

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERTRAND GAMBIER

**Système linéaire de courbes algébriques de degré donné
admettant un groupe donné de points bases**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 41 (1924), p. 147-264

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1924_3_41__147_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1924, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SYSTÈME LINÉAIRE

DE

COURBES ALGÈBRIQUES DE DEGRÉ DONNÉ

ADMETTANT UN GROUPE DONNÉ DE POINTS BASES

PAR M. BERTRAND GAMBIER

INTRODUCTION.

1. Les géomètres italiens ont étudié en détail les séries de groupes de points variables découpées sur une courbe algébrique *donnée* par des courbes algébriques *variables*. MM. Picard et Simart ont résumé ces recherches dans leur ouvrage classique : *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, au début du tome 2.

J'étudie ici un problème en quelque sorte inverse : *déterminer les courbes algébriques diverses, mais de même degré m , passant par un groupe donné de points*. Les courbes C_m obtenues forment un système linéaire; le groupe des H points donnés est dit : *normal pour le degré m* si la dimension de ce système linéaire est celle qui résulte de la comparaison du nombre d'inconnues et d'équations; *anormal pour le degré m* si la dimension est supérieure. J'indique :

1° La construction de tous les groupes de points anormaux pour un degré m donné ;

2° Le moyen de séparer les s points *surabondants* des $H - s$ points *fondamentaux* ;

3° $H - s - t$ points seulement, parmi les $H - s$ points fondamentaux, peuvent être marqués *a priori* sur le plan; les $s + t$ points complémentaires peuvent, ou admettre un nombre fini de configurations,

ou décrire un lieu géométrique algébrique sur lequel ils décrivent une involution $I_{s+s'}$ simple ou composée.

2. Il y a environ cent ans, Cramer a cité le groupe anormal des m^2 points communs à deux courbes C_m et C'_m ; aussitôt après lui, Plücker et Jacobi ont complété cette étude; en 1843, Cayley (*Cambridge Math. Journal*, vol. 3) étudie les mn points communs à deux courbes C_m et C_n et montre que si

$$q \geq n \geq m, \quad q \leq m + n - 3, \quad \delta = \frac{(m + n - q - 1)(m + n - q - 2)}{2},$$

toute courbe C_q contenant $mn - \delta$ points du groupe contient les δ restants, *du moins en général*.

En 1886 (*Math. Annalen*, t. 26), Bacharach remarque que la *démonstration* de Cayley, basée sur un simple dénombrement de constantes, prête à des objections sérieuses, bien que la *proposition* soit générale. Au fond tout revient à démontrer que l'on ne peut pas *toujours* choisir *au hasard* les δ points surabondants. Au tome 30 (1887) des *Math. Annalen*, Cayley répond à quelques critiques de Bacharach. Mais ce sont les définitions et propriétés développées en Italie qui permettent de faire une théorie simple et précise du problème posé ici; au tome 3, volume 3, de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édition allemande), M. Berzolari donne un historique complet de cette question.

3. Je me borne au cas où les H points donnés sont tous *distincts*, donc simples à la fois sur chaque courbe et dans l'intersection. Je n'emprunte guère à la théorie des séries algébriques de points sur une courbe que la notion de *série linéaire, spéciale ou non spéciale*. Je me sers systématiquement du *théorème du reste de Brill et Noether ou de la théorie de la résiduation de Sylvester* (voir PICARD et SIMART, *loc. cit.*, p. 15 et suiv., ou encore un article de M. Lebesgue sur les polygones de Poncelet, *Annales de Toulouse*, 1922, et un article complémentaire du même auteur aux *Annales de Toulouse* 1923). J'adopte la forme suivante du théorème du reste, qui est celle de MM. Picard et Simart légèrement modifiée :

Une C_m donnée, qui a ou non des points multiples, est coupée par

une C_n , *simplement assujettie à ne contenir aucun point multiple de C_m et à la couper en mn points distincts*; les points communs sont partagés en deux groupes P et Q; deux courbes de degré n_1, n_2 respectivement, *assujetties aux mêmes restrictions* que C_n , sont issues des groupes P et Q respectivement et découpent sur C_m deux nouveaux groupes, Q' et P' respectivement. *Les points P' et Q' sont sur une même courbe d'ordre N ne contenant aucun point multiple de C_m , avec la relation $n + N = n_1 + n_2$.*

Dans d'autres questions, telles que l'étude des intégrales abéliennes, on considère exclusivement les adjointes de C_m ; ici j'exclus les adjointes et même les courbes qui contiendraient, à quelque degré de multiplicité que ce soit, un ou plusieurs points multiples de C_m . La démonstration de la propriété ainsi modifiée est la même.

P admet pour *résiduels* soit le groupe Q, soit le groupe Q'. Les groupes Q, Q' sont *corésiduels*; avec le langage de la résiduation, le théorème du reste revient à dire : *deux groupes de points ayant un résiduel commun, tout résiduel de l'un est aussi résiduel de l'autre.*

La proposition de Sylvester est la suivante : si parmi les mn points (C_m, C_n) , mp ($p < n$) forment l'intersection complète de C_m et d'une C_p , les $m(n - p)$ restants sont l'intersection complète de C_m et d'une C_{n-p} . Cette proposition rentre dans la précédente si l'on regarde l'intersection complète de C_m avec une autre courbe algébrique comme un groupe admettant un résiduel de *zéro* point.

4. J'utilise souvent ainsi la théorie des équations linéaires et homogènes :

m équations linéaires et homogènes à $m + p$ inconnues ont *toujours* des solutions, non toutes nulles; la solution générale dépend de $p + h$ arbitraires homogènes, où h est un entier ($m \geq h \geq 0$) caractéristique du système. Si h n'est pas nul, il est essentiel de choisir avec *tact* les $m - h$ équations *distinctes* auxquelles se réduisent les équations données ou les h *surabondantes*. L'objet de ce mémoire est précisément l'étude du cas où les h équations à supprimer ne peuvent être choisies *au hasard*.

Si E (nombre d'équations) atteint ou surpasse I (nombre d'inconnues), *en général* le système est incompatible; mais l'existence *d'un*

système de solutions implique l'existence d'une *infinité* de solutions : la solution générale dépend alors de k arbitraires homogènes (k entier ≥ 1) et le système se réduit à $1 - k$ équations *choisies avec tact*. Cet énoncé, donné pour $E - 1 \geq 0$, subsiste d'ailleurs pour $E - 1 < 0$.

L'artifice bien simple, qui suit, suffit en général pour éviter l'emploi de matrices et déterminants. Supposons connue, par un procédé quelconque, une solution à p paramètres homogènes arbitraires ($p \geq 1$) du système en question ($E \geq 1$) : le système est compatible, mais il s'agit de savoir si la solution connue est ou non la solution *générale* : autrement dit la solution générale dépend de $p + q$ arbitraires homogènes, où q est un entier ≥ 0 , à déterminer. Supposons qu'en adjoignant $p - 1$ nouvelles équations linéaires et homogènes aux E proposées, les équations nouvelles étant inspirées par telles considérations que l'on peut imaginer, nous sachions cette fois trouver la solution *générale* des $E + p - 1$ équations totales, avec k paramètres homogènes. On a nécessairement

$$k = q + 1 + q_1,$$

où q_1 est un nouvel entier ≥ 0 qui peut dépendre du système complémentaire de $p - 1$ équations, tandis que q n'en dépend pas.

Si donc $k = 1$, on peut affirmer $q = 0$ et il a donc suffi de cette unique expérience pour affirmer que la solution connue *a priori* est la solution générale ; si k surpasse l'unité, on peut simplement écrire

$$0 \leq q \leq k - 1.$$

CHAPITRE I.

GROUPES ANORMAUX POUR LE DEGRÉ m . ÉTUDE DES m^2 POINTS COMMUNS
A DEUX COURBES C_m, C'_m , DÉCOMPOSABLES OU NON, MAIS SANS PARTIE
COMMUNE.

1. *Propositions de Cramer et Cayley*. — Il est nécessaire de donner à ces propositions une forme précise telle que la suivante :

Cramer : parmi les m^2 points, supposés distincts, communs à deux courbes C_m, C'_m , décomposables ou non, mais sans partie commune,

il existe, *toujours et sans exception*, au moins un groupe de $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ points *convenablement choisis* tels que toute courbe C_m'' les contenant contienne aussi les $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ restants.

Cayley : soit

$$q \geq m, \quad q \geq n, \quad q \leq m + n - 3, \quad \delta = \frac{(m+n-q-1)(m+n-q-2)}{2}.$$

Parmi les mn points, supposés distincts, communs à deux courbes C_m, C_n , décomposables ou non, mais sans partie commune il existe *toujours et sans exception* au moins un groupe de $mn - \delta$ points tels que toute courbe C_q les contenant contienne aussi les δ restants.

Pour $m = n$ et $q = m$, Cayley et Cramer coïncident. Il y a le complément suivant à ajouter, soit pour Cramer, soit pour Cayley :

En général on peut choisir les δ points surabondants au hasard; dans certains *cas particuliers*, qu'il s'agit de préciser, une courbe C_q peut contenir soit $mn - \delta$ points, soit même $mn - \delta + h$ points convenablement choisis, sans contenir les δ ou $\delta - h$ points complémentaires. Cela va être développé.

2. *Points communs à deux courbes C_m et C_m'* . — Deux courbes C_m, C_m' sans partie commune, ayant m^2 points distincts communs, je pose le problème classique :

« *Faire passer une courbe de degré m par les m^2 points communs à C_m et C_m'* », et le résous par une méthode, que je crois originale, basée sur la seule proposition que *deux courbes de degré m ne peuvent avoir plus de m^2 points communs sans coïncider ou avoir une partie commune*.

Je suppose bien entendu $m \geq 3$ de façon que $m^2 \geq \frac{m(m+3)}{2}$. Le problème n'est pas impossible, car l'équation

$$(1) \quad \lambda C_m + \mu C_m' = 0$$

en livre une solution à deux paramètres homogènes; je veux montrer que c'est une solution *générale*; l'équation (1) n'admet pas de facteur de décomposition indépendant de $\frac{\lambda}{\mu}$, car C_m et C_m' n'ont pas de facteur

commun. Il en résulte donc que, pour $\frac{\lambda}{\mu}$ quelconque, (1) est indécomposable : dire le contraire reviendrait à décomposer le premier membre de (1) en p facteurs ($p \geq 2$) dépendant *chacun* algébriquement du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$; on aurait donc

$$C_m \equiv \gamma^p, \quad C'_m \equiv \gamma'^p,$$

où γ et γ' seraient des polynômes de degré $\frac{m}{p}$; mais alors chaque point commun à C_m et C'_m compterait au moins pour p^2 , cas écarté. Soient donc Γ une courbe indécomposable du faisceau (1) et M un point déterminé de Γ .

J'applique l'artifice de la fin de l'introduction; nous avons $E = m^2$ équations linéaires et homogènes par rapport aux $I = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ coefficients de l'équation ponctuelle de la courbe inconnue; adjoignons l'unique équation obtenue en imposant encore le point M : Γ est solution, et c'est la seule, puisque Γ est *indécomposable*: donc (1) est bien l'équation *générale* répondant au problème posé au début du paragraphe. Les m^2 équations se réduisent bien à $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ choisies *avec tact* ou *au hasard* suivant le cas.

3. *Systèmes de H points, pour $H = m^2$ ou $H > m^2$.* — Marquons dans un plan vierge m^2 points et cherchons les C_m éventuelles qui y passent; il y a quatre cas possibles de complexité croissante :

1° Impossibilité; c'est le cas général.

2° Une seule C_m (on suppose toujours $m \geq 3$); cette courbe C_m peut d'ailleurs être ou non décomposable. Il y a parmi les m^2 points donnés $\frac{m(m+3)}{2}$ points convenablement choisis déterminant une C_m unique, qui passe par les $\frac{m(m-3)}{2}$ restants.

3° Deux courbes C_m et C'_m linéairement indépendante : nous rentrons dans le cas étudié au paragraphe précédent, si du moins C_m et C'_m n'ont pas de partie commune; la courbe générale du faisceau $C_m + \lambda C'_m = 0$ ne peut se décomposer que si C_m et C'_m ont une partie commune.

4° Les m^2 équations obtenues ont une matrice de rang $m \frac{m(m+3)}{2} - h$ avec h entier ≥ 2 ; on trouve alors ∞^h courbes d'équation

$$(1) \quad \lambda C_m + \lambda_1 C_m^{(1)} + \dots + \lambda_h C_m^{(h)} = 0,$$

où les λ sont des constantes arbitraires et les C_m des polynomes linéairement indépendants : ces polynomes ont nécessairement un facteur commun, sinon C_m et $C_m^{(1)}$, par exemple, n'auraient pas de facteur commun et l'équation générale serait simplement

$$\lambda C_m + \lambda_1 C_m^{(1)} = 0.$$

Mais alors deux courbes du système (1), soient Γ et Γ' , ayant une partie commune, laissons Γ fixe et faisons varier Γ' d'une façon continue : la partie commune, ou bien reste fixe ou bien varie d'une façon continue ; le dernier cas est impossible, car Γ ne peut admettre une infinité de morceaux de décomposition ; donc dans (1), tous les C ont bien le même facteur commun.

En supposant $H = m^2 + k$, avec $k \geq 1$, on retrouve les quatre cas, mais si 3° ou 4° se trouvent réalisés, il y a nécessairement une partie de décomposition commune à tout le système linéaire.

4. *Groupes normaux ou anormaux, complets ou incomplets. Cas où toutes les courbes du système ont une partie commune.* — Un groupe de H points est *normal* ou *anormal* pour le degré m suivant que les H équations obtenues en imposant ces H points à une C_m sont distinctes ou se réduisent à $H - s$: remarquons en passant que, si H surpasse $\frac{m(m+3)}{2}$, le cas où $H - s$ surpasserait aussi $\frac{m(m+3)}{2}$ ne donnerait aucune C_m et l'on doit alors regarder le système comme normal ; cela revient à sous-entendre, en parlant de systèmes anormaux, qu'il y a au moins une C_m passant par les points, donc $H - s \leq \frac{m(m+3)}{2}$. Le nombre s est la *surabondance* ; les $H - s$ points correspondant aux équations distinctes sont les points *fondamentaux* ; une C_m les contenant contient automatiquement les s points surabondants ; il peut arriver qu'elle contienne encore s' points fixes nouveaux ; si s' est nul, les H points forment un *groupe anormal complet pour le degré m , de*

surabondance s ; si s' n'est pas nul, le groupe est *anormal incomplet* pour le degré m , de surabondance s ; mais il y a lieu de considérer surtout le groupe des $H + s'$ points, obtenus en ajoutant les s' points *virtuels*. Un groupe anormal, complet ou non, peut, par suppression de $1, 2, \dots, s - 1$ points surabondants être transformé en groupe anormal incomplet de surabondance $s - 1, s - 2, \dots, 1$; en supprimant les s points surabondants, on a le groupe *normal incomplet* des $H - s$ points fondamentaux. La notion de groupe *normal complet* est intuitive.

5. Donc si $H > \frac{m(m+3)}{2}$, le groupe est *normal* s'il n'y a aucune C_m les contenant; pour qu'il soit *anormal* et ne définisse qu'une C_m , il faut effectivement que $H > \frac{m(m+3)}{2}$ et que les points comprennent un groupe de $\frac{m(m+3)}{2}$ points définissant une seule C_m contenant tous les autres points. Cette unique C_m peut être ou non décomposable; il faut remarquer d'ailleurs que l'obligation de décomposition peut n'être pas évidente *a priori* et ne le devenir qu'en adjoignant au groupe donné un nombre suffisant de points virtuels. Ainsi pour $m = 4$, neuf points pris sur une conique C_2 et cinq points arbitraires hors de C_2 donnent une seule quartique évidemment décomposée en C_2 et la conique circonscrite aux cinq derniers; mais douze points pris *arbitrairement* sur une cubique C_3 donnée et deux points pris au hasard en dehors de la cubique déterminant une C_4 unique, composée de C_3 et de la droite joignant les deux derniers points; cela tient à ce que onze points pris sur C_3 obligent toute C_4 les contenant à contenir encore un nouveau point de C_3 , de sorte qu'ici la C_4 inconnue coupe en réalité C_3 en treize points, et non douze, en tenant compte de ce point virtuel.

6. Il reste donc à étudier le cas où le groupe des H points est *anormal* et définit au moins deux C_m linéairement indépendantes, que H soit d'ailleurs supérieur ou inférieur à $\frac{m(m+3)}{2}$. Il y a un cas à extraire immédiatement, c'est celui où toutes les C_m ont une partie de décomposition commune; cette obligation de décomposition peut être plus ou moins facile à apercevoir, et il est bon, comme un peu plus haut, d'étudier un peu plus en détail cette circonstance.

Un cas assez facile à mettre en évidence est celui où les H points renferment $\frac{p(p+3)}{2}$ points définissant une C_p unique ($p < m$) et où cette C_p contient encore un ensemble de points complémentaires du groupe, le total ainsi obtenu dépassant soit mp , soit $mp - \frac{(p-1)(p-2)}{2}$ simplement (avec quelques restrictions dans ce cas; j'anticipe un peu ici sur les résultats ultérieurs). La courbe C_p fait alors partie de toutes les C_m et nous sommes ramenés à un problème de même espèce pour le degré $m-p$ au lieu de m : trouver une C_{m-p} contenant les points de H non situés sur la C_p trouvée; ces points peuvent former un groupe normal ou anormal pour le degré $m-p$. Ainsi huit points d'une conique C_2 et un neuvième point pris hors de C_2 forment un groupe anormal pour le degré 3 et de surabondance 1, mais le neuvième point, à lui seul, forme un groupe normal pour le degré 1.

Un cas de décomposition forcée plus difficile à apercevoir est par exemple le suivant : *en général le total fermé par mp points communs à deux courbes C_m et C_p connues ($m > p$) et par un système anormal complet ou incomplet relatif au degré $m-p$ fournit des courbes de degré m toutes décomposables, C_p étant commune à toutes.*

Pour démontrer cette proposition, je donne un lemme : je prends d'abord le total formé par mp points Q_1, Q_2, \dots, Q_{mp} communs à une C_m et C_p connues et par un système de points P_1, P_2, \dots, P_h cette fois *normal* (complet ou incomplet) pour le degré $m-p$; la courbe C_p ne contient par hypothèse aucun des points P . Les points P définissent donc un système linéaire ∞^h de courbes C_{m-p} avec

$$k = \frac{(m-p)(m-p+3)}{2} - h.$$

Je vais montrer que les points P, Q au total définissent un système linéaire ∞^{h+1} de courbes C_m . En effet l'équation d'une courbe de degré m contenant les Q est de la forme

$$(2) \quad C_p [Ax^{m-p} + Bx^{m-p-1}y + \dots + L] + \lambda C_m = 0,$$

où le multiplicateur de C_p est le polynôme de degré $m-p$ le plus général en x et y (j'anticipe sur les résultats ultérieurs). En exprimant que

P_1, P_2, \dots, P_h appartiennent à la courbe (1), nous avons h équations linéaires et homogènes en A, B, \dots, L, λ , contenant un déterminant d'ordre h non nul : car faire $\lambda = 0$ dans ce système donne les équations précises relatives aux C_{m-p} contenant P_1, P_2, \dots, P_h . Donc la solution du système obtenu contient bien une arbitraire de plus, à savoir λ , que le système obtenu en faisant $\lambda = 0$. Le lemme est donc établi.

Revenons donc à la proposition annoncée : on a un système $P_1, P_2, \dots, P_h; P_{h+1}, \dots, P_{h+s}$ anormal (complet ou incomplet) de surabondance s pour le degré $m - p$, les h premiers étant les points fondamentaux; si les courbes de degré m contenant les P devaient obligatoirement se décomposer, la proposition serait immédiate. Il suffit donc de prendre le cas où existe au moins une courbe de degré m , soit Γ_m , indécomposable contenant tous les P ; anticipant sur les résultats ultérieurs, observons que les P sont, pour le degré m , ou un groupe normal ou un groupe anormal de surabondance, inférieure, sans égalité, à s ; pour comprendre tous les cas, représentons par $s - s'$ la surabondance des P pour le degré m , s' est un entier tel que $0 < s' \leq s$; il y a donc des courbes indécomposables de degré m contenant P_1, P_2, \dots, P_h sans contenir *tous* les autres points P ; on peut les classer en séries diverses suivant qu'elles contiennent *exactement* la totalité ou $0, 1, 2, \dots, s' - 1$ points du groupe P_{h+1}, \dots, P_{h+s} et il y a bien $s' + 1$ séries effectives; la définition de s' revient à dire qu'une courbe de degré m contenant outre P_1, P_2, \dots, P_h encore s' points du groupe P_{h+1}, \dots, P_{h+s} contient automatiquement les $s - s'$ restants et Γ_m est l'une d'elles; j'appelle Γ'_m une courbe contenant P_1, \dots, P_h et au plus $s' - 1$ points du groupe P_{h+1}, \dots, P_{h+s} . Nous savons qu'il y a effectivement des courbes Γ_m et Γ'_m .

Prenons maintenant une courbe C_p arbitraire, *associée d'abord à une courbe* Γ'_m , et soit $Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_{m-p}$ les points communs; d'après le lemme l'équation *générale* des courbes de degré m contenant les Q' et P_1, P_2, \dots, P_h est

$$(2) \quad C_p [\lambda_1 C_{m-p}^1 + \lambda_2 C_{m-p}^2 + \dots + \lambda_{k+1} C_{m-p}^{k+1}] + \lambda \Gamma'_m = 0,$$

où $C_{m-p}^1, C_{m-p}^2, \dots, C_{m-p}^{k+1}$ sont les $(k + 1)$ courbes linéairement indépendantes de degré $m - p$ définies par P_1, P_2, \dots, P_h : cela tient à ce

que l'équation (2) contient bien le nombre $k + 2$ de paramètres homogènes indépendants voulu. Ces courbes contiennent automatiquement tous les points du groupe complémentaire P_{h+1}, \dots, P_{h+s} , en nombre $s' - 1$ au plus, qui sont sur Γ'_m ; si l'on exprime que la courbe (2) contient *un* des points rebelles de ce groupe, non situé sur Γ'_m , on trouve $\lambda = 0$, il y a alors décomposition comme on l'a annoncé *a priori*.

Si l'on répète le raisonnement avec une C_p arbitraire, *mais avec la courbe Γ_m au lieu de Γ'_m* , la conclusion échoue; l'équation (2) représente un système ∞^{k+1} de courbes n'admettant pas C_p comme partie commune, contenant les points Q_1, Q_2, \dots, Q_{mp} communs à C_p et Γ_m et le système P_1, P_2, \dots, P_{h+s} anormal pour le degré $m - p$.

La proposition est donc établie: le groupe P_1, P_2, \dots, P_{h+s} anormal pour le degré $m - p$ étant donné, si l'on choisit les courbes C_m et C_p au *hasard* (relativement au groupe P), il y a décomposition; on *peut* choisir C_m et C_p de façon à éviter la décomposition.

Le mode de démonstration que j'ai employé évite de considérer des matrices et des déterminants extraits de cette matrice et donne en même temps le moyen d'obtenir *effectivement* le cas que l'on peut appeler *normal* et ceux que l'on peut appeler *exceptionnels*.

Donnons un exemple simple; supposons $m = 4$, $p = 1$. Prenons donc quatre points Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 sur une droite C_1 et neuf points P_1, P_2, \dots, P_9 dont aucun n'est sur C_1 ; si ces neuf points déterminent une seule cubique C_3 , on est dans les conditions du lemme et l'ensemble des points P, Q définit un faisceau de quartiques d'équation $C_3 C_1 + \lambda C_4 = 0$ et aucune de ces courbes (même si elle se décompose) n'admet C_3 comme portion si $\lambda \neq 0$. Si au contraire P_1, P_2, \dots, P_9 sont bases d'un faisceau de cubiques ($s = s' = 1$), les circonstances changent: nous allons analyser géométriquement les conditions propres à obtenir le cas normal (décomposition) et le cas exceptionnel (non décomposition). Soient C_3 la cubique du faisceau qui contient Q_1 , C'_3 celle qui contient Q_2 , en supposant d'abord Q_1 et Q_2 non situés sur une même cubique avec P_1, P_2, \dots, P_9 . On voit aisément qu'il y a ∞^3 quartiques indécomposables passant par $P_1, P_2, \dots, P_9, Q_1, Q_2$ et que, grâce aux hypothèses faites, elles coupent la droite C_1 en deux points variables se correspondant dans une *involution*; C_3 perce C_1 en deux points R_1, R_2 autres que Q_1 ; C'_3 donne de même S_1, S_2 autres que Q_2 ;

R_1, R_2 est un couple de l'involution, S_1 et S_2 un autre. Donc toute quartique contenant Q_3 contient automatiquement le conjugué Q'_3 de Q_3 dans cette involution; on prend *a priori* C_3 et C'_3 au hasard pour définir P_1, P_2, \dots, P_9 ; puis C_1 au hasard (ne contenant aucun des P), puis Q_3, Q_4 au hasard sur C_1 , Q_1 étant un point commun à C_3 et C_1 , Q_2 un point commun à C'_3 et C_1 ; dans ces conditions Q_1 ne coïncide pas avec Q'_3 et toute quartique contenant les P et Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 contient Q'_3 , donc se décompose nécessairement et C_1 en fait partie: on trouve donc l'équation $(C_3 + \lambda C'_3)C_1 = 0$; le groupe P, Q est d'ailleurs ici normal pour le degré 4. Si au contraire on choisit *à dessein* Q_1 coïncidant avec Q'_3 , la décomposition ne se produit plus, on a une équation $(C_3 + \lambda C'_3)C_1 + \mu C_4 = 0$ et le groupe P_1, Q est anormal, de surabondance 1, pour le degré 4. Dans cet exemple, si Q_1 et Q_2 sont sur une même cubique C_3 avec P_1, P_2, \dots, P_9 , toute quartique contenant P_1, \dots, P_9 et Q_1, Q_2 perce C_1 en un nouveau point F fixe, de sorte que si Q_3 et Q_4 ne coïncident ni l'un ni l'autre avec F , on a la décomposition $(C_3 + \lambda C'_3)C_1 = 0$, mais si Q_3 ou Q_4 coïncide avec F on évite la décomposition.

Il suffit de reprendre une discussion semblable en prenant $m = 5$, $p = 1$, c'est-à-dire cinq points Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 en ligne droite et seize points P_1, \dots, P_{16} communs à deux quartiques C_4 et C'_4 pour avoir 21 points formant un groupe anormal pour le degré 5, exigeant en *général* la décomposition de la quintique en C_1 et une quartique du faisceau; *exceptionnellement* la décomposition pourra être évitée, mais alors la surabondance pour le degré 5 est devenue 2 et non plus 1.

J'indique quelques exemples qui peuvent *a priori* sembler ne pas rentrer dans la proposition précédente. Cherchons une courbe de degré 8 contenant les points communs à deux courbes C_3 et C_3 *données* et les points communs à deux courbes C'_3 et C_7 *données*; il est clair que $C_3 C'_3 C_2$ est une solution, C_2 désignant une conique *arbitraire*: en général *c'est la seule solution*. Il suffit pour le voir de prendre $m = 8$, $p = 3$, $m - p = 5$. Pour le degré 5 les 21 points P_1, \dots, P_{21} communs à C'_3 et C_7 forment un système anormal de surabondance $s = 6$; en effet, en général, P_1, P_2, \dots, P_{15} étant situés sur C'_3 obligent une quintique qui les contient à se décomposer en C'_3 et une conique arbitraire C_2 ; donc P_1, P_2, \dots, P_{15} forment bien un système *normal incomplet*

pour le degré 5 définissant ∞^3 quintiques d'équation $C'_3 C_2 = 0$; on a donc $s = 6$, $s' = 6$ et la proposition s'applique; *en général* il y a décomposition $C_3 C'_3 C_2$ et la surabondance pour le degré 8 des 45 points donnés est 6; pour les configurations *exceptionnelles* des couples (C_3, C_8) , (C'_3, C_7) on pourra éviter la décomposition avec C_3 et C'_3 comme portions obligatoires, mais la surabondance pour le degré 8 devient au moins 7.

De même une courbe inconnue de degré 10 contenant les 30 points communs à un couple C_3, C_{10} *donné* et les 30 points communs à un couple C_3, C_6 *donné* doit, dans le cas général, se réduire à

$$C_3(C_5 C_2 + C_6 C_1) = 0,$$

où C_2 et C_1 sont une conique et une droite arbitraires, car les 30 points (C_3, C_6) forment pour le degré 7 ($m = 10$, $p = 3$) un système anormal de surabondance 3.

7. Nous pouvons donc écarter le cas où il existerait 0 ou 1 courbe C_m contenant les H points donnés ou bien où toutes les C_m se décomposeraient avec une partie commune à toutes.

Dans la suite de ce travail, je n'étudie plus que les groupes anormaux complets définissant au moins deux C_m linéairement indépendantes, sans partie commune; d'ailleurs, si l'on ne trouve que deux C_m , le groupe (complet) se réduit aux m^2 points de base d'un faisceau : nous nous bornons donc en réalité au cas où il y a au moins trois C_m linéairement indépendantes.

Conclusion fondamentale : nous sommes ramenés à étudier la structure des m^2 points communs à deux courbes C_m et C'_m quelconques de degré m et à en extraire tous les groupes anormaux complets qui peuvent y figurer.

Dans le cas désormais écarté où les H points donnés définissent une seule C_m ou un système linéaire où toutes les C_m ont une partie commune fixe C_p , on doit considérer qu'il y a une *infinité* de points virtuels; dans les groupes *complets* (ou rendus complets) que nous étudierons dorénavant, le nombre total des points est fini; cela fait bien comprendre la différence intrinsèque des deux questions et explique

pourquoi il fallait esquisser l'étude de la première (qui, en réalité, nécessite beaucoup d'emprunts à l'étude de la seconde).

7 bis. Le groupe de H points est donc supposé désormais anormal et complet, chaque point étant simple sur chaque C_m et aussi dans l'intersection de deux C_m de la famille. Or, la courbe générale d'un système linéaire n'a pas de point singulier mobile, donc les deux courbes C_m et C'_m conservées peuvent être supposées dénuées de point singulier, donc de genre $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$; la supposition est *commode*, mais non *obligatoire*; on peut supposer que les $m^2 - H$ points complémentaires communs à C_m et C'_m sont simples aussi dans l'intersection, car si on laisse C_m fixe, les courbes C'_m du système linéaire étudié découpent sur C_m une série linéaire de groupes de $m^2 - H$ points, tous *variables*, puisque les H points forment un groupe *complet*: donc le groupe général de la série linéaire en jeu n'admet pas de point singulier mobile.

Bien entendu si les H points forment un groupe anormal *incomplet*, même si les H points du groupe sont distincts, il pourra arriver que parmi les s' points virtuels, un certain nombre soient confondus entre eux ou viennent se confondre avec un des H points déjà donnés. C'est pour cela que je me borne aux groupes *complets*, à *points tous distincts*, et que je peux me borner à étudier la structure des m^2 points, tous simples, communs à deux courbes C_m et C'_m que nous *pouvons* supposer indécomposables et de genre $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ toutes deux.

8. *Structure de l'ensemble des m^2 points* (C_m, C'_m). — Soient P_1, P_2, \dots, P_{m^2} les m^2 points communs à C_m et C'_m ; posons

$$(1) \quad \rho = \frac{m(m+3)}{2} - 1, \quad \rho' = \frac{(m-1)(m-2)}{2}, \quad \rho + \rho' = m^2.$$

Imposons à une courbe inconnue Γ de degré m la condition de contenir *successivement* $P_1, P_2, \dots, P_\rho, P_{\rho+1}, \dots$ dans cet ordre. Deux cas :

1° P_1, P_2, \dots, P_ρ fournissent ρ équations indépendantes; nous savons que les ρ' suivantes en sont conséquence linéaire. Il y a $C_{\rho+1-\rho}'$ façons de

séparer ρ points; si C_m et C'_m n'offrent aucune configuration spéciale, toutes ces façons fournissent ρ équations indépendantes.

2° h étant un entier non nul, $P_1, P_2, \dots, P_{\rho-h}$ fournissent $\rho-h$ équations indépendantes, mais $P_{\rho-h+1}$ fournit une équation conséquence linéaire des précédentes; donc $P_1, P_2, \dots, P_{\rho-h}$ fournissent un groupe normal *incomplet* dont $P_{\rho-h+1}$ est un point virtuel; s'il y en a d'autres, ils sont forcément compris dans les m^2 points étudiés et nous effectuons, si besoin, un changement de numérotage de façon que $P_{\rho-h+1}, P_{\rho-h+2}, \dots, P_{\rho-h+s}$ soient tous les points virtuels. On a

$$1 \leq s \leq \rho', \quad s \geq h.$$

Nous verrons même plus bas que l'on a, sans égalité, $s < \rho'$. Sur les $\rho' + h - s$ points non encore appelés, on peut, soit au hasard, soit avec tact prélever h points qui joints à $P_1, P_2, \dots, P_{\rho-h}$ fournissent le total des ρ équations distinctes : sans ouvrir pour le moment de nouvelle subdivision, numérotons de sorte que $P_{\rho-h+s+1}, P_{\rho-h+s+2}, \dots, P_{\rho+s}$ soient ces h points; les $\rho' - s$ points restants sont la conséquence des précédents et nous avons réalisé une séparation des m^2 points en quatre groupes, ce que je figure par le schéma, avec *parenthèses*,

$$(2) \quad (\rho - h, h) + (s, \rho' - s),$$

voulant dire que les s points indiqués, en tête de la seconde parenthèse, sont les points virtuels des $\rho - h$ points indiqués en tête de la première parenthèse. Le premier cas est figuré par le schéma

$$(3) \quad (\rho) + (\rho').$$

Le cas normal est que l'on ne puisse obtenir que le schéma (3); mais un schéma, tel que (2), supposé existant, peut toujours être ramené à la forme 3 : il suffit de prendre *d'abord* les points

$$P_1, P_2, \dots, P_{\rho-h}; \quad P_{\rho-h+s+1}, \dots, P_{\rho+s}$$

qui correspondent d'ailleurs aux deux groupes placés dans la première parenthèse (2).

Le groupe

$$P_1, P_2, \dots, P_{\rho-h}; \quad P_{\rho-h+1}, \dots, P_{\rho-h+s}$$

donne une séparation que figure un schéma avec *crochets*

$$(4) \quad [\rho - h]_m + [s],$$

signifiant que j'ai un *groupe anormal complet et de surabondance s pour le degré m* . Dans les schémas à parenthèse, l'indication du degré est inutile, puisque la première parenthèse donne ρ par sommation, la seconde ρ' et les deux réunies m^2 .

Les courbes Γ_m contenant $P_1, P_2, \dots, P_{\rho-h}$ forment un système linéaire de dimension $1 + h$, découpent sur C_m une série linéaire de groupes de points $g_{\rho'+h-s}^h$ dont tous les points sont *variables* : cette série est donc *spéciale* et c'est le résultat fondamental. En effet, il est commode de supposer C_m effectivement de genre ρ' : la différence $(\rho' + h - s) - h$ est $\rho' - s$, où s est un entier ≥ 1 , donc la série est spéciale. Riemann-Roch apprend que l'excès de ρ' sur $\rho' - s$, autrement dit s , est le nombre d'adjointes d'ordre $m - 3$ linéairement indépendantes passant par un groupe de la série ; si l'on suppose C_m dénuée de point multiple, les adjointes sont simplement l'ensemble des courbes algébriques ; puisque les courbes de degré $m - 3$, *totalelement arbitraires*, linéairement indépendantes sont en nombre ρ' , celles qui contiennent un groupe de la série sont en nombre inférieur à ρ' et non égal ; donc, on a, *égalité exclue*,

$$s < \rho'$$

et de plus, *la surabondance pour le degré m d'un groupe de points communs à deux courbes C_m, C'_m est le nombre de courbes de degré $m - 3$ linéairement indépendantes passant par le reste des points communs aux deux courbes*. La démonstration faite en supposant le groupe étudié complet subsiste même pour des groupes incomplets : nous le verrons plus bas.

La série $g_{\rho'+h-s}^h$ peut être découpée sur la courbe C_m par une courbe γ_d de degré d , $1 \leq d \leq m - 3$, possédant sur C_m juste assez de points fixes pour engendrer un système linéaire de dimension h non nulle.

Chaque groupe de la série $g_{\rho'+h-s}^h$ définit s courbes C_{m-3} linéairement indépendantes et, par suite, est de surabondance h pour le degré $m - 3$; on a donc ce résultat curieux : *déterminer sur une C_m un groupe anormal pour le degré m revient à déterminer sur cette C_m un groupe*

anormal pour le degré $m - 3$; mais ce dernier groupe, contrairement à ceux que nous voulons désormais étudier, peut ne définir qu'une C_{m-3} , ($s = 1$), ou ne définir que des courbes C_{m-3} toutes décomposables; il peut être incomplet.

9. *Construction de tous les groupes anormaux complets pour un degré m donné. Tableaux numériques T.* — Traçons donc une C_m ; marquons sur elle f points fixes F tels qu'une courbe γ_d de degré d donné ($1 \leq d \leq m - 3$) contenant les F dépende de h paramètres non homogènes, $h \geq 1$; si les courbes γ_d ont des points fixes virtuels nouveaux, situés sur C_m , on les réunit aux points F de sorte que f désigne le nombre des points fixes situés effectivement sur C_m ; peu importe que les γ_d aient des points virtuels fixes situés hors de C_m . Les courbes γ_d découpent donc sur C_m une série linéaire g_{md-f}^h à points *tous variables*; soient V, V_0, \dots ces groupes; par le groupe V_0 menons une C'_m distincte de C_m ; γ_d^0 étant la γ_d particulière qui a fourni V_0 et γ_{m-d} étant une courbe arbitraire de degré $m - d$, supposons même qu'il existe au moins une C'_m non comprise dans l'équation $C_m + \gamma_d^0 \gamma_{m-d} = 0$, de sorte que cette C'_m ne contienne pas *tous* les points F; il sera *avantageux* que la courbe C'_m puisse ne contenir *aucun* point F; mais il pourra arriver qu'elle contienne soit *accidentellement*, soit *obligatoirement*, quelques-uns d'entre eux (mais non tous); cette discussion revient au fond à discerner si les groupes V, V_0, \dots sont *complets ou incomplets pour le degré m* : ceci sera examiné plus tard, mais pour le moment ce n'est pas essentiel. La courbe C'_m coupe donc C_m en un groupe complémentaire de points P, en nombre $m(m - d) + f$, et ce *groupe P est anormal complet pour le degré m* . C'est la proposition réciproque de celle obtenue au paragraphe précédent; elle résulte de ce que P et F ont un résiduel commun V_0 , donc tous les groupes V, résiduels par construction de F, sont résiduels de P et le remplacement de γ_d^0 par γ_d ou de V_0 par V est indifférent; les groupes V forment une série g_{md-1}^h , donc le système des courbes de degré m issues du groupe P est de dimension $1 + h$; l'ensemble des $m(m - d) + f$ points P fournissent donc seulement $\rho - h$ équations linéaires pour le degré m et ont pour surabondance $m(m - d) + f - \rho + h$, c'est-à-dire

$$(1) \quad s = \rho' - md + f + h.$$

Si σ est la surabondance ($\sigma \geq 0$) du groupe F pour le degré d , on a

$$(2) \quad h + f = \frac{d(d+3)}{2} + \sigma,$$

d'où l'on déduit

$$(3) \quad s = \frac{(m-d-1)(m-d-2)}{2} + \sigma.$$

Ce nombre s est égal à 1 pour $d = m - 3$, $\sigma = 0$ et supérieur à 1 dans tous les autres cas : le groupe P est donc bien surabondant et nous voyons même que la *surabondance de P reste constante si d et σ restent fixes, le nombre f de points F pouvant varier.*

La construction de *tous* les groupes anormaux pour le degré m exige la solution des problèmes préliminaires :

1° Construction de tous les groupes anormaux (et normaux), complets et incomplets, pour les degrés 1, 2, ..., $m - 3$; c'est notre problème, mais avec une valeur moindre du degré.

2° La détermination de *tous* les groupes anormaux, complets ou incomplets relatifs aux degrés 1, 2, 3, ..., $m - 3$ situés sur une C_m donnée.

Ce dernier problème est plus difficile que le premier, mais n'est nécessaire que si nous voulons construire *tous* les groupes anormaux pour le degré m portés par une C_m donnée; s'il s'agit de construire *tous* les groupes anormaux, contenus dans le plan *vierge*, relatifs au degré m , le premier suffit : car le groupe F étant construit, on peut toujours faire passer une infinité de courbes de degré m par F, puisque $d < m$.

Dressons, pour chaque valeur de m , un tableau T donnant les valeurs simultanées des entiers f, d, h, σ, s ; le tableau relatif à l'entier m exige la construction de ceux qui précèdent, jusqu'à $m - 3$. Il est superflu de signaler le groupe anormal formé par m^2 points communs à C_m et C'_m , donc T n'a besoin d'être dressé que pour $m \geq 4$. Quand σ est nul, je ne l'inscris pas.

$$m = 4$$

	F.	σ .	V.	P.	h .	s .
droite.....	0		4	12	2	1
	1		3	13	1	1

SYSTÈME LINÉAIRE DE COURBES ALGÈBRIQUES DE DEGRÉ DONNÉ.

$m = 5$

	F.	σ .	V.	P.	h .	s .
droite.....	0		5	20	2	3
	1		4	21	1	3
conique.....	0		10	15	5	1
	1		9	16	4	1
	2		8	17	3	1
	3		7	18	2	1
	4		6	19	1	1

$m = 6$

droite.....	0		6	30	2	6
	1		5	31	1	6
conique.....	0		12	24	5	3
	1		11	25	4	3
	2		10	26	3	3
	3		9	27	2	3
	4		8	28	1	3
cubique.....	0		18	18	9	1
	1					
	2		16	20	7	1
	3		15	21	6	1
	4		14	22	5	1
	5		13	23	4	1
	6		12	24	3	1
	7		11	25	2	1
	8		10	26	1	1
	9	1	9	27	1	2

$m = 7$

droite.....	0		7	42	2	10
	1		6	43	1	10
conique.....	0		14	35	5	6
	1		13	36	4	6
	2		12	37	3	6
	3		11	38	2	6
	4		10	39	1	6
cubique.....	0		21	28	9	3
	1					
	2		19	30	7	3

$m = 7$ (suite).					
F.	σ .	V.	P.	h .	s .
3		18	31	6	3
4		17	32	5	3
5		16	33	4	3
6		15	34	3	3
7		14	35	2	3
8		13	36	1	3
9	1	12	37	1	4
quartique....	0	28	21	14	1
	1 ou 2				
3*		25	24	11	1
4		24	25	10	1
5		23	26	9	1
6		22	27	8	1
7		21	28	7	1
8		20	29	6	1
9		19	30	5	1
10		18	31	4	1
11		17	32	3	1
12		16	33	2	1
12	1	16	33	3	2
13		15	34	1	1
13	1	15	34	2	2
14	1	14	35	1	2
15	2	13	36	1	3
16	3	12	37	1	4

Ces tableaux deviennent rapidement considérables; il y a de nombreuses remarques à faire, rendant nécessaire d'aller au moins jusqu'à $m = 7$.

10. *Remarques diverses sur les tableaux T.* -- Le minimum de $m(m-d)+f$ s'obtient pour $d = m - 3$, $f = 0$, et donne $3m$, $s = 1$. Un groupe de $3m - 2$ points au plus, à condition que $m + 1$ ne soient pas sur une même droite, $2m + 1$ sur une même conique, est toujours normal complet pour le degré m ; un groupe de $3m - 1$ points, sous les mêmes restrictions, est toujours normal pour le degré m , complet ou incomplet suivant que les $3m - 1$ points ne sont pas ou sont sur une même cubique.

Le groupe P demande, pour sa construction, trois courbes C_m, γ_d, C'_m dans cet ordre; on *doit* simplifier si, parmi les ∞^k courbes γ_d issues de F, il y en a qui se réduisent à une courbe $\gamma_{d-\delta}$ issue de F complétée par une γ_δ *arbitraire* ($1 \leq \delta \leq d$); le groupe V relatif à $\gamma_{d-\delta}\gamma_\delta$ contient *tous* les points (C_m, γ_δ) , donc les P sont une même $C_{m-\delta}$ avec tous les points autres que F communs à C_m et $\gamma_{d-\delta}$. On utilisera donc $C_m, \gamma_{d-\delta}$ et $C_{m-\delta}$. Si la courbe $\gamma_{d-\delta}$ se trouve *complètement* déterminée par les f points F, les P sont sur une unique courbe $C_{m-\delta}$; si la courbe $\gamma_{d-\delta}$ engendre un système linéaire ∞^k , les P définissent un système linéaire ∞^k de courbes $C_{m-\delta}$: *pour ce degré $m - \delta$ le groupe P est nécessairement anormal et de surabondance supérieure à celle qu'il possède pour le degré m* : cela est vrai même pour une unique $C_{m-\delta}$, c'est-à-dire $k = 0$; le groupe P n'est pas nécessairement complet pour le degré $m - \delta$. Il peut arriver qu'il y ait plusieurs degrés $d - \delta, d - \delta', \dots$ donnant lieu à cette particularité pour le groupe P.

Ainsi $f = 0$ revient à prendre les points communs à une C_{m-d} et une C_m ; il y a une C_{m-d} unique contenant les P et toute courbe de degré intermédiaire entre $m - d$ et m qui contient les P se décompose en C_{m-d} et une portion complémentaire, du degré voulu, à part cela arbitraire.

On appliquera ceci sans difficulté pour m quelconque, $d = 2, f = 1$ ou 2 ; les points sont déterminés par une C_m et une C_{m-1} ayant *a priori* $m - 1$ ou $m - 2$ points communs connus en ligne droite; on a ainsi un exemple où la proposition de Cayley pour C_{m-1}, C_m et C'_m ne peut être appliquée qu'avec *tact*.

Considérons $m = 6, d = 3, f = 3$. Si F_1, F_2, F_3 ne sont pas en ligne droite, les 21 points P sont bases d'un réseau de C_3 , donc surabondance 3 pour le degré 5 et 1 pour le degré 6, et il n'existe pas de quartique contenant les P. Si F_1, F_2, F_3 sont en ligne droite, les 21 points P sont sur une quartique C_4 et une seule coupant C_6 en trois points W_1, W_2, W_3 en ligne droite; la surabondance est 7 pour le degré 4, mais les quintiques les contenant se décomposent cette fois en C_4 et une ligne droite arbitraire; les quintiques continuent à former un réseau.

Considérons $m = 6, d = 3, f = 4$. Les 22 points P déterminent un faisceau linéaire de quintiques, ayant trois nouveaux points fixes hors

de C_6 ; les 22 points P forment un système *complet* de surabondance 1 pour le degré 6, un système *incomplet* de surabondance 3 pour le degré 5; les trois nouveaux points communs à toutes les quintiques sont en ligne droite et c'est pour cela que C_6 peut, contrairement à la proposition de Cayley appliquée sans précaution, contenir 22 points communs à C_5 et C'_5 sans contenir les trois restants. Ceci suppose que sur les quatre points F, il n'y en a pas trois en ligne droite; supposons maintenant F_1, F_2, F_3 sur une même droite, coupant C_6 en V_1, V_2, V_3 ; le point F_4 est supposé distinct de V_1, V_2, V_3 ; si l'on utilise, au lieu d'une cubique, une conique issue des points F, elle comprend la droite F_1, F_2, F_3 et une droite *arbitraire* issue de F_4 , coupant C_6 en W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 . Les 22 points déterminent encore un faisceau de quintiques, dont les trois points complémentaires d'intersection sont en ligne droite: le groupe P dans ce cas est exactement le même que plus haut, mais on a simplement fait passer une C_6 par ces points et par l'un des nouveaux points de base du faisceau de quintiques, de sorte qu'elle contient automatiquement les deux restants. En effet V_1, V_2, V_3 sont les points communs à toutes les quintiques du faisceau déterminé par les 22 points P. Les 22 points P fournissent le schéma à *crochets*

$$[21]_6 + [1],$$

les trois points V_1, V_2, V_3 ajoutés aux P donnent

$$[21, 1]_6 + [1, 2],$$

en ajoutant les cinq points W on a

$$[21, 1, 2]_6 + [1, 2, 3],$$

enfin en ajoutant six points quelconques, en ligne droite, de C_6 on a

$$(21, 1, 2, 2) + (1, 2, 3, 4)$$

avec des *parenthèses* cette fois.

De ce qui précède résultent des propositions curieuses telles que les suivantes:

Par trois points V_1, V_2, V_3 en ligne droite menons deux courbes C_5 et C'_5 ; elles se coupent encore en P_1, P_2, \dots, P_{22} ; par les P menons une C_6 ne contenant ni V_1 , ni V_2, V_3 (ce qui est possible); toute autre

C'_6 issue des P coupe C_6 en 14 points situés sur une même et unique C_3 , et C_3 coupe C_6 encore en quatre points F_1, F_2, F_3, F_4 , dont trois ne sont pas en ligne droite; quand C'_6 varie, C_3 varie, mais F_1, F_2, F_3, F_4 ne changent pas. Si par les P on mène une autre quintique du faisceau (C_5, C'_5) , cette quintique C''_5 perce C_6 en huit points situés sur une même et unique conique C_2 , variant avec C_5 , mais passant toujours aux quatre points F_1, F_2, F_3, F_4 déjà donnés. Si la courbe C_6 contient l'un des points V, elle contient aussi les deux autres et rien n'est changé aux résultats précédents sauf que trois des points F sont en ligne droite.

Si l'on considère le cas $m = 6, d = 3, f = 6$, les 24 points P ne sont pas sur une courbe de degré inférieur à 6, si les points F ne sont pas sur une conique; mais si les F sont sur une conique, les 24 P sont sur une unique quintique: on a encore un cas critique pour la proposition de Cayley et les degrés 5, 6, 6.

11. *Groupes anormaux incomplets; groupes anormaux complets à structure interne symétrique ou dissymétrique.* — Les groupes V doivent être à points *tous variables*; si donc les courbes γ_d issues des points F se décomposent nécessairement avec une partie fixe commune à toutes, il suffirait de conserver uniquement la partie mobile. Mais si l'on n'écartait pas ce cas de décomposition obligatoire, on obtiendrait des groupes anormaux *incomplets*; il faut remarquer d'ailleurs que dans une question où interviennent des paramètres, les groupes *complets* obtenus par notre méthode peuvent, pour certaines valeurs *critiques* des paramètres, devenir *incomplets*. Ainsi soit $m = 5, d = 2, f = 3$. Prenons F_1, F_2 fixes et F_3 variable sur C_5 : tant que F_3 est distinct des trois points $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ où F_1, F_2 perce C_5 , on a 18 points P formant un groupe *anormal complet*; si F_3 tend vers φ_3 , la conique se décompose nécessairement; les 18 points P limites peuvent se déterminer en coupant C_5 par une quartique issue de φ_1, φ_2 ; pris seuls, ils forment un groupe anormal *incomplet* de surabondance 1 pour le degré 5; réunis à φ_1, φ_2 , un groupe complet de surabondance 3.

Voici une autre dégénérescence intéressante: soit $m = 4, d = 1, f = 1$. Par un point fixe F de C_4 , menons une droite γ_1 la coupant en V_1, V_2, V_3 ; par V_1, V_2, V_3 menons une C'_4 , elle donne 13 points P de

surabondance 1 pour le degré 4; tant que C'_4 évite de passer par F, le groupe P a une *structure interne symétrique*: on n'a d'équation surabondante qu'après avoir écrit 12 équations, quel que soit l'ordre pris pour P_1, P_2, \dots, P_{13} . Si C'_4 passe par F, les 13 points P du cas général deviennent F et 12 points p_1, p_2, \dots, p_{12} , ces derniers pouvant être obtenus par une C_3 arbitraire: la structure n'est plus symétrique, il y a un point surabondant *qui n'est jamais le point F*. D'une façon générale en prenant un groupe P, anormal complet, à *structure symétrique*, définissant ∞^{1+h} courbes C_m , en adjoignant 1, 2, ..., $h-1$ points *quelconques* du plan, on obtient de nouveaux groupes *complets*, tous de même surabondance, définissant $\infty^h, \infty^{h-1}, \dots, \infty^2$ courbes C_m , à *structure interne dissymétrique*: sur une C_m quelconque les contenant, il y a 1, 2, ..., $h-1$ points communs au groupe F et au groupe P⁽¹⁾. Il est bien clair qu'il y a avantage à construire tous ces groupes en en déterminant d'abord la portion symétrique; c'est pour cette raison que certaines lignes du tableau T n'ont pas été remplies ou que d'autres sont marquées d'un astérisque (*): elles correspondent au cas où la courbe C'_m issue de V contient, *obligatoirement*, mais non plus facultativement, une portion du groupe F ou tout le groupe F; on aurait ainsi un groupe anormal complet à structure dissymétrique; il n'eût pas été incorrect de remplir la ligne, mais de cette façon on est prévenu que le groupe de mêmes caractéristiques à structure symétrique n'existe pas. Ainsi on aurait pu écrire

	$m = 6$					
	F.	$\sigma.$	V.	P.	$h.$	$s.$
cubique	1	0	17	19	8	1

mais la courbe C'_6 contenant 17 points communs à C_6 et γ_3 contient, *sans exception*, le dix-huitième; le groupe P se compose des 18 points communs à C_6 et une cubique C_3 , et d'un point complémentaire arbitraire.

Pour $m \geq 7, d = 4$, il est superflu de remplir les lignes $f = 1$ ou 2; pour $f = 3$, il est superflu de l'écrire si les trois points fixes ne sont

(1) On verra plus bas que l'on peut parfois augmenter la surabondance du groupe de départ.

pas en ligne droite et l'astérisque prévient que l'on doit, pour un groupe P symétrique, se borner au cas où F_1, F_2, F_3 sont en ligne droite.

Donc pour $m \geq 6$ et $1 \leq f \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ on conserve, en les marquant d'un astérisque, les lignes ainsi obtenues : on se reporte au tableau T pour le degré d et l'on y relève dans la colonne V tous les nombres V tels que

$$1 \leq V \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Par chaque groupe V ainsi obtenu sur une courbe C_d on fait passer une courbe C_m ; sur cette courbe C_m considérons maintenant le groupe en jeu comme jouant le rôle F et C_d le rôle de γ_d . En effet, appelons C_d, φ et F les groupes qui au tableau T, pour le degré d , s'appelaient F et V; soit δ le degré de la courbe employée pour découper sur C_d ces groupes simultanés φ et F. Nous pouvons sur cette courbe C_d figurer le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \varphi & \gamma_\delta & F \\ \gamma'_\delta & & C_m \\ F' & C'_m & V \end{array}$$

γ'_δ est une courbe issue de φ , découpant sur C_d le groupe F' , *corésiduel* avec F; donc F' et V sont une même C'_m , *variable* avec γ'_δ de sorte qu'il n'y a plus de raison pour que les courbes C'_m issues de V contiennent toutes le groupe F.

A ce même point de vue, dans le tableau T relatif à m , la fin de l'article d pour $d \geq 3$ exige que l'on ait fait le recensement de tous les groupes anormaux, complets ou incomplets pour le degré d ; il faut aussi vérifier si la courbe (C'_m) contenant un groupe incomplet ne doit pas, automatiquement, contenir un ou plusieurs points virtuels : cette remarque commence à produire son effet à partir de $m = 9$; ainsi pour $m = 9, d = 6$ on a, en particulier,

$m = 9$						
	F.	$\sigma.$	V.	P.	$h.$	$s.$
sextique	34	8	20	61	1	9
	35	9				
	36	10	18	63	1	11

Il n'y a pas à compléter la ligne $f = 35$, car si une C_9 contient déjà 35 points communs à C_6 et C'_6 , elle contient, *sans exception*, le dernier. De même pour $m = 10$, $d = 7$, il n'y a pas à écrire $f = 47$ ni $f = 48$; en écrivant $f = 46$, il faut que les trois points complémentaires du faisceau de septiques soient en ligne droite.

Ces remarques montrent la grande variété d'hypothèses à envisager et la nécessité d'avoir étudié tous les groupes relatifs aux degrés 1, 2, ..., $m - 3$ avant de passer au degré m ; on voit même que non seulement on doit posséder les caractéristiques du groupe F pour le degré d , et en particulier σ , mais encore évaluer le degré *minimum* des courbes algébriques contenant F.

12. *Étude d'un cas particulier: $m = 10$, $d = 7$, $f = 28$.* — J'amorce la discussion d'un cas particulier, afin que nous voyions les propriétés cachées que la méthode permet de trouver.

Puisqu'une sextique dépend de 27 paramètres non homogènes, le cas général est celui où les courbes de degré minimum issues des 28 points F sont de degré 7; il pourra y avoir des courbes de degré inférieur: 6, 5, 4, contenant les F sans que toutes les γ_7 se décomposent avec une partie commune; mais une courbe de degré 3 entraînerait cette décomposition avec partie commune. Suivant la valeur 7, 6, 5, 4 du minimum, il y a quatre cas: A, B, C, D.

Pour le cas A, minimum 7, le tableau T relatif au degré 7 montre que tout groupe anormal, complet ou incomplet, de 28 points pour le degré 7, est toujours sur une courbe de degré inférieur à 7 (en effet, 27 points fondamentaux au plus, donc $m = 7$ avec $d = 4$, $f = 7$ ou $d = 3$, $f = 0, 1, 2$); donc on a $\sigma = 0$ et

(1)	}	$m = 10$						
		F.	σ .	V.	P.	h .	s .	
		septique. 28	0	42	58	7	1	

Les 58 points P obtenus ne peuvent être logés sur une courbe algébrique de degré inférieur à 10.

Le cas B, minimum 6, montre qu'il peut y avoir 1, 2, 3 sextiques linéairement indépendantes contenant les 28 points F, car 4 sextiques

ne pourraient exister que pour $m = 6$, $d = 1$, $f = 0$ et alors il y aurait une quintique contenant les F. On a quatre subdivisions B_a, B_b, B_c, B_d ; B_a correspond à 28 points F pris *au hasard* sur une C_6 donnée; B_b à 28 points pris sur les 36 points communs à deux courbes C_6 et C'_6 qui n'ont aucune position relative particulière; B_c et B_d sont relatifs à 3 sextiques, de sorte qu'il faut relever la valeur 1 dans la colonne h du tableau T pour $m = 6$; B_c correspond à $m = 6$, $d = 1$, $f = 5$, 28 points seulement étant conservés sur les 31 points bases du réseau de sextiques; B_d correspond à $m = 6$, $d = 2$, $f = 4$; avec le tableau T pour $m = 7$ on constate aisément que B_a, B_b, B_c donnent $\sigma = 0$, de sorte que le tableau (1) subsiste; mais B_d se retrouve pour $m = 7$, $d = 4$, $f = 7$ de sorte que $\sigma = 1$, et alors dans le tableau (1) on remplace σ par 1, h par 2. Examinons d'un peu plus près les propriétés des 58 points P; dans le cas B_a il y a une seule C_9 contenant les P; les courbes de degré 10 définies par les P ont une équation de la forme

$$(2) \quad C_9 C_1 + \lambda C_{10} + \lambda_1 C_{10}^{(1)} + \lambda_2 C_{10}^{(2)} + \dots + \lambda_5 C_{10}^{(5)} = 0,$$

où C_9 et C_{10} sont les deux courbes C_9, C_{10} déjà envisagées, C_1 une droite arbitraire, $\lambda, \dots, \lambda_5$ six constantes arbitraires; ce système découpe sur C_9 une série linéaire $g_{3,2}^5$; le genre de C_9 étant 28, Riemann-Roch apprend qu'il y a une Γ_6 et une seule contenant les 32 points Q complétant l'intersection de C_9 et C_{10} ; donc, *pour la subdivision B_a , nous prenons 22 points arbitraires R qui ne sont pas sur une même quintique et forment un groupe normal pour le degré 6; nous faisons passer par les R une C_9 et une Γ_6 se coupant en 32 points complémentaires Q; par Q on mène une C_{10} qui coupe C_9 aux 58 points P réalisant le cas B_a .*

Pour le cas B_b l'énoncé précédent subsiste avec cette seule différence que les 22 points R sont sur une quintique C_5 et une seule et continuent à former un groupe normal pour le degré 6.

En effet, pour B_b , de même qu'il y a deux courbes C_6 et C'_6 issues des F, il y a deux courbes C_9 et C'_9 issues des 58 points P. On peut donc former sur C_9 le diagramme suivant :

$$\begin{array}{rcc} 22 R & \Gamma_6 & 32 Q \\ & C_5 & C_{10} \\ 23 W & C'_9 & 58 P \end{array}$$

Ce diagramme résulte de ce qu'il y a une Γ_6 et une seule issue des 32 Q et que les 23 W sont des points *fixes* de C_9 ; il y a donc une quintique et une seule issue des 22 R et contenant les 23 W; on peut dire encore : *sur une C_5 donnée prenons 23 points W que!conques (définissant une quintique et une seule) : deux courbes C_9 et C'_9 issues du groupe W se coupent en 58 points P du type B_6 . L'équation générale des courbes Γ_{10} issues des 58 points P est alors*

$$(3) \quad C_9 C_1 + C'_9 C'_1 + \lambda C_{10} + \lambda_1 C_{10}^{(1)} + \lambda_2 C_{10}^{(2)} = 0,$$

où C_1 et C'_1 sont deux droites arbitraires, λ , λ_1 et λ_2 trois constantes arbitraires; *en général* Γ_{10} ne contient pas les 23 W et dépend de 8 paramètres; si elle contient trois points W, elle les contient tous et dépend seulement de 5 paramètres. Or le tableau

(4)	}	$m = 10$	F.	$\sigma.$	V.	P.	$h.$	$s.$	
			conique.....	1	0	19	81	4	21
			septique.....	28	0	42	58	7	1

montre que si deux courbes Γ_{10} , Γ'_{10} contiennent les 81 points bases d'un faisceau de C_9 , les 19 points complémentaires sont sur une conique, issue d'un point fixe de Γ_{10} si Γ'_{10} varie; ici tant que Γ_{10} ne contient que les 58 P sans contenir les 23 W, elle est coupée par une autre Γ'_{10} du système (3) en 42 points complémentaires situés sur une C_7 , variable avec Γ'_{10} , mais contenant 28 points fixes de Γ_{10} ; imaginons maintenant que Γ_{10} contienne aussi les 23 points W, une autre courbe du système (3), Γ'_{10} , donne toujours 42 points variables, une C_7 variable et 28 points fixes de Γ_{10} ; imaginons que la courbe Γ'_{10} variable vienne aussi à contenir les 23 points W : alors les 42 points variables comprennent les 23 points W et 19 autres points situés sur une conique C_2 ; donc la C_7 variable se décompose en C_2 et en C_5 qui contient les W : nous retrouvons directement cette propriété des 23 W d'être sur une C_5 ; les 28 points F se composent alors des 27 points complémentaires communs à Γ_{10} et C_5 et du point complémentaire commun à C_2 et Γ_{10} . Donc tant que Γ_{10} ne contient pas les 23 points W, les 28 points F définissent un faisceau de sextiques indécompo-

sables ; dès que Γ_{10} contient les 23 points W, les 28 points F sont tels que 27 sont sur une C_3 unique et le faisceau de sextiques comprend cette quintique fixe et une droite arbitraire issue du vingt-huitième.

Pour B_c , on conserve l'énoncé de B_a sauf que les 22 points R sont bases d'un faisceau de quintiques, les trois autres points de base de ce faisceau n'étant pas en ligne droite. Pour le cas B_d les 22 points R sont bases d'un faisceau de quintiques et cette fois les trois autres points de base sont en ligne droite.

On achèverait de même la discussion des cas C et D et l'on peut, même dans le cas B, trouver bien d'autres propriétés de la figure : étudier par exemple les propriétés du groupe P au point de vue du degré 9.

13. *Étude simultanée des groupes F, V, P.* — J'ai construit le tableau T, en me servant des caractéristiques, pour le degré d , du groupe F et non du groupe V ; F est commode, parce que les γ_d issues du groupe F ont pour dimension h , et les C_m issues du groupe P, $1 + h$; par contre, V donne des énoncés plus frappants : par exemple 13 points P du plan ont pour surabondance 1 pour le degré 4 si les trois nouveaux points communs à deux quartiques issues de P sont en ligne droite.

Si $d = m - 3$, le théorème de Riemann-Roch permet justement de déduire les caractéristiques, pour le degré $m - 3$, de chaque groupe F, V en fonction de celles de l'autre.

J'ai indiqué plus haut l'énoncé précis : la surabondance du groupe P pour le degré m est le nombre de C_{m-3} linéairement indépendantes passant par le groupe V ; donc, déterminer la dimension du système linéaire C_m déterminé par H points P donnés revient à un problème de même espèce relatif à un degré égal au plus à $m - 3$; on doit en effet, si l'on profite de cette méthode, chercher s'il existe soit zéro, soit une seule C_m contenant les P : dans l'affirmative, la question est résolue ; sinon il existe au moins deux C_m et l'on cherche si toutes n'ont pas une partie commune ; si cela n'a pas lieu, on trace deux C_m quelconques issues du groupe et l'on appelle V l'ensemble de leurs autres points communs et l'on recommence pour V et le degré $m - 3$ la recherche ; il n'y a plus lieu d'écarter ici le cas où l'on a zéro ou une seule courbe du degré demandé, ou bien où il y a décomposition avec une partie com-

mune à toutes les courbes du système. On pourrait comme exercice reprendre le cas amorcé de 58 points et du degré 10.

Il y aurait intérêt à introduire le degré minimum des courbes algébriques passant par le groupe V; d étant ce minimum (égal ou inférieur bien entendu à $m - 3$), V figure à l'article d ainsi que le groupe P; si les courbes de degré $d + 1, d + 2, \dots, m - 3$ menées par V se décomposent nécessairement en une courbe de degré d et un morceau complémentaire, le groupe V ne figure au tableau T qu'à l'article d ; cherchons la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi. D'abord il n'y aura qu'une courbe γ_d de degré d contenant V, sinon il y aurait des courbes indécomposables de degré $d + 1$ contenant V; donc l'équation générale des C_{m-3} contenant V, est $\gamma_d C_{m-d-3} = 0$ où C_{m-d-3} est arbitraire : il y a donc exactement $\frac{(m-d-1)(m-d-2)}{2}$ courbes C_{m-3} linéairement distinctes contenant V et ce nombre est égal à s : ceci d'après la formule (3) du paragraphe 9 entraîne que $\sigma = 0$; réciproquement si $\sigma = 0$, $\gamma_d C_{m-d-3} = 0$ est l'équation générale des C_{m-3} contenant V. Donc :

Tout groupe P provenant d'un groupe F normal pour le degré d ne figure qu'une fois dans T.

Tout groupe P figurant plusieurs fois dans le tableau T au degré $d, d + 1, \dots$ correspond, pour chacun de ces degrés, à un groupe F, F', ... anormal pour ce degré respectif.

Tout groupe P provenant d'un groupe F anormal pour le degré d figure au moins une seconde fois dans le tableau T, à moins que $d = m - 3$.

La condition nécessaire et suffisante pour que les courbes de degré $d + 1, d + 2, \dots, m - 3$ contenant un groupe V aient toutes une partie commune de degré d est que le groupe F soit normal pour le degré d .

Le premier exemple rencontré est

(1)	}	$m = 7$						
		F.	σ .	V.	P.	h .	s .	
		cubique....	9	1	12	37	1	4
		quartique..	16	3	12	37	1	4

Plus généralement on a pour $m \geq 7, 3 \leq p \leq \frac{m}{2}$

	m						
	F.	$\sigma.$	V.	P.	$h.$	$s.$	
degré $p \dots$	p^2	$\frac{(p-1)(p-2)}{2}$	$p(m-p)$	$m^2 - pm + p^2$	1	$\frac{(m-p)^2 + p^2 + 4 - 3m}{2}$	
degré $m-p.$	$(m-p)^2$	$\frac{(m-p-1)(m-p-2)}{2}$	$p(m-p)$	$m^2 - pm + p^2$	1	$\frac{(m-p)^2 + p^2 + 4 - 3m}{2}$	

Si l'on part de deux courbes C_p, C'_p , leurs p^2 points d'intersection forment un groupe normal pour le degré m , puisque $m \geq 2p$; on mène C_m par ce groupe, et alors le groupe V commun à C_p et C_m est situé sur une courbe C_{m-p} d'après la théorie de la résiduation; les courbes de degré $m - p$ menées par V ont donc pour équation générale

$$C_p \Gamma_{m-2p} + C_{m-p} = 0,$$

où Γ_{m-2p} est un polynome arbitraire de degré $m - 2p$; chaque courbe de degré $m - p$ menée par V donne donc $(m - p)^2$ points complémentaires, situés d'après la résiduation sur une C'_{m-p} et l'on voit qu'à chaque groupe F de p^2 points bases d'un faisceau de C_p situé sur C_m correspondent $\infty^{\frac{(m-2p+1)(-2p+2)}{2}}$ groupes de points F' situés sur C_m et bases d'un faisceau de C_{m-p} ; mais à un groupe F' correspond un groupe F et un seul. Nous verrons plus tard qu'inversement sur une C_m donnée *a priori* on peut trouver une infinité de groupes de p^2 points bases d'un faisceau de C_p .

Si le même groupe de points P est donné deux fois par les courbes γ_d, γ_{d+d} et des groupes respectifs F, F' de surabondance σ, σ' , on a $\sigma' > \sigma > 0$ sans égalité, car

$$s = \frac{(m-d-1)(m-d-2)}{2} + \sigma = \frac{(m-d-d'-1)(m-d-d'-2)}{2} + \sigma'.$$

Dans le tableau T, pour $m = 7$, nous lisons :

	$m = 7$						
(3)	F.	$\sigma.$	V.	P.	$h.$	$s.$	
cubique.....	8	0	13	36	1	3	
quartique...	15	2	13	36	1	3	

Nous sommes certains qu'il ne peut y avoir identité entre les deux groupes de 36 points P de surabondance 3 obtenus par ces deux procédés : dans le premier type, il passe exactement trois quartiques par le groupe V, elles sont décomposées en la cubique γ_3 et une droite arbitraire; dans le second type, il passe aussi trois quartiques par le groupe V, mais il n'y a parmi elles aucune cubique.

14. Le groupe V définit exactement s courbes indépendantes de degré $m - 3$, donc a pour surabondance h pour le degré $m - 3$; donc si $d < m - 3$, la surabondance σ_1 de V pour le degré d est supérieure à h , sans égalité.

Brill et Noether étudient la réciprocité, pour le degré $m - 3$, de deux groupes découpés sur C_m par une C_{m-3} ; il est bon ici d'étudier une espèce de réciprocité de F et V pour le degré d , si $d < m - 3$. Soit k la dimension du système linéaire des γ_d issues de V; h et σ , relatifs à F et au degré d , ont donc pour homologues k et σ_1 , relatifs à V et au degré d ; on a $h \geq 1$, $k \geq 0$. On peut écrire

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} h + f = \frac{d(d+3)}{2} + \sigma, \\ k + md - f = \frac{d(d+3)}{2} + \sigma_1, \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \sigma + \sigma_1 = h + k + d(m - d - 3).$$

Nous avons vu que $\sigma = 0$ entraîne $k = 0$, $\sigma_1 = h + d(m - d - 3)$, mais la nullité de k n'entraîne pas celle de σ : il suffit de se reporter au tableau (1) du paragraphe précédent; les 12 points V, pour le degré $d = 3$ donnent une seule cubique, donc $k = 0$ et pourtant $\sigma = 1$. Si $d = m - 3$ on a $\sigma_1 = h$, $\sigma = k$; si $d < m - 3$, on a $\sigma_1 > h$ sans égalité et par suite $\sigma < k + d(m - d - 3)$.

Cette étude est utile pour la suite et en particulier pour résoudre ce problème : connaissant un groupe P et une C_m qui le contient, combien correspond-il de groupes F sur C_m à ce groupe P? Si $k = 0$, on a un seul groupe F; si $k \neq 0$, on a ∞^k groupes F.

De même étant donnés une courbe C_m et un groupe F, combien correspond-il à ce groupe F de groupes P (d est donné)? Il suffit d'avoir la dimension l du système linéaire de courbes C_m issues de V :

il y aura ∞^{l-1} groupes P. Remarquons que $C_m + C_{m-d}\gamma_d = 0$, où C_{m-d} est un polynôme arbitraire de degré $m-d$, donne une courbe de degré m contenant V et F, donc

$$l \geq \frac{(m-d+1)(m-d+2)}{2},$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $f = 0$; ceci montre qu'à chaque groupe F correspondent toujours au moins ∞^0 groupes P. Introduisons la surabondance s_1 du groupe V pour le degré m ; la surabondance de V pour le degré $m-3$ est h , donc $s_1 < h$. D'autre part,

$$l = \frac{m(m+3)}{2} - md + f + s_1 \geq \frac{(m-d+1)(m-d+2)}{2},$$

d'où

$$s_1 \geq \frac{d^2 - 3d + 2}{2} - f,$$

et si l'on remplace f par sa valeur $\frac{d(d+3)}{2} + \sigma - h$,

$$h > s_1 \geq h - \sigma - 3d + 1.$$

D'autre part on a évidemment

$$s + s_1 \leq \frac{(m-1)(m-2)}{2},$$

car le second membre est la surabondance du total P + V pour le degré m . En remplaçant s par $\frac{(m-d-1)(m-d-2)}{2} + \sigma$, on a

$$s_1 \leq \frac{d(2m-d-3)}{2} - \sigma.$$

Le groupe V peut être normal pour le degré m : s_1 est en effet le nombre des courbes C_{m-3} passant par P; donc s_1 est nul s'il n'y a aucune courbe de degré $d-3$ passant par le groupe F; $s_1 = 0$ entraîne

$$f \geq \frac{(d-1)(d-2)}{2},$$

de sorte qu'inversement, si $d \geq 3$ l'inégalité $f < \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ donne des groupes V anormaux pour le degré m .

15. *Nombre minimum de points nécessaires à la construction d'un groupe P.* — H points P ayant la surabondance s pour le degré m , $H - s$ d'entre eux, choisis avec tact, forment un groupe *normal incomplet* [on a $H - s \leq \frac{m(m+3)}{2} - 1$ si l'on veut qu'il y ait au moins deux C_m]. Or $H - s$ points pris *au hasard* dans le plan forment un groupe non seulement normal, mais *complet*; donc nous ne pourrions marquer à l'avance que $H - s - t$ d'entre eux. Cherchons à déterminer t .

Raisonnons sur un exemple précis

		$m = 10$						
(1)	{	F.	σ .	V.	P.	h .	s .	
		sextique...	18	1	42	58	10	4
		septique...	28	3	42	58	10	4

On peut se borner à la première façon d'obtenir le groupe des 58 points P ; les 18 points F sont intersection d'une C_3 et d'une C_6 de sorte que la courbe de degré minimum passant par P est une C_7 *unique*; les 42 V forment une partie de l'intersection de C_6 et C_{10} , le reste étant les 18 F intersection *complète* de C_6 et C_3 , donc les 42 V sont aussi sur une C_7 ; les 42 V forment donc l'intersection de C_6 et C_7 et ils ont pour surabondance 1 pour le degré 10, puisque par P passe l'unique C_7 .

Le tableau (1) nous montre que si l'on prend *au hasard* 11 points Q pour les ajouter aux P , il y aura une C_{10} unique contenant les points P et ces nouveaux points Q ; les 11 points Q peuvent être choisis une fois pour toutes, quels que soient les divers groupes de 58 points P de cette espèce. Il faut donc trouver les 18 F : la C_3 est unique et demande 9 paramètres: retenons 9; une fois C_3 tracée, il suffit de marquer 17 points F sur elle pour avoir, d'une façon unique le dix-huitième; soit 17 paramètres de plus, retenons $9 + 17$. Par les 18 F et les 11 points Q faisons passer une C_{10} , ce qui fait $65 - 18 - 11$ ou 36 paramètres nouveaux; retenons $9 + 17 + 36$. Par les 18 F nous faisons passer une sextique *arbitraire* qui n'a pas à intervenir dans le décompte; elle donne 42 V par lesquels on fait passer une courbe C'_{10} : le groupe V a pour surabondance 1 pour le degré 10, le système linéaire de courbes C'_{10} est de dimension $65 - 41 = 24$ et découpe sur C_{10} une

série g_{33}^{23} : il faut 23 paramètres de plus pour avoir le groupe P et comme au groupe P correspond *un seul* groupe F (par les 42 V une seule sextique), aucun des $9 + 17 + 36 + 23$ ou 85 paramètres introduits successivement n'est étranger au problème. Retournons à la C_7 unique contenant les P : 35 paramètres la fixent, et il reste, C_7 tracée, 50 paramètres à notre disposition : nous pouvons donc marquer *arbitrairement* 50 points du groupe P *sur une C_7 donnée* a priori et à ces 50 points correspondent un nombre *fini* de configurations des 8 points restants. Krey indique aux *Mathematische Annalen*, t. 19, 1882, diverses méthodes pour calculer de tels nombres. On peut raisonner autrement : donner d'abord 35 points du plan, ils déterminent la C_7 , et sur elle on pourra encore marquer arbitrairement 15 autres points. Si l'on se servait de la dernière ligne du tableau (1), il faudrait remarquer que les 28 points F sont à l'intersection d'un γ_4 et d'une γ_7 , le même décompte conduirait à 88 au lieu de 85, cela tient à ce qu'à chaque groupe P correspondent ∞^3 groupes de 28 points F, car par les 42 V passent ∞^3 septiques (et une seule sextique) : le nombre 3 est à retrancher.

Cette méthode réussit chaque fois que la courbe de degré *minimum* contenant le groupe P est *unique* et se simplifie un peu si le groupe F est normal pour le degré d .

16. Si la courbe de degré minimum δ qui contient les P n'est pas unique, mais appartient à un système linéaire, il y a avantage à se reporter au tableau T pour le degré δ , tableau où P figure déjà comme groupe anormal *complet ou incomplet*, à condition que δ soit inférieur à m et non égal à m ; mais nous pouvons, si nous préférons, recommencer les décomptes suivant la même méthode et nous arrivons ainsi à un nombre de paramètres 2λ ou $2\lambda + 1$. Si le nombre obtenu 2λ est pair, on peut marquer arbitrairement dans le plan vierge λ points du groupe et l'on a $\lambda = \Pi - s - t$, t étant un entier positif; les $s + t$ points complémentaires du groupe ont alors un nombre fini de configurations et la connaissance de t , seulement, au lieu de $s + t$, points de la configuration suffit pour obtenir cette configuration d'une façon unique; il y a avantage à avoir remplacé m par δ , ce qui revient à augmenter s . Si le nombre obtenu $2\lambda + 1$ est impair, on ne peut

marquer que λ points, arbitrairement comme plus haut, et les $s + t$ points restants décrivent alors un lieu algébrique, en général le même pour tous et sur ce lieu on a une évolution I'_{s+t} .

L'exemple le plus simple est fourni par le groupe de 13 points bases d'un réseau de quartiques : par deux points ω_1, ω_2 donnés *a priori*, on mène une C_4 quelconque : 12 paramètres ; sur C_4 on choisit un point F, total 12 + 1 ; de F on mène une droite donnant sur C_4 les points V_1, V_2, V_3 et l'on mène par V_1, V_2, V_3 des courbes C'_4 qui découpent sur C_4 une série linéaire g_{13}^{10} ; total 12 + 1 + 10 ou 23 paramètres. Marquons donc arbitrairement 11 points *quelconques* P_1, P_2, \dots, P_{11} ; supposons qu'ils ne soient pas sur une même cubique ; circonscrivons-leur une C_4 fixe et une C'_4 variable : sur C_4 les courbes C'_4 découpent une série g_3^2 ; la conique circonscrite à un groupe quelconque de la série passe par trois points A, B, C de C_4 et chaque droite BC, CA ou AB perce C_4 en deux points que l'on peut associer aux points P_1, P_2, \dots, P_{11} . En effet si BC coupe C_4 en II et II', on voit que, en menant par A une droite quelconque coupant C_4 en V_1, V_2, V_3 , le groupe II, II' V_1, V_2, V_3 est résiduel de A, B, C, donc sur une même courbe Γ_4 avec P_1, P_2, \dots, P_{11} .

Il a donc suffi de réduire à deux droites la conique circonscrite à ABC.

Sur chaque quartique du faisceau linéaire $P_1, P_2, \dots, P_{11}, \omega_1, \omega_2$ on trouve donc trois couples, et trois seulement, et quand cette quartique décrit le faisceau, les couples engendrent une courbe algébrique C du type hyperelliptique, car sur C la correspondance (II, II') est birationnelle, involutive. Soient m le degré de C, d le degré de multiplicité sur C de chaque point P_1, P_2, \dots, P_{11} : en coupant C par C_4 on a

$$4m = 11d + 6,$$

d'où, h étant un entier inconnu ≥ 0 ,

$$d = 2 + 4h, \quad m = 7 + 11h.$$

Nous verrons que l'hypothèse la plus simple, $h = 0$, est réalisée ; la courbe C est du degré 7, admet chaque point P_i pour point double ; chaque courbe C_4 est donc une adjointe de C ; sur C prenons un point II, son associé II', puis un autre point II₁ (distinct de II et II') et son associé II'₁, le faisceau de quartiques déterminé par $P_1, P_2, \dots, P_{11}, II, II_1$

découpent sur C une série g_2^4 : par chaque groupe U, U' de cette série passent 3 courbes C_i linéairement indépendantes ; p étant le genre de C , Riemann-Roch donne donc $3 = p + 1 - 2$ ou $p = 4$: ceci est bien d'accord avec les résultats numériques obtenus sur le degré de C et le nombre de points doubles ; ce serait même une démonstration de l'égalité $h = 0$, si l'on était certain que C n'a pas d'autres points multiples que P_1, P_2, \dots, P_{11} .

Remarquons qu'on a choisi arbitrairement P_1, P_2, \dots, P_{11} ; les deux quartiques C_4 et C_4' se coupent encore en U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 et l'on a circonscrit une conique aux U pour déterminer A, B, C : cette construction ne peut échouer que si 4 des U sont en ligne droite : mais alors le cinquième serait sur une même cubique avec P_1, P_2, \dots, P_{11} et la construction donnée écarte le cas où les 11 P sont sur une même cubique. Mais si ce cas de dégénérescence se produit, on peut prendre, pour compléter le groupe, le point fixe de la cubique C_3 où passent les quartiques du système $\infty^3 (P_1, P_2, \dots, P_{11})$ puis un point arbitraire du plan.

La même méthode, bien que cette fois on trouve un nombre fini de configurations, s'applique à 21 points basés d'un réseau de quintiques ; on trouve 34 paramètres, donc on marque arbitrairement P_1, P_2, \dots, P_{17} et on leur adjoint deux points ω_1, ω_2 donnés *a priori* une fois pour toutes ; dans le faisceau $(P_1, P_2, \dots, P_{17}, \omega_1, \omega_2)$ il y a des quintiques bien déterminées portant un groupe U_1, U_2, U_3, U_4 associé aux P ; λ étant le paramètre individualisant les quintiques du faisceau, fixons λ et coupons cette quintique λ par le système ∞^3 de quintiques $(P_1, P_2, \dots, P_{17})$; on obtient une série linéaire g_5^3 de groupes V_1, V_2, \dots, V_8 et par l'un d'eux, pris une fois pour toutes, menons une cubique coupant λ en A_1, A_2, \dots, A_7 . Le système ∞^2 de cubiques (A_1, A_2, \dots, A_7) découpe sur λ la même série g_5^3 . Or si λ porte U_1, U_2, U_3, U_4 , en choisissant dans le système ∞^3 de quintiques celles qui passent encore par U_1 et par suite par U_2, U_3, U_4 , on obtient comme groupe $U_1, U_2, U_3, U_4, V_1', V_2', V_3', V_4'$ où les quatre V' sont en ligne droite, de sorte que la cubique contenant les A , les U et les V' se décompose : l'un des A, A_7 , par exemple, est sur la droite V_1', V_2', V_3', V_4' : et A_1, A_2, \dots, A_6 déterminent une C_2 passant par U_1, U_2, U_3, U_4 . Réciproquement, si A_1, A_2, \dots, A_6 sont sur une conique C_2 , l'un des groupes

V se réduit aux quatre points U_1, U_2, U_3, U_4 , où C_2 perce de nouveau λ et à quatre points V' en ligne droite avec A, de sorte que λ répond à la question. Mais alors la cubique générale $A_1 A_2 \dots A_6 A_7$ perce C_3 en six points situés sur la conique C_2 et en 9 autres, à savoir les V et A_7 , qui sont donc situés sur une cubique Γ_3 : A_7 est le neuvième point de base du faisceau de cubiques V_1, \dots, V_8 ; réciproquement, si λ contient ce neuvième point base, A_1, \dots, A_6 sont sur une conique. Or ayant choisi une fois pour toutes une quintique particulière du système $\infty^3(P_1 P_2 \dots P_{17})$, le faisceau λ donne 8 points déterminés rationnellement au moyen de λ , dans leur ensemble; le neuvième point de base du faisceau de cubiques s'obtient rationnellement au moyen de λ : en écrivant qu'il est sur la quintique λ , on a une équation rationnelle en λ ; à chaque racine correspond un seul groupe $U_1 U_2 U_3 U_4$. Il est facile de voir que l'équation en λ s'abaisse au premier degré; en effet si $U_1 U_2 U_3 U_4$ et $U'_1 U'_2 U'_3 U'_4$ étaient deux groupes différents, comme chaque U ou U' détermine d'une façon unique les trois associés, aucun U ne coïncide avec un U'; le faisceau $P_1 P_2 P_3 \dots P_{17} U_1 U'_1$ contient $U_2 U_3 U_4$ et $U'_2 U'_3 U'_4$ et alors U_1, U_2, U_3, U_4 seraient en ligne droite, U'_1, U'_2, U'_3, U'_4 aussi; mais alors le système UU' étant sur une conique, les 17 P auraient la surabondance 1 pour le degré 5; il suffira donc de les choisir au hasard pour que cela ne puisse arriver.

On constate que les réseaux de C_m à $(m^2 - m + 1)$ points bases donnent, pour m pair le cas du lieu géométrique, pour m impair le cas du nombre fini de configurations, car le système de points bases dépend de $m^2 + 2m - 1$ paramètres. On opère par la même méthode que pour $m = 4$ et $m = 5$ et l'on a à prendre, sur une C_m qui engendre un faisceau linéaire, une série linéaire pouvant être engendrée par des courbes C'_m ou C_{m-2} et il suffit d'exprimer que la C_{m-2} peut dégénérer en une droite et une C_{m-3} .

17. Voici une série de théorèmes curieux obtenus sur le groupe de 18 points surabondants pour le degré 5 donnés par $d = 2, f = 3, s = 1$. Un tel groupe dépend de 32 paramètres et le degré minimum des courbes qui le contiennent est 5; on peut donc donner arbitrairement P_1, P_2, \dots, P_{16} et l'on a un nombre fini de couples Π, Π' associés; à la page 505 du tome 19 (année 1882) des *Mathematische Annalen*,

Krey ⁽¹⁾ démontre qu'il y a des groupes de $\frac{m(m+3)}{2} - 2$ points définissant pour le degré m , non pas un réseau mais un système ∞^3 , que l'on peut choisir $\frac{m(m+3)}{2} - 4$ points du groupe et qu'il leur correspond $\frac{1}{8}(m-2)(m-4)(m^2-9)$ couples associés; donc ici $m = 5$ et l'on aura six couples Π, Π' .

J'écarte immédiatement le cas où les points P_1, \dots, P_{16} seraient sur une quartique C_4 , car tout point de C_4 pourrait être choisi comme point Π et l'on aurait pour associés à Π , non pas *un*, mais *trois* points Π', Π'', Π''' (la méthode suivie permet d'ailleurs de retrouver ce résultat de dégénérescence).

Adjoignons trois points $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, choisis une fois pour toutes, aux 16 P; on a un faisceau de quintiques, parmi lesquelles il faut choisir les quintiques privilégiées passant par Π et Π' . Ayant fixé λ , coupons la quintique λ du faisceau, par une C'_5 du système $\infty^4 (P_1, \dots, P_{16})$. Le tableau T pour $m = 5$ montre que tout système de 16 points P surabondant pour le degré 5 est sur au moins une quartique, donc le système de quintiques $(P_1, P_2, \dots, P_{16})$ est bien de dimension 4; on a sur λ une série g^3_5 et la cubique issue d'un groupe V_1, V_2, \dots, V_9 particulier donne sur λ six points F_1, F_2, \dots, F_6 corésiduels des P, donc non situés sur une conique (sinon cette conique percerait λ en 4 points situés avec les P sur une quartique); V_1, V_2, \dots, V_9 ne peuvent être bases d'un faisceau de cubiques, sinon F_1, F_2, \dots, F_6 seraient sur une conique. Si λ porte le couple Π, Π' et si C'_5 passe aussi par Π, Π' , on obtient le groupe particulier $\Pi, \Pi', V'_1, \dots, V'_7$ où les 7 V' sont sur une conique: donc l'unique cubique issue de Π, Π' et des V' se décompose en la droite Π, Π' et la conique circonscrite aux V' ; il suffit donc d'exprimer que sur les points F_1, F_2, \dots, F_6 il y en a trois en ligne droite. La réciproque s'établit aisément. En fixant C'_5 et faisant varier λ , on a, pour chaque λ , un seul système F_1, F_2, \dots, F_6 et la condition géo-

(1) Les démonstrations de Krey sont purement analytiques. Au Chapitre III (§ 9) la géométrie de l'espace nous donnera la démonstration de ce fait que les couples Π, Π' , associés à P_1, P_2, \dots, P_{16} , sont au nombre de six.

Nous verrons plus loin, Chapitre III (§ 12), un cas de dégénérescence où les points P_1, P_2, \dots, P_{16} peuvent admettre non plus six couples associés, mais ∞^1 couples associés.

métrique trouvée donne une équation rationnelle en λ , de degré 6 d'après la comparaison avec Krey. Sur une quintique privilégiée la droite $F_1 F_2 F_3$ donne Π, Π' . Appelons les six couples (A, A') , (B, B') , (C, C') , (D, D') , (E, E') , (F, F') .

Les quintiques circonscrites aux P et A, A' dépendent exactement de trois paramètres et ne contiennent pas d'autres points fixes, car le groupe $PA A'$ est complet; si l'on impose B , il reste donc *exactement* deux paramètres et le réseau obtenu a *vingt* points de base connus: les P, A et A', B , et B' . Or le tableau T pour $m = 5$, consulté à la colonne h , montre que le réseau ($h = 1$) contient *exactement* 19 ou 21 points fixes; donc le réseau obtenu ici a un nouveau point fixe que j'appellerai (A, B) . Ce point ne peut coïncider avec un point des quatre autres couples, sinon le *réseau* aurait plus de 21 points fixes. On sait que deux quintiques quelconques du réseau se coupent encore en quatre points en ligne droite. Imposons alors C de façon à avoir un faisceau: les quatre points sont: $C, C', (A, C), (B, C)$. Ceci prouve que la droite CC' contient $(A, C), (B, C), (D, C), (E, C), (F, C)$. Autrement dit, (A, B) est le point commun aux droites AA', BB' . Si l'on considère les trois couples $(A, A'), (B, B'), (C, C')$ et les trois sommets du triangle formé par les droites AA', BB', CC' on a donc 9 points situés avec P_1, \dots, P_{16} sur un faisceau de quintiques; la quintique du faisceau passant par D contient $D, D', (D, A), (D, B), (D, C)$, c'est-à-dire 5 points en ligne droite; donc il y a ∞^3 sextiques circonscrites aux 16 P , aux quatre couples $(A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D')$ et aux 6 points $(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D)$, soit un total de 30 points; or nous savons que toute sextique qui contient 22 points de base d'un faisceau de quintiques contient encore les 3 points de base restants, s'ils ne sont pas en ligne droite: donc les ∞^5 sextiques contenant les 16 $P, A, A'; B, B'; C, C'$ contiennent encore $(B, C), (C, A), (A, B)$; si nous imposons à ces sextiques D et D' , on trouve le système ∞^3 trouvé plus haut; assujétissons les sextiques à contenir encore E et E' , on trouve un faisceau de sextiques dont les 26 points fondamentaux sont les 16 P , les cinq couples $A, A'; B, B'; C, C'; D, D'; E, E'$, tandis que les 10 points surabondants sont $(A, B), (A, C), \dots, (D, E)$. Assujétissons la sextique à contenir encore F , elle est déterminée complètement, mais ne peut contenir F' , sinon chaque droite telle que AA' aurait avec la sextique

les 7 points communs A, A', (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (A, F) et la sextique devrait se réduire à six droites contenant le total des 16 points P, ce qui est impossible si les 16 points P ont été pris au hasard; donc les 16 points P et cinq des couples associés déterminent bien un faisceau de sextiques, mais les six couples ne sont pas sur une même sextique avec les 16 points P. D'autre part, nous avons obtenu à partir des 16 points P un total de 43 points : les 16 P, les 12 points des six couples, puis les 15 points tels que (A, B); ces 43 points sont bases d'un réseau de septiques; rappelons que 25 points bases d'un faisceau de quintiques ont pour surabondance 6 pour le degré 5, 3 pour le degré 6, 1 pour le degré 7; que 30 points intersection d'une quintique et d'une sextique ont pour surabondance 6 pour le degré 6, 3 pour le degré 7, que 36 points bases d'un faisceau de sextiques ont pour surabondance 6 pour le degré 7. Les 25 points P; A, A'; B, B'; C, C'; (BC), (CA), (AB) sont bases d'un faisceau de quintiques, donc ils donnent pour le degré 7 la séparation

$$(1) \quad P; A, A'; B, B'; C, C'; (AB), (AC), \quad (BC).$$

ou le schéma à crochets

$$(2) \quad [24]_7 + [1]$$

Appliquons le théorème ainsi obtenu au groupe obtenu en ajoutant aux points de gauche de la ligne 1 les trois points D, D' et (AD); nous voyons que (BD) et (CD) sont conséquence des points de gauche dans la séparation

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} P; A, A'; B, B'; C, C'; (AB), (AC) \quad (BC), \\ D, D'; (AD), \quad (BD), (CD), \end{array} \right.$$

cela donne le schéma à crochets

$$[24, 3]_7 + [1, 2]$$

relatif à 30 points situés, nous l'avons vu, à l'intersection d'une quintique et d'une sextique. Appliquons le théorème exprimé par (3) au groupe obtenu en ajoutant aux points de gauche dans (3) les points E, E', (AE) ce qui revient à faire jouer à E le rôle de D dans cette proposition : on a comme conséquence les points (BE), (CE); on peut

remarquer qu'on peut alors appliquer le résultat (1) en remplaçant B et C par D, E et qu'ainsi (D, E) est aussi une conséquence : on a donc la séparation

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} P; A, A'; B, B'; C, C'; (AB), (AC), & (BC), \\ D, D', (AD), & (BD), (CD), \\ E, E', (AE), & (BE), (CE), (DE) \end{array} \right.$$

ou le schéma à crochets

$$[24, 3, 3]_7 + [1, 2, 3]$$

relatif à 36 points bases, comme nous l'avons vu, d'un faisceau de sextiques. Enfin ajoutons aux 30 points de gauche de (4) les points F, F', (AF).

L'application du théorème exprimé par (4) donne comme conséquence (BF), (CF), (DF), et l'on voit que (EF) est lui-même une conséquence, car il suffit d'appliquer le résultat (1) en y remplaçant B et C par E et F. On a ainsi la séparation

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} P; A, A'; B, B'; C, C'; (AB), (AC), & (BC), \\ D, D'; (AD), & (BD), (CD), \\ E, E'; (AE), & (BE), (CE), (DE), \\ F, F'; (AF), & (BF), (CF), (DF), (EF) \end{array} \right.$$

ou le schéma

$$(6) \quad [24, 3, 3, 3]_7 + [1, 2, 3, 4],$$

qui prouve bien que les 43 points énumérés sont bases d'un réseau de septiques. Ce réseau est même très *particulier*, car dans le réseau général il y a 10 équations surabondantes qui ne manifestent que lorsqu'on a déjà utilisé 33 points (choisis d'ailleurs au hasard)

Nous allons montrer une autre propriété intéressante : si l'on marque au hasard P_1, P_2, \dots, P_{16} dans le plan, il faut résoudre une équation du sixième degré pour trouver les couples $(A, A'), \dots, (F, F')$; or on peut s'arranger pour construire, sans avoir d'équation à résoudre, l'ensemble des 16 points P et des six couples associés.

Sur les trois côtés d'un triangle quelconque marquons respectivement un couple de points A, A'; B, B'; C, C'; deux quintiques quelcon-

ques passant par ces six points et les trois sommets du triangle (BC) (CA), (AB) se coupent en 16 points P pour lesquels A, A' est un couple associé, car les 7 points B, B', C, C', (BC), (CA), (AB) sont sur une conique, et une seule (formée de deux droites), de sorte que P, A, A' ont bien la surabondance 1. On a donc ainsi les 16 P et trois couples.

Faisons un progrès : marquons cinq couples A, A'; B, B'; C, C'; D, D'; E, E'; d'où nous déduisons les 10 points (A, B), ..., (D, E) : deux sextiques passant par ces 20 points se coupent en 16 P pour lesquels A, A', ..., E, E' sont cinq couples associés. En effet, sur les 36 points communs aux deux sextiques retirons les six points en ligne droite E, E', (EA), (EB), (EC), (ED) il reste donc 30 points intersection d'une sextique et d'une C_5 unique. Retirons encore les 5 points en ligne droite D, D', (DA), (DB), (DC). Il reste 25 points communs à C_5 et à une autre quintique C'_5 , et nous retombons sur la proposition qui précède.

Dernier progrès : marquons six couples A, A'; B, B'; C, C'; D, D'; E, E'; F, F', adjoignons 6 points V_1, V_2, \dots, V_6 choisis sur une droite arbitraire et ajoutons les points (AB), ..., (EF) : on a 33 points par lesquels nous faisons passer deux septiques qui se coupent en 16 points P nouveaux qui admettent A, A'; ...; F, F', pour couples associés. On opère comme plus haut en retirant les 7 points F, F', (FA), ..., (FE) en ligne droite, il reste 42 points situés sur une C_6 unique ; on retire les 6 points en ligne droite V_1, \dots, V_6 et il reste 36 points intersection de C_6 avec une C'_6 et nous retombons sur ce qui précède.

En analysant cette dernière construction, on voit qu'il faut donner 24 paramètres pour fixer A, A'; ...; F, F'; ensuite il faut fixer la position de la droite qui porte les V et la position des V sur elle, ce qui donne 8 paramètres ; on peut imposer à la courbe C_7 de contenir deux points donnés *a priori* α, β , de sorte que C_7 n'introduit plus de paramètres nouveaux ; de même C'_7 passera par deux points α', β' , donnés : on retrouve donc bien les 32 paramètres annoncés pour les 16 P ; mais si, à un système P, correspond un seul total A, A'; B, B'; ...; F, F', inversement, à un ensemble de six couples A, A'; ...; F, F' donnés *a priori* correspondent ∞^8 systèmes de 16 points P.

18. *Dissection des groupes anormaux.* — Au paragraphe 8, en nous

appuyant simplement sur ce fait que m^2 points communs à C_m et C'_m ont pour surabondance le nombre ρ' ou $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ nous avons obtenu pour ce total de m^2 points la séparation

$$(1) \quad (\rho) + (\rho'),$$

qui en général ne peut être poussée plus loin, mais qui, dans les cas spéciaux étudiés, peut être poussée plus loin suivant le schéma

$$(2) \quad (\omega, \omega_1) + (\theta, \theta_1), \quad \omega + \omega_1 = \rho, \quad \theta + \theta_1 = \rho',$$

signifiant que $P_1, P_2, \dots, P_\omega$ obligent toute C_m les contenant à passer par $Q_1, Q_2, \dots, Q_\theta$; les points $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \dots, P_{\omega_1}^{(1)}$ donnent des équations indépendantes de celles obtenues par la première série $P_1, P_2, \dots, P_\omega$. Nous avons défini le schéma à crochets

$$(3) \quad [\omega]_m + [\theta]$$

qui exprime que le groupe des $\omega + \theta$ points P, Q a pour le degré m la surabondance θ . Or on peut recommencer pour le groupe surabondant P, Q exactement les mêmes considérations, en remplaçant ρ et ρ' respectivement par ω et θ : la séparation (3), analogue de (1), ne peut, en général, être poussée plus loin, quel que soit le mode de partage des $\omega + \theta$ points en deux portions de ω et θ points: mais rien n'empêche *a priori* de concevoir que (3) puisse être remplacé par la séparation analogue à (2)

$$(4) \quad [\omega - \omega', \omega']_m + [\theta - \theta', \theta'], \quad \omega > \omega' > 0, \quad \theta > \theta' \geq 0.$$

On a donc un groupe de $\omega + \theta - (\omega' + \theta')$ points, contenu dans le groupe des $\omega + \theta$ points P, Q; il forme pour le degré m un groupe de surabondance $\theta - \theta'$, et il est *complet*, sinon il aurait des points virtuels non situés dans P, Q et par suite le groupe (P, Q) serait incomplet; ici on peut avoir $\theta' = 0$, ce qui exprimerait que le groupe (P, Q) a été obtenu en adjoignant à un groupe complet ω' points pris au hasard dans le plan et forme donc un groupe à structure dissymétrique. En revenant au groupe primitif des m^2 points, on a donc une séparation

$$(\omega - \omega', \omega', \omega_1) + (\theta - \theta', \theta', \theta_1).$$

Employons une notation plus symétrique

$$(5) \quad \begin{cases} (\omega, \omega_1, \omega_2) + (\theta, \theta_1, \theta_2), \\ \omega + \omega_1 + \omega_2 = \rho \quad (\theta > 0, \quad \theta_1 \geq 0, \quad \theta_2 > 0), \\ \theta + \theta_1 + \theta_2 = \rho' \end{cases}$$

ou

$$(6) \quad \begin{cases} P_1 P_2, \dots, P_\omega, & Q_1 Q_2, \dots, Q_\theta, \\ P_1^{(1)} P_2^{(1)}, \dots, P_\omega^{(1)}, & Q_1^{(1)} Q_2^{(1)}, \dots, Q_\theta^{(1)}, \\ P_1^{(2)} P_2^{(2)}, \dots, P_\omega^{(2)}, & Q_1^{(2)} Q_2^{(2)}, \dots, Q_\theta^{(2)}. \end{cases}$$

il est bien entendu que $P_1, P_2, \dots, P_\omega$ n'admettent d'autres points virtuels que $Q_1, Q_2, \dots, Q_\theta$, puis que P_1, \dots, P_ω , réunis à $P_1^{(1)}, \dots, P_\omega^{(1)}$, n'entraînent d'autres points virtuels que $Q_1, Q_2, \dots, Q_\theta$ augmentés de $Q_1^{(1)}, \dots, Q_\theta^{(1)}$. Il suffit, bien entendu, d'un changement dans l'ordre des points pour ramener (5) à l'une des formes

$$(7) \quad \begin{cases} (\omega, \omega_1 + \omega_2) + (\theta, \theta_1 + \theta_2), \\ (\omega + \omega_1, \omega_2) + (\theta + \theta_1, \theta_2), \\ [\rho] + (\rho'). \end{cases}$$

Le nombre θ_2 est positif, non nul, comme on l'a vu au paragraphe 8. Quant au nombre θ_1 , qui peut être nul, nous pouvons remarquer que dans ce cas on peut sans inconvénient réunir les deux dernières lignes de (6); donc nous le supposerons aussi effectivement non nul.

Nous pouvons de même concevoir la séparation

$$(8) \quad \begin{cases} (\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) + (\theta, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \\ \omega + \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n = \rho, \\ \theta + \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n = \rho' \end{cases}$$

et nous supposerons tous les θ positifs, non nuls. Le nombre n est sûrement inférieur à $\rho' - 1$. Il est clair qu'un simple changement d'ordre des points peut ramener (8) à une autre forme plus simple, en remplaçant plusieurs ω consécutifs (et les θ correspondants) par leur somme effectuée. Le schéma (8), avec *parenthèses*, est relatif à m^2 points et au degré m ; il fournit des schémas à *crochets* relatifs à des groupes anormaux complets

$$(9) \quad [\omega, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{p-1}, \omega'_p]_m + [\theta, \theta_1, \dots, \theta_{p-1}, \theta_p],$$

menons des quartiques C_4 et C'_4 qui se coupent encore en P_1, \dots, P_9 . Les 12 points P, B sont intersection de C_4 avec une C_3 unique et sur cette C_3 les P sont intersection de C_3 avec un faisceau de cubiques; le groupe P, B a la surabondance 1; mais le groupe P, A a aussi la surabondance 1; on a donc deux séparations *distinctes* :

$$\left\{ \begin{array}{lll} P_1, P_2, \dots, & P_9, B_1, B_2, & B_3, \\ A_1, A_2, & & A_3, A_4, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{lll} P_1, P_2, \dots, & P_9, A_1, A_2, A_3, & A_4, \\ B_1, & & B_2, B_3, \end{array} \right.$$

toutes les autres se déduisant de l'une ou l'autre par un simple regroupement *arbitraire* dans chaque ligne.

19. Il reste à indiquer comment on peut s'arranger pour obtenir un groupe de m^2 points dont le schéma comporte dans chaque parenthèse $n + 1$ termes : $n = 1$ a été traité; il reste à traiter $n \geq 2$.

Remarquons que, si on a le schéma

$$(1) \quad (\omega, \omega_1, \dots, \omega_n) + (\theta, \theta_1, \dots, \theta_n),$$

on en déduit les schémas

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\omega + \omega_1 + \dots + \omega_{i-1}, \omega_i, \omega_{i+1} + \dots + \omega_n) + (\theta + \theta_1 + \dots + \theta_{i-1}, \theta_i, \theta_{i+1} + \dots + \theta_n), \\ [\omega + \omega_1 + \dots + \omega_{i-1} + \omega_i]_m + [\theta + \theta_1 + \dots + \theta_{i-1} + \theta_i], \\ [\omega + \omega_1 + \dots + \omega_{i-1}]_m + [\theta + \theta_1 + \dots + \theta_{i-1}], \end{array} \right.$$

qui expriment finalement que l'on a obtenu une séparation du type (6) du paragraphe précédent. En changeant donc de notations, il suffit au fond de trouver un schéma $(\omega, \omega_1, \omega_2) + (\theta, \theta_1, \theta_2)$ à trois termes : j'appelle dans ce tableau (6) P le total des points de la première ligne, W et V les totaux de la seconde et troisième respectivement. Le groupe $P + W$ est un groupe *anormal complet*, comprenant un groupe P lui-même *anormal complet*. Ces groupes $P + W$ et P seront donc obtenus dans le tableau T pour le degré m aux articles d et $d + \delta$:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & & & \boxed{m} & & \\ \gamma_d \dots & F & V & P + W & & s + s_1 & \\ \gamma_{d+\delta} \dots & \Phi & V + W & P & & s & \end{array} \right.$$

On prend pour d le degré minimum des courbes contenant V ; $d + \delta$ est le minimum du degré des courbes qui contiennent $V + W$ de sorte que $\delta \geq 0$. On peut, si $\delta > 0$, supposer que F et W n'ont aucun point commun : sinon on pourrait écrire $F = F' + f$, $W = W' + f$ et la première ligne (3) pourrait être remplacée par

$$\gamma_d \dots \dots \dots F' \quad V + f \quad P + W'$$

et le groupe $P + W'$ serait un groupe anormal complet pour lequel on traiterait le problème $[[P + W$ ou $P + W' + f$ serait finalement un groupe à structure interne dissymétrique comme on a vu plus haut]. Il y a deux hypothèses A et B à envisager suivant que $\delta \neq 0$ ou $\delta = 0$.

Hypothèse A. — Il y a deux subdivisions A_a et A_b .

Subdivision A_a : la courbe $\gamma_{d+\delta}$ issue du groupe $V + W$ se décompose nécessairement en γ_d et un morceau complémentaire C_δ ; cela arrive nécessairement (voir § 13) si F est un groupe normal pour le degré d , parce que $\gamma_{d+\delta}$ contient V .

Subdivision A_b : $\gamma_{d+\delta}$ n'est pas obligée de se décomposer avec γ_d comme morceau (F est nécessairement anormal pour le degré d).

Hypothèse B. — $\delta = 0$; dans ce cas on peut prendre pour courbe issue de V l'une quelconque des courbes de degré d qui y passent, donc on prendra celle qui est issue de $V + W$, de sorte que F et $W + \Phi$ coïncident.

20. *Étudions A_a* : $\gamma_{d+\delta}$ ou $\gamma_d C_\delta$ coupe C_m suivant $\Phi + V + W$ d'une part et de l'autre suivant $F + V + R$ où R désigne l'ensemble (C_m, C_δ) . On a donc

$$\Phi + W = F + R,$$

et puisque, par hypothèse, F n'a aucun point commun avec W , on en conclut que F est tout entier compris dans Φ

$$\Phi = F + r, \quad R = W + r,$$

où r est un ensemble de points pouvant se réduire à zéro. On a donc

obtenu

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} & & \boxed{m} & & & \\ \gamma_a \dots & F & V & P+W & s+s_1 & \\ \gamma_{a+\delta} \dots & F+r & V+W & P & s & \end{array} \right.$$

Cela signifie simplement qu'au degré $d + \delta$ on a eu à étudier un groupe Φ : il est indifférent, comme nous savons, de prendre telle courbe de degré $d + \delta$ issue de Φ plutôt que telle autre : cela ne doit pas modifier les groupes P correspondant à Φ . Si donc parmi les courbes de degré $d + \delta$ issues de Φ il y en a qui se décomposent, il n'y a que des avantages à les adopter (nous l'avons déjà fait dans le cas où il y a une courbe de degré d au lieu de $d + \delta$ portant *tous* les Φ , de sorte que $r = 0$ et que P est situé sur une $C_{m-\delta}$); il faudra de plus, pour le point de vue spécial qui nous occupe ici, que la portion F ou $\Phi - r$ portée par γ_a jouisse de la propriété suivante : il existe des courbes *variables*, de degré d , issues de F ; cette condition, nous le savons, est nécessaire pour que le groupe $P + W$ soit complet; les courbes γ_a et C_δ jouent alors un rôle bien différent. Il pourra arriver que F et r puissent avoir leurs rôles intervertis, si le groupe r définit des courbes variables de degré δ ; nous en verrons à l'instant des exemples.

$m = 4$ ne donne que la surabondance 1, donc la question ne donne de résultats que pour $m \geq 5$. Pour $m = 5$, prenons $d + \delta = 2$ et le groupe Φ réduit à un seul point. On peut réduire la conique à deux droites, dont l'une passe par le point Φ et l'autre est totalement arbitraire. C'est le cas où chaque morceau de décomposition de γ_2 peut être appelé γ_1 et l'autre C_1 . Cela nous donne donc, en appelant V_1, V_2, V_3, V_4 les points alignés avec Φ , et W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 cinq points en ligne droite de C_3 , les séparations

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} P_1 P_2 \dots P_{15} & P_{16} \\ V_1 V_2 & V_3 V_4 \\ W_1 W_2 & W_3 W_4 W_5 \end{array} \right. \quad (1^5, 2, 2) + (1, 2, 3)$$

ou

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} P_1 P_2 \dots P_{15} & P_{16} \\ W_1 W_2 W_3 & W_4 W_5 \\ V_1 & V_2 V_3 V_4 \end{array} \right. \quad (15, 3, 1) + (1, 2, 3).$$

Nous savons que les 16 P sont sur un faisceau de quartiques, que les P et V sont sur une quartique unique, que les P et W déterminent un réseau de quintiques.

De même pour $m = 5$, $d + \delta = 2$ prenons pour groupe Φ un ensemble de deux points F_1, F_2 ; on peut réduire γ_2 à une droite *arbitraire* γ_1 et à la droite *déterminée* $C_1, F_1 F_2$; la droite $F_1 F_2$ ne peut donc jouer le rôle de γ_1 ; appelons W_1, W_2, W_3 les points où $F_1 F_2$ perce C_5 , et V_1, V_2, V_3, V_4, V_5 , cinq points en ligne droite de C_5 , on a la séparation

$$(6) \quad \begin{cases} P_1 P_2 \dots P_{16} & P_{17} \\ W_1 & W_2 W_3 \\ V_1 V_2 & V_3 V_4 V_5 \end{cases} \quad (16, 1, 2) + (1, 2, 3).$$

On aurait pu décomposer γ_2 en deux droites à *un paramètre* issues de F_1 ou F_2 : de sorte que le même groupe $[16]_5 + [1]$ peut être embri-gadé dans une séparation

$$(7) \quad \begin{cases} P_1 P_2 \dots P_{16} & P_{17} \\ W_1 W_2 & W_3 W_4 \\ V_1 & V_2 V_3 V_4 \end{cases} \quad (16, 2, 1) + (1, 2, 3),$$

où les W sont en ligne droite avec F_2 et les V avec F_1 ; ici il y a possibilité d'intervertir les V et les W.

Ce qui précède peut être interprété comme suit: le groupe anormal complet P est corésiduel avec Φ : sans toucher à Φ ni P nous avons cherché parmi les résiduels communs V_1 (donnant m^2 points en les réunissant à P) ceux qui donnent les propriétés les plus remarquables, telles qu'une séparation $V_1 = V + W$ où P, W, V ont les rôles expliqués. On peut au contraire prendre deux groupes résiduels F, V sur C_m pour le degré d et prendre parmi les résiduels Π de V pour le degré m ceux qui admettent une séparation $P + W = \Pi$. Ainsi, si nous prenons $m = 6$, $d = 2$, $f = 3$, de trois points F_1, F_2, F_3 d'une C_6 , nous menons une conique perceant C_6 , en V_1, \dots, V_9 ; les V définissent ∞^8 sextiques C'_6 , donc une série linéaire g_{27}^{17} de groupes de points $P_1 \dots P_{27}$ de surabondance 3; en général chacun de ces groupes a une structure interne *symétrique*; cela n'est en défaut que si la sextique C'_6 contient un, deux ou trois points F_1, F_2, F_3 , circonstance signalée au paragraphe 11, ou que si les 23 points P forment un groupe

susceptible d'une subdivision étudiée à l'instant : il suffit d'adjoindre à F_1, F_2, F_3 , zéro, un, deux, trois points de C_6 formant avec F_1, F_2, F_3 le groupe appelé Φ et de mener par Φ une C_3 décomposée en la conique déjà utilisée et une droite (si l'on a pris trois points, ils sont donc en ligne droite); en prenant par exemple deux points seulement, on voit que la série linéaire g_{27}^{17} contient ∞^2 séries linéaires g_{23}^{13} où chaque groupe $P'_1 P'_2 \dots P'_{23}$ a la surabondance 1 pour le degré 6; chacune de ces séries a besoin, pour être connue explicitement, de la détermination de deux points Φ_1, Φ_2 pris sur C_6 ; la droite $\Phi_1 \Phi_2$ perce C_6 en $W_1 W_2 W_3 W_4$ et l'on a la séparation pour le degré 6 :

$$\begin{array}{ccc} P'_1 P'_2 \dots P'_{22} & & P'_{23} \\ W_1 W_2 & & W_3 W_4 \end{array}$$

ou

$$[22, 2]_6 + [1, 2].$$

Réciproquement chaque groupe complet de 23 points ayant la surabondance 1 pour le degré 6 correspond au tableau

	$m = 6.$				
	F.	$\sigma.$	V.	P.	$s.$
cubique.....	5	0	13	23	1

et peut être ainsi embrigadé : à ce groupe correspond un seul système de cinq points F et la cubique peut être décomposée en une conique variable circonscrite à trois d'entre eux et à la droite joignant les deux autres.

Pour $m = 5$ on ne peut obtenir que les schémas

$$\begin{aligned} & (19) + (6). \\ & (17, 2) + (3, 3); \quad (18, 1) + (3, 3); \quad (14, 5) + (1, 5); \quad (15, 4) + (1, 5); \\ & \quad (16, 3) + (1, 5); \quad (17, 2) + (1, 5); \quad (18, 1) + (1, 5); \\ & (15, 3, 1) + (1, 2, 3); \quad (15, 2, 2) + (1, 2, 3); \quad (16, 1, 2) + (1, 2, 3); \\ & (16, 2, 1) + (1, 2, 3); \quad (17, 1, 1) + (1, 2, 3); \quad (14, 3, 2) + (1, 2, 3). \end{aligned}$$

Un exemple très simple est celui où l'on prend les $3m$ points définis par $C_m = 0, C_3 = 0$; on complète ce groupe successivement par les points d'intersection de C_m avec $(m - 3)$ droites arbitraires D_1, D_2, \dots, D_{m-3} ; on remarque que les groupes successifs $(C_m, C_3), (C_m, C_3 D_1),$

$(C_m, C_3D_1D_2) \dots$ ont pour surabondance les nombres triangulaires $1, 3, 6, \dots, \frac{(m-1)(m-2)}{2}$, de sorte que l'on a la séparation

$$(3m-1, m-2, m-3, \dots, 3, 2) + (1, 2, 3, \dots, m-3, m-2).$$

21. *Hypothèses A_b et B.* — L'hypothèse A_b se traduit par le tableau

$$(1) \quad \begin{cases} \gamma_d \dots \dots & F & V & P+W & s+s_1 \\ \gamma_{d+\delta} \dots \dots & \Phi & V+W & P & s \end{cases}$$

où $\delta \neq 0$ et où $\gamma_{d+\delta}$ ne se décompose pas; dans la première ligne il est permis d'utiliser l'une quelconque des courbes de degré inférieur à $m-3$ issue de V : employons donc $\gamma_{d+\delta}$ de sorte que le groupe F sera remplacé par $\Phi+W$. On remplace donc le tableau (1) par

$$(2) \quad \begin{cases} \gamma_{d+\delta} \dots \dots & \Phi+W & V & P+W & s+s_1 \\ \gamma_d \dots \dots & \Phi & V+W & P & s \end{cases}$$

Nous avons montré au paragraphe 13 que V étant situé sur une courbe γ_d de degré d , puis une courbe $\gamma_{d+\delta}$ de degré $d+\delta$ dont γ_d n'est pas un morceau, les groupes F et $\Phi+W$ correspondants sont anormaux pour le degré d et $d+\delta$ respectivement, la surabondance de $\Phi+W$ surpassant celle de F . D'autre part la surabondance s de P est inférieure, sans égalité, à celle $s+s_1$ de $P+W$: puisque P et $P+W$, dans le tableau (2), sont donnés par la même courbe $\gamma_{d+\delta}$, on en conclut que la surabondance de $\Phi+W$ pour le degré $d+\delta$ surpasse de s_1 unités celle de Φ pour le même degré; Φ peut être ou non surabondant pour le degré $d+\delta$.

L'hypothèse B se traduit par le tableau

$$(3) \quad \begin{cases} \gamma_d \dots \dots & \Phi+W & V & P+W & s+s_1 \\ \gamma_d \dots \dots & \Phi & V+W & P & s \end{cases}$$

tout pareil à (2) et donnant lieu exactement aux mêmes conclusions: la seule différence est que le degré minimum des courbes contenant V et $V+W$ est, pour (2), respectivement d et $d+\delta$ ($\delta > 0$ sans égalité) tandis que pour (3) ce degré minimum est le même. Le groupe $\Phi+W$ est anormal pour le degré d et sa surabondance surpasse de s_1 unités celle de Φ . On peut condenser (2) et (3) et ne garder que (3)

où il est entendu que d désigne le degré minimum des courbes contenant $V + W$. Alors la seule particularité est que la courbe C'_m issue du groupe V contient une fraction W du groupe $\Phi + W$: or ceci est une circonstance déjà signalée au paragraphe 11 à propos des groupes à structure dissymétrique.

Reprenons les notations générales :

$$\gamma_d \dots \dots \dots \boxed{m} \sigma \quad V \quad P$$

Si le groupe F a une surabondance nulle pour le degré d , il y a une seule courbe γ_d issue de V , comme nous l'avons vu au paragraphe 13 ; donc à un groupe P de cette espèce correspond un groupe F et un seul, de sorte que si P et F ont des points communs, on s'en aperçoit aussitôt.

Or ici pour (2), les groupes $P + W$ et $\Phi + W$ ont bien une partie W commune, mais si du groupe V on fait partir la courbe γ_d , on trouve $P + W$ d'une part et F de l'autre : il n'y a plus de point commun ; d'autre part, par V passe à la fois γ_d et $\gamma_{d+\delta}$, donc il passe aussi une infinité de courbes $\gamma'_{d+\delta}$ autres que $\gamma_{d+\delta}$, de sorte que même avec le degré $d + \delta$ on pourrait, si on le voulait, avoir deux groupes dans la colonne P et F sans points communs. Pour le tableau (3) il peut arriver que par le groupe V on ne puisse mener qu'une courbe de degré d , de sorte que $P + W$ et $\Phi + W$ ont nécessairement des points communs W ; mais s'il existe d'autres courbes de degré d issues de V , on peut encore faire disparaître ces points communs.

Prenons un exemple simple : $m = 7$, $d = 3$, $\delta = 0$, donc hypothèse B. On prend deux cubiques γ_3, C_3 , et par leurs neuf points communs F_1, F_2, \dots, F_9 on fait passer une C_7 coupant γ_3 en V_1, V_2, \dots, V_{12} , lesquels sont donc intersection de γ_3 et d'une C_4 . Si par les V on fait passer une C'_7 *quelconque* on a un groupe de 37 points P de surabondance 4, à structure symétrique. Or la C'_7 au lieu de ne contenir aucun point F peut en contenir 1, 2, ..., 7 ou 9, *exactement* (8 est exclu). Dans le cas où l'on prend un seul point, le groupe W se réduit à ce point, F_9 par exemple, et l'on a ainsi un groupe de 36 points particuliers p_1, p_2, \dots, p_{36} de surabondance 3 au lieu de 4, mais ce groupe est *incomplet* et admet F_9 pour point virtuel (cela tient à ce que les cubiques qui contiennent F_1, \dots, F_8

contiennent *automatiquement* F_9 , et que C_7 passe par F_9). Ce cas n'est donc pas intéressant. On pourra donc prendre la courbe C'_7 de sorte qu'elle contienne i points F , avec $i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$ (0, 1, 8 exclus) et le groupe W se compose de ces i points. Le groupe p formé par $p_1, p_2, \dots, p_{37-i}$ a la surabondance 3; réuni au groupe W il donne la surabondance 4. Il est à remarquer, d'après le tableau T pour $m = 7$, que tout groupe P de $37 - i$ points, de surabondance 3, porté par C_7 donne un groupe et un seul de $7 - i$ points F , car, par le groupe P , on mène une courbe C'_7 , d'où l'on déduit $12 + i$ points V situés sur une cubique et une seule : la variation de C'_7 ou du groupe V ne modifie pas le groupe F . Sur la courbe C_7 prenons i points au hasard et exprimons qu'ils forment avec les $7 - i$ points F obtenus la base d'un faisceau de cubiques : on a une seule équation à i inconnues; il suffit d'adjoindre aux points P du début ces points ainsi obtenus, formant une série algébrique, mais non linéaire, pour obtenir un groupe de 37 points qui, cette fois, a la surabondance 4.

En prenant $m = 6, d = 3, \delta = 0$, on a un cas rentrant encore dans l'hypothèse B : on prend donc encore deux cubiques γ_3 et C_3 et par leurs points d'intersection F_1, F_2, \dots, F_9 on mène une C_6 ; γ_3 et C_6 se coupent en neuf nouveaux points V_1, \dots, V_9 qui sont encore bases d'un faisceau de cubiques; de la sorte si la courbe C'_6 menée par V_1, V_2, \dots, V_9 contient i points ($i = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9$) prélevés sur les F on pourra remplacer la cubique γ_3 issue des V par une autre γ'_3 de façon que le groupe $F'_1 F'_2 \dots F'_9$ et le groupe $P_1 P_2 \dots P_{27}$ n'aient plus de points communs.

On a aisément un exemple du type A_6 en prenant une cubique γ_3 , une courbe γ_7 et leurs 21 points communs V_1, V_2, \dots, V_{21} ; par ce groupe V on fait passer une courbe C_{10} qui est rencontrée par γ_3 en neuf points nouveaux F_1, F_2, \dots, F_9 bases d'un faisceau de cubiques et par γ_7 en 49 points nouveaux $F'_1, F'_2, \dots, F'_{49}$ bases d'un faisceau de septiques. Ceci revient à prendre $m = 10, d = 3, \delta = 4$ et à employer le tableau

		$m = 10$				
	F.	σ .	V.	P.	h .	s .
cubique	9	1	21	79	1	16
septique	49	15	21	79	1	16

On s'arrange pour que la courbe C'_{10} issue de V contienne i points du groupe $F'_1 F'_2 \dots F'_{49}$; si les 49 points F' n'offrent d'autre particularité que de former la base d'un faisceau de septiques et la séparation (34) + (15), d'après la proposition de Cayley la courbe C'_{10} ne peut contenir 70 - 15 ou 55 points communs à γ_7 et C_{10} sans les contenir tous : or elle contient déjà les 21 points V , donc on devra supposer $i < 34$; d'autre part il faudra aussi que i surpasse 15, car si nous reprenons le tableau

$$\begin{array}{ccccc} \gamma_{d+\delta} \dots & \Phi + W & V & P + W & s + s_1 \\ \gamma_{d+\delta} \dots & \Phi & V + W & P & s \end{array}$$

le groupe Φ contient les 49 - i points non communs à $F'_1, F'_2, \dots, F'_{49}$ et au groupe de 79 points découpé par C'_{10} ; si $i \leq 15$ on a $49 - i \geq 34$ et alors, sauf disposition spéciale des points F'_1, \dots, F'_{49} , toutes les courbes de degré 7 contenant au moins 34 d'entre eux contiennent les autres; donc i est l'un des nombres 16, 17, ..., 33. Il y aurait donc une discussion minutieuse à faire si l'on voulait élucider les cas où i peut surpasser 33 ou rester inférieur à 16 : cela reviendrait précisément à étudier au point de vue du degré 7 tous les groupes de 49 points intersection de deux septiques (Cramer) et au point de vue du degré 10 les points communs à une septique et une courbe de degré 10 (Cayley).

22. *Surabondance d'un groupe incomplet.* — Deux courbes C_m, C'_m se coupent en m^2 points : nous séparons ces points en deux groupes P et V ; il faut montrer que la *surabondance pour le degré m du groupe P est le nombre de C_{m-3} linéairement distinctes issues de V , même si P n'est pas complet.* Si P est complet, c'est déjà démontré. Soient s la surabondance ($s \geq 0$) du groupe P , $h + 1$ la dimension du système linéaire des Γ_m issues de P ; on a, ρ désignant toujours $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ et p le nombre des P ,

$$h + p = \rho + s.$$

Les courbes Γ_m issues de P découpent sur C_m une série g_{m-p}^h et, d'après Riemann-Roch, la différence $m^2 - p - h = m^2 - \rho - s = \rho' - s$ montre que si $s = 0$, la série est normale et qu'il n'y a aucune C_{m-3} issue de V ;

si $s > 0$, le nombre s est le nombre des C_{m-3} linéairement indépendantes issues de V . Remarquons que la série linéaire g_{m-3}^h découpée sur C_m est effectivement *complète*, car nous supposons la courbe C_m dénuée de point singulier, de sorte que toutes les courbes algébriques jouent le rôle d'adjointes.

L'interprétation géométrique du théorème est d'ailleurs intéressante : supposons d'abord P complet : on peut assujétir les courbes C_{m-3} issues de V à successivement 0, 1, 2, ..., $(s-1)$ conditions linéairement indépendantes : ce sera par exemple la condition de contenir 0, 1, 2, ..., $s-1$ points choisis parmi les points surabondants du groupe P ; soit π l'ensemble des points ainsi choisis parmi les surabondants et posons

$$P - \pi = P', \quad V + \pi = V'.$$

La proposition énoncée ici signifie que P' est anormal incomplet, la surabondance de P' est $s - s'$, où s' est le nombre des points π et la dimension du système linéaire des C_{m-3} issues du groupe $V + \pi$, au lieu de V tout seul, est $s - 1 - s'$ au lieu de $s - 1$. Il n'y a aucune C_{m-3} contenant V et l'ensemble des points surabondants de P .

Supposons P incomplet; soit s' le nombre des points virtuels; la série linéaire g_{m-3}^h contient s' points fixes formant un groupe π contenu dans V et elle peut être découpée par les courbes d'un même degré $d \leq m-3$ issues d'un groupe de points F : mais alors toutes ces courbes γ_d contiennent π , de sorte que F lui aussi est incomplet pour le degré d et que π est une partie virtuelle de F ; mais remarquons que F peut admettre encore d'autres points virtuels, situés hors de C_m : ainsi si P est incomplet, F l'est aussi; mais même si P est complet, F peut encore être incomplet.

CHAPITRE II.

PROPOSITION DE CAYLEY.

1. *Systèmes de courbes de degré n contenant les mn points communs à une C_m et une C_n données, $n \geq m$. — Étudions toutes les courbes de*

degré q contenant les mn points communs à deux courbes C_m, C_n qui n'ont aucune portion commune.

Si $m < n$, il n'y a que la courbe C_m , seule de son degré, à contenir les mn points; si C_m est indécomposable, cela résulte de ce que $mn > m^2$. Si C_m se décompose, on pourrait se demander s'il n'existe pas une autre C'_m ayant avec C_m une partie commune C_p : on aurait

$$C_m \equiv C_p C_q, \quad C'_m \equiv C_p C'_q,$$

où C_q et C'_q n'ont plus de parties communes; or les mn points contiennent pn points (C_p, C_n) et qn points obtenus indifféremment comme (C_q, C_n) ou (C'_q, C_n) et puisque $q < n$, il faut nécessairement que C_q et C'_q coïncident. Donc il n'y a qu'une courbe C_m décomposée ou non. Il n'y a donc aucune courbe de degré inférieur à m contenant *tous* les mn points.

Sur les mn points il y en a nécessairement $\frac{m(m+3)}{2}$ déterminant une seule C_m et sur cette C_m ainsi déterminée, nous allons voir que les mn points offrent une configuration spéciale.

Il y a des courbes de degré $m+1, m+2, \dots, n-1$ contenant les mn points; toutes ont avec C_m un nombre de points communs supérieur au produit de leur degré par m ; si donc C_m est indécomposable, elles admettent C_m comme portion de décomposition; si C_m se décompose, c'est vrai encore, mais moins immédiat; en tout cas cette courbe C_p admet avec C_m un morceau commun C_p

$$C_m \equiv C_p C_{m-p}, \quad C_p \equiv C_p C_{p-p}.$$

La courbe C_{p-p} admet tous les points communs à C_{m-p} et C_n et comme elle a un degré inférieur à n , supérieur à $m-p$, elle admet soit la totalité de C_{m-p} , soit une fraction de C_{m-p} comme portion : donc, en continuant, on voit que tous les morceaux de C_m sont parties de C_p .

Cherchons maintenant les diverses courbes d'ordre n passant par les mn points. Posons $n = m + k, k > 0$. Je vais démontrer, par une méthode que je crois originale, la proposition classique : l'équation générale cherchée est

$$(1) \quad C_m C_k + \lambda C_{m+k} = 0,$$

où C_m et C_{m+k} sont les deux courbes données, λ une constante arbitraire

et C_k le polynome général de degré k en x et y . L'équation (1) contient

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$$

paramètres homogènes; la courbe générale d'ordre $m+k$ contient

$$I = \frac{(m+k+1)(m+k+2)}{2}$$

paramètres homogènes; en imposant à cette courbe les $m(m+k)$ points d'intersection, on a $E = m(m+k)$ équations à I inconnues; la solution fournie par (1) est solution particulière ou générale; la situation *générale* renferme donc

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1 + u$$

paramètres homogènes où u est un entier ≥ 0 . Si C_m est indécomposable, prenons un point de C_m distinct des $m(m+k)$ points en jeu; la seule équation complémentaire donnée par ce point diminue au plus d'une unité le nombre de paramètres: or la solution générale est alors $C_m C_k$ puisque la courbe a $m(m+k)+1$ points communs avec C_m , de sorte qu'on obtient exactement $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ paramètres homogènes; cela exige $u = 0$.

Si C_m se décompose, soit C_p un morceau indécomposable de C_m . Imposons à la courbe inconnue de contenir un point de C_p , elle contient donc C_p tout entière. Si l'on pose

$$C_m \equiv C_p C_q, \quad \Gamma_{m+k} \equiv C_p C_{q+k},$$

on voit que C_{q+k} contient tous les points communs à C_q et C_{m+k} : d'après ce qui a été dit plus haut, C_{q+k} contient donc C_q tout entière et finalement on a encore

$$\Gamma_{m+k} \equiv C_m C_k,$$

et la conclusion subsiste. Nous pouvons remarquer que cette démonstration n'a pas à utiliser le théorème du reste ni la théorie de la résiduation. L'ensemble des E équations se réduit donc exactement au

nombre ρ d'équations indépendantes

$$\rho = \frac{(m+k+1)(m+k+2)}{2} - \frac{(k+1)(k+2)}{2} - 1.$$

On peut écrire

$$(2) \quad \begin{cases} \rho = \frac{m(m+3)}{2} - 1 + km \\ \rho' = \frac{(m-1)(m-2)}{2} \end{cases} \quad [\rho + \rho' = m(m+k)].$$

Donc ρ points convenablement choisis sur C_m suffisent pour que toute C_{m+k} les contenant contiennent automatiquement les autres; le groupe des $m(m+k)$ points a la surabondance ρ' pour le degré $m+k$ et se trouve au tableau T pour le degré $m+k$ à l'article γ_k , pour $f=0$: la surabondance pour être effectivement non nulle exige que $m \geq 3$.

Si C_m et C_{m+k} sont quelconques vis-à-vis l'une de l'autre, tous les choix possibles de ρ points donnent bien ρ points fondamentaux; on a, puisque $k \geq 1$, $km \geq 3k \geq 3$ et par suite $\rho \geq \frac{m(m+3)}{2} + 2$: il est à peu près évident qu'un choix de ρ points fondamentaux contient $\frac{m(m+3)}{2}$ points déterminant une seule C_m ; en effet si ces ρ points appartiennent à deux courbes C_m, C'_m différentes, la courbe $C'_m C_k$ où C_k est *complètement arbitraire* est de degré $m+k$ et par suite contient les ρ' points complémentaires communs à C_m et C_{m+k} ; comme C_k n'a aucun point fixe, c'est C'_m qui contient ces points complémentaires, donc C'_m coïncide avec C_m .

Il est intéressant de vérifier par le procédé suivant pourquoi la donnée des ρ points, bien que ne déterminant pas C_{m+k} , oblige C_{m+k} à percer encore C_m en ρ' points fixes. D'abord nous avons vu que ρ est inférieur au nombre $\frac{(m+k+1)(m+k+2)}{2} - 1$ de la quantité $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$; sur les ρ points conservés, il y en a $M = \frac{m(m+3)}{2}$ qui définissent une seule C_m . Assujétissons la courbe C_{m+k} à contenir ces M points. Si l'on pose

$$C_{m+k} = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + \dots + a_M y^m + a_{M+1} x^{m+1} + \dots,$$

nous avons M équations linéaires et homogènes en $a_0, a_1, a_2, \dots, a_M, a_{M+1}, \dots$ pour lesquelles un déterminant d'ordre M compris dans les $M + 1$ premières colonnes de la matrice est différent de zéro : la courbe obtenue dépend donc de

$$\frac{(m+k+1)(m+k+2)}{2} - \frac{m(m+3)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + km$$

paramètres homogènes ; donc C_k étant une courbe arbitraire de degré k la solution est de la forme

$$(3) \quad C_m C_k + \lambda_1 C_{m+k}^{(1)} + \lambda_2 C_{m+k}^{(2)} + \dots + \lambda_{km} C_{m+k}^{(km)} = 0,$$

où $C_{m+k}^{(1)}, C_{m+k}^{(2)}, \dots, C_{m+k}^{(km)}$ sont km courbes convenablement choisies, d'ordre $m+k$, n'admettant pas C_m comme morceau de décomposition. Assujétir maintenant la courbe (3) à contenir un nouveau point de C_m donne une *équation linéaire et homogène par rapport aux λ seuls* et c'est pour cela que la donnée de $km - 1$ points *pris au hasard* sur C_m en dehors des $\frac{m(m+3)}{2}$ primitifs détermine les rapports mutuels des λ de façon à ramener l'équation (3) à la forme

$$(4) \quad C_m C_k + \lambda C_{m+k} = 0,$$

où C_{m+k} est un polynome déterminé et l'on voit ainsi que l'on a ρ' points nouveaux fixes, communs à toutes courbes de degré $m+k$, conséquence des ρ points successivement donnés. *En général* si une courbe C_{m+k} contient $\frac{m(m+3)}{2} + km$ points *pris au hasard* sur C_m , elle contient C_m car il faut tenir compte des ρ' points virtuels déterminés par $\frac{m(m+3)}{2} + km - 1$ points, ce qui porte le total des points communs à $m(m+k) + 1$.

2. *Schémas relatifs à mn points communs à une C_m et une C_n .* — Les mn points (C_m, C_n) , en supposant $n > m$, forment pour le degré n un groupe de surabondance $\rho' = \frac{(m-1)(m-2)}{2}$. *Le nombre ρ' est indépendant de n .* Dans le cas général on ne peut obtenir que la séparation

$$(1) \quad [\rho]_{m+k} + [\rho'].$$

Mais on pourra dans certains cas particuliers obtenir une séparation

$$(2) \quad [\omega_1, \omega_2]_{m+k} + [\theta_1, \theta_2], \quad \omega_1 + \omega_2 = \rho, \quad \theta_1 + \theta_2 = \rho',$$

et l'on pourrait, sans modification, recommencer tout ce qui a été dit au Chapitre précédent, paragraphe 8, car les valeurs précises de m, k, ρ, ρ' ne jouent aucun rôle particulier.

Le schéma (2) indique qu'il y a sur C_m un groupe de points $P_1^{(1)} \dots P_{\omega_1}^{(1)}$ admettant comme points virtuels pour le degré $m+k$ le groupe $Q_1^{(1)} \dots Q_{\theta_1}^{(1)}$: ces derniers points sont nécessairement situés sur C_m , car la courbe C_m réunie à une C_k arbitraire forme une courbe de degré $m+k$ et le total $C_m C_k$ devant contenir les $Q^{(1)}$, en vertu de ce que C_k est arbitraire, c'est C_m qui les contient. Les courbes Γ_{m+k} passant par les $\omega_1 + \theta_1$ points $P^{(1)}$ et $Q^{(1)}$ découpent sur C_m une série linéaire de groupes de points $g_{\omega_2 + \theta_2}^{\omega_2 + \theta_2}$; cette série est *spéciale*, car $\theta_2 < \rho'$. On peut donc recommencer le tableau T avec les mêmes groupes F et V sur C_m , mais par V on mène une courbe Γ_{m+k} et non une Γ_m ; la colonne P est donc modifiée, le nombre qu'on y inscrit est égal à celui obtenu précédemment augmenté de mk ; le groupe P est l'intersection de C_m et Γ_{m+k} ; la surabondance s est celle déterminée précédemment, égale au nombre de C_{m-3} linéairement indépendantes passant par V (ce résultat sera généralisé plus bas). La dimension du système linéaire de Γ_{m+k} issues de P est $h + \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Il y a par exemple certaines restrictions qui sont supprimées ou du moins atténuées. Dans le tableau T on doit négliger certaines lignes obtenues pour $d \geq 3$ et correspondant à un nombre f tel que

$$1 \leq f \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

ou du moins ne les écrire qu'en tenant compte de la proposition de Cayley. Par exemple pour $m=6, d=3, f=1, k=1$, on peut mener par les 11 points V une Γ_7 , elle n'est pas obligée, comme une Γ_6 , de contenir le point F. Pour $m=8, d=5, k=1$, il est inutile d'écrire les lignes $f=1, f=2$, mais pour $f=3$ on peut la remplir pourvu que les trois points F soient en ligne droite.

On obtient ainsi, avec la même C_m , les mêmes groupes F et V, des

schémas simultanés

$$(4) \quad \begin{cases} (\omega_1, \omega_2) + (\theta_1, \theta_2) & [\omega_1 + mk, \omega_2]_{m+k} + [\theta_1, \theta_2], \\ [\omega_1]_m + [\theta_1] & [\omega_1 + mk]_{m+k} + [\theta_1], \end{cases}$$

où les $\omega_1, \omega_2, \theta_1, \theta_2$ ont la même valeur de part et d'autre. De même tout schéma

$$(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p) + (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$$

donnera le schéma simultané

$$[\omega_1 + mk, \omega_2, \dots, \omega_p]_{m+k} + [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p].$$

3. *Courbes de degré q contenant mn points (C_m, C_n) en supposant $m \leq n \leq q$.* — Par un raisonnement très élémentaire, n'empruntant rien au théorème du reste ou à la théorie de la résiduation, j'ai obtenu l'équation générale des courbes Γ_m contenant les m^2 points communs à deux courbes C_m, C'_m données ou des courbes Γ_n contenant les mn points communs à une C_m et une C_n données ($m < n$).

Mais je ne recommencerai pas de raisonnement semblable pour obtenir des courbes C_q contenant les mn points communs à une C_m et une C_n données, en supposant q surpassant à la fois m et n et $m \leq n$. J'admettrai ce résultat classique que toute courbe C_q contenant l'intersection complète de C_m et C_n ($m \leq n$) a son équation de la forme

$$(1) \quad AC_m + BC_n = 0,$$

où A et B sont des polynomes entiers. Pour une même courbe, A et B ont une infinité de formes possibles, à savoir, en fonction de l'une d'elles,

$$A - \theta C_n \quad \text{et} \quad B + \theta C_m,$$

où θ est un polynome arbitraire en x, y de degré p . Si $q < m + n$, il y a un couple simultané et un seul A, B pour lequel le degré de A est $q - m$, celui de B, $q - n$. Si l'on a $q = m + n + p$ où p est un entier ≥ 0 , on peut obtenir des couples A, B de degré effectif $q - m$ et $q - n$ respectivement, mais si le degré de θ est au plus p , ou $q - m - n$, on ne change pas les degrés dans le couple modifié. La démonstration de ces propriétés s'obtient par des procédés très élémentaires, basés sur la théorie de la division et de l'élimination, sans avoir recours à un

dénombrement de constantes; je renvoie par exemple à un mémoire de M. Lebesgue, déjà cité, *Annales de Toulouse*, 1923.

Nous supposons C_m et C_n sans partie commune; si $q < m + n$ sans égalité, en prenant pour A le polynome arbitraire de degré $q - m$ et B de degré $q - n$, tous les paramètres figurant dans (1), en nombre

$$(2) \quad \frac{(q - m + 1)(q - m + 2)}{2} + \frac{(q - n + 1)(q - n + 2)}{2},$$

sont effectivement indépendants, parce qu'il n'y a pas d'identité

$$(3) \quad C_m \Gamma_{q-m} + C_n \Gamma_{q-n} \equiv 0$$

qui exigerait, C_m n'ayant aucune portion commune avec C_n , que C_m divisât Γ_{q-n} et par suite $q \geq m + n$. Si donc on pose

$$(4) \quad E = mn, \quad I = \frac{(q + 1)(q + 2)}{2}, \quad q < m + n,$$

les E équations, linéaires et homogènes à I inconnues, obtenues en imposant les mn points (C_m, C_n) à une C_q inconnue, se réduisent *exactement et sans exception possible* à un nombre ρ :

$$(5) \quad \rho = \frac{(q + 1)(q + 2) - (q - m + 1)(q - m + 2) - (q - n + 1)(q - n + 2)}{2}.$$

La différence $mn - \rho$ que j'appellerai ρ' est

$$(6) \quad \rho' = \frac{(m + n - q - 1)(m + n - q - 2)}{2}.$$

Ceci donne la proposition de Cayley sous la forme précise que j'ai donnée au début du Chapitre I. Il faut choisir les ρ points conservés sur l'ensemble C_m, C_n soit *au hasard*, c'est le cas général, soit *avec tact* dans certains cas particuliers que je préciserai bientôt. L'expression de ρ' décroît quand q prend les valeurs entières croissantes

$$n, \quad n + 1, \quad \dots, \quad m + n - 3,$$

et elle est nulle pour $q = m + n - 2$ ou $m + n - 1$. Si $m < n$ sans égalité, le nombre $mn - \rho'$ surpasse $\frac{m(m+3)}{2}$ dès que le nombre q est égal à n , donc cela subsiste pour $q = n + 1, \dots, m + n - 3$ de sorte

que les $mn - \rho'$ points *fondamentaux* pour le degré q déterminent bien une seule C_m : la vérification se fait comme au paragraphe 2. Pour l'un des degrés $m + p$ supérieur à m , inférieur à n , les mn points définissent des courbes toutes décomposées, $C_m C_p$, de sorte que les mn points forment un groupe anormal incomplet (avec infinité de points virtuels) de surabondance $mn - \left[\frac{(m+p+1)(m+p+2)}{2} - \frac{(\rho+1)(\rho+2)}{2} \right]$, c'est-à-dire $\frac{m[2n-m-2p-3]}{2}$. Cette surabondance, égale pour $p=0$ à $\frac{m(2n-m-3)}{2}$ décroît de m à chaque fois que p augmente d'une unité : on trouve donc pour $p = 0, 1, 2, \dots, n-m-1$:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{m[2n-m-3]}{2}, \quad \frac{m[2m-m-5]}{2}, \quad \dots, \\ \frac{m(m+3)}{2}, \quad \frac{m(m+1)}{2}, \quad \frac{m(m-1)}{2}, \end{array} \right.$$

et pour $q = n, n+1, \dots, m+n-3$:

$$(8) \quad \frac{(m-1)(m-2)}{2}, \quad \frac{(m-2)(m-3)}{2}, \quad \dots, \quad 6, \quad 3, \quad 1.$$

La ligne (8) donne les triangulaires successifs et se prolongerait à gauche par les deux derniers nombres de la ligne (7).

4. *Configurations critiques relativement à la proposition Cayley.* — Quand nous avons étudié les m^2 points communs à une C_m et une C'_m au point de vue des courbes Γ_m qui y passent, ou de même les mn points (C_m, C_n) au point de vue des courbes Γ_n qui y passent, ou encore des courbes de degré q , ($m \leq n \leq q \leq m+n-3$), nous avons, dans les trois cas, séparé les points d'intersection en deux groupes contenant ρ points fondamentaux et ρ' points surabondants; la valeur précise de ρ et ρ' n'intervient pas immédiatement dans le raisonnement ultérieur : nous avons conclu que, *sauf disposition spéciale*, toutes les courbes du degré étudié (m, n, q suivant les trois cas) qui contiennent ρ points choisis au hasard sur les $\rho + \rho'$ contiennent les ρ' restants ($\rho + \rho' = m^2, mn, mn$ suivant les trois cas). Les rectifications apportées à ces résultats dans les mémoires déjà cités (Cramer, Cayley, Bacharach)

ont surtout consisté à montrer qu'avec une disposition convenable des courbes C_m, C_n, C_q étudiées ($m \leq n \leq q$ pour comprendre les trois cas), la courbe C_q peut contenir soit ρ points, soit même $\rho + t$ convenablement choisis sans contenir pour cela les ρ' ou $\rho' - t$ restants; mais ce point de vue est mal choisi pour étudier la question; il est bien clair que si les $\rho + t$ points P choisis n'entraînent pas les autres, *a fortiori* ρ points P' pris au hasard sur les $\rho + t$ points P ne peuvent entraîner les ρ' restants; par conséquent les ρ points P' conservés ne peuvent donner ρ équations distinctes; donc $\rho - h$ seulement donnent des équations distinctes et entraînent un certain nombre de points virtuels, en nombre s où $s \geq h$; réciproquement si $\rho - h$ points ($h > 0$) donnent des équations distinctes et entraînent des points virtuels, en nombre s , on obtient un groupe de $\rho - h + s$ points formant un groupe anormal complet contenu dans le groupe anormal étudié de $\rho + \rho'$ points; si $s \geq h$, on a donc un exemple où les courbes C_q contenant ce groupe partiel d'au moins ρ points ne contiennent pas automatiquement les restants; mais si $s < h$, on a une disposition qui n'a pas été étudiée par les auteurs cités et qui, pourtant, conduit encore aux résultats étudiés par eux: en effet (et ceci est vrai même pour $s \geq h$), les $\rho' + h - s$ points restants peuvent être séparés en deux groupes, l'un R de h points, l'autre S de $\rho' - s$ points tels qu'en ajoutant aux $\rho - h + s$ points déjà séparés successivement 0, 1, 2, ..., $h - 1$ points du groupe R on n'obtienne pas de point virtuel nouveau et les courbes C_i contiennent alors successivement

$$\rho - h + s, \rho - h + s + 1, \dots, \rho + s - 1$$

points communs à C_m et C_n sans contenir les autres; puis brusquement en ajoutant le dernier point du groupe R, les $\rho' - s$ points restants sont conséquence automatique de ceux déjà pris; comme $s \geq 1$ on a $\rho + s - 1 \geq \rho$. C'est bien à ce point de vue que nous avons étudié les m^2 points (C_m, C'_m) et les courbes Γ_m qui y passent: les schémas

$$(1) \quad (\omega_1, \omega_2) + (\theta_1, \theta_2)$$

ou même

$$(2) \quad (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) + (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$$

sont la conséquence de ce raisonnement; le point de vue que je propose

est bien mieux approprié à la question et nous allons le reproduire en supposant $m \leq n$, $n \leq q \leq m + n - 3$. Si $m = n$, on aura simplement $m < q \leq 2m - 3$.

Je rappelle qu'on a posé

$$(3) \quad \rho' = \frac{(m+n-q-1)(m+n-q-2)}{2} \quad (\rho = mn - \rho')$$

et obtenu la séparation

$$(4) \quad [\rho]_q + [\rho'].$$

Nous supposons donc qu'on ait obtenu un groupe *normal mais incomplet* de $\rho - h$ points complété par s points surabondants, relativement au degré q . Appelons P ce groupe contenant $\rho - h + s$ points, formant cette fois un groupe *anormal complet* pour le degré q . Les courbes Γ_q issues du groupe P ont une équation de la forme

$$(5) \quad C_m C_{q-m} + C_n C_{q-n} + \lambda_1 C_q^{(1)} + \lambda_2 C_q^{(2)} + \dots + \lambda_h C_q^{(h)} = 0,$$

car elles sont soumises exactement à h conditions linéaires de moins que les courbes $C_m C_{q-m} + C_n C_{q-n} = 0$; les λ sont des constantes arbitraires, C_{q-m} et C_{q-n} sont deux polynômes arbitraires de degré $q - m$ et $q - n$. Les courbes (5) n'ont pas de points fixes en dehors de P, donc découpent sur C_m une série linéaire de groupes de points *tous variables* g_w^k

$$(5') \quad \begin{cases} w = m(q-n) + \rho' + h - s, \\ k = h + \frac{(q-n+3)(q-n)}{2}. \end{cases}$$

En vertu de la valeur (3) de ρ' on peut écrire

$$(6) \quad w = \frac{(m-1)(m-2)}{2} + \frac{(q-n)(q-n+3)}{2} + h - s,$$

d'où

$$(7) \quad w - k = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - s.$$

Ceci signifie que la série g_w^k est *spéciale*, et d'après Riemann-Roch que le nombre de C_{m-3} linéairement indépendantes issues d'un groupe W de cette série est égal à s ; les mn points communs à C_m, C_n ont été partagés en deux groupes : P est celui qui est étudié, soit V le groupe restant.

La série g_w^h peut être découpée sur C_m par des courbes de degré $m - 3 - \lambda$, où λ est un nombre entier déterminé $0 \leq \lambda \leq m - 3$, issues d'un groupe fixe F de points pris sur C_m ; sur C_m , F et P sont résiduels tous deux de W; donc V résiduel de P par C_n l'est aussi de F : soit le diagramme, relatif à C_m

$$\begin{array}{ccccc} F & m + n - q - 3 - \lambda & V \\ m - 3 - \lambda & & n \\ W & q & P \end{array}$$

Les points V sont donc sur une courbe de degré $m + n - q - 3$ au plus; la réciproque est vraie; d'ailleurs à chaque courbe de degré $m + n - q - 3 - \lambda$ issue de V correspond une courbe $m - 3 - \lambda$ issue de W de sorte que nous pourrions apprécier la surabondance exacte pour le degré q d'un groupe P prélevé sur les mn points (C_m, C_n) en cherchant le nombre de courbes de degré $m + n - q - 3$ linéairement distinctes issues du groupe complémentaire V : ce résultat s'applique encore si le groupe P n'est pas complet pour le degré q et cela se voit comme en fin du Chapitre I. Mais si P est complet, s est inférieur à ρ' sans égalité, parce que les C_{m-3} issues de W sont en nombre inférieur à ρ' .

Nous remarquerons ici qu'en cherchant à obtenir de tels groupes sur une C_m donnée a priori, on doit fixer les valeurs de n et q ; il faut choisir un groupe F, situé sur C_m , n'ayant pas de points virtuels sur C_m pour le degré $m - 3 - \lambda$, d'où l'on puisse faire partir des courbes $C_{m-3-\lambda}$ variables sans partie commune; le nombre λ doit lui-même être fixé; il faut de plus que du groupe F on puisse faire partir une courbe, variable ou fixe, peu importe, de degré $m - 3 - \lambda - (q - n)$; ce dernier degré est inférieur au précédent si $q > n$. Cela fait, du groupe F on déduit divers groupes W, dont la substitution mutuelle est indifférente; d'un groupe W on déduit toujours sur C_m divers groupes P; la courbe de degré $m + n - q - 3 - \lambda$, supposée existante, issue de F, permet de trouver le groupe V associé à P.

Soit f le nombre des points F; on a

$$(8) \quad f = m(m - 3 - \lambda) - w \\ = \frac{m(m - 3)}{2} - \frac{(q - n)(q - n + 3)}{2} - \lambda m - 1 + h - s.$$

Si $q = m + n - 3$, on a nécessairement, d'après le diagramme employé. $\lambda = 0$; or $\rho' = 1$, donc $s = 0$; autrement dit *pour $q = m + n - 3$ on ne saurait avoir exception pour la proposition de Cayley : l'un quelconque des mn points (C_m, C_n) est surabondant pour le degré $m + n - 3$.*

Nous avons eu au Chapitre I des exemples nombreux où l'on suppose $m = n$, $q \geq n$ ou $m < n$, $q = n$. L'exemple le plus simple où l'on suppose $m < n < q$ doit se rapporter à $q = m + n - 4$; on prend $q - n = 1$, de sorte que $m = 5$, $n = 6$, $q = 7$. Le nombre ρ' est égal à 3, ρ égal à 27. Le diagramme montre que $m + n - q - 3 - \lambda$ n'est pas nul; ici on trouve $1 - \lambda$, donc λ est nul; les points du groupe V sont en ligne droite et situés sur C_3 ; donc on doit prendre un groupe V formé de 3, 4 ou 5 points en ligne droite et faire passer par ce groupe V une C_3 et une C_6 , on en déduit un groupe P formé de 27, 26, 25 points tandis que le groupe F est formé de 2, 1 ou 0 points; la surabondance est 1 pour le degré 7. On a les diagrammes sur C_3

2F	1	3V	1F	1	4V	0F	1	5V
2		6	2		6	2		6
8W	7	27P	9W	7	26P	10W	7	25P

Dans le premier cas, les 27 P sont sur des sextiques d'équation $C_3C_4 + C_6 = 0$, où C_4 est une droite arbitraire et C_3, C_6 les deux courbes employées; le groupe a donc la surabondance 3 pour le degré 6, et il est incomplet, ayant été formé en amputant de 3 points un groupe complet de surabondance 6 pour le degré 6; le fait que les trois points sont en ligne droite ne donnent aucune propriété spéciale pour le degré 6, et n'agit que pour le degré 7 où la surabondance est 1 au lieu d'être zéro. Pour le second diagramme le groupe de 26 points P est un groupe complet, anormal de surabondance 3 pour le degré 6 obtenu directement au tableau T pour $m = 6$; pour le troisième diagramme on a les 25 points de base d'un faisceau de quintiques, groupe anormal complet pour les degrés 5 et 6.

5. *Surabondance d'un même groupe pour des degrés successifs croissants.* — Les mn points (C_m, C_n) forment un groupe normal pour les degrés successifs $m + n - 2, m + n - 1, m + n, \dots$

Il y a une question intéressante à étudier : soient un groupe P de H

points et m le degré minimum des courbes algébriques circonscrites au groupe; soient s, s_1, s_2, \dots les surabondances du groupe pour les degrés $m, m + 1, m + 2, \dots$: nous allons démontrer que

$$s > s_1 > s_2 > \dots$$

sans égalité jusqu'au moment où s_p s'annule et reste définitivement nul. Pour $m \geq H$ on est certain que le groupe est normal; on a même vu que, sauf le cas où un nombre suffisamment élevé de points seraient sur une droite ou une même conique, le groupe est normal si $m \geq \frac{H+1}{3}$. Pour ne pas multiplier les notations, désignons par m l'un des degrés pour lesquels il existe une C_m circonscrite au groupe; il existe donc aussi des C_{m+1} ; il importe de montrer que *tout point surabondant du groupe pour le degré $m + 1$ l'est aussi pour le degré m* ; de la sorte tout point virtuel pour le degré $m + 1$ est aussi virtuel pour le degré m . Cela tient à ce que $C_m C_1$, où C_1 est une droite *arbitraire* est une C_{m+1} circonscrite au groupe, or ce n'est pas C_1 qui peut porter les points surabondants, donc c'est C_m ; s_1 étant la surabondance pour le degré $m + 1$, s pour le degré m , les Hs_1 points fondamentaux pour le degré $m + 1$ peuvent, *a priori*, former un groupe normal pour le degré m , dans ce cas on a $s = s_1$; s'ils forment un groupe surabondant, on a $s > s_1$, Il faut montrer que $s > s_1$ est la seule hypothèse exacte.

Remarquons que les C_m circonscrites au groupe forment un système ∞^h et les C_{m+1} un système ∞^{h+h_1} . Montrons d'abord

$$(1) \quad \begin{cases} 2 \leq h_1 \leq m + 2, \\ s = s_1 + m + 2 - h_1 \end{cases}$$

($h_1 < m + 2$ sera donc, si s_1 n'est pas nulle, la seule hypothèse admissible). La courbe $C_m x$ est une C_{m+1} *particulière et non générale*, circonscrite au groupe, donc $h_1 > 0$ sans égalité. Les H points ont pour le degré $m + 1$ des points virtuels en nombre nul, ou positif fini, ou infini: dans ce dernier cas les C_{m+1} ont une partie algébrique commune, ne remplissant pas le plan. Donc on peut trouver un point A non confondu avec un point virtuel; le système H, A donne peut-être de nouveaux points virtuels, mais on peut trouver un point B distinct des points virtuels du total H, A; donc pour le degré $m + 1$, A et B fournissent deux

équations distinctes entre elles et des équations dues aux H points; si l'on veut on a $h + h_1$ paramètres liés par deux équations linéaires *indépendantes*, avec la solution *particulière* $C_m D$, où D est la droite AB , solution à h paramètres : donc $h_1 \geq 2$. Adjoignons aux H points P $m + 2$ points D pris sur une droite quelconque; toute C_{m+1} circonscrite au groupe P, D se réduit à la droite portant les points et à une C_m circonscrite au groupe P : on a à écrire pour C_{m+1} les H équations dues aux P , puis les $m + 2$ équations dues aux D ; ces dernières équations ne peuvent réduire les paramètres linéairement indépendants que de $m + 2$ au plus; elles les réduisent effectivement de h_1 , donc $h_1 \leq m + 2$. La seconde ligne de (1) se démontre en comptant la surabondance de P, D pour le degré $m + 1$ de deux façons : dans l'ordre P, D , d'où $s_1 + (m + 2 - h_1)$; puis dans l'ordre D, P : une fois la droite obtenue comme conséquence des $m + 2$ points D , il n'y a plus à se préoccuper des D et il suffit de raisonner avec les P et le degré m ; on obtient donc s . De (1) on déduit

$$(2) \quad 0 \leq s - s_1 \leq m$$

(l'hypothèse $0 < s - s_1$ est seule admissible si $s > 0$).

6. Supposons d'abord le groupe P *complet* pour le degré m , et par suite de la remarque déjà faite, aussi pour le degré $m + 1$. Cela écarte donc le cas d'une C_m unique ou de C_m toutes décomposées avec une partie commune. Soient F, V les groupes associés dans le tableau T pour le degré m à notre groupe P . Toute C_{m+1} issue de P coupe C_m en un groupe V' situé avec F sur une γ_{d+1} , tandis que toute C'_m issue de P coupe C_m en un groupe V situé avec F sur une γ_d ; les réciproques sont vraies. On a $d + 1 \leq m - 2$; h est la dimension du système linéaire des γ_d issues de F , σ la surabondance de F pour le degré d ; h' et σ' signifieront les éléments analogues pour F et le degré $d + 1$ au lieu de d . Appliquons le résultat $s = s_1 + m + 2 - h_1$, démontré antérieurement, en tenant compte du changement à faire dans les notations; le système C'_m a pour dimension $1 + h$ et le système C_{m+1} , $3 + h'$. Donc

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma = \sigma' + d + 2 - (h' - h), \\ s = s_1 + m + 2 - (h' - h + 2), \end{cases}$$

la comparaison donne

$$(2) \quad s - s_1 = \sigma - \sigma' + m - d - 2;$$

or $\sigma - \sigma' \geq 0$, $m \geq d + 3$, donc

$$(3) \quad s - s_1 \geq 1.$$

N'oublions pas que nous raisonnons en ce moment sur un groupe *anormal complet* pour le degré m . Indiquons quelques conséquences.

La différence $s - s_1$ ne peut être égale à 1 que si $m = d + 3$, $\sigma - \sigma' = 0$; cette dernière égalité entraîne, si l'on admet provisoirement la démonstration générale, $\sigma = \sigma' = 0$; dans ce cas $s = 1$ et $s_1 = 0$.

Le tableau T montre que s ne peut être égal à 2 que si $d = m - 3$, $\sigma = 1$; on a alors $\sigma' = 0$, $s_1 = 0$. Il n'y a que deux cas où $s - s_1$ soit égal à 2 : celui qui vient d'être signalé, puis celui caractérisé par $d = m - 4$, $\sigma = 0$, $s = 3$, $s_1 = 1$.

Si l'on applique le résultat $\sigma - \sigma' \leq d$ (provenant de l'inégalité générale $s - s_1 \leq m$ démontrée antérieurement), on a

$$(4) \quad s - s_1 \leq m - 2$$

plus précise que l'inégalité $s - s_1 \leq m$, mais qui suppose le groupe étudié *anormal complet pour le degré m* : nous verrons des cas où seule l'inégalité $s - s_1 \leq m$ est exacte.

Nous avons remarqué déjà que, si P est incomplet pour le degré m , mais complété par un nombre fini de points, l'hypothèse écarte le cas d'une C_m unique ou de C_m toutes décomposées avec une partie commune; la partie virtuelle π de P est sur C_m et toute C'_m issue de P coupe C_m suivant π et un groupe complémentaire V; nous avons signalé au Chapitre I dernier paragraphe, que par le total $V + \pi$ passent diverses courbes γ_d où $d \leq m - 3$; l'une quelconque découpe sur C_m un groupe F et inversement toute γ_d issue de F donne sur C_m un résiduel de P pour le degré m , autrement dit contient le groupe π : finalement on peut recommencer sans modification les explications qui précèdent et écrire les inégalités (1) et (2). On aura encore $s - s_1 \geq 1$ et $s - s_1 \leq m - 2$: cette dernière inégalité exigera que le groupe, pour le degré m , soit ou complet, ou incomplet avec nombre limité de points virtuels.

7. Supposons maintenant que les H points déterminent une seule C_m : le nombre de points fondamentaux pour le degré m est $\frac{m(m+3)}{2}$ et le paragraphe 4 nous apprend que si toutes les C_{m+1} doivent admettre C_m pour morceau, il a fallu adjoindre, comme points fondamentaux, aux $\frac{m(m+3)}{2}$ points choisis sur C_m exactement m points pris au hasard sur C_m : dans ce cas on a exactement

$$(1) \quad s - s_1 = m,$$

inégalité en désaccord avec l'inégalité (4) du paragraphe précédent. Si les C_{m+1} ne doivent pas toutes admettre C_m pour morceau, cela prouve que les points fondamentaux pour le degré $m+1$ s'obtiennent en prenant sur C_m en dehors des $\frac{m(m+3)}{2}$ points déjà choisis 1, 2, ..., $m-1$ points ; alors $s - s_1$ est égal à l'un des nombres 1, 2, ..., $m-1$.

8. Le cas le plus difficile est celui où l'on a une infinité de C_m ayant toutes une partie commune C_p .

Les points fondamentaux pour le degré m comprennent donc $\frac{p(p+3)}{2}$ points déterminant la C_p et $(m-p)p$ points n'offrant sur C_p aucune configuration spéciale avec les précédents. On a

$$(1) \quad \frac{m(m+3)}{2} = \frac{p(p+3)}{2} + (m-p)p + \frac{(m-p)(m-p+3)}{2}.$$

Donc si, réciproquement, on se donne :

1° $\frac{p(p+3)}{2} + (m-p)p$ points pris *au hasard* sur une C_p ;

2° λ points pris *ad libitum* encore sur C_p ;

3° h points du plan ayant la surabondance μ pour le degré $m-p$, l'identité (1) prouve que ce total a la surabondance $\lambda + \mu$ pour le degré m , C_p faisant partie de *toute* courbe définie par ces points ; λ et μ ne devront donc pas être nuls tous deux.

Soit d'abord le cas où les C_{m+1} doivent aussi admettre C_p pour morceau ; on aura peut-être besoin d'ajouter des points virtuels pour le degré $m+1$ (et par suite aussi pour le degré m) avant d'avoir le

total de points marqués sur C_p ,

$$\frac{p(p+3)}{2} + (m+1-p)p$$

nécessaires pour imposer la C_p aux C_{m+1} et *a fortiori* aux C_m ; mais dans cette opération, s et s_1 augmentent d'une unité simultanément, leur différence ne change pas. Donc supposons ce résultat déjà obtenu; les points donnés primitivement comportent donc :

- 1° $\frac{p(p+3)}{2} + (m+1-p)p$ points *arbitraires* de C_p ;
- 2° λ points *ad libitum* de C_p ;
- 3° h points ayant la surabondance μ pour le degré $m-p$ et μ_1 pour le degré $m+1-p$.

On aura donc

$$(2) \quad \begin{cases} s = p + \lambda + \mu \\ s_1 = \lambda + \mu_1 \end{cases} \quad (s - s_1 = p + \mu - \mu_1).$$

Puisque $\mu - \mu_1 \geq 0$, on a $s - s_1 \geq p \geq 1$.

9. Supposons maintenant que la courbe C_p qui fait obligatoirement partie des C_m ne fasse pas partie des C_{m+1} ; nous supposons même que, si C_p est décomposable, aucune des parties de C_p ne soit obligée d'appartenir aux C_{m+1} . Alors les H points ont un nombre fini de points virtuels pour le degré $m+1$, que nous introduisons encore sans changer $s - s_1$; je vais représenter le groupe, anormal complet pour le degré $m+1$, par $\pi + P$, π et P étant deux portions que je vais préciser; du groupe $\pi + P$ partent des courbes C'_{m+1} coupant C_{m+1} suivant un groupe V et de V sont issues des courbes γ_{d+1} ($d \leq m-3$) dont l'une découpe sur C_{m+1} le groupe F , corésiduel avec $\pi + P$. Or du groupe $\pi + P$ émanent par hypothèse des courbes de degré m formées du morceau fixe C_p et d'un morceau variable C_{m-p} ; le morceau fixe C_p contient, dans le groupe proposé de points, une portion que j'appelle π et la C_{m-p} variable est issue du reste que j'appelle P ; la courbe C_p (ou C_{m-p}) coupe encore C_{m+1} suivant un autre groupe φ (ou W); le groupe $\varphi + W$ est résiduel de $\pi + P$, donc aussi de F : on a le dia-

gramme, sur C_{m+1} ,

$$\begin{array}{ccc} F & \gamma_{d+1} & V \\ \gamma_d & & C'_{m+1} \\ \varphi W & C_p C_{m-p} & \pi P \end{array}$$

Les courbes γ_d issues de F forment un système linéaire contenant toutes le groupe fixe φ ; le groupe W engendre une série linéaire dont la dimension est celle du système linéaire de γ_d issue de F.

Pour avoir un groupe de l'espèce indiquée, il suffit donc de construire, pour le degré d , un groupe surabondant que j'appelle $F + \varphi$; φ est composé d'une partie ou de la totalité des points surabondants; le groupe définit au moins deux courbes γ_d . Par ce groupe on mène une C_{m+1} en supposant $m \geq d + 3$; par φ on mène *une* courbe C_p qui donne sur C_{m+1} la portion π ; une courbe γ_d issue de $F + \varphi$ donne sur C_{m+1} un groupe W par lequel on mène *une* C_{m-p} (peu importe de savoir combien il existe de C_p ou C_{m-p} issues de φ ou W), laquelle donne sur C_{m+1} la partie P. Toute C_m issue de $\pi + P$ contient φ , parce que toute γ_d issue de F contient φ ; elle coupe donc C_{m+1} en $p(m+1)$ points communs à C_p et C_{m+1} et, par suite, admet C_p comme morceau; l'autre portion de C_m varie avec W ou γ_d et dépend de h paramètres comme γ_d . Si les γ_{d+1} issues de F dépendent de h_1 paramètres, les C'_{m+1} issues de $\pi + P$ dépendent de $h_1 + 1$ paramètres et l'on a d'après ce qui a été établi déjà

$$(1) \quad \begin{cases} s = s_1 + m + 2 - (h_1 + 1 - h), \\ \sigma = \sigma_1 + d + 2 - (h_1 - h), \end{cases}$$

σ et σ_1 étant les surabondances de F pour les degrés d et $d + 1$.

En comparant on a

$$(2) \quad s - s_1 = \sigma - \sigma_1 + m - d - 1 \geq 2,$$

car $\sigma - \sigma_1 \geq 0$, $m \geq d + 3$.

On a un exemple simple avec 16 points bases d'un faisceau de quartiques, $F_1, F_2, \dots, F_{14}, F_{15}, F_{16}$, dont les 14 premiers jouent le rôle de F et les 2 derniers le rôle de φ . Il suffit du diagramme suivant tracé sur une C_8 circonscrite aux points F_1, F_2, \dots, F_{16} :

$$\begin{array}{ccccc} F_1 F_2 \dots F_{14}, & C_5, & V_1 V_2 \dots V_{26}, \\ & C_4, & C'_8, \\ F_{15} F_{16} W_1 W_2 \dots W_{16}, & C_1 C_6, & \pi_1 \pi_2 \dots \pi_6 P_1 P_2 \dots P_{32}. \end{array}$$

La droite $F_{15} F_{16}$ perce C_8 en $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_6$; les 16 W sont bases d'un faisceau de quartiques et servent de résidu indifféremment aux 16 points $F_1 \dots F_{16}$ ou aux 32 points $P_1 P_2 \dots P_{32}$; les 32 P sont donc bases d'un faisceau de sextiques, les quatre points bases complémentaires de ce faisceau n'étant pas sur C_8 ; par $F_1 \dots F_{16}$ passent ∞^5 quintiques, donc par P_1, \dots, P_{32} passent aussi ∞^5 courbes de degré 7; les P ont donc la surabondance 6 pour le degré 6 et 2 pour le degré 7, le tableau T pour $m = 7$ consulté à la colonne h où l'on prend $h = 4$ doit donner le groupe *complet* pour le degré 7 contenant les 32 points P ; on doit ainsi prendre soit l'article conique $f = 1$, d'où 36 points bases d'un faisceau de sextiques, soit l'article cubique $f = 5$ d'où 33 points situés sur une seule sextique; on ne peut conserver que la première solution⁽¹⁾ et ceci nous montre que toutes les courbes de degré 7, issues des 32 points P obtenus sur C_8 , contiennent aussi les 4 points bases complémentaires du faisceau de sextiques: c'est conforme à la proposition de Cayley et ces 4 points ne sont donc pas en ligne droite. Le groupe $\pi_1 \dots \pi_6 P_1 \dots P_{32}$ a pour surabondance 1 pour le degré 8; on a en effet appliqué sur C_8 la construction générale à partir de $F_1 F_2 \dots F_{14}$, ce même groupe définit un faisceau de C_7 , ayant toutes en commun la droite $F_{15} F_{16}$; il a donc la surabondance 4 pour le degré 7. Ce résultat confirme certains résultats énoncés au paragraphe 6 du Chapitre premier; *en général* 7 points d'une droite et un groupe surabondant pour le degré 6 définissent des C_7 toutes décomposées, avec la droite comme partie commune; ici il a suffi de 6 points en ligne droite, et même simplement de 4, car les P seuls ont, pour le degré 7, la surabondance 2 tandis que joints aux π , ils donnent la surabondance 4.

Cet exemple montre comment le problème étudié au Chapitre précédent (§ 6) peut profiter des résultats du tableau T. Il s'agit de la décomposition *obligatoire* de courbes d'un degré donné contenant un groupe donné de points. Ici toutes les C_7 qui contiennent $P_1 \dots P_{32}$ contiennent encore les 4 points supplémentaires, de base d'un faisceau $C_6 + \lambda C'_6 = 0$; le tableau T nous apprend que les ∞^5 septiques

(1) D'ailleurs l'équation $C_6 C_1 + C'_6 C'_1 = 0$, où C_6 et C'_6 sont les deux sextiques de base des faisceaux et C_1, C'_1 deux droites arbitraires, contient le nombre de paramètres voulu et définit les C_7 passant non seulement par les 32 P mais les quatre autres points.

circonscrites se coupent deux à deux en 13 nouveaux points situés sur une même conique : si C_7 est donnée et si C'_7 varie, la conique variable passe par un point *fixe* A de C_7 ; de la sorte imposons à une Γ_7 inconnue, déjà circonscrite aux P , de contenir 3 points en ligne droite de C_7 , soit B, C, D ; on obtient trois équations indépendantes des premières, soit un total de 33 équations et la septique Γ_7 engendre un *réseau*, la conique portant les points d'intersection de C_7 et d'une Γ_7 se décompose nécessairement en la droite BCD et alors de deux choses l'une : ou bien cette droite BCD ne passe pas par A , ce qui est le cas général et alors elle perce C_7 en *quatre* points *virtuels* pour P_1, P_2, \dots, P_{32} BCD ou bien elle passe par A et alors perce C_7 en *trois* points *virtuels* pour le même groupe ; donc, *en général*, adjoindre 4 points au hasard situés en ligne droite à $P_1 \dots P_{32}$, oblige C_7 à se décomposer, parce que l'un des 4 points ne coïncide pas avec les 4 points virtuels déterminés par les 3 autres. Ce genre de raisonnement revient au fond à introduire les schémas à 3 termes par parenthèses, étudiés au Chapitre précédent ; d'ailleurs, avec les considérations développées au paragraphe 5 de ce Chapitre, on retrouve le même résultat ; en effet pour le degré $m = 6$ le groupe P_1, P_2, \dots, P_{32} a la surabondance $s = 6$, et pour le degré $m + 1 = 7$, la surabondance $s_1 = 2$; donc la formule $s = s_1 + m + 2 - h_1$ montre qu'une droite prise au hasard appartient à la C_7 circonscrite à $P_1 \dots P_{32}$ moyennant *quatre* conditions linéaires, c'est-à-dire 4 points pris *au hasard* sur cette droite.

10. Il n'y a plus que le cas où les C_m ont un morceau de décomposition fixe, n'appartenant pas tout entier aux C_{m+1} . Autrement dit on aura

$$C_m \equiv C_p C_q C_{m-p-q} \quad C_{m+1} \equiv C_p C_{m-p+1},$$

où C_p et C_q sont fixes ; on peut raisonner comme plus haut : en adjoignant au besoin des points virtuels pour le degré $m + 1$ (et par suite pour le degré m), le groupe proposé peut être supposé contenir $\frac{p(p+3)}{2} + (m+1-p)p$ points fondamentaux pour le degré $m + 1$, répartis sur C_p , de sorte que ces points fondamentaux obligent toutes les C_{m+1} à contenir C_p ; or sur ces points, il y en a p qui sont, pour le

degré m , surabondants; la différence $s - s_1$ représente d'ailleurs le total des points, fondamentaux pour le degré $m + 1$, mais surabondants pour le degré m : donc ici on a $s - s_1 \geq p$ comme plus haut et le résultat est donc établi définitivement.

Donc à partir du degré minimum m où les H points définissent des courbes algébriques, les surabondances s, s_1, s_2, \dots , pour les degrés $m, m + 1, m + 2, \dots$, diminuent nécessairement au moins d'une unité à chaque fois, tant qu'elles ne sont pas nulles: on est donc certain que, si pour un degré μ le groupe a une surabondance σ , il est normal pour le degré $\mu + \sigma$ et tous les degrés supérieurs. D'autre part, si les courbes de degré $m + p$ se décomposent nécessairement avec une partie fixe γ , cette partie fixe appartient nécessairement aux courbes de degré $m, m + 1, \dots, m + p$. A partir d'un certain degré γ cessera d'être morceau de décomposition obligatoire; donc à partir d'un certain degré le groupe n'aura plus qu'un nombre fini de points virtuels; de même à partir d'un certain degré il devient normal, et, au cas où il ne serait pas complet, en continuant à monter dans l'échelle des degrés, le groupe devient non seulement normal, mais complet.

D'autre part nous avons vu que la surabondance σ , pour le degré μ , perd au plus μ unités en passant au degré $\mu + 1$; si donc on détermine le plus petit entier ρ tel que $(2\mu + \rho - 1)\rho > 2\sigma$, on est certain que le groupe est surabondant au moins dans l'intervalle des degrés successifs, $\mu, \mu + 1, \dots, \mu + \rho - 1$ (et peut-être au delà), puis, qu'il est normal pour les degrés $\mu + \sigma, \mu + \sigma + 1, \dots$ (et peut-être en deçà).

Le résultat $s = s_1 + m + 2 - h_1$ énoncé au paragraphe 5 est susceptible d'une généralisation élégante pour les groupes anormaux complets P définissant des courbes C_m sans partie commune; nous les avons indiqués au tableau T, nous considérons les groupes F, V, P , les entiers m, d dont le rôle a été expliqué; supposons que F ait la surabondance σ_p pour le degré $d + p$ ($p \geq 0$) et définisse ∞^{h_p} courbes γ_{d+p} ; à toute γ_{d+p} issue de F correspond une courbe C_{m+p} issue de P , on voit que si $d + p < m$ les C_{m+p} issues de P dépendent de $h_p + \frac{(p+1)(p+2)}{2}$ paramètres non homogènes; si $d + p \geq m$, les C_{m+p} dépendent seulement de $h_p + \frac{(p+1)(p+2)}{2} - \frac{(d+p-m+1)(d+p-m+2)}{2}$ paramètres, résultats évidents en se servant de la série linéaire découpée sur C_m par

les γ_{d+p} . De la sorte on peut écrire, si $p \leq m - d - 1$,

$$\begin{aligned} s_{p-1} - s_p &= m + p + 1 - (h_p - h_{p-1} + p + 1), \\ \sigma_{p-1} - \sigma_p &= d + p + 1 - (h_p - h_{p-1}), \end{aligned}$$

et par soustraction

$$s_{p-1} - \sigma_{p-1} = s_p - \sigma_p + m - d - p - 1.$$

Or comme on a

$$s - \sigma = \frac{(m-d-1)(m-d-2)}{2} = 1 + 2 + 3 + \dots + (m-d-2),$$

la formule trouvée montre clairement que l'on a pour $0 \leq p \leq m - d - 1$

$$s_p - \sigma_p = \frac{(m-d-p-1)(m-d-p-2)}{2}$$

de sorte que l'on a des nombres triangulaires successifs décroissants pour les différences

$$s - \sigma, \quad s_1 - \sigma_1, \quad \dots, \quad s_{m-d-3} - \sigma_{m-d-3}, \quad s_{m-d-2} - \sigma_{m-d-2},$$

la dernière étant nulle, nous avons démontré que $s_{m-d-1} - \sigma_{m-d-1}$ est nulle aussi et l'on vérifie que les différences ultérieures restent nulles. De la sorte, le calcul des surabondances successives du groupe P revient au calcul analogue pour F et les degrés plus bas $d, d + 1, \dots$, au lieu de $m, m + 1, \dots$. En particulier si $\sigma = 0$, les surabondances successives de P sont simplement les nombres triangulaires successifs décroissants.

41. *Complément à la proposition de Cayley.* — Nous pouvons étudier les mn points (C_m, C_n) où $n > m$ pour les degrés $q = m, m + 1, m + 2, \dots, n - 2, n - 1$. Bacharach ne l'a fait que pour $n - 2$ et $n - 1$, car la surabondance des mn points pour les degrés q égaux à $n, n + 1, \dots, m + n - 3$ conserve la même expression analytique en fonction de m, n, q même pour $q = n - 1$ ou $n - 2$, remarque faite au paragraphe 3. Mais on peut généraliser; pour $q = m, m + 1, \dots, n - 2, n - 1$ toute courbe C_q qui contient ρ points pris au hasard sur les mn admet aussi les $\rho' = mn - \rho$ points complémentaires et se dé-

compose en C_m et une C_{m-q} . On a

$$(1) \quad \rho = \frac{m(m+3)}{2} + mp, \quad \rho' = \frac{m[2n - m - 2p - 3]}{2}.$$

Mais cette circonstance peut être en défaut: le groupe des $\rho + \rho'$ points (C_m, C_n) comprend pour le degré q des points fondamentaux en nombre ρ , mais il peut comprendre un groupe anormal, *complet ou incomplet*, contenu dans les $\rho + \rho'$ points donnés et cela permet, comme plus haut, de trouver des courbes C_q contenant ρ points du groupe (et même $\rho + t$) sans contenir les ρ' (ou $\rho' - t$) restants, c'est-à-dire non décomposées en C_m et une C_{m-q} . On reconnaîtra ici que le groupe partiel peut être *incomplet* (tandis que précédemment pour $m = n \leq q$ ou $m \leq n < q$, il était complet). Soit donc le groupe P contenant les $\rho - h$ points fondamentaux et s points surabondants (contenus sur C_m nécessairement; P peut contenir des points *virtuels* situés sur C_m mais non parmi les points C_m, C_n). On a $h \geq 1, s > h, s \leq \rho'$ et un diagramme relatif à des points portés sur C_m (λ entier ≥ 0):

$$\begin{array}{ccc} \text{F} & m + n - q - 3 - \lambda & \text{V} \\ m - 3 - \lambda & & n \\ \text{W} & q & \text{P} \end{array}$$

Les courbes C_q issues de P découpent sur C_m une série linéaire g_w^{h-1} , car elles ont une équation de la forme

$$C_m C_p + \lambda_1 C_{m+p}^{(1)} + \dots + \lambda_h C_{m+p}^{(h)} = 0;$$

on a

$$\begin{aligned} \omega = m(m+p) - \rho + h - s &= \frac{(m-1)(m-2)}{2} - 1 + h - s, \\ \omega - h + 1 &= \frac{(m-1)(m-2)}{2} - s. \end{aligned}$$

La série W est donc *spéciale* et la surabondance s est toujours égale au nombre de C_{m-3} linéairement distinctes issues de W. Cette fois c'est le degré $m + n - q - 3 - \lambda = (m - 3 - \lambda) + (n - q)$ qui surpasse le degré $m - 3 - \lambda$. Nous retrouvons sur C_m des groupes F, W étudiés au premier Chapitre, il faut ici que V et W n'aient pas de partie commune et par suite que les courbes de degré $m - 3 - \lambda + (n - q)$ issues de F ne se décomposent pas, avec la courbe $C_{m-3-\lambda}$ comme

partie commune; si la courbe de degré $m - 3 - \lambda$, issue de F, est fixe ($h = 1$), le groupe P est *incomplet* pour le degré $m + p = q$ et se complète par l'unique groupe W; si cette courbe est variable, le groupe P est *complet*.

Prenons un exemple simple: les 24 points communs à une C_4 et une C_6 ont pour surabondance 10 pour le degré 4, 6 pour le degré 5, 3 pour le degré 6. En général toute C_5 qui en contient 18 contient les 6 autres et se décompose en C_4 et une droite; mais si par 6 points V pris sur une même conique, on fait passer une C_4 et une C_6 , les 18 points complémentaires P de l'intersection n'obligent plus les quintiques contenant ces P à se décomposer en C_4 et une droite: on a en effet sur C_4 le diagramme

2 F	2	6 V
1		6
2 W	5	18 P

les points F_1, F_2 sont ceux où la conique donnée perce de nouveau C_4 et l'on voit que les 18 points P forment pour le degré 5 un groupe anormal *incomplet* de surabondance 1 se complétant par les deux points W_1, W_2 où F_1, F_2 perce de nouveau C_4 ; une quintique passant par les 18 points P, et par suite aussi par W_1 et W_2 , n'est pas obligée de contenir les V ni de se décomposer.

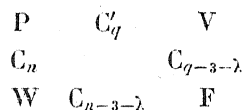
Si l'on suppose que C_4 et C_6 ont 7 points V communs situés sur une conique, les 17 points P complémentaires forment cette fois un groupe anormal *complet*, de surabondance 1 pour le degré 5 et donnent le diagramme sur C_4

1 F	2	7 V
1		6
3 W	5	17 P

et une quintique contenant ces 17 P et l'un des points V ne contient pas les 6 autres V nécessairement: si F est le point fixe et V_7 le point V adopté, les quintiques auront, d'après ce qui précède, deux points fixes nouveaux sur la droite FV_7 . Remarquons que le groupe des 17 points P met déjà pour $m = 4, n = q = 5$ la proposition de Cayley en défaut: les quintiques contenant les 17 points communs à C_4 et une C_5

circonscrite à ces 17 points P ne contiennent pas les trois autres points communs, parce qu'ils sont en ligne droite.

12. *Criterium nouveau pour la surabondance.* — La conclusion de cette étude est que l'on peut reconnaître de la façon suivante si un groupe de points P est ou non anormal pour le degré q : soit C_q une courbe issue de P, coupons-la par une courbe quelconque issue de P où $n > q$; C_q et C_n ont en commun un nouveau groupe W; P est anormal ou non suivant que W peut ou non être placé sur une courbe de degré $n - 3$ au plus; si $n < q + 3$, le nombre s de ces courbes de degré $n - 3$ linéairement indépendantes est la surabondance: ce criterium a été donné jusqu'ici en prenant $n = q$. Si $n \geq q + 3$; la surabondance n'est plus s mais $s - \frac{(n - q - 2)(n - q - 1)}{2}$. Cela résulte manifestement du diagramme tracé sur C_q :



où nous faisons apparaître la courbe auxiliaire C_q donnant la règle pour $n = q$. Ce criterium s'applique aux groupes complets ou incomplets.

13. *Courbes algébriques de degré croissant contenant un groupe de points donnés.* — On peut prolonger le tableau T en indiquant les valeurs de F, σ , V, P, h , s pour des courbes γ_d de degré supérieur à $m - 3$: les groupes P ne sont plus nécessairement anormaux pour le degré m , mais le tableau manifeste certaines propriétés curieuses. Ainsi prolongeons pour $m = 4$:

		$m = 4$				
	F	σ	V	P	h	s
Conique...	0	0	8	8	5	0
	1	0	7	9	4	0
	2	0	6	10	3	0
	3	0	5	11	2	0
	4	0	4	12	1	0
Cubique...	9	1	3	13	1	1

De là résulte que, si parmi les points communs à une C_4 et C'_4 donnés, 7 sont sur une conique, les 9 autres sont sur un faisceau de cubiques et réciproquement (cela résulte de ce que la conique issue du point F peut être décomposée en une droite *arbitraire* et une droite *quelconque issue de F*). De même si 6 points sont sur une conique, les 10 autres sont sur une même cubique et réciproquement. La propriété indiquée pour les 9 points bases d'un faisceau de cubiques permet de retrouver immédiatement cette proportion établie au Chapitre I, paragraphe 6, que ces 9 points joints à quatre points pris au *hasard* sur une droite quelconque donnant des quartiques toutes décomposées, réduites à la droite et à une cubique du faisceau. Le raisonnement est le même que pour le système étudié au paragraphe 9 de ce chapitre : 36 points bases d'un faisceau de sextiques, quatre points pris en ligne droite et courbes de degré 7.

14. Cherchons maintenant l'équation générale des courbes de degré donné contenant un groupe de H points donnés, supposé anormal pour le degré minimum des courbes algébriques circonscrites.

Par exemple pour $m \leq n$ et le système (C_m, C_n) on a vu que, si $n \leq q \leq m + n - 1$, l'équation

$$(1) \quad C_m C_{q-m} + C_n C_{q-n} = 0$$

est l'équation générale des courbes de degré q circonscrites, C_{q-m} et C_{q-n} étant deux polynômes arbitraires de degré $q-m$ et $q-n$: les paramètres entrant dans C_{q-m} et C_{q-n} sont tous *indépendants*. Mais si $q \geq m + n$, l'équation (1) contient des paramètres *surabondants* ; on peut en effet remplacer (1) sans changer le degré de C_{q-m} ou C_{q-n} par

$$(2) \quad C_m(C_{q-m} - C_n X_{q-m-n}) + C_n(C_{q-n} + C_m X_{q-m-n}) = 0 ;$$

où X_{q-m-n} est polynôme arbitraire en x, y de degré $q-m-n$ et les $\frac{(q-m-n+1)(q-m-n+2)}{2}$ coefficients arbitraires figurant dans X_{q-m-n} peuvent être utilisés de façon à réduire le nombre de paramètres homogènes apparents entrant dans (1) au nombre

$$(3) \quad \frac{(q-m+1)(q-m+2)}{2} + \frac{(q-n+1)(q-n-2)}{2} - \frac{(q-m-n+1)(q-m-n+2)}{2}$$

et ce nombre est bien égal à $\frac{(q+1)(q+2)}{2} - mn$ de sorte que l'on ne peut réduire davantage, les mn points formant un groupe normal pour les degrés $m+n$ et supérieurs.

Cet exemple montre bien la marche générale, indépendante de l'exemple particulier, propre à ne conserver que les paramètres strictement indépendants. D'autre part le tableau T permet de suivre les surabondances successives pour les degrés successifs croissants. Un groupe P du tableau T est obtenu sur C_m avec deux groupes simultanés F, V et deux courbes γ_a et C'_m ; par F on fera passer une courbe γ_{d+p} au lieu de γ_a et l'on a un résiduel nouveau de F soit V_p situé avec P sur une même C_{m+p} et inversement; de sorte qu'en comptant les γ_{d+p} issues de F, autrement dit en évaluant la surabondance, nulle ou non, de F pour le degré $d+p$ on arrive à trouver la surabondance de P pour le degré $m+p$.

15. Soit l'exemple très simple de $m^2 - m + 1$ points bases d'un réseau de courbes de degré m . On prendra

$$(1) \quad C_m \equiv x h_{m-1} + y f_{m-1} + y^2 f_{m-2} + \dots + y^m f_0,$$

$$(2) \quad C'_m \equiv (x - \xi) h_{m-1} + y g_{m-1} + y^2 g_{m-2} + \dots + y^m g_0,$$

où ξ est une constante non nulle, les f , g , h des polynômes entiers en x de degré marqué par leur indice. On a

$$(3) \quad C'_m - C_m = -\xi h_{m-1} + y(g_{m-1} - f_{m-1}) + \dots + y^m(g_0 - f_0),$$

$$(4) \quad C''_m \equiv \frac{\xi C_m + x(C'_m - C_m)}{y} \equiv \xi [f_{m-1} + y f_{m-2} + \dots + y^{m-1} f_0] \\ + x [g_{m-1} - f_{m-1} + y(g_{m-2} - f_{m-2}) + \dots + y^{m-1}(g_0 - f_0)].$$

La courbe générale du réseau déterminé par les $m^2 - m + 1$ points communs à C_m et C'_m autres que ceux portés par Ox est donc

$$(5) \quad \lambda C_m + \mu C'_m + \nu C''_m \equiv 0,$$

λ , μ , ν étant des constantes arbitraires. Nous remarquerons l'identité importante

$$(6) \quad (\xi - x) C_m + x C'_m - y C''_m = 0,$$

qui peut s'obtenir *a priori* en remarquant que la courbe $y C_m''$ est une courbe contenant les points communs à C_m et C_m' .

Si nous considérons maintenant deux courbes du réseau

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda C_m + \mu C_m' + \nu C_m'' = 0, \\ \lambda' C_m + \mu' C_m' + \nu' C_m'' = 0, \end{cases}$$

les points communs, autres que ceux du réseau, sont donc définis par la droite d'équation

$$(8) \quad \begin{vmatrix} \xi - x & x & -y \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda' & \mu' & \nu' \end{vmatrix}$$

Si λ, μ, ν restent fixes, tandis que λ', μ', ν' restent fixes, cette droite pivote autour du point défini par

$$(9) \quad \frac{\xi - x}{\lambda} = \frac{x}{\mu} = \frac{y}{-\nu}.$$

L'identité (6) montre que ce point appartient à la première courbe (7) et c'est le point fixe de cette courbe autour de laquelle pivote la sécante portant les $(m - 1)$ points communs à cette courbe et à une courbe variable du réseau. Ce point $\frac{\mu \xi}{\lambda + \mu}, \frac{-\nu \xi}{\lambda + \mu}$ peut, λ, μ, ν variant, prendre une position arbitraire dans le plan; il en est de même pour le point analogue $\frac{\mu' \xi}{\lambda' + \mu'}, \frac{\nu' \xi}{\lambda' + \mu'}$ relatif à la seconde courbe, de sorte que la droite (8) peut prendre, par variation de $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$, une position arbitraire.

L'équation

$$(10) \quad C_m C_1 + C_m' C_1' + C_m'' C_1'' = 0$$

représente la courbe générale de degré $m + 1$ circonscrite au groupe, C_1, C_1', C_1'' étant trois droites arbitraires, il n'y a que huit paramètres homogènes et non neuf, car on peut retrancher de (10) le produit de (6) par une constante arbitraire et annuler le coefficient de y dans C_1'' . Les courbes

$$(11) \quad \begin{cases} C_m C_1 + C_m' C_1' + C_m'' C_1'' = 0, \\ C_m \bar{C}_1 + C_m' \bar{C}_1' + C_m'' \bar{C}_1'' = 0 \end{cases}$$

se coupent en $3m$ points V complémentaires situés sur une cubique

$$(12) \quad \begin{vmatrix} C_1 & C_1 & C_1'' \\ \bar{C}_1 & \bar{C}_1 & \bar{C}_1'' \\ x - \xi & x & -y \end{vmatrix} = 0.$$

Cette cubique perce la première courbe (11) en 3 points parasites définis par

$$(13) \quad \frac{C_1}{x - \xi} = \frac{C_1}{x} = \frac{C_1''}{-y}.$$

Cette remarque permet de retrouver le groupe au tableau T pour $m + 1$. On a ainsi, avec trois points fixes sur une C_{m+1} non en ligne droite,

			$m + 1$			
	F	σ	V	P	h	s
Cubique...	3	0	$3m$	$m^2 - m + 1$	6	$\frac{(m-3)(m-4)}{2}$

Nous voyons de même que l'équation générale des courbes C_{m+p} contenant le groupe est, avec trois courbes C_p, C_p', C_p'' arbitraires,

$$(14) \quad C_m C_p + C_m' C_p' + C_m'' C_p'' = 0.$$

Pour reconnaître les paramètres surabondants il suffit de résoudre l'identité, où $\Gamma_p, \Gamma_p', \Gamma_p''$ sont les inconnues :

$$(15) \quad C_m \Gamma_p + C_m' \Gamma_p' + C_m'' \Gamma_p'' = 0.$$

La courbe Γ_p'' doit donc éontenir les $(m - 1)$ points en ligne droite communs à C_m et C_m' mais non à C_m'' ; donc si $p \leq m - 2$, Γ_p'' admet en facteur la droite portant ces $(m - 1)$ points. Avec les axes actuels on aura donc pour $p \leq m - 2$

$$(16) \quad \Gamma_p \equiv (\xi - x) X_{p-1}, \quad \Gamma_p' \equiv x X_{p-1}, \quad \Gamma_p'' \equiv -y X_{p-1},$$

où X_{p-1} est un polynome en x, y arbitraire de degré $p - 1$. L'équation (14) contient donc un nombre de paramètres homogènes arbitraires

$$\frac{3(p+1)(p+2) - p(p+1)}{2} = (p+1)(p+3),$$

strictement indépendants ; ceci montre que la surabondance est

$\frac{(m-p-2)(m-p-3)}{2}$, nombre que l'on peut obtenir directement en menant par le point fixe F de C_m au lieu d'une droite une courbe γ_{1+p} arbitraire. Les courbes

$$(17) \quad \begin{cases} C_m C_p + C'_m C'_p + C''_m C''_p = 0, \\ C_m \bar{C}_p + C'_m \bar{C}'_p + C''_m \bar{C}''_p = 0 \end{cases}$$

se coupent en $[(2p+1)m + p^2 - 1]$ points nouveaux situés sur la courbe C_{2p+1} d'équation

$$(18) \quad \begin{vmatrix} C_p & C'_p & C''_p \\ \bar{C}_p & \bar{C}'_p & \bar{C}''_p \\ \xi - x & x & -y \end{vmatrix} = 0;$$

et cette courbe C_{2p+1} perce la première courbe (17) en $p^2 + p + 1$ points parasites fixes définis par

$$(19) \quad \frac{C_p}{\xi - x} = \frac{C'_p}{x} = \frac{C''_p}{-y}.$$

Notre groupe de $m^2 - m + 1$ points se retrouve donc pour $p \leq m - 4$ au tableau T pour le degré $m + p$ à l'article C_{2p+1}

				$m + p$				
	F	σ	V	P	h		s	
C_{2p+1}	$p^2 + p + 1$	0	$(2p+1)m + p^2 - 1$	$m^2 - m + 1$	$p^2 + 4p + 1$		$\frac{(m-p-2)(m-p-3)}{2}$	

Le nombre h est obtenu en nous rappelant que les C_{m+p} contiennent $2 + h$ paramètres homogènes; nombre égal à $(p+1)(p+3)$; cela entraîne bien que σ soit nul, car les courbes C_{2p+1} issues de F contiennent $1 + h$ paramètres homogènes; F et P sont corésiduels sur C_{m+p} , donc à toute C_m issue de P correspond une courbe C_{p+1} issue de F; donc les F définissent un *réseau* de courbes de degré $p+1$; les F marqués sur C_{m+p} offrent donc pour le degré $p+1$ la même particularité que les P pour le degré m .

Si l'on pose $M = m + p$, puisque $p \leq m - 4$ on a $m \geq \frac{M}{2} + 2$, $p \leq \frac{M}{2} - 2$; on déduit de ce qui précède que sur une courbe C_M tout système de $p^2 + p + 1$ points bases d'un réseau de C_{p+1} entraîne l'existence d'un

ystème analogue de $m^2 - m + 1$ points base d'un réseau de C_m ($m + p = M$). On remarque encore que dans le tableau T pour le degré $m + p$; il y a, en supposant $p \leq m - 4$ et $p \geq 3$, deux lignes équivalentes

$$(20) \left\{ \begin{array}{cccccc} & & & m+p & & \\ & F & \sigma & V & P & h \\ C_{p+1} & p^2 + p + 1 & \frac{(p-1)(p-2)}{2} & mp + m - 1 & m^2 + mp + p^2 - m + 1 & 2 \\ C_m & m^2 - m + 1 & \frac{(m-2)(m-3)}{4} & mp + m - 1 & m^2 + mp + p^2 - m + 1 & 2 \end{array} \right.$$

Enfin on constate aisément que les $m^2 - m + 1$ points étudiés ont pour surabondance successives pour les degrés suivants :

$$\begin{array}{ccccccc} m & m+1 & \dots & 2m-5 & 2m-4 & 2m-3 \\ \frac{(m-2)(m-3)}{2} & \frac{(m-3)(m-4)}{2} & \dots & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

le degré minimum des courbes contenant le groupe est m .

16. Dans tous les exemples analogues on aura donc à déterminer d'abord le degré minimum des courbes qui contiennent le groupe anormal, et le tableau T indique pour deux courbes C_m, C'_m la courbe de degré minimum contenant les points d'intersection complémentaires communs et C_m à C'_m : cela permet de découvrir les identités analogues à 6.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES.

1. *Quartiques circonscrites à onze points.* — Au Chapitre premier, paragraphe 16, j'ai montré comment 11 points *choisis arbitrairement* P_1, P_2, \dots, P_{11} peuvent être complétés par ∞^1 couples V, W , de façon que les quartiques circonscrites à ce couple et aux P forment un *réseau* et non un *faisceau*. On suppose que, sur les P , il y en a pas 5 (ou plus) sur une droite, 9 (ou plus) sur une conique et enfin que les 11 ne sont pas sur une cubique; ils forment donc un groupe normal complet pour le degré 4. Je rappelle la construction : soient C_4 une

quartique fixe circonscrite aux P et C'_i une quartique variable circonscrite aussi aux P; C'_i coupe C_3 en cinq points Q, R, S, T, U dont quatre ne sont pas en ligne droite (sinon le cinquième serait avec les P sur une même cubique); Q, R, S, T, U déterminent une seule conique coupant C_3 en A, B, C et ces points, d'après la théorie de la résiduation, sont indépendants de C'_i ; la droite BC, par exemple, coupe C_3 en deux points V, W formant un couple cherché; on le voit en coupant encore C_3 par une droite $A\alpha\beta\gamma$ arbitraire issue de A et écrivant les égalités symboliques

$$(1) \quad P_1 + P_2 + \dots + P_{11} + Q + R + S + T + U = 0,$$

$$(2) \quad A + \alpha + \beta + \gamma = 0,$$

$$(3) \quad B + C + V + W = 0,$$

$$(4) \quad Q + R + S + T + U + A + B + C = 0,$$

dont chacune exprime que le premier membre comporte tous les points communs à C_3 et une courbe algébrique : la théorie de la résiduation permet d'ajouter de telles égalités membre à membre et de supprimer dans une telle égalité une somme partielle nulle. Donc en retranchant la dernière somme du total des trois premières il vient

$$(5) \quad P_1 + P_2 + \dots + P_{11} + V + W + \alpha + \beta + \gamma = 0,$$

qui exprime le résultat, car on a 16 points de base d'un faisceau de quartiques contenant trois points α, β, γ en ligne droite; CA donne de même un couple V', W' et AB un couple V'', W'' . Les quartiques circonscrites aux P, à V et V' contiennent automatiquement W et W' et forment un *faisceau*, car le groupe $P_1 \dots P_{11} VW$ est *complet*. Le faisceau PVV' contient un nouveau point fixe qui, d'après les propriétés du réseau PVW , est en ligne droite avec V' et W' ; ce point est donc le point de rencontre Z des droites VW et $V'W'$; sur chaque quartique du faisceau PV, W, V', W' , Z il y a trois couples associés aux P : deux sont connus (VW) et ($V'W'$); donc le troisième couple $V''W''$ dépend bien de l'unique paramètre du faisceau, il engendre donc une courbe algébrique C sur laquelle V'' et W'' se correspondent birationnellement de sorte que C est du type hyperelliptique. J'ai montré plus haut que C est *vraisemblablement* de degré 7 avec P_1, \dots, P_{11} comme points doubles et n'a pas d'autres singularités. Des considérations simples

de géométrie dans l'espace vont donner une démonstration *rigoureuse* de ce fait.

2. Dans le plan Π portant les P , soient C_1, C'_1, C''_1, C'''_1 quatre quartiques linéairement indépendantes du système linéaire ∞^3 circonscrit aux P . La surface unicursale Σ définie par

$$(1) \quad \frac{X}{C_1(x, y)} = \frac{Y}{C'_1(x, y)} = \frac{Z}{C''_1(x, y)} = \frac{T}{C'''_1(x, y)}$$

correspond point par point, birationnellement, au plan Π ; remplacer les quartiques C_1 par d'autres, indépendantes aussi, revient à une transformation homographique de Σ ou à un changement du trièdre de référence, sans toucher à Σ ; cela sera utilisé pour simplifier l'équation de Σ . De même une transformation homographique faite dans le plan Π permet de prendre pour P_1, P_2, P_3, P_4 quatre points choisis à l'avance : il n'y aura donc que la variation des sept points P_5, \dots, P_{11} qui influera sur la configuration de Σ (sauf transformation homographique dans l'espace à trois dimensions).

A tout point *arbitraire* de Π correspond un point de Σ et un seul; à chaque P_i correspond exceptionnellement une droite de Σ ; soit en effet l'origine de Π prise en P_1 ; posons $y = mx$, de sorte que les variables soient (x, m) au lieu de (x, y) . Substituons, supprimons le facteur x commun aux dénominateurs; faisons ensuite $x = 0$, on obtient des équations de la forme

$$(2) \quad \frac{X}{A + Bm} = \frac{Y}{A_1 + B_1m} = \frac{Z}{A_2 + B_2m} = \frac{T}{A_3 + B_3m},$$

définissant, m variant, une droite Δ_i dont chaque point correspond homographiquement à chaque élément de contact issu de P_i . La surface Σ contient donc 11 droites.

A une droite de Π ne contenant aucun P_i correspond une quartique gauche unicursale de Σ ; si la droite passe par P_1 , il y a décomposition en cubique gauche unicursale et droite Δ_1 rencontrant la cubique. La droite P_1, P_2 donne une conique rencontrant Δ_1 et Δ_2 chacune en un point; il y a donc 55 coniques de cette espèce (le cas où il y a trois ou

quatre points P situés sur une même droite donne donc des cas de dégénérescence).

Soit une courbe unicursale, de degré m , dans le plan Π admettant P_i comme point d'ordre d_i ($d_i \geq 0$); cette courbe est l'image d'une courbe unicursale de Σ , d'ordre $4m - \sum d_i$, rencontrant Δ_i en d_i points.

La section plane de Σ par le plan *arbitraire*

$$(3) \quad uX + vY + wZ + hT = 0$$

a pour image sur Π la quartique générale du système ∞^3 circonscrit aux P

$$(4) \quad uC_i + vC'_i + wC''_i + hC'''_i = 0.$$

Donc Σ est de degré 5; si la quartique plane admet P_i pour point double, elle est l'image d'une quartique plane de Σ dont le plan contient Δ_i et réciproquement. Les quartiques planes circonscrites aux P et admettant P_i comme point double forment un *faisceau linéaire*, car les quartiques du système ∞^3 circonscrit aux P ne pourraient être toutes tangentes entre elles en P_i , que si les P étaient sur une même cubique; la condition pour que la quartique (4) ait P_i pour point double se traduit, avec le choix de notations employées pour (2), par les deux équations distinctes

$$(5) \quad \begin{cases} uA + vA_1 + wA_2 + hA_3 = 0, \\ uB + vB_1 + wB_2 + hB_3 = 0. \end{cases}$$

Les tangentes au point double se correspondent involutivement, donc aussi les deux points variables où la quartique plane de Σ coupe Δ_i ; les rayons doubles de l'involution des tangentes sont les tangentes de rebroussement à deux quartiques particulières ayant P_i comme point de rebroussement et les sections planes correspondantes de Σ viennent toucher Δ_i . Le faisceau des quartiques circonscrites aux P, avec P_i pour point double, a deux points bases complémentaires qui sont sur la courbe C, étudiée plus bas, mais déjà signalée, les homologues du point P, dans la correspondance birationnelle déjà signalée entre les points de C; les sections planes de Σ par les plans pivotant autour de Δ_i rencontrent Δ_i en deux points variables et deux points

fixes qui sont ceux où Δ_1 perce la cubique gauche Γ , ligne double de Σ , étudiée plus bas.

La quartique circonscrite aux P peut se composer de la droite P_1P_2 et de la cubique circonscrite à $P_3, \dots, P_9, P_{10}, P_{11}$; la section plane correspondante se compose de la conique déjà signalée, correspondant à P_1P_2 et d'une cubique non unicursale (un cas de dégénérescence de Σ est donc celui où les neuf points P autres que P_1 et P_2 seraient bases d'un faisceau de cubiques : la conique d'image P_1P_2 devrait se réduire à une droite rencontrant Δ_1 et Δ_2). Si l'équation (4) représente une quartique à point double, le plan correspondant est tangent à Σ et réciproquement. On a ainsi le moyen de former l'équation tangentielle de Σ ; les plans bitangents forment un système ∞^1 ; les plans tritangents sont en nombre fini et correspondent aux quartiques unicursales circonscrites aux P : ce sont les plans tritangents proprement dits; mais il y a ceux qui contiennent l'une des 55 coniques déjà signalées, correspondant aux quartiques composées de la droite P_iP_j et de la cubique circonscrite aux neuf autres points P . Il y a donc des cas de dégénérescence de Σ , si les ∞^1 quartiques de genre 1, circonscrites aux P , ont deux points doubles dont l'un, ou bien tous deux, se confondent avec des points P ou encore si l'une des quartiques unicursales circonscrites aux P admet trois points doubles situés en P_1, P_2, P_3 ; ces cas sont faciles d'ailleurs à réaliser effectivement. De même on écarte un cas encore plus spécial, celui où $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ définissent une conique et où $P_1, P_2, P_3, P_4, P_9, P_{10}, P_{11}$ définissent une autre conique : l'une des quartiques circonscrites aux P se décompose donc en deux coniques, dont les points communs sont des points P .

3. Réciproquement, à un point de Σ , correspond *en général* un point et un seul de Π ; sur chaque quartique circonscrite aux Π , il y a trois couples (V, W) tels que toute quartique contenant V contienne automatiquement W : donc (x_1, y_1) et (x_2, y_2) étant les coordonnées de V et W , on a

$$(1) \quad \frac{C_4(x_1, y_1)}{C_4(x_2, y_2)} = \frac{C'_4(x_1, y_1)}{C'_4(x_2, y_2)} = \frac{C''_4(x_1, y_1)}{C''_4(x_2, y_2)} = \frac{C'''_4(x_1, y_1)}{C'''_4(x_2, y_2)},$$

et ces deux points V , W correspondent à un même point de Σ , point double de Σ ; le lieu de ces points est une cubique gauche Γ ; le tableau T dressé pour $m = 4$ montre que Σ ne peut admettre de point triple, sinon on aurait, d'après le même principe, un groupe de trois points (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) de Π formant avec les P un groupe de surabondance 2, sans que toutes les quartiques circonscrites aux groupes se décomposent : or la surabondance 2, dans ces conditions, est impossible. Chaque section plane de Σ , étant de degré 5, avec trois points doubles, est bien de genre 3 comme la quartique image circonscrite aux P et il y a correspondance birationnelle (de courbe à courbe) entre cette quintique de Σ et la quartique image. Les couples (V, W) décrivent, sur Π , une courbe algébrique C , dont on peut obtenir l'équation en éliminant x_2, y_2 entre trois équations (1); si m est le degré de C , d le degré de multiplicité de chaque P_i sur C , on a, en comptant les intersections de C avec une quartique image, l'équation $4m = 11d + 6$, d'où $d = 2 + 4h$, $m = 7 + 11h$, h désignant un entier ≥ 0 . Pour avoir la valeur exacte de h , remarquons qu'une section plane menée par Δ_1 a pour image une quartique dont P_1 est point double, tandis que les autres P sont simples : la section plane et son image sont donc de genre 2; la section plane a donc, en supprimant Δ_1 , un seul point double; puisque tout plan mené par Δ_1 ne coupe plus la cubique gauche Γ qu'en un point, c'est que Δ_1 coupe Γ en deux points; à chacun de ces deux points correspond, sur l'image C , l'un ou l'autre des deux éléments de contact issus de P_1 , donc $d = 2$, $h = 0$. C'est donc la géométrie dans l'espace qui nous fournit la valeur exacte de h . (On aurait encore pu dire ceci : Γ étant une cubique gauche, d est le nombre de points où Δ_1 perce Γ de sorte que $d \leq 2$, or $d = 2 + 4h$, donc $d = 2$, $h = 0$.)

Nous avons vu que les deux tangentes $P_1 t_1$, $P_1 t'_1$ aux quartiques de Π appartenant au système ∞^3 étudié et admettant de plus P_1 pour point double forment un système en involution; les deux tangentes $P_1 \theta$ et $P_1 \theta'$ à C ne se correspondent pas dans cette involution. En effet, Δ_1 rencontre Γ en Θ et Θ' correspondant aux éléments de contact $P_1 \theta$ et $P_1 \theta'$; pour que Θ et Θ' se correspondissent dans l'involution tracée sur Δ_1 , il faudrait que les deux tangentes en Θ et Θ' à Γ fussent dans un même plan avec Δ_1 , chose impossible, puisque Γ est de degré 3.

Le point Θ a deux images, dont l'une est P_1 avec l'élément de contact $P_1\theta$ et l'autre est située sur C en dehors de P_1 . On pourra remarquer que la quartique déterminée par $P_1, P_2 \dots P_{11}$, (VW) , $(V'W')$ et la tangente $P_1\theta$ en P perce C précisément à la seconde image de Θ . On a ainsi les deux points bases supplémentaires communs aux quartiques du faisceau linéaire passant par les P avec P_1 pour point double.

4. Par une transformation homographique sur Σ on peut supposer que Γ est la cubique d'équations paramétriques

$$(1) \quad X = t, \quad Y = t^2, \quad Z = t^3.$$

Une surface *quelconque* de degré 5 admettant cette cubique pour ligne double est une surface Σ étudiée ici : en effet, toute surface de cette définition a pour équation

$$(2) \quad \begin{aligned} & (X^2 - Y)^2(AX + BY + CZ + D) \\ & + (Y^2 - XZ)^2(A_1X + B_1Y + C_1Z + D_1) \\ & + (XY - Z)^2(A_2X + B_2Y + C_2Z + D_2) \\ & + (Y^2 - XZ)(XY - Z)(A_3X + B_3Y + C_3Z + D_3) \\ & + (XY - Z)(X^2 - Y)(A_4X + B_4Y + C_4Z + D_4) \\ & + (X^2 - Y)(Y^2 - XZ)(A_5X + B_5Y + C_5Z + D_5) = 0. \end{aligned}$$

Il y a 18 paramètres homogènes, et non 24, en tenant compte des identités.

$$(3) \quad \begin{cases} (X^2 - Y)Y - X(XY - Z) + Y^2 - XZ \equiv 0, \\ (X^2 - Y)Z - Y(XY - Z) + (Y^2 - XZ)X \equiv 0, \end{cases}$$

provenant de ce que la surface $(Y^2 - XZ)T = 0$ ou $(Y^2 - XZ)X = 0$ contient l'intersection *complète* de $X^2 - Y = 0$ et $XY - Z = 0$. On peut multiplier chaque identité (3) par $X^2 - Y$, $XY - Z$, $Y^2 - XZ$ et par suite, en retranchant de (2), faire disparaître B, C, A_1, D_1, A_2, B_2 dans (2). D'autre part, il est facile de vérifier que (2) ne peut se réduire à une identité que si le premier membre de (2) est combinaison linéaire de six identités que nous venons de déduire de (3); il y a donc bien 18 paramètres homogènes strictement indépendants dans l'équation (2). D'autre part, dans II, on peut, par une homogra-

phie plane, donner à P_1, P_2, P_3, P_4 des positions arbitraires : il reste donc 14 paramètres, non homogènes, essentiels et indépendants pour fixer P_5, \dots, P_{11} . Cela fait, remarquons que la cubique gauche Γ , qui est unicursale, reste invariante, dans son ensemble, mais non point pour point, dans une infinité de transformations homographiques de l'espace à trois dimensions obtenues ainsi : le point $X = t, Y = t^2, Z = t^3$ décrit Γ , mais $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant quatre constances arbitraires le point

$$X_1 = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}, \quad Y_1 = \frac{(\alpha t + \beta)^2}{(\gamma t + \delta)^2}, \quad Z_1 = \frac{(\alpha t + \beta)^3}{(\gamma t + \delta)^3}$$

décrit aussi la cubique : il est bien clair que la transformation homographique obtenue en écrivant d'abord

$$(4) \quad X_1 = \frac{(\alpha t + \beta)(\gamma t + \delta)^2}{(\gamma t + \delta)^3}, \quad Y_1 = \frac{(\alpha t + \beta)^2(\gamma t + \delta)}{(\gamma t + \delta)^3}, \quad Z_1 = \frac{(\alpha t + \beta)^3}{(\gamma t + \delta)^3},$$

puis développant les polynômes du troisième degré figurant dans les formules (4) et y remplaçant t par X, t^2 par Y, t^3 par Z , laisse invariante la cubique dans son ensemble; le point t de Γ est remplacé par le point $\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$; la surface Σ change donc dans cette transformation (1), car une sécante double de Γ telle que Δ_1 change; donc Σ dépend, en outre des 14 paramètres essentiels trouvés pour P_3, P_6, \dots, P_{11} , des trois paramètres non homogènes $\alpha : \beta : \gamma : \delta$. On retrouve ainsi les 17 paramètres non homogènes indépendants, donc toute surface Σ définie par l'équation (2) est bien une de celles étudiées ici. Une telle surface est donc susceptible d'une représentation plane de l'espèce étudiée ici; ces surfaces admettent 11 droites, sécantes doubles de Γ ; dans certains cas, il peut s'introduire des droites distinctes de celles-là, mais alors elles ne sont pas sécantes doubles de Γ . Nous pouvons remarquer que si l'on choisit deux points situés sur une même sécante double de Γ et si l'on assujettit la surface (2) à contenir ces deux points, la droite en question appartient tout entière à Σ ; on peut donc assujettir la surface Σ définie par (2) à contenir 8 cordes arbitraires de Γ et il reste alors un paramètre linéaire; le faisceau des surfaces Σ ainsi

(1) Mais la forme de l'équation de Σ ne change pas.

obtenues possède une courbe fixe de degré 25; Γ compte pour 12, on a 8 droites et il reste donc une courbe gauche complémentaire U de degré 5 : ce qui précède montre que l'on ne peut choisir arbitrairement les 11 sécantes doubles de Γ .

Il y a quelques remarques intéressantes à faire sur le faisceau de surfaces que nous mettons ainsi en évidence; soient Σ et Σ_1 deux d'entre elles; effectuons pour Σ la représentation plane étudiée ici; l'intersection U de Σ et Σ_1 a pour image une courbe u de degré m ; remarquons que la droite Δ_9 , non commune, perce Σ_1 en cinq points dont un seul est hors de Γ ; par suite u admet P_9 comme point simple, et de même P_{10} et P_{11} . Soit maintenant la droite commune Δ_1 : si Δ_1 est prise pour axe Oz , l'équation du plan tangent à Σ au point de cote z est de la forme $y - \mu x = 0$, où μ est une fraction rationnelle en z de degré 2, puisque nous avons vu que tout plan issu de Δ_1 touche la surface en deux points hors de Γ ; le même résultat vaut pour Σ_1 , donc sur Δ_1 il y a quatre points où Σ et Σ_1 sont tangentes; or deux sont connus, ce sont les points où Δ_1 perce Γ , donc les deux autres points sont sur U et par suite u admet P_1, \dots, P_8 comme points doubles; U étant de degré 5, si l'on coupe u par une quartique circonscrite à $P_1 \dots P_{11}$, on a, en totalisant les intersections,

$$4m = 8 \times 2 + 3 + 5 \quad \text{ou} \quad m = 6;$$

or une sextique assujettie à avoir pour points doubles P_1, P_2, \dots, P_8 , et pour points simples P_9, P_{10}, P_{11} , est soumise à 27 équations linéaires, qui sont indépendantes si les 11 points P ont été choisis au hasard ⁽¹⁾: de la sorte sur la surface Σ étudiée ici, on peut tracer la courbe U commune

(1) Ici c'est moins évident que s'il s'agissait de 27 équations obtenues en donnant 27 points simples choisis au hasard. On sait en tout cas que le problème n'est pas impossible, puisqu'on a 27 équations linéaires et homogènes à 28 inconnues. Si dans un cas particulier les 27 équations sont distinctes, il en sera de même *a fortiori* pour le cas général. Or, prenons une quintique unicursale C_5 dont nous appellerons les points doubles $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$; coupons cette quintique par une droite et appelons les points d'intersection $P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}$. Il y a une sextique admettant P_1, \dots, P_8 pour points doubles et P_9, P_{10}, P_{11} pour points simples (au moins): c'est l'ensemble de la quintique et de la droite; il n'y a pas d'autre solution C_6 , sinon la quintique C_5 aurait en commun avec cette sextique P_1, \dots, P_6 comptant pour un total de 24, P_7 et P_8 pour un total de 4; P_9, P_{10}, P_{11} pour 3, soit un total général de 31, de sorte que C_5 fait partie de C_6 . L'expérience est donc concluante.

à Σ et à une surface de même nature, ayant Γ pour ligne double, et contenant $\Delta_1, \dots, \Delta_8$ (1) : il suffit de tracer u et de remonter à U .

5. Partant de la représentation paramétrique

$$(1) \quad \frac{X}{C_4} = \frac{Y}{C'_4} = \frac{Z}{C''_4} = \frac{T}{C'''_4},$$

il faut indiquer le moyen d'obtenir Γ dans l'espace et C sur Π ; soient A un point de Γ , a et a' ses images. Les plans pivotant autour de A forment un système linéaire ∞^2 ; les quartiques, images des sections planes en question, passent par $P_1, \dots, P_{11}, a, a'$ et forment de même un système ∞^2 ; deux sections planes de cette série se coupent en trois points autres que A , soit B, C, D dont les images b, c, d sont en ligne droite; réciproquement si b, c, d sont trois points de Π en ligne droite, images de trois points B, C, D de Σ en ligne droite, les quartiques circonscrites à $P_1 \dots P_{11}, bcd$ se coupent en deux nouveaux points a, a' bases avec les P d'un réseau de quartiques, de sorte que la droite BCD rencontre Γ au point A qui a pour images a et a' . Prenons donc dans Π une droite arbitraire δ : c'est l'image d'une quartique gauche unicursale χ admettant, comme on sait, ∞^1 sécantes triples, engendrant une quatrique Q contenant Γ ; si δ varie, Q engendre un système linéaire ∞^2 dont Γ est une ligne commune. En réalité il suffit même d'une seule droite δ pour obtenir Γ . Supposons que Ox , dans Π , n'ait pas de position particulière et prenons-le pour droite δ : si l'on fait donc $y = 0$ dans (1) on a les équations paramétriques de χ

$$(2) \quad \frac{X}{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E} = \frac{Y}{A'x^4 + B'x^3 + C'x^2 + D'x + E'} \\ = \frac{Z}{A''x^4 + B''x^3 + C''x^2 + D''x + E''} \\ = \frac{T}{A'''x^4 + B'''x^3 + C'''x^2 + D'''x + E'''}$$

(1) Tous les raisonnements du paragraphe 4 supposent essentiellement que la surface Σ de degré 5, admettant la cubique gauche Γ donnée pour ligne double, n'est pas réglée. Or on constate aisément que si Σ était réglée, elle se décomposerait en un plan et l'une des surfaces de degré 4 admettant Γ pour ligne double, ces surfaces de degré 4 sont réglées et forment un système linéaire ∞^5 que Clebsch a étudié au Tome II (1870) des *Mathematische Annalen*. Une surface Σ non décomposée admet, comme on peut le voir, aisément, par un calcul direct, onze droites, sécantes doubles de Γ , et pas davantage.

et l'intersection de χ avec le plan

$$(3) \quad uX + vY + wZ + hT = 0$$

s'obtient en résolvant

$$(4) \quad u(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E) + v(A'x^4 + \dots) + w(A''x^4 + \dots) + h(A'''x^4 + \dots) = 0.$$

Les racines x_1, x_2, x_3, ξ de (4) satisfont à une relation, linéaire par rapport à chacune, facile à former en introduisant une inconnue auxiliaire ρ et les fonctions symétriques S_1, S_2, S_3, S_4 . On a

$$(5) \quad \begin{cases} uA + vA' + wA'' + hA''' = \rho, \\ uB + vB' + wB'' + hB''' = -\rho S_1, \\ uC + vC' + wC'' + hC''' = \rho S_2, \\ uD + vD' + wD'' + hD''' = -\rho S_3, \\ uE + vE' + wE'' + hE''' = \rho S_4, \end{cases}$$

d'où

$$(6) \quad \begin{vmatrix} A & A' & A'' & A''' & 1 \\ B & B' & B'' & B''' & -S_1 \\ C & C' & C'' & C''' & S_2 \\ D & D' & D'' & D''' & -S_3 \\ E & E' & E'' & E''' & S_4 \end{vmatrix} = 0.$$

En développant (6) on a

$$(7) \quad \alpha S_1 + \beta S_2 + \gamma S_3 + \delta S_4 + \varepsilon = 0.$$

Si l'on se donne *arbitrairement* x_1, x_2, x_3 , cette équation donne ξ , puisque x_1, x_2, x_3 donnent trois points de χ et, par suite, un plan; mais si les trois points de χ sont en ligne droite, ξ est indéterminé et réciproquement. Si donc $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ sont les fonctions symétriques de x_1, x_2, x_3 nous écrivons

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha\sigma_1 + \beta\sigma_2 + \gamma\sigma_3 + \varepsilon = 0, \\ \beta\sigma_1 + \gamma\sigma_2 + \delta\sigma_3 + \alpha = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations déterminent, par exemple, σ_2 et σ_3 en fonction de σ_1 ; (7) est alors vérifiée quels que soient σ_1 et ξ ; les équations (5) fournissent alors pour u, v, w, h des valeurs proportionnelles à des *polynomes bilinéaires* en σ_1 et ξ , de sorte que le plan

$$(9) \quad uX + vY + wZ + hT = 0,$$

enveloppe, ξ et σ_1 , variant, une quadrique Q; par exemple si les équations (5) se réduisent aux quatre premières, l'équation du plan (9) peut se mettre sous la forme

$$(9) \quad \begin{vmatrix} A & A' & A'' & A''' & 1 \\ B & B' & B'' & B''' & -\sigma_1 - \xi \\ C & C' & C'' & C''' & \sigma_2 + \sigma_1 \xi \\ D & D' & D'' & D''' & -\sigma_3 - \sigma_2 \xi \\ X & Y & Z & T & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

σ_2 et σ_3 étant les polynômes du premier degré en σ_1 , déduits de (8). Si maintenant dans (9) on remplace X, Y, Z, T par C_4, C'_4, C''_4, C'''_4 , on a l'équation de la quartique plane image de la section de Σ par le plan; quand σ_1 est fixe, ξ variable, on a un faisceau linéaire de quartiques de Π se coupant aux trois points b, c, d en ligne droite et aux points associés a, a' . Ces deux points a, a' satisfont donc aux deux équations

$$(10) \quad \begin{cases} H + H'\sigma_1 + H''\sigma_2 + H'''\sigma_3 = 0, \\ H' + H''\sigma_1 + H'''\sigma_2 + \dots = 0, \end{cases}$$

obtenues en développant (9) suivant la dernière colonne et, annulant séparément le coefficient de ξ et le terme indépendant de ξ ; H, H', H'', H''' sont des combinaisons linéaires simples de X, Y, Z, T ou si l'on préfère de C_4, C'_4, C''_4, C'''_4 . Si donc on élimine σ_1 entre (10) on obtient l'axe Ox décrit par les points variables b, c, d et le lieu C décrit par le couple associé (a, a') . L'axe Ox est obtenu une seule fois, parce que, à un point de Ox correspond une seule valeur de σ_1 , ou si l'on préfère, par un point de γ passe une seule sécante triple; pour éliminer σ_1 entre les équations (10), il revient au même d'éliminer $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ entre les équations (8) et (10), ce qui donne

$$(11) \quad \begin{vmatrix} H & H' & H'' & H''' \\ H' & H'' & H''' & 0 \\ \varepsilon & \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on regarde dans (11) H, H', H'', H''' comme combinaisons linéaires de X, Y, Z, T c'est l'équation de la quadrique Q: on vérifierait aisément qu'en opérant avec la droite $y = mx + n$ au lieu de $y = 0$, on arriverait à une équation analogue contenant m, n linéairement et la courbe Γ

serait la courbe commune au réseau de quadriques. Si au contraire H, H', H'', H''' sont regardées comme fonctions linéaires de C_4, C'_4, C''_4, C'''_4 on a le lieu dans le plan Π des points b, c, d, a, a' . L'équation est alors du degré 8 et Ox enlevé, il reste bien l'équation de degré 7 représentant la courbe C ; et comme les éléments des deux premières lignes de (II) s'annulent pour les P_i , chaque P_i est point double de C .

Toute quadrique menée par Γ coupe Σ suivant une quartique gauche complémentaire ayant pour image une droite.

6. A étant un point de Γ , toute sécante issue de A perce Σ en trois points dont les images sont en ligne droite; appliquons ceci en supposant que la sécante rencontre de nouveau Γ en B et Σ en C ; les images b, b' de B et c de C sont en ligne droite; pour la même raison a, a', c sont en ligne droite. Nous retrouvons le résultat donné plus haut, à savoir que le réseau de quartiques $P_1, P_2, \dots, P_{11}, a, b$, a trois nouveaux points fixes : a' associé de a, b' de b et le point c intersection de aa' et bb' ; nous avons de plus l'interprétation du point c et ceci nous montre que la droite aa' , joignant dans Π les images de A , est l'image de la quartique gauche unicursale suivant laquelle le cône de sommet A et directrice Γ perce de nouveau Σ . Cette quartique particulière a un point double en A , car les tangentes à l'intersection du cône et de Σ s'obtiennent en coupant le plan tangent au cône successivement par les deux plans tangents à Σ en A ; on a ainsi deux fois la tangente en A à Γ et les deux tangentes au reste de l'intersection γ_1 . Les quartiques particulières γ_i sont donc cette fois, non plus sur une seule quartique, mais chacune sur un faisceau de quartiques Q_i . Ce faisceau décrit lui-même, si A décrit Γ , un système de dimension 2, qui n'est pas nécessairement linéaire.

Étudions ce système; d'abord, les droites telles que aa' joignant sur C deux points homologues, images d'un point de Γ , enveloppent une conique; en effet un point arbitraire c du plan Π est l'image d'un point C de Σ non situé sur Γ , de sorte que par C passe une sécante double CAB de Γ et une seule : donc par c passent deux droites seulement caa', cbb' de l'espèce indiquée; donc les droites aa' enveloppent une conique C_2 .

Pour que c appartienne à C_2 , il faut et suffit que A et B soient con-

fondus, autrement dit C_2 est l'image de la courbe gauche unicursale de degré 8 suivant laquelle Σ est coupée par la développable du quatrième degré formée par les tangentes de Γ : cette courbe ne rencontre aucune droite Δ_i . (En passant remarquons qu'un plan tangent à Γ donne dans le plan Π une quartique image tangente à C aux deux images du point de contact; si le plan est osculateur à Γ , la quartique est osculatrice à C aux deux images et la quintique section de Σ admet deux branches osculatrices entre elles.)

Une quadrique Q_1 du système ∞^2 en question coupe Σ suivant la quartique γ_1 à point double et suivant une courbe gauche H de degré 6. J'écarte le cas où la tangente à C_2 passerait par un des points P_i , de sorte que la quartique γ_1 ne rencontre aucune droite Δ_i ; or la droite Δ_i perce Q_1 en deux points, donc l'image de H admet P_i pour point double et rencontre une quartique quelconque circonscrite aux P_i , en six points; cette image est donc de degré 7; appelons-la C_7 . Une courbe de degré 7 dans le plan dépend de 35 paramètres homogènes; ici les C_7 sont assujetties à 33 conditions linéaires, elles engendrent donc un *réseau*, si les P_i sont quelconques ⁽¹⁾, ce qui a été supposé. Or la septique C image de Γ admet aussi les P comme points doubles : comment pouvons-nous différencier C des autres courbes C_7 du réseau ? Nous allons être amenés pour cela à faire de belles applications géométriques du théorème de Riemann-Roch.

Chaque septique C_7 du réseau est coupée par une quartique, circonscrite aux P , en 6 points variables; elle est donc bien l'image d'une sextique gauche H , de genre 4 comme C_7 ; réciproquement nous allons

(¹) Je le démontre, en toute rigueur, par *une* expérience. Je veux prouver que P_1, \dots, P_{11} étant 11 points *arbitraires* du plan, Q_1 et Q_2 deux autres points *arbitraires*, il y a une C_7 et une seule admettant les P pour points doubles et Q_1, Q_2 comme points simples. Faisons l'expérience en *particularisant* ainsi les points; soit une C_6 unicursale: nous prenons pour P_1, P_2, \dots, P_{10} les dix points doubles de C_6 ; il y a effectivement de telles C_6 , comme Halphen l'a montré, où les 10 points doubles sont distincts. Coupons C_6 par une droite C_1 et soient P_{11}, Q_1, Q_2 trois des points d'intersection. En écrivant les 35 équations pour la courbe de degré 7 et ces points, on a une solution formée de C_6, C_1 ; il n'y en pas d'autre, car si C_7 est une solution du problème, C_6 et C_7 ont en commun P_1, \dots, P_{10} qui comptent pour 40, P_{11} pour 2 et Q_1, Q_2 pour 2 au total. Donc C_6 fait partie de C_7 et le complément est C_1 . Donc 11 points P *quelconques* ne peuvent fournir moins de 33 relations linéaires distinctes.

constater que H est située sur une quadrique et une seule. Le cône, qui a pour sommet un point quelconque M de H et cette courbe pour directrice, est de degré 5 et genre 4 : il a donc exactement deux génératrices doubles MBC et $MB'C'$; donc par chaque point de H passent deux sécantes triples et deux seulement. Or, dans Π , prenons sur une septique C_7 du réseau deux points quelconques r, s distincts par exemple des cinq points autres que les P_i communs à C et C_7 de sorte que les points $P_1, P_2, \dots, P_{11}, r, s$ définissent un *faisceau* (et non un réseau) de quartiques, images des sections planes de Σ par les plans pivotant autour de R, S , en désignant par R, S les points de Σ qui ont pour image r, s . Ce faisceau de quartiques découpe sur la C_7 envisagée une série linéaire de groupes des points g_4^1 ; les points t, u, v, w d'un même groupe sont les images des points T, U, V, W où le plan pivotant autour de R, S coupe H ; la différence $4 - 1$, ou 3, est égale au genre de C_7 diminué d'une unité ; Riemann-Roch apprend donc qu'il y a une quartique et une seule, adjointe à C_7 donc circonscrite aux P , contenant t, u, v, w ; c'est donc celle d'où l'on est parti et par suite T, U, V, W sont dans un seul plan, ils ne peuvent être en ligne droite. Les quartiques du faisceau ont trois nouveaux points fixes x, y, z qui sont les images de X, Y, Z où la droite R, S , sécante double de H , perce de nouveau Σ .

Raisonnons maintenant, au lieu de RS , sur la sécante triple de H , MBC issue de M ; M et B ne sont pas sur Γ , donc $P_1, P_2, \dots, P_{11}, m, b$ continuent à définir un faisceau de quartiques ; la droite MB (qui joue le rôle de RS) perce Σ en C, D, E et, cette fois, C est sur H de sorte que, des trois points fixes c, d, e du faisceau de quartiques, l'un, c , est sur C_7 mais non d et e ; sur C_7 on a donc une série linéaire g_3^1 au lieu de g_4^1 et il y a exactement, d'après Riemann-Roch, deux quartiques circonscrites aux P et aux trois points t, u, v ; le plan mené par MBC coupe donc H en trois points correspondants T, U, V situés dans deux plans distincts, donc en *ligne droite*. On peut donc dire :

Soit H une sextique gauche de Σ correspondant à une septique C_7 du plan Π admettant P_1, \dots, P_{11} pour points doubles et distincte de C . La sextique H admet une double série de sécantes triples ; par chaque point M de H passent deux sécantes triples, une de chaque série, soit MBC et

$MB'C'$. Tout plan contenant une sécante triple telle que MBC détermine sur H une autre sécante triple TUV rencontrant MBC , mais non $MB'C'$. On en conclut que H est sur une quadrique et une seule, lieu des sécantes triples.

La quadrique Q_1 ainsi définie coupe Σ suivant une quartique gauche complémentaire et il y a nécessairement identité avec les résultats précédents. On peut remarquer que la quartique gauche χ_1 coupe Γ en cinq points qui ont pour image les points autres que a, a' où la tangente à C_2 coupe encore C ; soient a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ces points; chacun est une image d'un point A_1, A_2, A_3, A_4 ou A_5 commun à χ_1 et Γ ; la quadrique Q_1 contenant χ_1 (quelle que soit la position de Q_1 dans le faisceau de quadriques contenant χ_1) perce Σ suivant une courbe totale dont A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sont des points doubles: les deux arcs qui passent en A_1 ont leurs tangentes chacune dans l'un des deux plans tangents en A_1 , de sorte qu'ils ont pour image deux arcs l'un passant par a_1 , l'autre par a'_1 seconde image de A_1 . Dans l'espace, sur Σ , les arcs considérés sont χ_1 et H ; donc dans le plan Π , C_7 passe par les points $a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, a'_5$ ainsi définis; on savait *a priori* que C et C_7 ont cinq points communs autres que les P ; quand Q_1 varie dans le faisceau relatif à χ_1 , la septique C_7 engendre un faisceau dont nous venons de déterminer ainsi les 5 nouveaux points fixes; chose remarquable ces 5 points ne sont jamais en ligne droite, mais leurs associés le sont et donnent la droite aa' . On remarquera que si le point A a une position fixe sur Γ , la quadrique Q_1 contenant χ_1 décrit un faisceau, dont l'une des quadriques est précisément le cône de sommet A et directrice Γ ; dans le faisceau il n'y a d'ailleurs que ce cône à contenir Γ ; si donc A varie sur Γ , on a un système ∞^2 de quadriques, *système non linéaire*: en effet ce système contient tous les cônes contenant Γ et ayant leur sommet sur Γ ; s'il était linéaire, on retrouverait le réseau des quadriques contenant Γ : or le système étudié contient les cônes de ce réseau linéaire, mais non les autres quadriques du réseau.

Voici maintenant la propriété géométrique qui caractérise C dans le réseau des C_7 . Imaginons une C_7 sur laquelle on puisse trouver deux points a, b tels que les quartiques du faisceau $P_1 P_2 \dots P_{11}$ ab aient non seulement un point fixe nouveau sur C_7 , mais exactement deux:

les quartiques découpent alors sur C_7 une série linéaire g_2^4 et le théorème de Riemann-Roch montre alors que par un groupe u, v de cette série et P_1, \dots, P_{11} passent exactement *trois* quartiques linéairement indépendantes; donc (u, v) forme un couple associé aux P pour donner un *réseau* et, comme C_7 porte une infinité de tels couples, elle coïncide avec C ; c'est donc la propriété caractéristique. Sur une C_7 quelconque on a pu obtenir seulement *un* point nouveau et il a suffi pour cela de s'adresser à une sécante triple de H : la courbe gauche, de degré 6, H , ne peut donc avoir de sécante *quadruple* que si elle dégénère en la cubique gauche Γ comptée deux fois.

Jen'insisterai pas sur les nombreux cas de dégénérescence possibles de Σ , dont certains ont été signalés déjà.

7. *Surfaces de degré 8.* — Ce qui précède peut être généralisé ainsi: par trois points V_1, V_2, V_3 en ligne droite, menons une C_4 et une C_m ; elles se coupent en $4m - 3$ points $P_1, P_2, \dots, P_{4m-3}$ ayant la surabondance 1 pour le degré m ; nous supposons $m \geq 5$. Or prenons sur une quartique C_4 un total de $4m - 5$ points $P_1, P_2, \dots, P_{4m-5}$ non situés sur une même C_{m-4} ; on voit aisément que si $P_1, P_2, \dots, P_{4m-5}$ sont pris *quelconques* sur C_4 , l'équation générale des courbes de degrés m contenant ces points est

$$(1) \quad C_4 C_{m-4} + \lambda_1 C_m^{(1)} + \lambda_2 C_m^{(2)} + \lambda_3 C_m^{(3)} = 0,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des constantes arbitraires et C_{m-4} un polynôme arbitraire de degré $m - 4$ en x et y . Ces courbes (1) déterminent sur C_4 une série linéaire de groupes de points Q, R, S, T, U situés sur une conique et une seule; ces coniques C_2 coupent C_4 en trois points fixes A, B, C . On voit, comme plus haut, que BC coupe C_4 en deux points V, W formant avec $P_1, P_2, \dots, P_{4m-5}$ un groupe de $4m - 3$ points de l'espèce indiquée plus haut: il a en effet, pour résiduel, tous les systèmes de trois points de C_4 alignés avec A . On a ainsi 3 couples complétant $P_1, P_2, \dots, P_{4m-5}$.

Supposons maintenant pour simplifier $m = 5$; on a pris sur C_4 les points $P_1, P_2, \dots, P_{14}, P_{15}$ et on les a complétés par un couple P_{16}, P_{17} ; les 17 points P définissent ∞^4 quintiques et nous pourrions en choisir cinq linéairement indépendantes; il est intéressant d'étudier la

variété, à deux dimensions, de l'espace à quatre dimensions, définie par les équations homogènes

$$(2) \quad \frac{X}{C_5^{(1)}} = \frac{Y}{C_5^{(2)}} = \frac{Z}{C_5^{(3)}} = \frac{T}{C_5^{(4)}} = \frac{U}{C_5^{(5)}}.$$

Cette variété admet évidemment pour ligne triple la courbe qui a pour image C_4 dans le plan Π où se déplace le point (x, y) ; en effet si la courbe C_5 contient un point α de C_4 , la droite $A\alpha$ perce C_4 en deux points α', α'' appartenant encore à C_5 . Or on peut prendre comme quintiques de base $C_4x, C_4y, C_4z, C_5^{(1)}$ et $C_5^{(2)}$ de sorte qu'avec ce choix de coordonnées pour l'espace (X, Y, Z, T, U) la ligne triple est la droite d'équations

$$X = Y = Z = 0.$$

On peut rester dans l'espace à trois dimensions et se contenter d'étudier la surface Σ définie en coordonnées homogènes (X, Y, X, T) par les équations

$$(3) \quad \frac{X}{C_5^{(1)}} = \frac{Y}{C_5^{(2)}} = \frac{Z}{C_5^{(3)}} = \frac{T}{C_5^{(4)}}.$$

La section plane la plus générale de la surface Σ a pour image dans le plan Π la courbe d'équation

$$(4) \quad aC_5^{(1)} + bC_5^{(2)} + cC_5^{(3)} + hC_5^{(4)} = 0.$$

Cela revient à extraire du système ∞^4 de quintiques déjà définies un système ∞^3 , linéaire également; nous supposons que le système ∞^3 linéaire en question ne s'obtient pas en faisant passer la quintique générale par un nouveau point fixe; nous supposerons aussi que le système linéaire ∞^3 ne contient pas tout entier le système linéaire ∞^2 défini par C_4x, C_4y, C_4z ; on pourra donc supposer, par une transformation homographique faite dans l'espace (X, XZ, T) et une autre dans le plan Π , que les équations de Σ sont réduites à la forme

$$(5) \quad \frac{X}{C_5^{(1)}} = \frac{Y}{C_5^{(2)}} = \frac{Z}{C_4x} = \frac{T}{C_4y}.$$

Trois points de C_4 , en ligne droite avec le point A défini plus haut, donnent un seul et même point de Σ , de sorte que la droite D ($Z = 0, T = 0$) est ligne triple de Σ . La surface Σ est de degré 8; la sec-

tion plane générale est de degré 8 et genre 6, de sorte qu'elle possède l'équivalent de 15 points doubles : or elle a un point triple sur D , donc il reste 12 points doubles (on verra un peu plus bas qu'on ne peut admettre une autre combinaison, telle que 4 points triples). La surface Σ possède donc, en dehors de D , une courbe double Γ d'ordre 12, ayant pour image une certaine courbe γ du plan Π . Remarquons qu'il se présente ici une question bien distincte de celles déjà étudiées : les quintiques planes de Π , images des sections planes de Σ , sont assujetties à 17 conditions linéaires : en effet $P_1, P_2, \dots, P_{16}, P_{17}$, d'après leur choix, donnent 16 relations linéaires et l'on a adjoint une autre relation linéaire ne signifiant pas, cette fois, que la quintique admet un nouveau point fixe.

Il reste alors dans Π des couples de points associés μ, μ' tels que l'obligation pour les quintiques, déjà assujetties aux 17 conditions linéaires, de contenir μ entraîne automatiquement celle de contenir μ' : mais le groupe $P_1, P_2, \dots, P_{16}, P_{17}, \mu, \mu'$ n'a pas la surabondance 2, il n'a que la surabondance 1. Soient m le degré de la courbe image γ , d l'ordre de multiplicité de P_1, P_2, \dots, P_{17} sur γ ; en comptant le nombre de points communs à μ et une quintique C_5 du système ∞^3 , on a

$$(6) \quad 5m = 17d + 24,$$

d'où

$$(7) \quad d = 3 + 5h, \quad m = 15 + 17h.$$

Pour évaluer h raisonnons comme pour les surfaces de degré 5 étudiées précédemment ; P_1 est l'image d'une droite Δ_1 de Σ , chaque élément de contact issu de P_1 correspondant homographiquement au point homologue de Δ_1 ; l'élément de contact commun à C_5 et P_1 donne le point où Δ_1 rencontre la droite triple D ; donc un plan contenant Δ_1 coupe Σ suivant une courbe plane de degré 7, de genre 5, car elle correspond à une quintique ayant un point double en P_1 ; la section de Σ a donc l'équivalent de 10 points doubles, et comme elle présente un point double au point où Δ_1 rencontre déjà D , on voit que la courbe Γ , coupée en 12 points par un plan quelconque, n'est plus coupée qu'en 9 points par un plan contenant Δ_1 , donc Δ_1 rencontre Γ en 3 points exactement de sorte que $d = 3, h = 0$; comme vérification on trouve

bien 7 points communs à Δ_i et à la section plane de Σ : on a d'abord les 3 points fixes où Δ_i coupe Γ , comptant chacun pour 1, le point fixe où Δ_i coupe D , comptant pour 2, et enfin les deux points, variables avec la section, correspondant aux tangentes en P_i à l'image; la courbe γ est donc de degré 15 et admet chaque point P_i pour point triple.

On voit aisément que la courbe double Γ et la droite triple D se coupent en un point ω qui a pour coordonnées homogènes

$$C_5^{(1)}(0, 0, 1) \quad C_5^{(2)}(0, 0, 1) \quad 0, \quad 0$$

et qui est fourni soit par le point $(0, 0, 1)$ du plan Π , soit par les trois points en ligne droite avec le point A situés à l'intersection de la quartique C_4 et de la quintique

$$C_5^{(2)}(0, 0, 1)C_4^{(1)}(x, y, z) - C_5^{(1)}(0, 0, 1)C_4^{(2)}(x, y, z) = 0.$$

Ce point ω est donc quadruple sur Σ et l'on voit que trois de ces images sont communes aux deux courbes C_4 et γ . Remarquons que tout plan mené par la droite triple D donne pour image de la section la quintique décomposée $C_4(\omega x + h y) = 0$; la section plane comprend, outre D , la quintique plane unicursale correspondant à $\omega x + h y = 0$. Cette quintique a 6 points doubles situés sur Γ , de sorte que D et Γ ont nécessairement 6 points communs réunis en ω ⁽¹⁾. Si l'on compte le nombre de points communs à C_4 et γ , on trouve un total de 60: on doit d'abord prendre P_1, P_2, \dots, P_{17} dont chacun vaut 3, soit un total de 51; il y a ensuite les trois images sur C_4 de ω ; nous avons compté plus haut tous les points multiples de la section de Σ par un plan contenant D , de sorte qu'il ne peut y avoir d'autres points d'intersection de C_4 et γ que ceux déjà énumérés; donc chaque image de ω , située sur C_4 , donne un point d'osculation de C_4 et γ . Sur la courbe γ les deux images associées d'un point de Γ donnent une correspondance birationnelle, de sorte que γ est du type hyperelliptique.

Voici comment on peut démontrer rigoureusement le point réservé

(1) La quintique de Σ perce D en 5 points qui s'obtiennent: en coupant C_4 par la droite $\omega x + h y = 0$, d'où 4 points d'intersection, puis en prenant $x = y = 0$, ce qui donne le point ω commun à D et Γ .

jusqu'ici, à savoir que toute section plane de Σ a, en dehors du point triple situé sur D , 12 points doubles et non pas 1, 2, 3, 4 points triples complétés par 9, 6, 3, 0 points doubles. Prenons par exemple 4 points triples : il y aurait sur Σ une courbe triple Γ , de degré 4, dont l'image serait sur Π une courbe γ d'ordre m : on aurait alors

$$5m = 17d + 12,$$

en comptant les intersections de γ avec une quintique du système ∞^3 ; on en déduirait $d = 4 + 5h$, $m = 16 + 17h$; donc chaque droite Δ_i rencontrerait la courbe gauche de degré 4, Γ , en 4 points au moins : il faudrait donc que h fût nul, et Γ serait plane; mais Δ_i serait dans ce plan, ainsi que $\Delta_2, \dots, \Delta_{17}$; il y a impossibilité puisque Σ est de degré 8. De même pour les autres combinaisons.

8. Si le système ∞^3 , déduit du système ∞^3 , pour les quintiques, est obtenu en leur imposant un dix-huitième point fixe, la surface Σ n'est plus que du degré 7 et toutes les propriétés obtenues sont profondément modifiées; mais je me borne à cette indication, car la surface Σ rentre comme cas de dégénérescence dans celles que je vais étudier.

Je signale encore pour mémoire que si le système ∞^3 , du paragraphe précédent, contient le système ∞^2 défini par C_1x, C_1y, C_1z , autrement dit est défini par

$$C_1(\lambda x + \mu y + \nu) + \rho C_1^3 = 0,$$

il y a cette fois 20 points fixes, la surface Σ est de degré 5 et n'admet qu'un point multiple d'ordre 4, à savoir le point $(0, 0, 0, 1)$ qui a pour image dans Π toute la quartique C_1 .

9. *Surface de degré 7.* — Nous savons qu'en prenant 7 points d'une même conique et en construisant deux quintiques issues de ces points, elles se coupent en 18 points nouveaux P_1, P_2, \dots, P_{18} qui ont la surabondance 1 pour le degré 5 et définissent un système linéaire ∞^3 de quintiques. Nous supposons que ce groupe a sa structure interne symétrique, c'est-à-dire que l'équation surabondante obtenue en imposant successivement les 18 points à une quintique ne se manifeste qu'après avoir déjà imposé 17 d'entre eux, et cela quel que soit l'ordre

adopté pour les points. Nous savons qu'il suffit pour cela de tracer la première quintique au hasard à partir des 7 points de la conique ; on trace ensuite la seconde quintique en évitant qu'elle passe par un des trois nouveaux points communs à la conique et à la quintique déjà tracée.

Je considère la surface Σ de l'espace ordinaire définie par les trois équations paramétriques

$$(1) \quad \frac{X}{C_5^{(1)}(x, y)} = \frac{Y}{C_5^{(2)}(x, y)} = \frac{Z}{C_5^{(3)}(x, y)} = \frac{T}{C_5^{(4)}(x, y)}.$$

La surface Σ est de degré 7 ; chaque section plane est de genre 6 et a un total de points multiples formant l'équivalent de 9 points doubles.

Je prends une quintique C_5 du système ∞^3 étudié ; une quintique C'_5 variable du même système perce C_5 en 7 points situés sur une conique, variable avec C'_5 , mais perceant C_5 en 3 points fixes A, B, C ; chaque droite BC, CA, AB coupe C_5 en 3 points qui sont les images d'un même point de Σ (raisonnement déjà fait plusieurs fois) ; BC perce C_5 en 3 points $\lambda, \lambda', \lambda''$ images d'un point triple L de Σ ; CA donne μ, μ', μ'' et M ; AB, ν, ν', ν'' et N. Chaque section plane de Σ a donc 3 points triples obtenus par ce procédé ; Σ a donc une cubique gauche Γ comme ligne triple. Les quintiques du réseau P_1, P_2, \dots, P_{18} $\lambda, \lambda', \lambda''$, se coupent en 4 points nouveaux d, e, f, g situés en ligne droite avec le point A de C_5 ; ce sont les images des 4 points où une sécante issue de L perce de nouveau Σ .

Réciproquement quatre points en ligne droite de Π , images de quatre points en ligne droite de Σ , correspondent à une droite de l'espace rencontrant la cubique gauche Γ : nous n'avons ici, et pour tout ce qui suit, à raisonner comme pour les surfaces de degré 5 admettant une cubique gauche pour ligne double.

Nous savons que $\lambda, \lambda', \lambda''$, ou L point de Γ , étant donnés, on peut disposer des deux quintiques du réseau P_1, \dots, P_{18} $\lambda, \lambda', \lambda''$ de façon que la droite $defg$ soit *quelconque* dans le plan : d'ailleurs ces droites forment un système ∞^2 de même que les sécantes issues de L. Donc toute droite du plan Π est l'image d'une quintique gauche γ unicusale de Σ admettant ∞^1 sécantes quadruples, portées par une quadrique Q contenant la cubique gauche Γ et réciproquement.

Si l'on considère deux points de Γ , L, M et leurs images $(\lambda, \lambda', \lambda'')$, (μ, μ', μ'') le faisceau des plans pivotant autour de LM donne le faisceau des quintiques images passant par les 18 P et $(\lambda, \lambda', \lambda'')$, (μ, μ', μ'') , plus un nouveau point fixe qui est l'intersection des deux droites $\lambda\lambda'\lambda''$ et $\mu\mu'\mu''$: ce point est l'image du dernier point où LM perce Σ . On en conclut que les droites $\lambda\lambda'\lambda''$ portant les images d'un point de Γ enveloppent une conique C_2 image de la courbe unicursale de degré 10 où la développable des tangentes de Γ perce de nouveau Σ .

L'image de Γ est une courbe γ de degré m , admettant $P_1 P_2 \dots P_{18}$ pour points multiples d'ordre d , coupée par une quintique C_2 en neuf points hors de $P_1 P_2 \dots P_{18}$; on a donc

$$(2) \quad 5m = 18d + 9,$$

d'où

$$(3) \quad d = 2 + 5h, \quad m = 9 + 18h.$$

A chaque point P_i correspond une droite Δ_i et d est le nombre de points communs à Δ_i et Γ : donc $d \leq 2$, et par suite $h = 0$, $d = 2$, $m = 9$ (¹). Les 18 droites Δ_i sont donc sécantes doubles de Γ ; la courbe γ est de degré 9 et admet les 18 points P_i pour points doubles. Si les points P_i étaient quelconques, on pourrait dire qu'il y a une seule courbe de degré 9 circonscrite aux P comme points doubles : ici, il y aurait lieu d'étudier s'il existe une ou plusieurs courbes de cette espèce.

(¹) Ce résultat $h = 0$, $d = 2$, $m = 9$ fournit la démonstration de ce fait qu'à seize points P_1, P_2, \dots, P_{16} donnés arbitrairement correspondent six couples, et six seulement, de points P_{17}, P_{18} qui, réunis à P_1, \dots, P_{16} , forment un système de surabondance 1 pour le degré 5. En effet P_{17}, P_{18} étant un premier couple, imaginons que P'_{17}, P'_{18} constituent un nouveau couple. Les quintiques circonscrites à $P_1, P_2, \dots, P_{16}, P_{17}, P_{18}$ et P'_{17} forment un système linéaire ∞^2 contenant encore P'_{18} et le point ω où la droite $P'_{17} P'_{18}$ coupe la droite $P_{17} P_{18}$, comme cela a été démontré au Chapitre I, paragraphe 17. Donc P'_{17}, P'_{18} et ω sont les images d'un point de la cubique Γ ligne triple de Σ : ω est donc un point autre que P_{17} ou P_{18} , où la droite $P_{17} P_{18}$ coupe γ : or puisque γ est de degré 9 avec P_{17} et P_{18} pour points doubles, il n'y a que cinq points ω et à chacun d'eux correspond un unique couple analogue à $P'_{17} P'_{18}$; ces cinq couples et le couple $P_{17} P_{18}$ donnent bien exactement six couples associés $P_1 P_2 \dots P_{16}$. La démonstration montre que la conique C_2 est définie par les cinq tangentes telles que $P'_{17} P'_{18}$; la droite $P_{17} P_{18}$ n'est pas tangente à C_2 .

Le faisceau des quintiques $P_1 \dots P_{18} \lambda \lambda' \lambda'' \mu \mu' \mu''$ découpe sur γ une série linéaire g_3^1 , les points d'un même groupe étant sur une tangente à la conique C_2 ; le système ∞^3 de quintiques $P_1 \dots P_{18}$ découpe sur γ une série linéaire g_3^3 dont chaque groupe est la somme de trois groupes de la série précédente. On remarquera que le théorème de Riemann-Roch appliqué au groupe $\nu \nu' \nu''$ de la série g_3^1 donne 8 sextiques linéairement indépendantes passant par $P_1 P_2 \dots P_{18}$ et $\nu \nu' \nu''$: on sait en effet que ce groupe a la surabondance 3 pour le degré 5 et 1 pour le degré 6.

10. On peut ramener les équations de Γ à la forme

$$(1) \quad X = t, \quad Y = t^2, \quad Z = t^3.$$

Si nous considérons le polynôme général, homogène et de degré 3 en ξ, η, ζ , soit

$$(2) \quad \sum p_{\alpha\beta\gamma} \xi^\alpha \eta^\beta \zeta^\gamma = 0 \quad (\alpha + \beta + \gamma = 3),$$

ce polynôme contient 10 coefficients p ; remplaçons ξ, η, ζ par $X^2 - YT, Y^2 - XZ, XY - ZT$ et chaque p par une forme linéaire $AX + BY + CZ + DT$: l'équation (2) représentera alors la surface la plus générale de degré 7 admettant Γ pour ligne triple. Il y a donc 40 paramètres homogènes apparents, mais les identités

$$(3) \quad \begin{cases} (X^2 - YT)Y - X(XY - ZT) + (Y^2 - XZ)T \equiv 0, \\ (X^2 - YT)Z - Y(XY - ZT) + (Y^2 - XZ)X \equiv 0, \end{cases}$$

multipliées par

$$\begin{aligned} & (X^2 - YT)^2, \quad (Y^2 - XZ)^2, \quad (XY - ZT)^2 \\ & (X^2 - YT)(Y^2 - XZ), \quad (X^2 - YT)(XY - ZT), \quad (Y^2 - XZ)(XY - ZT) \end{aligned}$$

donnent un total de 12 identités permettant d'abaisser à 28 paramètres homogènes indépendants ceux qui figurent dans (2). Dans le plan Π on peut par une transformation homographique donner à P_1, P_2, P_3, P_4 une configuration choisie une fois pour toutes; la surface Σ dépend alors uniquement des paramètres en nombre 24 qui permettent de fixer P_5, P_6, \dots, P_{16} ; car nous savons que 16 points P étant donnés, les deux derniers en résultent; il faut ajouter les trois paramètres qui interviennent dans la transformation homographique la plus générale

de l'espace (X, Y, Z, T) qui échange entre eux les points de Γ (voir plus haut). On retrouve donc le total de 27 paramètres non homogènes, de sorte que toute surface de degré 7 ayant une cubique gauche pour ligne triple est une surface susceptible de la représentation plane étudiée ici ⁽¹⁾.

Si l'on considère une sécante double de Γ il suffit d'exprimer que deux points de cette sécante appartiennent à la surface (Σ) pour que la droite appartienne tout entière à Σ ; on peut donc choisir 13 sécantes doubles et les imposer à Σ : il reste alors *en général* un paramètre linéaire dans l'équation de Σ et l'on a un faisceau de surfaces ayant en commun la cubique Γ qui compte pour 27, et les 13 sécantes doubles; le reste de l'intersection est une courbe gauche de degré 9; si l'on appelle Σ et Σ_i deux surfaces du faisceau, dans la représentation plane de Σ , les points P_1, P_2, \dots, P_{13} seront les points correspondants aux 13 droites communes $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{13}$; la droite Δ_{14} perce Σ_i en sept points dont il n'y a qu'un seul situé hors de Γ , de sorte que l'image u de la courbe U de degré 9 admet $P_{14}, P_{15}, P_{16}, P_{17}, P_{18}$ comme points simples; d'autre part, on démontre, comme plus haut, que Σ et Σ_i ont quatre points de raccord sur Δ_i , dont deux sont ceux où Δ_i coupe Γ , et les deux autres fournissent deux branches de u passant en P_i ; donc u a avec une quintique circonscrite aux 18 P exactement $13 \times 2 + 5 + 9$ points communs: elle est donc de degré 8. On remarque qu'une courbe de degré 8 assujettie à posséder 13 points doubles *donnés* et cinq points donnés supplémentaires (simples) est assujettie à 44 conditions linéaires, et par suite, déterminée, si les points sont quelconques, d'une façon unique: on le voit comme plus haut en prenant pour les 13 points doubles 13 des 15 points doubles d'une septique C_7 connue et pour les cinq points simples cinq points en ligne droite de C_7 ; la courbe $C_7 C_1$ répond aux conditions et il n'y a pas d'autre solution C_8 , car C_7 et C_8 ont un total de $13 \times 4 + 5$ ou 57 intersections, de sorte que C_7 fait partie de C_8 . Donc, si les points P_i étaient quelconques, il y aurait une courbe et une seule répondant à

(1) Comme plus haut, on suppose Σ non réglée, de sorte qu'elle admet exactement 18 droites, sécantes doubles de Γ . Si Σ était réglée, elle se décomposerait en un plan et une surface de degré 6, admettant Γ pour ligne triple, et par suite nécessairement réglée.

la question : or ici les 18 points P_i ne sont pas quelconques et forment un système surabondant pour le degré 5. En tout cas si u est tracée, on remonte de u à U sur Σ et le faisceau se trouve déterminé. Nous allons voir immédiatement que dans certains cas u décrira un système linéaire de dimension 2 et nous aurons non pas un faisceau de surfaces Σ , mais un système linéaire de dimension 3. Ce serait encore une question intéressante à approfondir.

11. Les 18 points P_i s'obtiennent, comme nous l'avons dit, en prenant une conique γ_2 et une quintique C_5 se coupant en 10 points $A, B, C, V_1, V_2, \dots, V_7$: par V_1, V_2, \dots, V_7 on fait passer une autre quintique C'_5 coupant C_5 en P_1, P_2, \dots, P_{18} ; on peut faire varier C'_5 (et par suite le groupe des P) d'une façon continue jusqu'à ce que C'_5 passe par A par exemple, mais non par B et C . Alors le groupe P a dégénéré d'une façon continue en un groupe de 17 points surabondants pour le degré 5, P_1, P_2, \dots, P_{17} , situés sur une quartique C_4 et une seule, réunis à un point P_{18} arbitraire du plan : c'est une configuration signalée au paragraphe 8. Dans ce cas la cubique gauche triple de Σ se réduit à une droite triple D , ayant pour image C_4 , et une conique triple C ayant pour image une quintique C_5 passant par P_1, P_2, \dots, P_{17} comme points simples et par P_{18} comme point double : l'ensemble de C_4 et de cette quintique C_5 forme bien une courbe de degré 9 ayant les 18 points P_i comme points doubles (¹) ; mais on voit ici que les quintiques contenant P_1, P_2, \dots, P_{17} comme points simples (16 conditions seulement) et P_{18} comme point double ne sont assujetties qu'à 19 conditions et forment un faisceau linéaire ; ce sont les images des sections planes de Σ par les plans pivotant autour de Δ_{18} ; parmi elles la quintique C_5 , image, non plus d'une sextique, mais de la conique triple C , s'obtient en la faisant passer par les points où la droite αP_{18}

(¹) C_4 et C_5 se coupent en trois points A, B, C situés en ligne droite, images du point commun à la droite triple D et à la conique triple C ; la droite ABC perce C_4 en α et chaque droite issue de α perce C_4 en trois points images d'un même point de D ; chaque droite issue de P_{18} coupe C_5 en trois points images d'un même point de la conique triple C ; les points α, A, B, C, P_{18} sont sur une même droite. Toute droite issue de P_{18} est l'image d'une quartique plane unicursale dont le plan contient la droite triple D et ayant un point triple sur la conique triple C .

perce la quartique C_4 . Ce cas de dégénérescence prouve qu'il n'y a pas nécessairement une seule courbe plane de degré 9 admettant les 18 points P comme points doubles.

12. Il est intéressant de donner des exemples précis de surfaces Σ de degré 7, ayant une cubique gauche Γ comme ligne triple ou de degré 5, ayant la cubique gauche Γ comme ligne double.

Nous en trouvons un exemple dans un intéressant travail de Geiser, publié au Tome 67, 1867, du *Journal de Crelle*, pages 83-89. Les surfaces obtenues par Geiser sont des cas *très particuliers* des surfaces étudiées ici dans leur généralité. Je donnerai des indications très rapides sur les circonstances de dégénérescence qui se présentent dans les surfaces de Geiser.

Geiser traite le problème suivant dans l'espace ordinaire à trois dimensions : quand on a fixé au hasard six points a_1, a_2, \dots, a_6 , toutes les quadriques circonscrites aux a et à un point nouveau A ont encore en commun un nouveau point A'; A et A' se correspondent involutivement et birationnellement et Geiser indique les particularités essentielles de cette correspondance : appelons Γ la cubique gauche, unique, circonscrite à a_1, a_2, \dots, a_6 ; si A vient en a_i , A' est indéterminé sur le cône du second ordre de sommet a_i et directrice Γ ; si A est placé en un point arbitraire de Γ , A' est indéterminée sur Γ ; si A est placé sur la droite $a_i a_j$, A' est indéterminé sur la droite $a_i a_j$.

Si A décrit un plan R, A' décrit une surface Σ de degré 7, admettant Γ comme ligne triple, contenant les 15 droites $a_i a_j$, et les trois droites joignant deux à deux les points où R coupe Γ .

La surface Σ ainsi obtenue par Geiser rentre donc dans celles que nous venons d'étudier, mais constitue un cas de dégénérescence, puisque, dans le cas général, les 18 droites sont des sécantes doubles de Γ n'ayant aucun point commun.

J'ai rappelé sans démonstration les résultats de Geiser; j'indique toutefois une propriété importante qui a échappé à Geiser : les droites AA' ne dépendent que de trois paramètres au maximum, puisque la connaissance de A détermine A'; en réalité ces droites ne dépendent que de *deux* paramètres, et forment la congruence des sécantes doubles de Γ ; chacune de ces sécantes doubles porte une infinité simple de

couples AA' formant une involution dont un couple particulier est formé par les points où AA' rencontre Γ . En effet donnons-nous A , d'où l'on déduit A' ; les quadriques assujetties à contenir A (et par suite A') et un point B de la droite AA' , autre que A et A' , sont assujetties à huit conditions linéaires distinctes et forment donc un faisceau linéaire : or toutes contiennent la droite $AA'B$, de sorte que le complément de la courbe commune aux quadriques de ce faisceau est une cubique gauche rencontrant AA' en deux points; cette cubique gauche passe par a_1, a_2, \dots, a_6 , c'est donc Γ et tout est démontré. On peut remarquer que si a_1, a_2, \dots, a_6 varient, isolément ou simultanément, sur Γ , la congruence des droites AA' reste la même, mais sur chacune des droites l'involution entre A et A' varie, les points communs à Γ et AA' restant toutefois un couple invariable de l'involution.

Appelons α, β, γ les points où le plan R coupe Γ et numérotions les droites $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{18}$ ainsi : a_1 joint à a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 donne $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta_5$; a_2 joint a_3, a_4, a_5, a_6 donne $\Delta_6, \Delta_7, \Delta_8, \Delta_9$; de même a_3 donne $\Delta_{10}, \Delta_{11}, \Delta_{12}$, puis a_4 donne Δ_{13}, Δ_{14} et enfin a_5 donne Δ_{15} . Appelons $\Delta_{16}, \Delta_{17}, \Delta_{18}$ les droites $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$. Chaque point a_i est un point quadruple de Σ (propriété non signalée par Geiser), a pour image dans le plan Π une droite (a_i) . Les six droites (a_i) sont tangentes à une même conique C_2 , qui est la conique C_2 du cas général, enveloppe des droites contenant les trois images de chaque point de Γ . Marquons donc six droites $(a_1), (a_2), \dots, (a_6)$ tangentes à une même conique C_2 ; leurs 15 points communs sont P_1, P_2, \dots, P_{15} : P_1 , image de Δ_1 ou $a_1 a_2$, est l'intersection de (a_1) et (a_2) , de sorte que le lecteur fera aisément la figure; j'inscris en regard de chaque droite les points qu'elle porte :

(a_1)	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
(a_2)	P_1	P_6	P_7	P_8	P_9
(a_3)	P_2	P_6	P_{10}	P_{11}	P_{12}
(a_4)	P_3	P_7	P_{10}	P_{13}	P_{14}
(a_5)	P_4	P_8	P_{11}	P_{13}	P_{15}
(a_6)	P_5	P_9	P_{12}	P_{14}	P_{15}

Enfin P_{16} image de $\beta\gamma$, P_{17} de $\gamma\alpha$, P_{18} de $\alpha\beta$ forment un triangle circonscrit à C_2 , mais à part cela, *quelconque*.

La courbe de degré 9 admettant P_1, P_2, \dots, P_{18} pour points doubles

se réduit aux six droites (a_i) plus les trois côtés du triangle $P_{16}P_{17}P_{18}$; chaque droite (a_i) est l'image du seul point a_i de Σ ; chaque droite $P_{17}P_{18}$, $P_{18}P_{16}$, $P_{16}P_{17}$ est l'image de la cubique triple Γ : la décomposition, en trois morceaux analytiquement distincts, de cette image tient à cette propriété non signalée par Geiser que la développable circonscrite à Σ le long de Γ se décompose en trois morceaux distincts, à savoir les cônes, du second degré, admettant pour directrice Γ et pour sommets respectivement α , β , γ . Chaque tangente à C_2 perce les trois côtés du triangle $P_{16}P_{17}P_{18}$ en trois points images d'un même point de Γ .

Si le point A décrit une droite D ⁽¹⁾ (intersection de deux plans R , R_1), le point A' décrit une courbe U de degré 7 admettant les six points a_i comme points doubles, les plans du faisceau $R + \lambda R_1 = 0$ ont pour homologues les surfaces du faisceau $\Sigma + \lambda a \Sigma_1 = 0$, où a est une constante numérique donnée. La courbe U commune à Σ et Σ_1 dépend, sur Σ , de deux paramètres, car on peut faire varier R_1 en l'obligeant à passer par un point fixe; l'image u de U , dans la représentation plane de Σ , est une conique *quelconque* circonscrite à $P_{16}P_{17}P_{18}$ [la théorie générale a donné une courbe de degré 8 ayant P_1, P_2, \dots, P_{15} pour points doubles, P_{16}, P_{17} et P_{18} pour points simples; il n'y a qu'à ajouter à la conique les six droites (a_i)]. Si la droite D rencontre Γ en α , les deux surfaces Σ et Σ_1 offrent une particularité complémentaire d'avoir *un* cône commun (sur trois) circonscrit le long de Γ , le sommet étant en α , de sorte que la courbe véritable U se réduit au degré 4: en faisant la représentation de Σ , on a vu que $\gamma\alpha$ a pour image P_{17} , et $\alpha\beta$, P_{18} ; l'image de U dégénère donc en la droite $P_{17}P_{18}$ et une droite issue de P_{16} . Si D rencontre Γ en α et β , on a vu que la droite D est à elle-même son associée, elle a pour image uniquement P_{18} .

Les surfaces Σ étudiées précédemment dépendaient, une fois Γ fixée, de 27 paramètres; la transformation homographique de l'espace, qui remplace Γ par une cubique *différente*, permet d'ajouter 12 paramètres, d'où total de 39. Ici la surface de Geiser dépend de a_1, a_2, \dots, a_6 et R , et

(1) On peut prendre pour R le plan (D, a_6) , pour R_1 le plan (D, a_3) de sorte que la courbe U se trouve intersection de deux surfaces plus simples, de degré 5, qui sont étudiées au paragraphe suivant.

change effectivement si ces éléments changent séparément ou simultanément : elle dépend donc de 21 paramètres effectivement indépendants, au lieu de 39. Si l'on retranche les 12 paramètres de la transformation homographique citée, il ne reste que 9 paramètres, déterminant, à une transformation homographique plane près, la représentation plane : c'est conforme aux résultats établis, puisque la représentation plane est définie par une conique C_2 et neuf tangentes de C_2 ; la transformation homographique plane permet de se donner *a priori* la conique C_2 . Ce décompte prouve que les six droites (a_i) ayant été données, tangentes à une même conique, nous pouvons prendre pour $P_{16}P_{17}P_{18}$ un triangle *quelconque* circonscrit à C_2 . Mais alors $P_1 \dots P_{15}P_{16}$ admettent ∞^1 couples associés : ces couples s'obtiennent en coupant les tangentes à C_2 issues de P_{16} , par une tangente variable à C_2 .

13. Si dans la correspondance involutive birationnelle de Geiser, nous supposons que le plan R contienne a_6 , la surface Σ , une fois enlevé le cône de sommet a_6 et directrice Γ , se réduit au degré 5, avec Γ comme ligne double : c'est l'une des surfaces étudiées au début du Chapitre, mais dégénérée. Le plan R coupe Γ en a_6 et en deux nouveaux points α, β ; les 11 droites de Σ sont les 10 droites joignant deux à deux les points a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , plus la droite $\alpha\beta$.

Le long de Γ la développable circonscrite à Σ se compose des deux cônes de directrice Γ et sommet α ou β .

Remarquons que si $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \alpha, \beta$ restent fixes sur la cubique gauche Γ et si a_6 varie sur Γ , on a, *en apparence*, ∞^1 surfaces Σ : mais ces surfaces, *en réalité*, se réduisent à une seule, car en coupant deux d'entre elles par un plan quelconque, on a deux sections planes de degré 5, ayant en commun 11 points simples provenant des 11 droites communes à Σ et Σ_1 , puis 3 points doubles communs; avec mêmes tangentes en chacun d'eux, ce qui fait un nombre de points communs comptant pour $11 + 3 \times 6$, soit 29, total supérieur à 25 : Σ et Σ_1 coïncident. Autrement dit la surface Σ étant donnée, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \alpha, \beta$ en résultent aussitôt, et d'une façon unique; on peut ensuite prendre pour plan R , associé à Σ , un plan quelconque pivotant autour de $\beta\gamma$.

La représentation plane de Σ offre les particularités suivantes; comme plus haut, je numérote $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, les droites joignant a_1 à a_2, a_3, a_4, a_5 ; puis $\Delta_5, \Delta_6, \Delta_7$ celles joignant a_2 à a_3, a_4, a_5 ; Δ_8, Δ_9 celles qui joignent a_3 à a_4, a_5 et Δ_{10} la droite $a_4 a_5$; Δ_{11} est la droite $\alpha\beta$. Les 10 points P_1, P_2, \dots, P_{10} s'obtiennent en prenant les points communs à 5 droites $(a_1), \dots, (a_5)$ suivant la disposition

(a_1)	P_1	P_2	P_3	P_4
(a_2)	P_1	P_5	P_6	P_7
(a_3)	P_2	P_5	P_8	P_9
(a_4)	P_3	P_6	P_8	P_{10}
(a_5)	P_4	P_7	P_9	P_{10}

Chacune des droites (a_i) est l'image de l'unique point a_i de Σ et ce point a_i est triple sur Σ ; la conique C_2 déjà signalée est la conique tangente aux cinq droites (a_i) ; le point P_{11} est quelconque dans le plan et l'une ou l'autre des tangentes issues de P_{11} à C_2 est l'image de la cubique gauche Γ ; la septique C_7 déjà signalée se compose des cinq droites (a_i) complétées par les deux tangentes issues de P_{11} à C_2 .

Si l'on considère deux plans R, R_1 passant par a_6 , ils donnent deux surfaces Σ, Σ_1 dont l'intersection, une fois Γ et $\Delta_1, \dots, \Delta_{10}$ enlevées, est une cubique gauche U correspondant précisément à la droite intersection de R et R_1 , droite *sécante simple* de Γ issue de a_6 ; cette cubique a pour image dans la représentation de Σ une droite arbitraire issue de P_{11} .

Note rectificative. — Au Chapitre I, paragraphe 2, pages 151-152, j'ai commis une erreur que le lecteur a dû remarquer :

Si la courbe *générale* du faisceau

$$(1) \quad \lambda C_m + \mu C'_m = 0$$

se décompose en p courbes distinctes et si l'on suppose que C_m et C'_m n'ont pas de parties communes, on a *nécessairement*

$$C_m \equiv f(\gamma, \gamma'), \quad C'_m \equiv \varphi(\gamma, \gamma'),$$

où f et φ sont deux polynômes *homogènes* de degré p en γ et γ' et où γ et γ' désignent deux polynômes arbitraires de degré $\frac{m}{p}$ en x et y . Les racines

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ de l'équation *numérique* en X

$$f(\iota, X) + \mu \varphi(\iota, X) = 0$$

sont fonctions du paramètre μ et la courbe générale du faisceau (ι) a pour équation

$$(\gamma - \mu_1 \gamma')(\gamma - \mu_2 \gamma'), \dots (\gamma - \mu_p \gamma') = 0.$$

La solution du paragraphe cité est donc trop *particulière* : j'avais réduit en effet f à γ^p et φ à γ'^p , mais la seule conclusion, qui était nécessaire pour achever, subsiste : à savoir que les points de base du faisceau (ι) se réduisent aux $\left(\frac{m}{p}\right)^2$ points communs à γ et γ' , chacun d'eux comptant pour p^2 .

