^2]. \end{aligned}$$

La dérivation extérieure conduit aux relations

$$\begin{aligned} [da \omega^2 \omega^3] &= [da \omega^3 \omega^1] = [da \omega^1 \omega^2] = 0, \\ [db \omega^2 \omega^3] &= [db \omega^3 \omega^1] = [db \omega^1 \omega^2] = 0; \end{aligned}$$

elles montrent que a et b sont des constantes. *La variété est donc à courbure et à torsion constantes* et de plus les droites sont les lignes les plus courtes.

Ces variétés admettent un groupe de transformations à 6 paramètres comme l'espace euclidien. *Elles s'obtiennent en partant d'un espace (E) euclidien, ou non euclidien à courbure constante, dans lequel on conviendrait de regarder comme équipollents deux vecteurs d'origines infiniment voisines \mathbf{m} et \mathbf{m}' si, au sens de la géométrie dans l'espace (E), on peut passer de l'un à l'autre par un déplacement hélicoïdal d'axe \mathbf{mm}' , de sens donné et de pas donné.*

Le cas où l'espace (E) est euclidien correspond à $b = \frac{1}{4} a^2$; la courbure de la variété est le carré de sa demi-torsion ⁽¹⁾.

Invariants intégraux.

133. *Les invariants intégraux scalaires d'une variété à connexion métrique.* — Revenons au cas général et cherchons si à un élément de la variété à 1, 2 ou 3 dimensions on peut associer une quantité scalaire qui soit un invariant absolu (indépendant de l'unité de longueur choisie) et telle de plus que ses coefficients dépendent linéairement des composantes des tenseurs de courbure et de torsion.

Remarquons d'abord que si l'on attribue aux longueurs le poids 1, les ω^i doivent être considérées de poids 1, les e_i de poids -1 , les Ω^i

⁽¹⁾ Voir, sur ces espaces, une Note sur les récentes généralisations de la notion d'espace (*Bull. des Sc. math.*, 2^e série, t. XLVIII, 1924, p. 294-320).

de poids 1, Ω et les Ω_{ij} de poids 0, par suite les $A_{i,jk}$ de poids -1 et les $A_{ij,kl}$ de poids -2 .

Cela posé, prenons d'abord un invariant portant sur un élément de volume; ses coefficients devant être de poids -3 , ce cas ne peut se présenter.

Un invariant portant sur un élément de surface doit avoir ses coefficients linéaires par rapport aux A_{jk} et $A_{ij,kl}$. Soit

$$B_{ij}[\omega^i \omega^j]$$

un tel invariant; les trois quantités

$$B_{23}, \quad B_{31}, \quad B_{12}$$

constituent alors un tenseur irréductible. Il résulte de là que l'invariant le plus général de la forme considérée est

$$\alpha \Omega + \beta (A_{213}^1 - A_{312}^1) [\omega^2 \omega^3] + (A_{321}^2 - A_{123}^2) [\omega^3 \omega^1] + (A_{132}^3 - A_{231}^3) [\omega^1 \omega^2],$$

avec deux constantes arbitraires α et β . Nous avons déjà rencontré, dans la théorie des variétés à connexion affine, la forme entre accolades qui peut s'écrire

$$\left[\omega^i \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial \omega^k} \right].$$

Les deux invariants trouvés se réduisent à un seul pour les variétés à torsion nulle.

Enfin un invariant scalaire absolu, qui serait une forme de Pfaff, conduirait également à un tenseur à trois composantes formé avec les composantes du tenseur de torsion; on retrouve donc nécessairement la forme

$$\frac{\partial \Omega^1}{\partial \omega^1} + \frac{\partial \Omega^2}{\partial \omega^2} + \frac{\partial \Omega^3}{\partial \omega^3}.$$

134. *Les invariants intégraux vectoriels d'une variété à connexion métrique.* — Il s'agit ici d'un vecteur de la forme

$$e_1 \Pi^1 + e_2 \Pi^2 + e_3 \Pi^3,$$

les coefficients des formes différentielles étant linéaires par rapport aux composantes des tenseurs de torsion et de courbure. Le poids de chaque forme Π^i doit être égal à 1; par suite, le poids de chaque

coefficient est

- 2 si les Π^i sont des formes du 3^e degré;
- 1 si les Π^i » du 2^e » ;

le cas des formes linéaires est donc exclu.

Si les Π^i sont des éléments d'intégrales triples, il correspond à la forme vectorielle un vecteur

$$\mathbf{e}_1 B^1 + \mathbf{e}_2 B^2 + \mathbf{e}_3 B^3;$$

les coefficients B^i forment donc un tenseur irréductible à trois composantes (un vecteur). On aura par suite la solution générale

$$\alpha(\mathbf{e}_1 A_{23} + \mathbf{e}_2 A_{31} + \mathbf{e}_3 A_{12})[\omega^1 \omega^2 \omega^3] + \beta \mathbf{e}_i [\omega^k \Omega_k^i].$$

La seconde forme a déjà été signalée; quant à la première, elle peut s'écrire sous la forme condensée $[dm \Omega]$.

Si les Π^i sont des éléments d'intégrales doubles, on aura un vecteur de la forme

$$\mathbf{e}_i B_{j^i} [\omega^j \omega^k];$$

par suite les coefficients $B_{j^i}^i$ se transformeront comme ceux du tenseur de torsion. *Il n'en résulte pas qu'ils leur soient proportionnels.* Tout ce qu'on peut dire c'est que chacun des tenseurs irréductibles dans lesquels on peut décomposer le tenseur $B_{j^i}^i$ aura ses composantes proportionnelles au tenseur irréductible correspondant provenant de $A_{j^i}^i$. Autrement dit, on aura

$$\begin{aligned} B_{1,23} - B_{3,12} &= \alpha(A_{1,23} - A_{3,12}), & B_{2,31} - B_{3,12} &= \alpha(A_{2,31} - A_{3,12}), \\ B_{12}^2 - B_{13}^3 &= \alpha(A_{12}^2 - A_{13}^3), \dots, \\ B_{12}^2 + B_{13}^3 &= \beta(A_{12}^2 + A_{13}^3), \dots, \\ B_{123} + B_{231} + B_{312} &= \gamma(A_{123} + A_{231} + A_{312}). \end{aligned}$$

Le problème est ainsi complètement résolu, et la solution dépend de trois constantes arbitraires. Elle résulte des trois solutions particulières

$$\mathbf{e}_i \Omega^i, \quad \mathbf{e}_i \left[\omega^i \frac{\partial \Omega^k}{\partial \omega^k} \right], \quad (A_{123} + A_{231} + A_{312}) \{ \mathbf{e}_1 [\omega_2 \omega_3] + \mathbf{e}_2 [\omega_3 \omega_1] + \mathbf{e}_3 [\omega_1 \omega_2] \}.$$

On pourrait enfin considérer un invariant de la forme

$$[\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] \Pi_1 + [\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1] \Pi_2 + [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2] \Pi_3,$$

qui est en somme un *couple* dont les composantes seraient des éléments d'intégrales simples ou multiples. Si un tel invariant ne dépend pas de l'unité de longueur choisie, les Π_i sont des éléments d'intégrales triples et les coefficients sont des combinaisons linéaires des A_{jk}^i formant un tenseur à trois composantes. On obtient donc la seule solution

$$\left[dm \, dm \, \frac{\partial \Omega^i}{\partial \omega^i} \right],$$

où le produit doit être regardé comme extérieur par rapport aux différentielles des variables, et extérieur par rapport aux e_i .

135. *Les invariants intégraux des variétés à connexion euclidienne.*

— Il y a lieu, pour ces variétés, d'ajouter aux invariants intégraux précédents ceux qui pourraient être de poids différent de zéro. On les obtient facilement en appliquant la méthode précédente. On trouve :

1° Un invariant scalaire linéaire de poids -1

$$(A_{2113} - A_{3112}) \omega^1 + (A_{3221} - A_{1223}) \omega^2 + (A_{1332} - A_{2331}) \omega^3;$$

2° Un invariant scalaire à deux dimensions de poids 1

$$(A_{12}^2 + A_{13}^3) [\omega_2 \omega_3] + (A_{23}^3 + A_{21}^1) [\omega_3 \omega_1] + (A_{31}^1 + A_{32}^2) [\omega_1 \omega_2];$$

3° Deux invariants scalaires à trois dimensions de poids respectifs 2 et 1

$$\begin{aligned} (A_{123} + A_{231} + A_{312}) [\omega^1 \omega^2 \omega^3] &= [\omega^1 \Omega_1] + [\omega^2 \Omega_2] + [\omega^3 \Omega_3]; \\ (A_{23}^{23} + A_{31}^{31} + A_{12}^{12}) [\omega^1 \omega^2 \omega^3] &= [\omega^1 \Omega^{23}] + [\omega^2 \Omega^{31}] + [\omega^3 \Omega^{12}]; \end{aligned}$$

4° Six invariants vectoriels linéaires, trois de poids -1 , trois de poids -2 ,

$$\begin{aligned} & \Sigma(\alpha\beta\gamma) e_i A_{\alpha\beta}^i \omega_\gamma; \\ & \Sigma(ijk) A_{i\alpha}^\alpha (e_j \omega_k - e_k \omega_j); \\ & (A_{123} + A_{231} + A_{312}) (e_1 \omega^1 + e_2 \omega^2 + e_3 \omega^3); \\ & \Sigma(ijk) (\alpha\beta\gamma) e_i A_{jk}^i \alpha\beta \omega_\gamma; \\ & (A_{2113} - A_{3112}) (e_2 \omega_3 - e_3 \omega_2) \\ & + (A_{3221} - A_{1223}) (e_3 \omega_1 - e_1 \omega_3) + (A_{1332} - A_{2331}) (e_1 \omega_2 - e_2 \omega_1); \\ & (A_{23}^{23} + A_{31}^{31} + A_{12}^{12}) (e_1 \omega^1 + e_2 \omega^2 + e_3 \omega^3); \end{aligned}$$

5° Trois invariants vectoriels à deux dimensions de poids -1

$$\begin{aligned} & \Sigma(ijk) e_i \Omega_{jk}; \\ & [(\Lambda_{2113} - \Lambda_{3112}) \omega^1 + (\Lambda_{3221} - \Lambda_{1223}) \omega^2 + (\Lambda_{1332} - \Lambda_{2331}) \omega^3] \\ & \times [e_1 \omega^1 + e_2 \omega^2 + e_3 \omega^3]; \\ & (\Lambda_{23}^{33} + \Lambda_{31}^{31} + \Lambda_{12}^{12})(e_1[\omega_2 \omega_3] + e_2[\omega_3 \omega_1] + e_3[\omega_1 \omega_2]); \end{aligned}$$

6° Un invariant vectoriel à trois dimensions de poids 1

$$e_i \Lambda_{ik}^k [\omega^1 \omega^2 \omega^3];$$

7° Enfin les invariants bivectoriels qui se déduisent des invariants vectoriels en changeant respectivement e_1, e_2, e_3 en $[e_2 e_3], [e_3 e_1], [e_1 e_2]$.

Remarquons que de tout invariant intégral linéaire on peut déduire un invariant intégral à deux dimensions en changeant respectivement $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ en $[\omega_2 \omega_3], [\omega_3 \omega_1], [\omega_1 \omega_2]$, et réciproquement. Remarquons aussi que certains des invariants intégraux trouvés n'ont en réalité une signification intrinsèque que si l'on a *orienté* la variété; ce sont ceux pour lesquels le signe de chaque coefficient dépend de la parité d'une certaine permutation des trois indices 1, 2, 3.

CHAPITRE X.

LES VARIÉTÉS A CONNEXION MÉTRIQUE A QUATRE DIMENSIONS.

136. La différence essentielle entre le cas $n = 4$ et le cas général tient à ce que le groupe des substitutions linéaires d'une forme quadratique à quatre variables est *semi-simple* au lieu d'être *simple* comme dans le cas général. Il est isomorphe au groupe à six paramètres

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad y' = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta}.$$

Cela du reste correspond à une propriété géométrique bien connue. Si l'on regarde les quatre variables x^i d'une forme quadratique quaternaire comme les coordonnées homogènes d'un point dans l'espace, les

substitutions linéaires qui conservent la forme correspondent aux homographies qui laissent invariante une quadrique (la quadrique *fondamentale*); or, chacune de ces homographies transforme entre elles les génératrices rectilignes du premier système (par une transformation homographique à une variable) et transforme entre elles les génératrices rectilignes du second système (par une autre transformation homographique à une variable).

137. Considérons deux vecteurs x^i et y^i et les six quantités

$$x^i y^j - x^j y^i = p^{ij}.$$

Si l'on regarde les x^i et les y^i comme les coordonnées homogènes de deux points dans l'espace à trois dimensions, les p^{ij} sont les coordonnées plückeriennes de la droite qui joint ces deux points. La droite (q) conjuguée de cette droite par rapport à la quadrique fondamentale est l'intersection des deux plans

$$x_i X^i = 0, \quad y_i X^i = 0;$$

par conséquent ses coordonnées plückeriennes sont données par les relations

$$\frac{q^{23}}{p_{14}} = \frac{q^{31}}{p_{24}} = \frac{q^{12}}{p_{34}} = \frac{q^{14}}{p_{23}} = \frac{q^{24}}{p_{31}} = \frac{q^{34}}{p_{12}}.$$

Cherchons en particulier dans quel cas cette droite conjuguée coïncide avec la droite primitive, c'est-à-dire dans quel cas cette droite est une génératrice de la quadrique. Il faudra pour cela qu'on ait

$$p_{ij} = \lambda (ijkl) p^{kl},$$

en désignant par $(ijkl)$ le nombre $+1$ ou -1 suivant que la permutation des quatre indices distincts i, j, k, l est paire ou impaire. On aura de même

$$p_{kl} = \lambda (ijkl) p^{ij},$$

d'où

$$p_{ij} p_{kl} = \lambda^2 p^{ij} p^{kl},$$

d'où enfin

$$\lambda^2 = g_{ii} g_{jj} g_{kk} g_{ll} = g.$$

Les génératrices du premier système seront par exemple celles

pour lesquelles on a

$$p_{ij} = \sqrt{g}(ijkl) p^{kl},$$

celles du second système satisferont au contraire aux relations

$$p_{ij} = -\sqrt{g}(ijkl) p^{kl}.$$

Étude du tenseur de torsion.

138. Dans le cas général nous avons défini un premier tenseur irréductible de torsion au moyen de la forme génératrice

$$a^i(a^j b^k - b^j a^k) \Lambda_{ijk},$$

où les paramètres a^i et b^i satisfont aux relations

$$a_i a^i = 0, \quad a_i b^i = 0, \quad b_i b^i = 0.$$

L'application de ce procédé donnerait ici un tenseur à 16 composantes. Mais ce tenseur n'est pas irréductible.

Pour obtenir un tenseur irréductible, il faut encore partir de la même forme génératrice, mais supposer que *les points* (a^i) *et* (b^i) *sont situés sur une même génératrice de l'un des deux systèmes*, du premier par exemple. Le tenseur à 16 composantes va ainsi se décomposer en deux tenseurs irréductibles conjugués à 8 composantes.

Pour déterminer le premier d'entre eux, cherchons par exemple les relations obtenues en annulant toutes ses composantes. Ces relations exprimeront que l'égalité

$$(1) \quad \Lambda_{ijk} a^i (a^j b^k - b^j a^k) = 0$$

a lieu toutes les fois que les deux points (a^i) et (b^i) sont sur une même génératrice du premier système. Transformons les coefficients des Λ_{ijk} pour lesquels les trois indices i, j, k sont distincts, en remplaçant $a^j b^k - b^j a^k$ par sa valeur égale $\frac{1}{\sqrt{g}}(jkil)(a_i b_l - b_i a_l)$, et réunissons les deux termes

$$\begin{aligned} & \Lambda_{iil} a^i (a^i b^l - b^i a^l) + \frac{1}{\sqrt{g}} \Lambda_{ijk} (jkil) a^i (a_i b_l - b_i a_l) \\ & = \left[\Lambda_{il}^i + (jkil) \frac{g_{ll}}{\sqrt{g}} \Lambda_{ijk} \right] a_i (a^i b^l - b^i a^l). \end{aligned}$$

L'égalité qui doit être vérifiée est alors

$$B_{ii} a_i (a^i b^i - b^i a^i) = 0,$$

en posant

$$B_{ii} = A_{ii}^i + (jki) \frac{g_{ij}}{\sqrt{g}} A_{ijk}.$$

Il existe un moyen de satisfaire à cette égalité, c'est de poser

$$B_{ii} = \lambda_i,$$

les λ_i désignant quatre quantités arbitraires. Cela fait 12 relations entre les A_{jk}^i et les λ_i , par suite 8 relations entre les A_{jk}^i , autrement dit le nombre exact de relations cherchées.

Par suite *les deux premiers tenseurs irréductibles conjugués de torsion ont pour composantes les huit quantités*

$$A_{ii}^i - A_{kk}^k + (ijk) \frac{g_{ij}}{\varepsilon \sqrt{g}} (A_{ijk} - A_{kij}), \quad A_{jl}^j - A_{kl}^k + (jkl) \frac{g_{ij}}{\varepsilon \sqrt{g}} (A_{jki} - A_{kij})$$

($l = 1, 2, 3, 4$).

On retrouve les composantes du tenseur formé de ces deux tenseurs conjugués : ce sont les quantités

$$A_{ii}^i - A_{kk}^k, \quad A_{ijk} - A_{jki}.$$

139. *Interprétation des premiers tenseurs irréductibles de torsion.* — D'après la manière même dont ce tenseur a été calculé, on voit que les variétés pour lesquelles le premier tenseur conjugué est nul sont caractérisées par la propriété suivante, qui traduit géométriquement l'équation (1).

Considérons en un point \mathbf{m} de la variété un élément plan isotrope du premier système, c'est-à-dire dont toutes les directions aient un ds^2 nul ; *la translation associée au contour fermé de cet élément plan se fait suivant une direction de cet élément plan lui-même.*

Les variétés pour lesquelles les deux tenseurs s'annulent sont caractérisées, comme dans le cas $n = 3$, par la propriété qu'étant données trois directions rectangulaires quelconques (1), (2), (3) issues d'un point \mathbf{m} , *la projection sur la direction (1) de la torsion de*

l'élément plan (23) est égale à la projection sur la direction (2) de la torsion de l'élément plan (31).

140. *Les deux derniers tenseurs irréductibles de torsion.* — Ce sont les mêmes que dans le cas général. L'un, à quatre composantes

$$\Lambda_{i1}^i, \quad \Lambda_{i2}^i, \quad \Lambda_{i3}^i, \quad \Lambda_{i4}^i,$$

est associé à la forme de Pfaff invariante

$$(2) \quad \frac{\partial \Omega^1}{\partial \omega^1} + \frac{\partial \Omega^2}{\partial \omega^2} + \frac{\partial \Omega^3}{\partial \omega^3} + \frac{\partial \Omega^4}{\partial \omega^4};$$

il se comporte comme un vecteur.

L'autre, également à quatre composantes

$$B_{ijk} = A_{ijk} + A_{jki} + A_{kij} \quad (i \neq j \neq k = 1, 2, 3, 4),$$

est associé à la forme

$$[\omega^1 \Omega_1] + [\omega^2 \Omega_2] + [\omega^3 \Omega_3] + [\omega^4 \Omega_4],$$

ou encore à la forme de Pfaff

$$(3) \quad B_{234} \omega_1 - B_{134} \omega_2 + B_{124} \omega_3 - B_{123} \omega_4;$$

cette dernière est indépendante du choix de l'unité de longueur.

L'interprétation géométrique de la forme (2) est la suivante. Soit un point \mathbf{m}' infiniment voisin de \mathbf{m} , et qu'on peut toujours supposer sur le vecteur \mathbf{e}_1 . Menons en \mathbf{m} trois autres vecteurs rectangulaires $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$. *La valeur de la forme au point \mathbf{m}' est égale au produit de la distance \mathbf{mm}' par la somme des projections respectives sur les arêtes (2), (3), (4) des torsions des éléments plans (21), (31), (41).*

L'interprétation géométrique de la forme (3) se fait d'une manière analogue. *On n'a qu'à multiplier par la distance \mathbf{mm}' la somme des projections respectives sur les arêtes (2), (3), (4) des torsions des éléments plans (34), (42), (23).*

Les deux formes de Pfaff obtenues donnent naissance à deux invariants intégraux linéaires attachés à la variété

$$\int \frac{\partial \Omega^i}{\partial \omega^i} \quad \text{et} \quad \int B_{234} \omega_1 - B_{134} \omega_2 + B_{124} \omega_3 - B_{123} \omega_4.$$

Le tenseur de courbure d'homothétie:

141. Les composantes A_{ij} de la forme Ω se transforment comme les quantités

$$x_i y_j - x_j y_i;$$

elles forment donc deux tenseurs irréductibles conjugués

$$\begin{aligned} A_{23} + \sqrt{g} A^{14}, & \quad A_{31} + \sqrt{g} A^{24}, & \quad A_{12} + \sqrt{g} A^{34}; \\ A_{23} - \sqrt{g} A^{14}, & \quad A_{31} - \sqrt{g} A^{24}, & \quad A_{12} - \sqrt{g} A^{34}. \end{aligned}$$

Les composantes du premier tenseur sont les coefficients de la forme

$$\begin{aligned} (A_{23} + \sqrt{g} A^{14}) \left([\omega^2 \omega^3] + \frac{1}{\sqrt{g}} [\omega_1 \omega_4] \right) &+ (A_{31} + \sqrt{g} A^{24}) \left([\omega^3 \omega^1] + \frac{1}{\sqrt{g}} [\omega_2 \omega_4] \right) \\ &+ (A_{12} + \sqrt{g} A^{34}) \left([\omega^1 \omega^2] + \frac{1}{\sqrt{g}} [\omega_3 \omega_4] \right), \end{aligned}$$

qui peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} A_{23} [\omega^2 \omega^3] + A_{31} [\omega^3 \omega^1] + A_{12} [\omega^1 \omega^2] + A_{14} [\omega^1 \omega^4] + A_{24} [\omega^2 \omega^4] + A_{34} [\omega^3 \omega^4] \\ + \sqrt{g} \{ A^{23} [\omega^1 \omega^4] + A^{31} [\omega^2 \omega^4] + A^{12} [\omega^3 \omega^4] + A^{14} [\omega^2 \omega^3] \\ + A^{24} [\omega^3 \omega^1] + A^{34} [\omega^1 \omega^2] \}. \end{aligned}$$

Le second tenseur est associé à la forme conjuguée.

On voit ainsi qu'en dehors de la forme Ω elle-même qui est invariante absolue il existe une seconde forme invariante absolue

$$\Sigma (ijkl) A^{ij} [\omega^k \omega^l].$$

Dans la théorie de H. Weyl, la première forme représente le champ électromagnétique; quand à la seconde, sa dérivée extérieure définit l'*hypercourant* élémentaire.

Le tenseur de courbure de rotation.

142. Les composantes A_{ijkl} de ce tenseur se transforment entre elles comme les quantités

$$(x_i y_j - x_j y_i) (z_k t_l - z_l t_k) = p_{ij} q_{kl}.$$

Nous allons poser

$$\begin{aligned} p_{23} + \sqrt{g} p^{14} &= 2 \xi^1, & p_{31} + \sqrt{g} p^{24} &= 2 \xi^2, & p_{12} + \sqrt{g} p^{34} &= 2 \xi^3, \\ p_{23} - \sqrt{g} p^{14} &= 2 \bar{\xi}^1, & p_{31} - \sqrt{g} p^{24} &= 2 \bar{\xi}^2, & p_{12} - \sqrt{g} p^{34} &= 2 \bar{\xi}^3. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} p_{23} &= \xi^1 + \bar{\xi}^1, & p_{31} &= \xi^2 + \bar{\xi}^2, & p_{12} &= \xi^3 + \bar{\xi}^3, \\ p^{14} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\xi^1 - \bar{\xi}^1), & p^{24} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\xi^2 - \bar{\xi}^2), & p^{34} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\xi^3 - \bar{\xi}^3). \end{aligned}$$

Pour savoir comment se transforment les quantités ξ^i et $\bar{\xi}^i$, remarquons que chacune des relations

$$\begin{aligned} p_{23} p^{23} + p_{31} p^{31} + p_{12} p^{12} + p_{14} p^{14} + p_{24} p^{24} + p_{34} p^{34} &= 0, \\ p_{23} p_{14} + p_{31} p_{24} + p_{12} p_{34} &= 0 \end{aligned}$$

est invariante. Et elles s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} g_{11} g_{44} (\xi^1)^2 + g_{22} g_{44} (\xi^2)^2 + g_{33} g_{44} (\xi^3)^2 \\ + g_{11} g_{44} (\bar{\xi}^1)^2 + g_{22} g_{44} (\bar{\xi}^2)^2 + g_{33} g_{44} (\bar{\xi}^3)^2 &= 0, \\ g_{11} g_{44} (\xi^1)^2 + g_{22} g_{44} (\xi^2)^2 + g_{33} g_{44} (\xi^3)^2 \\ - g_{11} g_{44} (\bar{\xi}^1)^2 - g_{22} g_{44} (\bar{\xi}^2)^2 - g_{33} g_{44} (\bar{\xi}^3)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Par suite ξ^1, ξ^2, ξ^3 se transforment par une substitution linéaire laissant invariante l'équation

$$\Sigma g_{ii} g_{44} (\xi^i)^2 = 0.$$

Les $\bar{\xi}^i$ se transforment par une autre substitution analogue, mais *indépendante*.

Nous poserons

$$\xi_i = g_{ii} g_{44} \xi^i,$$

de sorte que nous aurons

$$\begin{aligned} p^{23} &= \frac{1}{g} (\xi_1 + \bar{\xi}_1), & p^{31} &= \frac{1}{g} (\xi_2 + \bar{\xi}_2), & p^{12} &= \frac{1}{g} (\xi_3 + \bar{\xi}_3), \\ p_{14} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\xi_1 - \bar{\xi}_1), & p_{24} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\xi_2 - \bar{\xi}_2), & p_{34} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (\xi_3 - \bar{\xi}_3). \end{aligned}$$

Cela posé, appelons η^i et $\bar{\eta}^i$ les quantités qui jouent pour les g_{kl} le

même rôle que les ξ^i et $\bar{\xi}^i$ pour les p_M . Nous aurons donc une correspondance entre les A_{ijM} et certaines formes linéaires en $\xi^i, \bar{\xi}^i$ d'une part, $\eta^i, \bar{\eta}^i$ d'autre part. Nous désignerons par i, j, k les trois indices 1, 2, 3 rangés de manière à former une permutation paire et nous poserons

$$\begin{aligned} A_{ij, v j'} &= a_{kk'}, & A_{ij, k' A} &= b_{kk'}, \\ A_{ki, v j'} &= c_{kk'}, & A_{ki, k' A} &= d_{kk'}. \end{aligned}$$

Nous aurons alors les formules de correspondance suivantes :

$$\begin{aligned} \xi^i \eta^i &= a_{iv} + g d^{iv} + \sqrt{g} (c^i_v + b_i^v) = \alpha^{iv}, \\ \bar{\xi}^i \bar{\eta}^i &= a_{iv} + g d^{iv} - \sqrt{g} (c^i_v + b_i^v) = \beta^{iv}, \\ \xi^i \bar{\eta}^i &= a_{iv} - g d^{iv} + \sqrt{g} (c^i_v - b_i^v) = \gamma^{iv}, \\ \bar{\xi}^i \eta^i &= a_{iv} - g d^{iv} - \sqrt{g} (c^i_v - b_i^v) = \delta^{iv}. \end{aligned}$$

Nous avons donc déjà décomposé le tenseur général de courbure en quatre autres tenseurs, dont chacun à 9 composantes. Les deux derniers sont manifestement irréductibles. Étudions le premier. Cette étude est identique à celle qui a été faite pour $n = 3$. Le tenseur $\xi^i \eta^i$ se décompose :

1° En un tenseur irréductible à 5 composantes

$$\xi_1 \eta^1 - \xi_3 \eta^3, \quad \xi_2 \eta^2 - \xi_3 \eta^3, \quad \xi^2 \eta^3 + \xi^3 \eta^2, \quad \xi^3 \eta^1 + \xi^1 \eta^3, \quad \xi^1 \eta^2 + \xi^2 \eta^1;$$

2° Un tenseur irréductible à 3 composantes

$$\xi^2 \eta^3 - \xi^3 \eta^2, \quad \xi^3 \eta^1 - \xi^1 \eta^3, \quad \xi^1 \eta^2 - \xi^2 \eta^1;$$

3° Un tenseur scalaire

$$\xi_1 \eta^1 + \xi_2 \eta^2 + \xi_3 \eta^3.$$

Par suite le tenseur de courbure se décompose en 8 tenseurs irréductibles :

1° Deux tenseurs à 5 composantes

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_3^3, \quad \alpha_2 - \alpha_3^3, \quad \alpha^{23} + \alpha^{32}, \quad \alpha^{31} + \alpha^{13}, \quad \alpha^{12} + \alpha^{21}; \\ \beta_1 - \beta_3^3, \quad \beta_2 - \beta_3^3, \quad \beta^{23} + \beta^{32}, \quad \beta^{31} + \beta^{13}, \quad \beta^{12} + \beta^{21}; \end{aligned}$$

2° Deux tenseurs isomorphes à 9 composantes

$$\begin{aligned}\gamma^{i' i} & \quad (i, i' = 1, 2, 3); \\ \delta^{i' i} & \quad (i, i' = 1, 2, 3); \end{aligned}$$

3° Deux tenseurs à 3 composantes

$$\begin{aligned}\alpha^{23} - \alpha^{32}, \quad \alpha^{31} - \alpha^{13}, \quad \alpha^{12} - \alpha^{21}; \\ \beta^{23} - \beta^{32}, \quad \beta^{31} - \beta^{13}, \quad \beta^{12} - \beta^{21}; \end{aligned}$$

4° Deux tenseurs scalaires

$$\begin{aligned}\alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \alpha_3^3; \\ \beta_1^1 + \beta_2^2 + \beta_3^3.\end{aligned}$$

Les deux tenseurs à 9 composantes sont isomorphes en ce sens que les $\delta^{i' i}$ se transforment de la même manière que les $\gamma^{i' i}$. On peut donc leur substituer les deux tenseurs, également irréductibles, dont les composantes sont respectivement

$$\begin{aligned}\gamma^{i' i} + \delta^{i' i}; \\ \gamma^{i' i} - \delta^{i' i}.\end{aligned}$$

On peut de même substituer aux deux tenseurs scalaires leur somme et leur différence. En effectuant complètement le calcul, on trouve pour les composantes des 8 tenseurs irréductibles :

 1° et 2° Deux tenseurs à 5 composantes ($\varepsilon = \pm 1$)

$$\begin{aligned}\Lambda_{23}^{23} + \Lambda_{14}^{14} - \Lambda_{12}^{12} - \Lambda_{34}^{34} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}} (\Lambda_{23,14} + \Lambda_{14,23} - \Lambda_{12,34} - \Lambda_{34,12}), \\ \Lambda_{31}^{31} + \Lambda_{24}^{24} - \Lambda_{12}^{12} - \Lambda_{34}^{34} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}} (\Lambda_{31,24} + \Lambda_{24,31} - \Lambda_{12,34} - \Lambda_{34,12}), \\ g_{ii} g_{jj} (\Lambda_{ij}^k{}_{kj} + \Lambda_{jk}^k{}_{ki} - \Lambda_{il}^l{}_{ij} - \Lambda_{jl}^l{}_{ji}) + \varepsilon \sqrt{g} (\Lambda_{k^i}{}^i{}_{ul} + \Lambda_{l^i}{}^i{}_{ik} - \Lambda_{k^j}{}^j{}_{il} - \Lambda_{l^j}{}^j{}_{jk}) \\ (ijkl) = 1;\end{aligned}$$

3° Un premier tenseur à 9 composantes

$$\begin{aligned}\Lambda_{23}^{23} - \Lambda_{14}^{14}, \quad \Lambda_{31}^{31} - \Lambda_{24}^{24}, \quad \Lambda_{12}^{12} - \Lambda_{34}^{34}, \\ \Lambda_{i^k}{}^k{}_{kj} + \Lambda_{j^k}{}^k{}_{ki} + \Lambda_{i^l}{}^l{}_{ij} + \Lambda_{j^l}{}^l{}_{ji} \quad (i \neq j \neq k \neq l = 1, 2, 3, 4); \end{aligned}$$

4° *Un deuxième tenseur à 9 composantes*

$$\begin{aligned} & A_{23,14} - A_{14,23}, \quad A_{31,24} - A_{24,31}, \quad A_{12,34} - A_{34,12}, \\ & A_i^k{}_{kj} - A_j^k{}_{ki} - A_i^l{}_{lj} + A_j^l{}_{li} \quad (i \neq j \neq k \neq l = 1, 2, 3, 4); \end{aligned}$$

5° et 6° *Deux tenseurs à 3 composantes* ($\varepsilon = \pm 1$)

$$g_{kk}g_{ll}(A_i^k{}_{kj} + A_i^l{}_{lj} - A_j^k{}_{ki} - A_j^l{}_{li}) + \varepsilon\sqrt{g}(A_k^i{}_{il} + A_k^j{}_{jl} - A_l^i{}_{ik} - A_l^j{}_{jk}) \\ (ijkl) = 1;$$

7° *Un premier tenseur scalaire*

$$A_{23}^{23} + A_{31}^{31} + A_{12}^{12} + A_{14}^{14} + A_{24}^{24} + A_{34}^{34};$$

8° *Un deuxième tenseur scalaire*

$$A_{23,14} + A_{31,24} + A_{12,34} + A_{14,23} + A_{24,31} + A_{34,12}.$$

143. *Les deux tenseurs à 5 composantes.* — On démontre sans difficulté que les variétés, pour lesquelles les deux tenseurs à 5 composantes sont nuls, sont caractérisées par la propriété suivante. Considérons en un point \mathbf{m} quatre directions rectangulaires 1, 2, 3 et 4; les six éléments plans formés par ces directions prises deux à deux forment trois couples d'éléments opposés; *la somme des courbures de deux éléments plans opposés est la même pour chacun de ces trois couples.*

144. *Le premier tenseur à 9 composantes.* — On a vu, dans l'étude du tenseur de courbure d'une variété à connexion affine, l'existence d'une forme différentielle quadratique invariante

$$A_{i,k}^k \omega^i \omega^j;$$

on constate facilement que les composantes du tenseur à étudier sont les coefficients de la forme quadratique

$$A_{i,jk}^k \omega^i \omega^j - \frac{1}{2}(A_{23}^{23} + A_{31}^{31} + A_{12}^{12} + A_{14}^{14} + A_{24}^{24} + A_{34}^{34}) \omega_i \omega^i.$$

Cette forme quadratique est de poids zéro : elle est indépendante de l'unité de longueur choisie.

On peut interpréter géométriquement cette forme ; prenons pour

cela le terme en ω, ω' ; il est égal à

$$\frac{1}{2} (A_{12}^{12} + A_{13}^{13} + A_{14}^{14} - A_{23}^{23} - A_{24}^{24} - A_{34}^{34}).$$

Étant donné un point \mathbf{m}' infiniment voisin de \mathbf{m} ($\mathbf{m}' = \mathbf{m} + d\mathbf{m}$), considérons quatre axes rectangulaires issus de \mathbf{m} , le premier étant dirigé dans le sens qui va de \mathbf{m} vers \mathbf{m}' . On forme avec ces quatre axes six éléments plans rectangulaires deux à deux. *La valeur numérique de la forme quadratique pour le point \mathbf{m}' est égale au carré de la distance $\mathbf{m}\mathbf{m}'$, multiplié par la différence entre la demi-somme des courbures des trois éléments plans perpendiculaires au premier axe et la demi-somme des courbures des trois éléments plans qui contiennent cet axe.* Cette valeur est indépendante de l'unité de longueur choisie.

Les variétés pour lesquelles le premier tenseur à 9 composantes est nul sont caractérisées par la propriété que *deux éléments plans rectangulaires* ⁽¹⁾ *ont même courbure.*

145. *Le second tenseur à 9 composantes.* — On démontre de même que les composantes de ce tenseur sont les coefficients d'une forme quadratique différentielle invariante absolue, à savoir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_i (A_{ijkl} + A_{iklj} + A_{iljk} - A_{klij} - A_{ljk i} - A_{jkl i}) \omega_i \omega^i \\ & + \sum (ijkl) (A_{kjl}^i + A_{ilk}^i - A_{kil}^i - A_{ljk}^i) \omega_i \omega_j. \end{aligned}$$

L'interprétation de cette forme s'obtient facilement en considérant le terme en ω, ω' . Étant donné un point \mathbf{m}' infiniment voisin de \mathbf{m} , on mène par \mathbf{m} quatre axes rectangulaires, le premier passant par \mathbf{m}' ; *la valeur de la forme pour \mathbf{m}' est égale au carré de la distance $\mathbf{m}\mathbf{m}'$, multiplié par la demi-différence des courbures des éléments plans perpendiculaires au premier axe par rapport aux éléments plans opposés et des courbures des éléments plans contenant le premier axe par rapport aux éléments opposés.*

On déduit de là facilement la propriété caractéristique des variétés pour lesquelles le second tenseur à 9 composantes est nul : *étant*

(1) Cela veut dire que toute droite de l'un est perpendiculaire à toute droite de l'autre.

donnés deux éléments plans rectangulaires, la courbure du premier par rapport au second est égale à la courbure du second par rapport au premier.

146. *Les tenseurs à 3 composantes.* — Ils sont isomorphes aux deux tenseurs de courbure d'homothétie; par suite chacun d'eux est associé à une forme quadratique extérieure; ces deux formes sont

$$A_{ij\alpha}^{\alpha}[\omega^i\omega^j] + \frac{\varepsilon}{\sqrt{g}} \{ \Sigma(ijkl) A_{ij\alpha}^{\alpha}[\omega_k\omega_l] \}.$$

Le premier terme de chacune de ces formes a déjà été rencontré dans la théorie des variétés à connexion affine. Le second est nouveau.

147. *Le premier tenseur scalaire.* — Il représente, changée de signe, la première courbure totale de la variété, égale à la somme des courbures des six éléments plans formés par quatre directions rectangulaires deux à deux. C'est le coefficient de $[\omega^1\omega^2\omega^3\omega^4]$ dans la forme

$$\Sigma(ijkl)[\omega_i\omega_j\omega_k\omega_l].$$

148. *Le deuxième tenseur scalaire.* — Il représente la seconde courbure totale. Étant données quatre directions rectangulaires deux à deux, c'est la somme des courbures relatives de chacun des six éléments plans qu'elles déterminent par rapport à l'élément opposé (ces éléments ayant été orientés convenablement). C'est aussi le coefficient de $[\omega^1\omega^2\omega^3\omega^4]$ dans la forme

$$[\omega^i\omega^j\Omega_{ij}].$$

Invariants intégraux scalaires et vectoriels.

149. On pourrait, en appliquant la même méthode que dans le cas $n=3$, déterminer tous les invariants intégraux scalaires et vectoriels dans lesquels les composantes des tenseurs de torsion et de courbure entrent linéairement. Nous nous contenterons, pour les variétés à connexion euclidienne, d'indiquer les invariants vectoriels et bivectoriels à trois dimensions : ce sont les seuls qui puissent jouer un rôle dans les applications à la relativité.

Les coefficients d'un invariant intégral *vectoriel*

$$e_i \bar{A}_{jkl}^i [\omega^j \omega^k \omega^l]$$

se transforment entre eux comme les quantités

$$x^i |y_j z_k l_l|,$$

ou encore comme les quantités

$$(i' j' k' l) x^i y^{i'}.$$

Or le tenseur $x^i y^{i'}$ se décompose en quatre tenseurs irréductibles : le premier à neuf composantes

$$x_i y^i - x_4 y^4, \quad x^i y^j + x^j y^i;$$

le second et le troisième à trois composantes

$$\begin{aligned} x_2 y_3 - x_3 y_2 + \varepsilon \sqrt{g} (x^1 y^4 - y^4 x^1), \quad x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ + \varepsilon \sqrt{g} (x^2 y^4 - y^2 x^4), \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 + \varepsilon \sqrt{g} (x^3 y^4 - y^3 x^4); \end{aligned}$$

le quatrième scalaire

$$x_i y^i.$$

Or nous avons vu l'existence de deux tenseurs de courbure irréductible à neuf composantes, de deux tenseurs conjugués à trois composantes et de deux tenseurs scalaires. Il en résulte que la solution générale du problème dépend de six constantes arbitraires. Le calcul donne :

1° Les deux invariants intégraux déjà signalés (Chap. III)

$$\begin{aligned} \Sigma (i j k l) e_i [\omega_j \Omega_{kl}], \\ e_i [\omega^k \Omega_k^i]; \end{aligned}$$

2° Les deux invariants intégraux

$$\begin{aligned} \left[dm \omega^i \frac{\partial \Omega_i^k}{\partial \omega^k} \right] = e_i A_j^{\alpha k \alpha} [\omega^i \omega^j \omega^k], \\ e_\alpha \Sigma (i j k l) A_i^{\beta j \beta} [\omega^\alpha \omega_k \omega_l]; \end{aligned}$$

3° Les deux invariants intégraux suivants, dans lesquels inter-

viennent seulement les courbures scalaires

$$\begin{aligned} & A_{ij}^{\alpha} \Sigma(\alpha\beta\gamma\delta) e_{\alpha}[\omega_{\beta}\omega_{\gamma}\omega_{\delta}], \\ & \Sigma(ijkl) A_{ijkl} \Sigma(\alpha\beta\gamma\delta) e_{\alpha}[\omega_{\beta}\omega_{\gamma}\omega_{\delta}]. \end{aligned}$$

150. Les coefficients d'un tenseur bivectoriel

$$[e_i e_j] \bar{A}_{klm}^{ij}[\omega^k \omega^l \omega^m]$$

se transforment entre eux comme les quantités

$$(x^i y^j - x^j y^i) |z_k t_l u_m| \quad \text{ou} \quad (x^i y^j - x^j y^i) z^i,$$

c'est-à-dire au fond comme les coefficients du tenseur général de torsion. Ils forment donc quatre tenseurs irréductibles, deux conjugués à huit composantes, deux conjugués à quatre composantes. Il y aura donc six invariants intégraux bivectoriels linéairement indépendants. Le calcul donne

$$\begin{aligned} & [e_i e_j][\omega^i \Omega^j - \omega^j \Omega^i], \\ & \Sigma(ijkl)[e_i e_j][\omega_k \Omega_l - \omega_l \Omega_k], \\ & [e_i e_j] \left[\omega^i \omega^j \frac{\partial \Omega^{\alpha}}{\partial \omega^{\alpha}} \right] = [e_i e_j] A_{\alpha k}^{\alpha}[\omega^i \omega^j \omega^k], \\ & [e_i e_j][\omega^i \omega^j \Sigma(\alpha\beta\gamma\delta) B_{\alpha\beta\gamma} \omega^{\delta}] = \Sigma(ijkl) [e_i e_j] B_{ijk}[\omega^i \omega^j \omega_l], \\ & \Sigma(ijkl) A_{\alpha i}^{\alpha} [e_i e_j][\omega^i \omega_k \omega_l], \\ & \Sigma(ijkl) B_{jkl} [e_i e_j][\omega_i \omega_k \omega_l]. \end{aligned}$$

On a posé, comme auparavant,

$$B_{ijk} = A_{i,jk} + A_{j,ki} + A_{k,ij}.$$

Plaçons-nous en particulier dans le cas examiné au Chapitre V, où tous les tenseurs de torsion sont nuls, sauf le dernier (celui de composantes B_{ijk}). Les six invariants intégraux bivectoriels se ramènent alors aux deux premiers.

Les variétés de H. Weyl.

151. Ce sont les variétés à *connexion métrique* de torsion nulle. Pour ces variétés :

1° Le deuxième tenseur de courbure à neuf composantes s'annule identiquement;

2° Les deux tenseurs conjugués de courbure de rotation à trois composantes sont identiques aux deux tenseurs conjugués de courbure d'homothétie;

3° Le deuxième tenseur scalaire de courbure (seconde courbure totale) est nul.

Il reste donc 26 composantes pour le tenseur général de courbure.

On peut déterminer, en appliquant la méthode employée pour $n = 3$, les invariants intégraux des variétés de H. Weyl pour lesquels les coefficients dépendent linéairement des composantes des tenseurs de courbure. On trouve :

1° Deux invariants intégraux scalaires à deux dimensions,

$$\begin{aligned}\Omega &= A_{ij}[\omega^i \omega^j], \\ \Sigma(ijkl) A_{ij}[\omega_k \omega_l];\end{aligned}$$

2° Quatre invariants intégraux vectoriels à trois dimensions,

$$\begin{aligned}\Sigma(ijkl) \mathbf{e}_i[\omega_j \Omega_{kl}], \\ [d\mathbf{m}\Omega] &= A_{jk} \mathbf{e}_i[\omega^i \omega^j \omega^k], \\ \Sigma(ijkl) \mathbf{e}_\alpha A_{ij}[\omega^\alpha \omega_k \omega_l], \\ A^{ij} \Sigma(\alpha\beta\gamma\delta) \mathbf{e}_\alpha[\omega_\beta \omega_\gamma \omega_\delta];\end{aligned}$$

3° Deux invariants intégraux bivectoriels à quatre dimensions,

$$\begin{aligned}[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j][\omega^i \omega^j \Omega] &= \Sigma(ijkl)[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j] A_{kl}[\omega^1 \omega^2 \omega^3 \omega^4], \\ \Sigma(ijkl)[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j][\omega_k \omega_l \Omega] &= [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j] A^{ij}[\omega^1 \omega^2 \omega^3 \omega^4].\end{aligned}$$

Les formes Ω , $\mathbf{e}_i[\omega^i \Omega]$, $\Sigma(ijkl) \mathbf{e}_i[\omega_j \Omega_{kl}]$ ont leurs dérivées extérieures nulles.

152. *L'action élémentaire dans la théorie de H. Weyl.* — Nous avons vu que dans la théorie de H. Weyl l'action élémentaire était nécessairement un invariant intégral à quatre dimensions avec des coefficients du second degré par rapport aux composantes des tenseurs de courbure.

Si nous supposons que ces composantes entrent sous forme entière,

nous sommes ramenés à former, au moyen des produits mutuels des A_{ij} et des A_{ijkl} , tous les tenseurs scalaires.

Désignons comme plus haut par

$$\xi^1, \xi^2, \xi^3$$

trois quantités se transformant entre elles par une substitution laissant invariante la forme quadratique ternaire

$$\xi_1 \xi^1 + \xi_2 \xi^2 + \xi_3 \xi^3 \quad (\xi_i = g_{ij} g_{jj} \xi^j);$$

par

$$\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2, \bar{\xi}^3$$

trois quantités se transformant d'une manière analogue, mais les substitutions qui les transforment entre elles étant *indépendantes* de celles qui transforment les ξ^i .

Les six tenseurs irréductibles de courbure se comportent :

1° Le premier des deux tenseurs conjugués de courbure d'homothétie

$$A_{23} + \sqrt{g} A^{14}, \quad A_{31} + \sqrt{g} A^{24}, \quad A_{12} + \sqrt{g} A^{34},$$

comme

$$\xi^1, \xi^2, \xi^3;$$

2° Le tenseur conjugué

$$A_{23} - \sqrt{g} A^{14}, \quad A_{31} - \sqrt{g} A^{24}, \quad A_{12} - \sqrt{g} A^{34}$$

comme

$$\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2, \bar{\xi}^3;$$

3° Le premier tenseur irréductible à cinq composantes comme

$$\xi_1 \xi^1 - \xi_3 \xi^3, \quad \xi_2 \xi^2 - \xi_3 \xi^3, \quad \xi^2 \xi^3, \quad \xi^3 \xi^1, \quad \xi^1 \xi^2;$$

4° Le tenseur conjugué comme

$$\bar{\xi}_1 \bar{\xi}^1 - \bar{\xi}_3 \bar{\xi}^3, \quad \bar{\xi}_2 \bar{\xi}^2 - \bar{\xi}_3 \bar{\xi}^3, \quad \bar{\xi}^2 \bar{\xi}^3, \quad \bar{\xi}^3 \bar{\xi}^1, \quad \bar{\xi}^1 \bar{\xi}^2;$$

5° Le tenseur irréductible à neuf composantes comme

$$\xi^i \xi^j \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

6° Le tenseur scalaire comme une constante.

153. Remarquons maintenant que le tenseur formé de l'ensemble

des polynomes entiers, homogènes du second degré par rapport aux composantes du tenseur général de courbure se décomposera en un certain nombre de tenseurs dont chacun sera obtenu, soit en effectuant les produits mutuels des composantes d'un tenseur irréductible donné, soit en effectuant de toutes les manières possibles le produit d'une composante d'un des tenseurs irréductibles par une composante d'un autre tenseur irréductible.

Or les six tenseurs irréductibles linéaires énumérés plus haut se partagent (en dehors du tenseur scalaire) en trois catégories :

1° Ceux dont les composantes se transforment entre elles par un groupe isomorphe à celui des ξ^i ;

2° Ceux dont les composantes se transforment entre elles par un groupe isomorphe à celui des $\bar{\xi}^i$;

3° Le tenseur à neuf composantes qui fait intervenir à la fois les deux groupes.

Il est évident que les tenseurs du second degré obtenus en multipliant un tenseur linéaire irréductible de la première catégorie par un tenseur irréductible de la seconde catégorie sera *irréductible* et appartiendra à la troisième catégorie. Quant au produit de deux tenseurs irréductibles de la première catégorie, il sera de la première catégorie, mais non nécessairement irréductible; il en est de même du produit de deux tenseurs irréductibles de la seconde catégorie.

154. Cela posé, parmi les tenseurs scalaires du second degré, il y aura d'abord le carré de la courbure totale

$$(A_{ij}^{ij})^2.$$

Les autres proviendront soit du produit de deux tenseurs linéaires de la première catégorie, soit du produit de deux tenseurs linéaires de la seconde catégorie, soit du produit du tenseur (à neuf composantes) de la troisième catégorie par lui-même.

Plaçons-nous d'abord dans ce dernier cas, et désignons par

$$\xi^{ij}$$

les composantes de ce tenseur, qui se transforment entre elles comme

les quantités $\xi^i \bar{\xi}^j$. Les produits $\xi^i \bar{\xi}^{i'}$ se transformeront comme les quantités

$$\xi^i \bar{\xi}^j \eta^i \bar{\eta}^{j'} + \xi^{i'} \bar{\xi}^{j'} \eta^i \bar{\eta}^j,$$

où les η^i se transforment comme les ξ^i et les $\bar{\eta}^i$ comme les $\bar{\xi}^i$. Or les tenseurs irréductibles formés avec les quantités $\xi^i \eta^i \bar{\xi}^j \bar{\eta}^{j'}$ s'obtiennent en multipliant les composantes d'un tenseur irréductible formé avec les $\xi^i \eta^i$ par les composantes d'un tenseur irréductible formé avec les $\bar{\xi}^j \bar{\eta}^{j'}$. Si nous voulons obtenir un tenseur scalaire, il faudra partir d'un tenseur scalaire formé avec les $\xi^i \eta^i$; or il y en a un et un seul, à savoir

$$\xi^1 \eta_1 + \xi^2 \eta_2 + \xi^3 \eta_3;$$

cela nous conduira au tenseur scalaire

$$(\xi^1 \eta_1 + \xi^2 \eta_2 + \xi^3 \eta_3) (\bar{\xi}^1 \bar{\eta}_1 + \bar{\xi}^2 \bar{\eta}_2 + \bar{\xi}^3 \bar{\eta}_3),$$

c'est-à-dire, en revenant aux notations primitives,

$$\xi^{11} \xi_{11} + \xi^{22} \xi_{22} + \xi^{33} \xi_{33} + \xi^{23} \xi_{32} + \xi^{32} \xi_{23} + \xi^{31} \xi_{31} + \xi^{13} \xi_{13} + \xi^{12} \xi_{12} + \xi^{21} \xi_{21}.$$

Comme les ξ^{ij} sont en fait les coefficients de la forme quadratique

$$\begin{aligned} A_i \rho_j \omega^i \omega^j - \frac{1}{2} (A_{23}^{23} + A_{31}^{31} + A_{12}^{12} + A_{14}^{14} + A_{24}^{24} + A_{34}^{34}) \omega_i \omega^i \\ = a_1^1 \omega_1 \omega^1 + \dots + a_4^4 \omega_4 \omega^4 + 2 a_{12} \omega^1 \omega^2 + \dots + 2 a_{24} \omega^3 \omega^4, \end{aligned}$$

l'invariant scalaire formé avec les carrés et les produits des coefficients est bien connu, c'est ⁽¹⁾

$$a^{ij} a_{ij}.$$

Partons maintenant du produit de deux tenseurs linéaires irréductibles de la première catégorie. D'abord en multipliant par lui-même le premier tenseur à trois composantes ξ^1, ξ^2, ξ^3 , nous obtenons le

(1) D'une manière plus précise, c'est

$$a^{11} a_{11} + \dots + 2 a^{12} a_{12} + \dots;$$

cet invariant est celui qui est utilisé par M. Eddington pour représenter l'élément d'action, tandis que M. H. Weyl utilise le carré de la courbure totale

tenseur scalaire

$$\xi_1 \xi^1 + \xi_2 \xi^2 + \xi_3 \xi^3,$$

qui donne ici

$$g A^{ij} A_{ij} + 2\sqrt{g}(A_{23} A_{14} + A_{31} A_{24} + A_{12} A_{34}).$$

Il en résulte l'existence de deux tenseurs scalaires du second degré

$$A^{ij} A_{ij}, \\ A_{23} A_{14} + A_{31} A_{24} + A_{12} A_{34},$$

le premier d'entre eux est, dans la théorie de M. H. Weyl, *l'action électromagnétique*.

Le produit du premier tenseur linéaire à trois composantes par le premier tenseur linéaire à cinq composantes ne donne pas de tenseur scalaire.

Le produit du premier tenseur linéaire à cinq composantes par lui-même fournira au contraire un tenseur scalaire

$$(\xi_1 \xi^1 - \xi_3 \xi^3)^2 + (\xi_2 \xi^2 - \xi_3 \xi^3)^2 + 3(\xi_2 \xi^3)(\xi^2 \xi_3) + 3(\xi_3 \xi^1)(\xi^3 \xi_1) + 3(\xi_1 \xi^2)(\xi^1 \xi_2) \\ - (\xi_1 \xi^1 - \xi_3 \xi^3)(\xi_2 \xi^2 - \xi_3 \xi^3).$$

On obtient ainsi deux nouveaux tenseurs scalaires conjugués; le calcul montre qu'ils se déduisent linéairement des deux tenseurs (1)

$$(B_{ij}^{ij})^2 - B_{ij}^{ij} B_{ik}^{ik} + 2B_{ij}^{ij} B_{kl}^{kl} + 3B_{jk}^{jk} B_{li}^{li} - 6B_{jk}^{ik} B_{il}^{jl} + 6B_{kl}^{ij} B_{ij}^{kl}; \\ \Sigma (ijkl) [B_{ij}^{ij} B_{ijkl} + B_{ijl}^{ijl} B_{ilj}^{ijl}],$$

où l'on a posé

$$B_{ijkl} = \frac{1}{2} (A_{ijkl} + A_{klij}) \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3, 4).$$

En définitive nous obtenons six tenseurs scalaires du second degré et six seulement, de sorte que *la forme générale de l'action élémentaire*

(1) D'une manière plus précise le premier tenseur est la somme des termes analogues à

$$(B_{12}^{12})^2 - B_{12}^{12} B_{13}^{13} + 2B_{12}^{12} B_{34}^{34} + 3B_{13}^{13} B_{24}^{24} - 6B_{13}^{24} B_{24}^{13} + 6B_{24}^{13} B_{13}^{24};$$

dans le second le terme $B_{kij}^{kij} B_{ijl}^{ijl}$ qui provient de $B_{ijl}^{ijl} B_{kij}^{kij}$ par échange des indices i et k , j et l ne doit pas être regardé comme distinct de lui.

de M. H. Weyl contient linéairement six constantes arbitraires ⁽¹⁾ :

$$\begin{aligned} & \alpha \Sigma A^{ij} A_{ij} + \beta (A_{23} A_{14} + A_{31} A_{24} + A_{12} A_{34}) + \gamma (\Sigma A_{ij}^{ij})^2 + \delta \Sigma a^{ij} a_{ij} \\ & + \lambda \Sigma [(B_{ij}^{ij})^2 - B_{ij}^{ij} B_{ik}^{ik} + 2 B_{ij}^{ij} B_{kl}^{kl} + 3 B_{jk}^{jk} B_{ik}^{ik} - 6 B_{jk}^{jk} B_{il}^{il} + 6 B_{kl}^{kl} B_{ij}^{ij}] \\ & + \mu \Sigma (ijkl) [B_{ij}^{ij} B_{ijkl} + B_{i'j'l} B_{k'j'ij}]. \end{aligned}$$

155. La « quantité de mouvement-masse » élémentaire dans la théorie de M. H. Weyl. — M. H. Weyl déduit cette quantité de mouvement de l'action élémentaire par le principe d'Hamilton généralisé. Si l'on part de la forme générale qui vient d'être obtenue de l'action élémentaire, les composantes de la quantité de mouvement-masse élémentaire sont des polynômes entiers et du second degré par rapport aux composantes du tenseur de courbure et à leurs dérivées. On pourrait se proposer de chercher directement tous les invariants intégraux $\xi^i \Pi_i$ à trois dimensions, dont les coefficients sont entiers et du second degré par rapport aux composantes du tenseur général de courbure : cette forme devrait naturellement être *symétrique*, c'est-à-dire satisfaire aux relations

$$[\omega_i \Pi_j] = [\omega_j \Pi_i]$$

si l'on voulait que le principe de conservation fût vérifié. Il est possible de résoudre le problème dans ces conditions en employant toujours la méthode fondée sur la considération des tenseurs irréductibles. Le calcul conduit à 13 invariants intégraux vectoriels symétriques linéairement indépendants ; six d'entre eux s'obtiennent du reste en multipliant le tenseur scalaire le plus général du second degré par la forme invariante

$$\Sigma (ijkl) e_i [\omega_j \omega_k \omega_l].$$

Chacun de ces 13 invariants intégraux, étant symétrique, peut être associé à une forme quadratique

$$G_{ij} \omega^i \omega^j.$$

Signalons, parmi les sept formes quadratiques non encore indiquées :

1° La forme

$$A_{\rho\sigma}^{\rho\sigma} a_{ij} \omega^i \omega^j = A_{\rho\sigma}^{\rho\sigma} F(\omega^i),$$

en désignant par F la forme quadratique $a_{ij} \omega^i \omega^j$;

⁽¹⁾ Le même problème a été résolu, suivant une méthode différente, par R. Weitzenböck (*Sitzungsb. Akad. Wissensch. Wien*, t. 129¹¹, 1920, p. 683-696 et 697-708).

2° La forme quadratique

$$\frac{1}{4} \frac{\partial F}{\partial \omega^i} \frac{\partial F}{\partial \omega_i} = a_i{}^\rho a_{j\rho} \omega^i \omega^j;$$

3° La forme

$$\frac{1}{4} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega^i} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega_i} = A_i{}^\rho A_{j\rho} \omega^i \omega^j;$$

liée d'une manière très étroite à la « quantité de mouvement-énergie » électromagnétique, laquelle est associée à la forme

$$\frac{1}{2} A^{\rho\sigma} A_{\rho\sigma} \omega_i \omega^i - A_i{}^\rho A_{j\rho} \omega^i \omega^j;$$

4° La forme

$$A_i{}^\rho a_{j\rho} \omega^i \omega^j = - \frac{1}{2} \frac{\partial \Omega}{\partial \omega^\rho} \frac{\partial F}{\partial \omega_\rho};$$

5° La forme

$$\Sigma (ijkl) A_{ij} a_k{}^\rho \omega_l \omega_\rho;$$

les deux dernières formes ont des expressions assez compliquées.

Le calcul montre qu'aucune combinaison linéaire des invariants intégraux vectoriels à trois dimensions correspondants ne satisfait à la loi de conservation, du moins si l'on admet que le coefficient constant de la « quantité de mouvement-énergie » électromagnétique ne soit pas nul.

Les variétés de Riemann.

156. Ce sont les variétés à connexion euclidienne et torsion nulle. Elles ne possèdent que deux tenseurs conjugués à cinq composantes, un tenseur à neuf composantes et un tenseur scalaire.

En dehors des invariants intégraux signalés pour les variétés de H. Weyl, elles en possèdent qui leur sont propres. Ce sont, en supposant les coefficients linéaires par rapport aux A_{ijkl} .

1° Un invariant scalaire fini, la courbure totale;

2° Deux invariants linéaires vectoriels

$$A_i{}^k e_j \omega^i,$$

$$A_i{}^j e_k \omega^k;$$

3° *Six invariants bivectoriels à deux dimensions*

$$\begin{aligned}
& [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j] \Omega^{ij}, \\
& \Sigma(ijkl) [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j] \Omega_{kl}, \\
& \Sigma(\alpha\beta\gamma\delta) [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j] A_{\alpha\beta}^{ij} [\omega_\gamma \omega_\delta], \\
& \Sigma(ijkl)(\alpha\beta\gamma\delta) [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j] A_{kl\alpha\beta} [\omega_\gamma \omega_\delta], \\
& A_{ij}^{ij} [\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta] [\omega^\alpha \omega^\beta], \\
& A_{ij}^{ij} \Sigma(\alpha\beta\gamma\delta) [\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta] [\omega_\gamma \omega_\delta];
\end{aligned}$$

4° *Un invariant scalaire à quatre dimensions*

$$A_{ij}^{ij} [\omega^1 \omega^2 \omega^3 \omega^4] = \Sigma(ijkl) [\omega^i \omega^j \Omega^{kl}].$$

Les formes $[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j] \Omega^{ij}$ et $\Sigma(ijkl) [\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j] \Omega_{kl}$ obéissent à la loi de conservation.

