MAURICE JANET

Les modules de formes algébriques et la théorie générale des systèmes différentiels

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 41 (1924), p. 27-65

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1924_3_41__27_0>

LES

MODULES DE FORMES ALGÉBRIQUES

ET LA

THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

PAR M. MAURICE JANET

On possède, pour l'étude des systèmes différentiels les plus généraux, deux méthodes bien distinctes; dans l'une, *les fonctions inconnues* et *les variables indépendantes* tiennent dès l'abord des rôles différents : on a affaire à un système d'équations aux dérivées partielles; dans l'autre, on ne fait tout d'abord aucune différence entre les *diverses variables*, dépendantes ou indépendantes, qui peuvent intervenir, quitte à les distinguer ensuite, pour les applications : on a affaire à un système d'équations de Pfaff. M. Riquier d'une part, M. Cartan de l'autre ont montré comment la solution générale d'un système quelconque d'équations aux dérivées partielles [1], ou d'un système quelconque d'équations de Pfaff [2], se trouve entièrement déterminée par la donnée de certaines fonctions et constantes arbitraires en nombre fini. Il est intéressant de confronter les deux méthodes, mais il convient pour cela de faire tout d'abord une étude purement algébrique, qui a son intérêt propre : la notion de *système de formes (de même ordre) en involution*, à laquelle nous sommes

---

[1] La question est traitée dans toute sa généralité, au premier point de vue, dans ma Thèse (*Journal de Mathématiques*, 1920).

[2] CARTAN, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1901 et 1904.

amené, est utile dans la théorie des *modules de formes ;* c'est à l'étude de cette notion [1] qu'est consacré le présent travail [2]. Indiquons dès maintenant son utilité dans la théorie des systèmes aux dérivées partielles.

Dire qu'un système de formes d'ordre p est en involution, c'est énoncer une certaine propriété qui, ainsi que nous le verrons, *est indépendante des variables choisies;* certains nombres (σ) sont attachés d'une manière invariante à un tel système. Étant donné un module *quelconque* de formes algébriques, les formes d'ordre p qui appartiennent au module forment un *système en involution dès que* $p \geqq p_0$, p_0 *dépendant du module.* Soit maintenant un système S d'équations aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue de n variables indépendantes; pour plus de netteté, supposons-le linéaire; les formes caractéristiques des équations de ce système et de toutes celles qui s'en déduisent par dérivations et combinaisons linéaires forment un module; il suffira de connaître ce module pour connaître le « degré de généralité » de la solution de S : les nombres (σ) correspondant à l'ordre $p \geqq p_0$ feront connaître les nombres des *fonctions arbitraires* qui servent à déterminer la solution générale du système; ces nombres ne dépendront que de p et non des *variables choisies.*

On aura ainsi par une étude *directe* caractérisé le degré de généralité de la solution, d'une manière invariante dans tout changement de variables indépendantes.

De plus, en raison du caractère purement algébrique des présentes méthodes, on aura indiqué une voie aisée pour préparer à l'étude des systèmes d'équations de Pfaff, et en particulier des « systèmes en involution » [3].

1. *Les nombres σ relatifs à un système déterminé de variables. Énoncé du théorème général.* — Donnons-nous un système quelconque de formes (F) *d'ordre* p en $x_1, x_2, \ldots, x_n$; soit m leur rang, c'est-à-dire le

---

(1) En particulier, nous ne chercherons pas ici à *vérifier la concordance* des résultats obtenus par les deux méthodes.

(2) Les principaux résultats en ont été résumés dans une Note aux *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 432 (Voir aussi *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 991).

(3) *Cf.* en particulier CARTAN, *Ann. Ecole Normale* 1904.

nombre de formes linéairement distinctes qu'elles comprennent, les Γ_n^p monômes [1] en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant considérés comme autant de variables indépendantes. Considérons maintenant le système constitué par les formes F et les monômes d'ordre p en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *qui contiennent effectivement* x_1; son rang sera $m + \sigma_1$ ($\Gamma_n^{p-1} \geqq \sigma_1 \geqq 0$). Appelons de même $m + \sigma_1 + \sigma_2$ le rang du système constitué par les formes précédentes et les monômes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *qui contiennent effectivement* x_2 (autrement dit encore par les formes F et les monômes qui contiennent l'une au moins des variables x_1, x_2) ($\Gamma_{n-1}^{p-1} \geqq \sigma_2 \geqq 0$). De même $m + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_k$ sera le rang du système constitué par les F et les monômes d'ordre p qui contiennent l'une au moins des lettres $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ($\Gamma_{n-k+1}^{p-1} \geqq \sigma_k \geqq 0$); $m + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$ sera évidemment égal au nombre même Γ_n^p des monômes d'ordre p à n variables.

Soit maintenant m' le rang du système des formes (F′) (d'ordre $p+1$) que l'on obtient en multipliant *l'une* quelconque des (F) par *l'une* quelconque des variables (x).

On pourra définir pour les formes (F′) des nombres (σ') qui tiendront pour elles le rôle que tiennent les (σ) pour les (F).

Nous montrerons que :

1° La quantité $\sigma'_1 + \sigma'_2 + \ldots + \sigma'_n$ est *au plus* égale à la quantité $\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n$; autrement dit, le rang des (F′) est au *moins* égal au nombre

$$\Gamma_n^{p+1} - (\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n).$$

2° S'il y a *égalité :*

a. Il y a encore égalité entre les deux quantités $\sigma''_1 + \sigma''_2 + \ldots + \sigma''_n$ et $\sigma'_1 + 2\sigma'_2 + \ldots + n\sigma'_n$ [où les (σ'') tiennent pour les (F″) d'ordre $p+2$, déduits des (F′) comme on a déduit les (F) des (F′), le rôle que tiennent les (σ') pour les (F′) et les (σ) pour les (F)] et par suite

---

[1] Le mot « monôme » désigne dans tout ce qui suit une expression de la forme $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ où les (α) sont positifs ou nuls.

Nous posons $\Gamma_n^p = \dfrac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{1.2\ldots(n-1)}$.

égalité entre

$$\sigma_1^{(\lambda+1)} + \sigma_2^{(\lambda+1)} + \ldots + \sigma_n^{(\lambda+1)} \qquad \text{et} \qquad \sigma_1^{(\lambda)} + 2\sigma_2^{(\lambda)} + \ldots + n\sigma_n^{(\lambda)}.$$

b. De plus, les (σ') sont donnés en fonction des (σ) par les formules

$$\begin{aligned} \sigma'_n &= \sigma_n, \\ \sigma'_{n-1} &= \sigma_n + \sigma_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma'_k &= \sigma_n + \sigma_{n-1} + \ldots + \sigma_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma'_1 &= \sigma_n + \sigma_{n-1} + \ldots + \sigma_1. \end{aligned}$$

Il en résultera immédiatement que le rang des formes $[F^{(\lambda)}]$ d'ordre $p + \lambda$ sera donné par la formule

$$(1) \quad m^{(\lambda)} = \Gamma_n^{p+\lambda} - \left[\sigma_1 + \sigma_2 \frac{\lambda+1}{1} + \ldots + \sigma_k \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+k-1)}{1.2\ldots k-1} + \ldots + \sigma_n \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+n-1)}{1.2\ldots(n-1)}\right].$$

c. Si l'on fait un changement de variables *arbitraire*, *l'égalité* subsiste et les nombres (σ) *ne changent pas* (¹). Les nombres (σ) auront donc une signification indépendante des variables choisies [ce dernier point résultait déjà de la formule (1)].

d. Enfin on a

$$\sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \ldots \geqq \sigma_k \geqq \ldots \geqq \sigma_n$$

(σ_n n'est d'ailleurs différent de zéro que dans le cas tout particulier où toutes les formes (F) sont identiquement nulles).

2. *Autre définition des* (σ). — Les nombres (σ) peuvent s'introduire d'une autre manière que nous allons indiquer dès maintenant.

Répartissons en classes les monômes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par le procédé suivant :

1^re^ classe : monômes contenant effectivement x_1 ;

2^e^ classe : monômes ne contenant pas x_1 mais contenant effectivement x_2 ;

....;

(¹) Il n'en est pas ainsi, bien entendu, pour les nombres (σ) qui interviennent dans le cas *général*.

k^e classe : monômes ne contenant aucun des x_i $(i < k)$ mais contenant effectivement x_k;

....;

n^e classe : monômes en x_n seul.

Dans les formes (F) données, portons notre attention sur les termes en x_n seulement, qui ne sont autres que les termes en x_n^p; si l'on peut trouver une forme (F) contenant un terme en x_n^p on posera $\rho_n = 0$, sinon on posera $\rho_n = 1$; autrement dit le rang des (F) par rapport au monôme de n^e classe est par définition $\Gamma_1^{p-1} - \rho_n = 1 - \rho_n$ $(\Gamma_1^{p-1} = 1 \geqq \rho_n \geqq 0)$.

Le rang des F par rapport aux monômes de n^e et de $(n-1)^e$ classes est par définition

$$(\Gamma_1^{p-1} - \rho_n) + (\Gamma_2^{p-1} - \rho_{n-1}) \qquad (\Gamma_2^{p-1} \geqq \rho_{n-1} \geqq 0).$$

Le rang des F par rapport aux monômes de n^e, $(n-1)^e$, ..., k^e classes sera par définition

$$\Gamma_1^{p-1} - \rho_n + \Gamma_2^{p-1} - \rho_{n-1} + \ldots + \Gamma_{n-k+1}^{p-1} - \rho_k.$$

Le rang des F par rapport à tous les monômes d'ordre p sera

$$\Gamma_1^{p-1} - \rho_n + \Gamma_2^{p-1} - \rho_{n-1} + \ldots + \Gamma_n^{p-1} - \rho_1.$$

Je dis que ρ_k n'est autre que σ_k.

En effet le rang du système constitué par les (F) et les monômes de 1^e, 2^e, ..., k^e classes est [1]

$$\Gamma_1^{p-1} - \rho_n + \Gamma_2^{p-1} - \rho_{n-1} + \ldots + \Gamma_{n-k}^{p-1} - \rho_{k+1} + \Gamma_{n-k+1}^{p-1} + \Gamma_{n-k+2}^{p-1} + \ldots + \Gamma_n^{p-1}.$$

Le rang du système constitué par les (F) et les monômes de 1^e, 2^e, ..., $(k-1)^e$ classes est

$$\Gamma_1^{p-1} - \rho_n + \Gamma_2^{p-1} - \rho_{n-1} + \ldots + \Gamma_{n-k+1}^{p-1} - \rho_k + \Gamma_{n-k+2}^{p-1} + \ldots + \Gamma_n^{p-1}.$$

La différence de ces deux nombres est égale à ρ_k. D'où : $\sigma_k = \rho_k$.

3. *Démonstration de la proposition* (1°). — La définition des (σ)

---

[1] Soient en général des variables y_1, y_2, y_N; et (f) des formes linéaires en (y) dont le rang relativement à $y_1 y_2 \ldots y_K$ seuls $(K < N)$ soit r : le rang du système constitué par les (f) et les variables $y_{K+1}, y_{K+2}, \ldots, y_N$ est $r + N - K$.

qui fait l'objet du numéro précédent va nous conduire presque immédiatement à la propriété (1°) énoncée plus haut.

Les (σ) ne changent évidemment pas lorsqu'on substitue aux formes (F) m combinaisons linéaires de ces formes pourvu que ces combinaisons Φ soient indépendantes. Les formes Φ' qui s'en déduisent comme les (F') se déduisent des (F) sont des combinaisons linéaires des F'; d'ailleurs les (F') sont de même des combinaisons linéaires des Φ'; le rang des Φ' est donc encore m'; on peut leur substituer m' combinaisons linéaires indépendantes; les (σ') ne changent pas.

Les m combinaisons linéaires des (F), indépendantes, que nous utiliserons seront les formes Φ suivantes :

$\Gamma_1^{p-1} - \sigma_n$ forme de rang $\Gamma_1^{p-1} - \sigma_n$ par rapport à x_n^p [c'est-à-dire simplement, au cas $(\sigma_n = 0)$ où une telle forme existe, *une* forme contenant effectivement un terme en x_n^p].

$\Gamma_2^{p-1} - \sigma_{n-1}$ formes ne contenant pas x_n^p et de rang $\Gamma_2^{p-1} - \sigma_{n-1}$ par rapport aux monômes de $(n-1)^e$ classe.

Γ_{n-k+1}^{p-1} formes ne contenant pas de monôme de n^e, $(n-1)^e$, ..., $(k+1)^e$ classes et de rang $\Gamma_{n-k+1}^{p-1} - \sigma_k$ par rapport aux monômes de k^e classe.

Nous appellerons ces formes, respectivement, formes de n^e, $(n-1)^e$, ..., k^e classe.

Multiplions la première forme par x_n, les formes de n^e, $(n-1)^e$ classes par x_{n-1}, les formes de n^e, $(n-1)^e$, ..., k^e classes par x_k, les formes de toutes les classes par x_1. (Ce qui revient encore à dire : formons les formes d'ordre $p+1$ déduites des F en utilisant comme *variables multiplicatrices* pour la n^e classe $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$; pour la $(n-1)^e$ classe $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_1$; pour la k^e classe, $x_k, \ldots, x_1$; pour la première, x_1.)

Nous obtenons *certaines* formes Φ' d'ordre $p+1$ que nous appellerons Φ'_1. Les formes Φ'_1 que l'on obtient en utilisant une variable x_k déterminée ne diffèrent des Φ de classes $n, (n-1), \ldots, k$ que par la substitution à chacun des monômes m qui entrent dans ces Φ du produit mx_k; on peut affirmer non seulement que ces Φ'_1 ne renferment pas de monôme de classe supérieure à k mais aussi que leur rang par rapport aux monômes de classe k qui y entrent est précisément $\Gamma_1^{p-1} - \sigma_n + \Gamma_2^{p-1} - \sigma_{n-1} + \ldots + \Gamma_{n-k+1}^{p-1} - \sigma_k$; ce seront « les Φ'_1 de k^e

classe ». Il résulte immédiatement de là que le rang total des Φ'_1 est

$$\begin{aligned}&\Gamma_1^{p-1} - \sigma_n,\\ &+\Gamma_1^{p-1} - \sigma_n + \Gamma_2^{p-1} - \sigma_{n-1},\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &+\Gamma_1^{p-1} - \sigma_n + \Gamma_2^{p-1} - \sigma_{n-1} + \ldots + \Gamma_n^{p-1} - \sigma_1.\end{aligned}$$

Donc

$$m' \geqq n(\Gamma_1^{p-1} - \sigma_n) + (n-1)(\Gamma_2^{p-1} - \sigma_{n-1}) + \ldots + \Gamma_n^{p-1} - \sigma_1,$$

ce qui s'écrit encore

$$\begin{aligned}\Gamma_n^{p+1} - (\sigma'_1 + \sigma'_2 + \ldots + \sigma'_n) \geqq n(\Gamma_1^{p-1} - \sigma_n) + (n-1)(\Gamma_2^{p-1} - \sigma_{n-1})\\ + \ldots + (\Gamma_n^{p-1} - \sigma_1),\end{aligned}$$

ou en utilisant l'identité connue

$$\Gamma_n^{p+1} = n\Gamma_1^{p-1} + (n-1)\Gamma_2^{p-1} + \ldots + \Gamma_n^{p-1},$$

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \ldots + \sigma'_n \leqq \sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n.$$

(Proposition 1°.)

4. *Démonstration de la proposition* (2°). — Nous allons supposer maintenant que l'on a *l'égalité*

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \ldots + \sigma'_n = \sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n.$$

Autrement dit, toute Φ' obtenue en multipliant une Φ par une variable qui *n'est pas multiplicatrice pour elle* est une combinaison linéaire des Φ'_1 (obtenues en se servant *des variables multiplicatrices*). Nous dirons dans ce cas que le système (F) donné est *en involution* (1), pour le système de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Nous allons montrer que si le système (F) est *en involution*, le système (F') *l'est aussi*. Il suffira de montrer pour cela que toute Φ'' obtenue en multipliant une Φ'_1, par une variable *qui n'est pas multiplicatrice pour elle* est combinaison linéaire des Φ''_1, obtenues *en se servant des variables multiplicatrices;* dans cet énoncé on entend par

(1) Plus généralement, nous serons amené plus loin à dire qu'un système de formes d'ordre p est en *involution* quand on peut le ramener à la forme précédente par un changement (linéaire et homogène) des variables.

variables multiplicatrices d'une Φ'_1 de k^e classe les variables x_k, $x_{k-1}, \ldots, x_1$.

Considérons le produit d'une Φ'_1 de 1re classe par x_i (i quelconque). Il peut s'écrire

$$x_i(x_1\Phi) = x_1(x_i\Phi).$$

$x_i\Phi$ est par hypothèse, dans tous les cas, une combinaison linéaire de formes Φ'_1; comme x_1 est multiplicatrice pour tous les Φ'_1, nous en concluons que $x_1(x_i\Phi)$, et par suite le produit d'une Φ'_1 de 1re classe par x_i (i quelconque), est une combinaison linéaire des Φ''_1.

Considérons le produit d'une Φ''_1 de k^e classe par x_i (i quelconque). Il peut s'écrire

$$x_i(x_k\Phi) = x_k(x_i\Phi).$$

$x_i\Phi$ est par hypothèse une combinaison linéaire des formes Φ'_1; comme x_k est variable multiplicatrice des formes Φ'_1 de n^e, $(n-1)^e$, ..., k^e classes, on voit que le produit d'une Φ'_1 de k^e classe par x_i est une combinaison linéaire de certains Φ''_1, et de produits de Φ'_1 de $(k-1)^e$, $(k-2)^e$, ..., 1re classe par x_k.

En faisant successivement $k = 2, 3, \ldots$, on voit apparaître avec évidence la proposition annoncée, et par suite la proposition (2°) (a).

5. Dans le cas où $\sigma'_1 + \sigma'_2 + \ldots + \sigma'_n = \sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n$, on peut affirmer que les Φ'_1 (obtenus par variables multiplicatrices) constituent m' combinaisons linéaires distinctes des F'; d'ailleurs les Φ'_1 de n^e, $(n-1)^e$, ..., k^e classes, satisfont précisément aux conditions que nous avons exigées à l'ordre p pour les Φ de n^e, $(n-1)^e$, ..., k^e classes (début du n° 3).

On en conclut immédiatement les égalités

$$\begin{array}{ll}
\Gamma_1^p - \sigma'_n & = \Gamma_1^{p-1} - \sigma_n, \\
\Gamma_2^p - \sigma'_{n-1} & = \Gamma_1^{p-1} - \sigma_n + \Gamma_2^{p-1} - \sigma_{n-1}, \\
\multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\
\Gamma_{n-k+1}^p - \sigma'_k & = \Gamma_1^{p-1} - \sigma_n + \Gamma_2^{p-1} - \sigma_{n-1} + \ldots + \Gamma_{n-k+1}^{p-1} - \sigma_k, \\
\multicolumn{2}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\
\Gamma_n^p - \sigma'_1 & = \Gamma_1^{p-1} - \sigma_n + \Gamma_2^{p-1} - \sigma_{n-1} + \ldots + \Gamma_n^{p-1} - \sigma_1.
\end{array}$$

En utilisant les identités :

$$\Gamma_{n-k+1}^p = \Gamma_1^{p-1} + \Gamma_2^{p-1} + \ldots + \Gamma_{n-k+1}^{p-1},$$

les formules précédentes s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\sigma'_n &= \sigma_n, \\
\sigma'_{n-1} &= \sigma_n + \sigma_{n-1}, \\
&\dots\dots\dots\dots, \\
\sigma'_k &= \sigma_n + \sigma_{n-1} + \dots + \sigma_k, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\sigma'_1 &= \sigma_n + \sigma_{n-1} + \dots + \sigma_1,
\end{aligned}$$

c'est la proposition (2°) (b).

D'ailleurs puisque les (F') sont encore en involution, les nombres (σ'') seront donnés par les formules

$$\begin{aligned}
\sigma''_n &= \sigma'_n && = \sigma_n, \\
\sigma''_{n-1} &= \sigma'_n + \sigma'_{n-1} && = 2\sigma_n + \sigma_{n-1}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\sigma''_k &= \sigma'_n + \sigma'_{n-1} + \dots + \sigma'_k && = (n-k+1)\sigma_n + (n-k)\sigma_{n-1} + \dots + \sigma_k, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\sigma''_1 &= \sigma'_n + \sigma'_{n-1} + \dots + \sigma'_1 && = n\sigma_n + (n-1)\sigma_{n-1} + \dots + \sigma_1.
\end{aligned}$$

On en déduira d'une manière générale tous les $\sigma^{(\lambda)}$ correspondant aux formes $F^{(\lambda)}$ d'ordre $p+\lambda$ du module (F) :

$$\begin{aligned}
\sigma_k^{(\lambda)} = \sigma_k + \lambda\sigma_{k+1} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{1.2}\sigma_{k+2} + \dots + \frac{\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+\mu-1)}{1.2\dots\mu}\sigma_{k+\mu} \\
+ \dots + \frac{\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-k-1)}{1.2\dots(n-k)}\sigma_n.
\end{aligned}$$

D'ailleurs le rang des formes F d'ordre $p+\lambda$ s'obtient en retranchant de $\Gamma_n^{p+\lambda}$ le nombre

$$\begin{aligned}
\sigma_n^{(\lambda)} + \sigma_{n-1}^{(\lambda)} + \dots + \sigma_1^{(\lambda)} = \sigma_1^{(\lambda+1)} = \sigma_1 + (\lambda+1)\sigma_2 + \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{1.2}\sigma_3 \\
+ \dots + \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+n-1)}{1.2\dots(n-1)}\sigma_n
\end{aligned}$$

(polynome en λ dont le degré, augmenté de 1, est égal à *l'indice* du dernier σ qui n'est pas nul).

6. Nous arrivons maintenant à l'importante propriété qu'ont les nombres (σ) d'un système en involution d'être invariants dans un

changement linéaire et homogène *arbitraire* des variables indépendantes.

Remarquons d'abord que les considérations du numéro précédent suffisent à prouver que ces entiers ont une signification indépendante des variables choisies. Le rang des formes d'ordre $p+\lambda$ qui font partie du module [1] défini par les (F) est en effet indépendant des variables choisies; c'est d'ailleurs, d'après ce qui précède, un polynome en λ; or, un polynome en λ ne peut se mettre que d'une seule manière sous la forme (1); la donnée des entiers (σ) est entièrement équivalente à la donnée de ce polynome.

On voit dès maintenant que si après un changement de variables,

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n \,|\, X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_n,$$

le système des formes données est encore en involution, les nouveaux nombres (σ) seront égaux respectivement aux anciens.

Nous allons montrer qu'un changement *arbitraire* de variables (c'est-à-dire un changement de variables dont les coefficients sont soumis seulement à des conditions d'inégalité) maintient effectivement le système en *involution*.

Considérons le système de formes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ constitué par les formes (F) données et par les formes

$$(a_1^{(1)}x_1+a_2^{(1)}x_2+\ldots+a_n^{(1)}x_n)M_{p-1},$$

où M_{p-1} est un monome quelconque d'ordre $p-1$ en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et où les $a^{(1)}$ sont des constantes *arbitraires;* le rang de ce système est $m+\Sigma_1$; il ne peut augmenter quand on fixe des valeurs pour les a; en particulier

$$\sigma_1 \leqq \Sigma_1.$$

Soit de même $m+\Sigma_1+\Sigma_2$ le rang du système constitué par les formes précédentes, les $a^{(1)}$ restant arbitraires, et les formes

$$(a_1^{(2)}x_1+a_2^{(2)}x_2+\ldots+a_n^{(2)}x_n)M_{p-1},$$

où les $a^{(2)}$ sont aussi des constantes arbitraires; le rang ne peut aug-

---

[1] C'est-à-dire qui sont de la forme $\Sigma U_i F_i$ où les U_i désignent des formes en (x).

menter quand on fixe des valeurs pour les $a^{(1)}$, $a^{(2)}$; en particulier

$$\sigma_1 + \sigma_2 \leqq \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

D'une manière générale, $m + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_k$ sera le rang du système constitué par les formes données et les formes

$$(a_1^{(i)} x_1 + a_2^{(i)} x_2 + \ldots + a_n^{(i)} x_n) \mathrm{M}_{p-1} \qquad (i \leqq k),$$

où les $a^{(i)}$ restent arbitraires;

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_k \leqq \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_k.$$

D'ailleurs on aura *l'égalité*

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots \Sigma_n,$$

puisque les deux membres représentent la différence entre Γ_n^p et le rang m des formes F données.

Des égalités et inégalités précédentes, on tire

$$(1) \qquad \begin{cases} \sigma_n \geqq \Sigma_n, \\ \sigma_n + \sigma_{n-1} \geqq \Sigma_n + \Sigma_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sigma_n + \sigma_{n-1} + \ldots + \sigma_2 \geqq \Sigma_n + \Sigma_{n-1} + \ldots + \Sigma_2 \end{cases}$$

D'où la conclusion

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n \geqq \Sigma_1 + 2\Sigma_2 + \ldots + n\Sigma_n.$$

Fixons maintenant les valeurs des (a) de manière que les Σ ne changent pas (et que les n formes linéaires soient indépendantes); prenons pour nouvelles variables les formes

$$\mathrm{X}_i = a_1^{(i)} x_1 + a_2^{(i)} x_2 + \ldots + a_n^{(i)} x_n.$$

En utilisant la proposition (1°), nous voyons que le rang des formes F' est au moins égal à

$$\Gamma_n^{p+1} - (\Sigma_1 + 2\Sigma_2' + \ldots + n\Sigma_n).$$

Or, nous savons que ce rang est égal à

$$\Gamma_n^{p+1} - (\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n),$$

autrement dit encore

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n \leqq \Sigma_1 + 2\Sigma_2 + \ldots + n\Sigma_n.$$

En comparant au résultat obtenu plus haut, on voit que l'on a égalité entre les deux membres

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n = \Sigma_1 + 2\Sigma_2 + \ldots + n\Sigma_n;$$

le nouveau système est donc en involution, de plus l'égalité précédente ne peut avoir lieu que si les formules (1) sont toutes des égalités ; d'où

$$\sigma_n = \Sigma_n, \qquad \sigma_{n-1} = \Sigma_{n-1}, \qquad \ldots, \qquad \sigma_k = \Sigma_k, \qquad \ldots, \qquad \sigma_1 = \Sigma_1,$$

les nombres (Σ) ne sont autres que les (σ). La proposition est établie.

Il est bien connu qu'un changement de variables arbitraire fait apparaître dans une forme le terme x_n^p. Nous concluons de là qu'en excluant maintenant le cas banal $m = 0$ on aura toujours $\Sigma_n = 0$. Dans le cas $m = 0$, les valeurs des Σ sont bien évidentes :

$$\Sigma_1 = \Gamma_n^{p-1}\,\Sigma_2 = \Gamma_{n-1}^{p-1} \ldots \Sigma_k = \Gamma_{n-k+1}^{p-1} \ldots \Sigma_1 = \Gamma_1^{p-1}.$$

7. *Classement des monomes d'ordre p.* — Étant donnés deux monomes de *même ordre p*,

$$M = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha}, \qquad M' = x_1^{\alpha'_1} x_2^{\alpha'_2} \ldots {}_n^{\alpha'_n},$$

nous dirons que M est *postérieur* ou *antérieur* à M' suivant que la première des différences $\alpha_1 - \alpha'_1$, $\alpha_2 - \alpha'_2$, ..., $\alpha_n - \alpha'_n$ qui ne s'annule pas est négative ou positive. Cette définition, qui est évidemment légitime (si M est postérieur à M' et M' postérieur à M'', M est postérieur à M'') peut être présentée d'une manière qui met en évidence son lien étroit avec certaines des notions précédemment introduites (1). Remarquons que si M, M' *sont de classes différentes, k, k'* (*voir* n° 2), M sera

---

(1) On peut remarquer que ce classement qui offre, comme nous le verrons, des propriétés remarquables aurait pu être imaginé simplement en *inversant* le classement proposé par M. Delassus et utilisé par d'autres auteurs (Cf. *C. R. Acad. Sc.*, t. **174**, 1922, p. 991).

Donnons encore deux autres formes de la définition ici adoptée pour les mots « postérieur » et « antérieur ».

1° Si les deux monomes M, M' sont d'ordres différents, λ_1, λ'_1 par rapport à postérieur ou antérieur à M′ suivant que k sera supérieur ou inférieur à k'. De même si M, M′ sont de même classe k, mais si leurs quotients par x_k (qui sont deux monomes M_1, M'_1, de degré $p-1$ en $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_k$ seuls) sont de classes différentes k_1, k'_1 M sera postérieur ou antérieur à M′ suivant que k_1 sera supérieur ou inférieur à k'_1; de même, si M, M′ sont de même classe k, leurs quotients M_1, M'_1 par x_k de même classe k_1, les quotients des nouveaux monomes par x_{k_1} de même classe k_2, etc., les quotients des monomes obtenus par division par $x_{k_{\rho-1}}$ de même classe k_ρ, les quotients $M_{\rho+1}$, $M'_{\rho+1}$ des monomes précédents par x_{k_ρ} de classes différentes K, K′, je dis que M est postérieur ou antérieur à M′ suivant que K est supérieur ou inférieur à K′.

En effet les nombres $\alpha_1-\alpha'_1, \alpha_2-\alpha'_2, \ldots, \alpha_n-\alpha'_n$ sont respectivement égaux aux nombres analogues relatifs aux monomes $M_{\rho+1}$ $M'_{\rho+1}$ puisque ceux-ci ne sont autres que M, M′ divisés par un même monome; $M_{\rho+1}$ $M'_{\rho+1}$ ne contiennent pas de variables d'indice inférieur à k_ρ, et d'après ce qui a été dit précédemment, $M_{\rho+1}$ est postérieur ou antérieur à $M'_{\rho+1}$ suivant que K est supérieur ou inférieur à K′.

Considérons maintenant des formes (F) d'ordre p, de rang m, nous pouvons en trouver m combinaisons linéaires [1] indépendantes Φ ayant

---

$x_2, x_3, \ldots, x_n$ (pris dans leur ensemble) M est postérieur ou antérieur à M′ suivant que λ_1 est supérieur ou inférieur à λ'_1. Si M, M′ sont de même ordre respectivement par rapport aux ensembles $(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $(x_3, x_4, \ldots, x_n)$, $(x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ mais d'ordres différents λ_k, λ'_k par rapport à $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ pris dans leur ensemble, M est dit postérieur ou antérieur à M′ suivant que λ_k est supérieur ou inférieur à λ'_k. On déduit de là l'autre forme annoncée (2°) :

2° Attribuons aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les « cotes » :

	x_1.	x_2.	. . .	x_n.
cote 1^re^.....	1	1	. . .	1
cote 2^e^.....	0	1	. . .	1
....	λ_{21}	0	1 . .	1
....	λ_{31}	λ_{32}	0 1 .	1
	.	.	. . .	.
cote $(n+1)^e$.	λ_{n1}	λ_{n2}	. . .	0

les λ étant d'ailleurs quelconques. On voit immédiatement que le classement qui en résultera pour les monomes d'ordre p sera précisément (1°).

(1) Trouver les Φ revient à résoudre *canoniquement* (voir *J. Math.*, 1920, p. 105) le système F = 0, le classement adopté étant le classement actuellement défini. Si le sys-

la propriété suivante : on peut faire correspondre aux (Φ) respectivement m monômes distincts d'ordre p, (M), de manière que chaque forme contienne effectivement le monome M correspondant et ne contienne en outre que des monomes *antérieurs* à ce monome M. En groupant ensemble les formes auxquelles correspondent des monomes M de même classe, on obtient des groupes qui ont les propriétés générales exigées des Φ au début du paragraphe 3.

Mettons en évidence les deux remarques suivantes :

(a). Le dernier monome [1] qui entre effectivement dans une combinaison linéaire déterminée, quelconque, des Φ, est nécessairement un des monomes (M) [2].

(b). Si l'on multiplie une forme Φ par une quelconque des variables x_k, le monome M' (d'ordre p + 1) qui apparaît à la place de M est postérieur à tous les autres monomes (d'ordre $p+1$) qui apparaissent dans la forme : c'est là une conséquence immédiate de la définition même des mots « antérieur » et « postérieur » qui ne fait intervenir que les différences $\alpha_i - \alpha'_i$.

Supposons maintenant les formes (F) en involution et choisissons les formes Φ non pas seulement comme il est dit au n° 3, mais encore comme il vient d'être spécifié.

Les « derniers » monomes des formes Φ sont m monomes distincts M. Nous savons d'ailleurs que parmi ces monomes figure x_n^p (*voir* fin n° 6).

Appelons M' les derniers monomes des formes Φ'_1.

Le produit d'une forme Φ par une quelconque des variables est une combinaison linéaire des Φ'_1 ; en utilisant les deux remarques (a), (b), nous voyons immédiatement que le produit d'un monome M par une

---

tème des F est en involution, les équations résolues canoniquement, chaque monome étant supposé remplacé par la dérivée correspondante, forment un système *complètement intégrable* (même mémoire, p. 107). (Cf. *C. R. Acad. Sc.*, t. 174, 1922, p. 991, et ci-après exemples n° 11 et 18.)

(1) *Le dernier* monome d'un ensemble donné de monomes d'ordre p est celui de ces monomes qui est *postérieur à tous les autres monomes de l'ensemble*.

(2) A savoir celui qui correspond à la *dernière forme* Φ qui entre effectivement dans la combinaison linéaire envisagée [si l'on étend aux formes Φ la terminologie (postérieur, dernier) relative aux (M) correspondants].

quelconque des variables est un monome M'. Autrement dit le produit d'un monome M de classe k par une des variables $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{k+1}$ est égal au produit d'un des M de classe h par l'une des variables $x_h, x_{h-1}, \ldots, x_1$. Soit $x_{h'}$ cette variable.

Le premier produit ne contient pas les variables $x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_1$; h' ne peut donc être inférieur à k. Comme, d'autre part, le premier produit doit contenir x_k, h' est égal à k et l'on peut affirmer que :

Le produit d'un monome M *de classe k par une quelconque des variables $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{k+1}$ est égal au produit d'un monome* M (*de classe supérieure ou égale à k*) *par x_k propriété* (A),

Un système de monomes qui jouit de cette propriété sera appelé système involutif [1].

Appelons d'une manière générale (N) les monomes d'ordre p autres que les monomes (M), N_k un monome (N) de classe k; $\frac{N_k}{x_k}$ est un monome d'ordre $p-1$, de classe au moins égale à k; formons $\frac{N_k}{x_k} \times x_{k-1}$; c'est un monome d'ordre p de classe $k-1$, je dis que ce ne peut être un des (M); si c'était un (M), son produit par x_k serait égal au produit d'un M par x_{k-1}, or ce produit est $N_k x_{k-1}$, il y a donc contradiction. On peut écrire

$$\frac{N_k}{x_k} = \frac{N_{k-1}}{x_{k-1}}.$$

Les monomes $\frac{N_k}{x_k}$ sont compris parmi les monomes $\frac{N_{k-1}}{x_{k-1}}$; d'où l'inégalité

$$\sigma_k \leqq \sigma_{k-1},$$

et d'une manière générale

$$\sigma_{n-1} \leqq \sigma_{n-2} \leqq \ldots \leqq \sigma_2 \leqq \sigma_1,$$

c'est la proposition (2°) (d).

On peut d'ailleurs démontrer ces inégalités, d'une manière moins « formelle » et plus directe, en utilisant un résultat précédemment obtenu : l'invariance des nombres (σ).

---

[1] Cette notion est analogue à celle de système de monomes *complet* (voir *Journal de Mathématiques*, 1920, p. 77).

Soit un système de formes d'ordre p *quelconque* (non plus nécessairement en involution). Soit $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_k$ le nombre dont augmente son rang lorsqu'on lui adjoint les produits de k formes linéaires à coefficients *arbitraires* par tous les monomes d'ordre $p-1$. Je dis que l'on a $\Sigma_n \leqq \Sigma_{n-1} \leqq \ldots \leqq \Sigma_1$.

Soient d'une manière générale *trois* systèmes de formes linéaires (a), (b), (c).

Désignons par r_a, r_{ab}, r_{abc} les rangs des systèmes (a); (a, b); (a, b, c). Choisissons dans le système (a) r_a formes indépendantes; toute forme (b) sera combinaison de ces r_a formes et de $r_{ab} - r_a$ autres formes indépendantes entre elles et indépendantes des r_a précédentes; de même, toute forme (c) sera combinaison des r_a premières formes et de $r_{ac} - r_a$ autres formes; on a donc

$$r_{abc} \leqq r_a + (r_{ab} - r_a) + (r_{ac} - r_a),$$

c'est-à-dire

$$r_{abc} - r_{ac} \leqq r_{ab} - r_a;$$

supposons que le système (a) soit constitué (1) par les formes (F) et les produits de $k-2$ formes linéaires à coefficients *arbitraires* par tous les monomes d'ordre $p-1$, et le système b, comme le système c, par les produits d'une forme linéaire à coefficients *arbitraires* par tous les monomes d'ordre $p-1$. D'après cela,

$$r_{ab} - r_a = r_{ac} - r_a = \Sigma_{k-1},$$

$$r_{abc} - r_{ac} = \Sigma_k;$$

d'où

$$\Sigma_k \leqq \Sigma_{k-1}.$$

8. Remarquons d'abord que l'on pourrait tirer de la proposition précédente une nouvelle démonstration du fait que x_n^p fait partie des (M). Considérons le *dernier*, M_0, des monomes M; s'il était de classe $k \neq n$, son produit par x_n serait égal au produit par x_k *d'un monome* M *de même classe* k, monome M dont le degré en x_k devrait par suite être *inférieur* à celui de M_0, ce qui ne peut être, puisque M_0 est le *dernier* des (M).

(1) Les monomes d'ordre p étant toujours regardés comme autant de variables indépendantes.

Plus généralement, montrons que si les (M) contiennent un monome de classe $k < n$, ils contiennent nécessairement un monome de classe $k+1$; il en résultera que les classes distinctes des monomes (M) constitueront une suite d'entiers *consécutifs* à partir de $n, n-1, \ldots, k$.

Le produit d'un des M de classe k dont le degré en x_k est minimum (et égal à a) par une des variables x_i $(i = n, n-1, \ldots, k+1)$ doit être égal au produit par x_k d'un M, de classe supérieure et non égale à k; d'où ce premier résultat : $a = 1$.

D'autre part, si l'on choisit $i = k+1$, on voit qu'il existe nécessairement un M au moins de classe $k+1$; celui qui figure dans la deuxième partie de la phrase précédente.

Supposons maintenant qu'il existe un monome M de classe k et de degré $h \neq 1$ en x_k; un raisonnement tout analogue montre immédiatement qu'il existe un monome M de classe k et de degré $h-1$ en x_k. Ainsi les degrés en x_k des monomes M de même classe k forment une suite d'entiers consécutifs à partir de 1 : $1, 2, \ldots, h_0$. Considérons les monomes M de classe k et de degré $h \neq 1$ en x_k; leurs quotients par x_k^h sont des monomes de degré $p-h$ et de classe $> k$; le produit d'un tel quotient Q_h par x_i $(i = n, n-1, \ldots, k+1)$ figure nécessairement parmi les quotients Q_{h-1} par x_k^{h-1} des monomes M de classe k et de degré $h-1$. Enfin le produit d'un Q_1 par $x_i (i = n, n-1, \ldots, k+1)$ figure parmi les monomes M de classe supérieure à k que nous appellerons Q_0.

Le système Q_0 aux seules variables $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{k+1}$ est évidemment lui-même involutif.

Les remarques précédentes suggèrent le moyen de *former* effectivement *les systèmes involutifs à n variables* connaissant les systèmes involutifs de même ordre à $n-1$ variables.

Soit Q_0 un système involutif d'ordre p aux $n-1$ variables

$$x_n, \quad x_{n-1}, \quad \ldots, \quad x_2.$$

Choisissons des systèmes de monomes d'ordres $p-1, p-2, \ldots, p-h$ que nous appellerons $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$ tels que tout multiple du premier ordre d'un Q_i soit un Q_{i-1} $(i = 1, 2, \ldots, h)$ en entendant par multiple du premier ordre de Q_i le produit de Q_i par une des lettres x_n, $x_{n-1}, \ldots, x_2$; le système à n variables $(Q_0, Q_1 x_1, \ldots, Q_h x_1^h)$ satisfait à la condition (A); et il résulte de ce qui précède que tout système involutif à n variables peut s'obtenir de cette manière.

Exemple. — Proposons-nous de trouver les divers systèmes involutifs du deuxième ordre à trois variables

$$(Q_0)(Q_1 x_1)\ldots(Q_h x_1^h).$$

Le seul système involutif du deuxième ordre à une variable est constitué par l'unique monome x_3^2.

Cherchons les systèmes involutifs de deuxième ordre à deux variables x_3, x_2 (autres que le système précédent); x_2 devra figurer effectivement dans un des monomes du système; son degré maximum sera 1 ou 2; dans le premier cas, le système est constitué par $(x_3^2, x_3 x_2)$; dans le second cas, il doit y avoir aussi dans le système un monome de degré 1 en x_2, le système ne pourra être autre que $(x_3^2, x_3 x_2, x_2^2)$.

Cherchons maintenant les systèmes involutifs du deuxième ordre à trois variables x_3, x_2, x_1 (autres que les précédents); x_1 devra figurer dans un monome du système; son degré maximum sera 1 ou 2. Nous aurons donc différents cas à distinguer suivant que les monomes M de première classe et de degré maximum en x_1 sont

$$(x_3 x_1)(x_2 x_1)\begin{pmatrix} x_3 x_1 \\ x_2 x_1 \end{pmatrix}(x_1^2).$$

1° $(x_3 x_1)$: comme x_3^2 et $x_3 x_2$ font partie des deux systèmes précédemment trouvés, nous obtenons deux types

$$x_3^2, \quad x_3 x_2, \quad x_3 x_1;$$
$$x_3^2, \quad x_3 x_2, \quad x_2^2, \quad x_3 x_1;$$

2° $(x_2 x_1)$: $x_3 x_2$ et x_2^2 ne font partie que du second des systèmes précédemment trouvés; d'où un seul type

$$(x_3^2, \quad x_3 x_2, \quad x_2^2, \quad x_2 x_1);$$

3° $(x_3 x_1)$ et $(x_2 x_1)$: un seul type

$$(x_3^2, \quad x_3 x_2, \quad x_2^2, \quad x_3 x_1, \quad x_2 x_1);$$

4° x_1^2 : Q_2 est ici 1 ; x_3 et x_2 doivent faire partie des Q_1, d'où le seul type

$$(x_3^2,\quad x_3x_2,\quad x_2^2,\ x_3x_1,\quad x_2x_1,\quad x_1^2).$$

Ainsi nous obtenons 8 types de systèmes « involutifs ».

On aperçoit d'ailleurs, immédiatement, les valeurs des (σ) ; $\sigma_3 = 0$; σ_1 et σ_2 sont donnés par le tableau suivant :

	σ_1	σ_2
x_3^2	3	2
$x_3^2,\ x_3x_2$	3	1
$x_3^2,\ x_3x_2,\ x_2^2$	3	0
$x_3^2,\ x_3x_2,\ x_3x_1$	2	1
$x_3^2,\ x_3x_2,\ x_2^2,\ x_3x_1$	2	0
$x_3^2,\ x_3x_2,\ x_2^2,\ x_2x_1$	2	0
$x_2^2,\ x_3x_2,\ x_2^2,\ x_3x_1,\ x_2x_1$	1	0
$x_1^2,\ x_3x_2,\ x_2^2,\ x_3x_1,\ x_2x_1,\ x_1^2$	0	0

Une énumération de ce genre est utile pour trouver les systèmes de valeurs possibles pour $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ quand on se donne l'*ordre* d'un système en involution de formes à n variables d'ailleurs indéterminé, et pour former effectivement des exemples de systèmes en involution [1] correspondant à un système de valeurs possibles pour les (σ) : les monomes eux-mêmes constituent d'ailleurs de tels exemples.

9. La définition des systèmes involutifs de monomes est équivalente à la suivante : Un système de monomes (M) *d'ordre p est involutif* si en appelant variables multiplicatrices d'un monome de classe k les variables $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1$, tout multiple M′ d'ordre $p+1$ d'un monome du système est égal au produit d'un certain monome $\overline{\mathrm{M}}$ du système par une de ses variables multiplicatrices (on dira que $\overline{\mathrm{M}}$ est le monome d'où provient M′).

Et la propriété fondamentale des systèmes de formes en involution nous montre que si le système de monomes M est involutif, le système M′ des multiples d'ordre $p+1$ de M l'est aussi.

D'une manière générale, le système $\mathrm{M}^{(\lambda)}$ des multiples d'ordre $p+\lambda$ de M est involutif.

---

(1) *Cf.* CARTAN, *Bulletin de la Société mathématique*, 1911.

Admettons maintenant que pour une valeur particulière de $\lambda \geqq 1$ tous les $M^{(\lambda)}$ puissent s'obtenir en multipliant chaque $\overline{M}$ par chaque monome d'ordre λ ne contenant que les variables multiplicatrices de cet $\overline{M}$. Un $M^{(\lambda+1)}$ est le produit d'un $M^{(\lambda)}$ par une des variables multiplicatrices de cet $M^{(\lambda)}$; ce monome $M^{(\lambda)}$ est de classe inférieure ou égale au monome $\overline{M}$ qui, d'après notre hypothèse, a permis de l'obtenir; toute variable multiplicatrice de $M^{(\lambda)}$ est donc variable multiplicatrice de $\overline{M}$; $M^{(\lambda+1)}$ est donc le produit de $\overline{M}$ par un monome d'ordre $\lambda + 1$ ne contenant que des variables multiplicatrices de $\overline{M}$.

On voit donc que :

Tout *multiple* (d'ordre quelconque) d'un M est le produit d'un $\overline{M}$ par un monome ne contenant que *les variables* multiplicatrices de $\overline{M}$.

D'ailleurs deux produits $\mathfrak{M}$ de cette sorte obtenus avec deux $\overline{M}$ différents ne peuvent coïncider. En effet, si les deux $\overline{M}$ sont de classes différentes, k, k', celui de la plus petite classe k' contient l'ensemble des variables $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_k$ à un degré total *inférieur* à p; si les deux monomes M sont de même classe k et de degrés différents en x_k, les degrés en $(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{k+1})$ des produits $\mathfrak{M}$ sont différents; enfin si les deux monomes $\overline{M}$ sont de même classe k et de même degré en x_k, les degrés des $\mathfrak{M}$ relativement à $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{k+1}$ sont respectivement ceux des $\overline{M}$. On voit ainsi que :

En multipliant tout (M) par tout monome d'ordre λ formé avec ses *variables multiplicatrices*, on *obtient tout multiple d'ordre* $p + \lambda$ d'un (M) *une fois* et *une seule fois*.

La proposition est vraie en particulier pour le système involutif constitué par *tous* les monomes d'ordre p.

Revenons au système des (M) et appelons comme précédemment (N) les *autres* monomes d'ordre p; appelons variables multiplicatrices des N de classe k celles mêmes des M de même classe, à savoir x_k, $x_{k-1}, \ldots, x_1$.

En appliquant la proposition précédente au système (M, N), puis au système (M), on voit qu'en multipliant tout N par tout monome d'ordre λ formé avec des variables multiplicatrices de N, on obtient des monomes distincts d'ordre $p + \lambda$ et que ces monomes distincts sont aussi tous distincts des $M^{(\lambda)}$; ce sont donc tous les monomes d'ordre $p+\lambda$ autres que les $M^{(\lambda)}$. D'où la proposition :

En multipliant tout monome N par tout monome d'ordre λ formé avec ses variables multiplicatrices, on obtient tout monome d'ordre $p+\lambda$ *qui n'est pas multiple d'un* M, une fois et une seule fois.

Résumons les propositions précédentes : *Les monomes d'ordre $p+\lambda$ qui sont multiples de quelque* (M) *et ceux qui ne sont multiples d'aucun* (M) *se groupent les uns et les autres en un nombre fini d'ensembles sans éléments communs, tous les éléments d'un ensemble se déduisent d'un monome* (M) *ou* (N) *d'ordre p en le multipliant par un monome en x_i, x_{i-1}, ..., x_1, i étant égal à la classe de ce dernier monome* (M) ou (N) [i n'est d'ailleurs égal à n que pour un monome, le monome x_n^p qui est un (M); et le nombre des ensembles pour lesquels i a une valeur déterminée donnée est $\Gamma_{n-i+1}^{p-1} - \sigma_i$ pour les M; σ_i pour les N].

10. Revenons à la remarque faite au n° 8. Les $\frac{N_k}{x_k}$ sont compris parmi les $\frac{N_{k-1}}{x_{k-1}}$.

Autrement dit, les $\frac{N_1}{x_1}$ se répartissent de la manière suivante :

$\sigma_1 \;-\sigma_2$ monomes qui ne sont pas des $\frac{N_2}{x_2}$,

$\sigma_2 \;-\sigma_3$ monomes qui sont des $\frac{N_2}{x_2}$ mais non des $\frac{N_3}{x_3}$,

....,

$\sigma_k \;-\sigma_{k+1}$ monomes qui sont des $\frac{N_k}{x_k}$ mais non des $\frac{N_{k+1}}{x_{k+1}}$,

....,

$\sigma_{n-2}-\sigma_{n-1}$ monomes qui sont des $\frac{N_{n-2}}{x_{n-2}}$ mais non des $\frac{N_{n-1}}{x_{n-1}}$,

σ_{n-1} monomes qui sont des $\frac{N_{n-1}}{x_{n-1}}$.

Chacun de ces σ_1 monomes multiplié par x_1 donne un monôme N.

Les monomes des $n-2$ dernières lignes multipliés par x_2 donnent des monomes N.

....

Les monomes des $n-k$ dernières multipliés par x_k donnent des monomes N.

On obtient ainsi en effet les N_1, les N_2, ..., les N_k, ...

Ainsi en affectant aux monomes (N^0) d'ordre $p-1$ écrits dans le tableau précédent les variables multiplicatrices suivantes :

Pour ceux de la	$(n-1)^e$	ligne	(N^0_{n-1}),	x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1,
»	$(n-2)^e$	»	(N^0_{n-2}),	x_{n-2}, ..., x_1,
	....		.......................,	
»	k^e	»	(N^0_k),	x_k, ..., x_1,
	....		.......................,	
»	1^e	»	(N^0_1),	x_1,

on arrive à ce résultat :

Les produits obtenus en multipliant un quelconque des N^0 *par une quelconque de ses variables multiplicatrices reproduisent une fois et une seule fois les monomes* N.

Multiplions maintenant un N^0 par un monome P quelconque d'ordre λ formé avec ses variables multiplicatrices; soit h le plus grand indice des variables qui figurent dans P; $N^0 x_h$ étant un N_h, $N^0 P$ est le produit d'un N_h par un monome en x_1, x_2, ..., x_h. C'est donc un des monomes d'ordre $p+\lambda-1$ qui ne sont multiples d'aucun (M).

Réciproquement, tout monome d'ordre $p+\lambda-1$ qui n'est multiple d'aucun (M) peut être obtenu par le procédé précédent; un tel monome est égal, ainsi que nous l'avons vu, au produit d'un N_h par un monome en $x_1, x_2, \ldots, x_h$; cet N_h est le produit par x_h d'un N^0_i, $i \geqq h$, mais un tel N^0_i admet nécessairement (au moins) les variables multiplicatrices $x_1 x_2 \ldots x_h$.

Enfin le nombre des monomes obtenu par le procédé précédent est

$$(\sigma_1-\sigma_2)\Gamma_1^\lambda+(\sigma_2-\sigma_3)\Gamma_2^\lambda+\ldots+(\sigma_{n-2}-\sigma_{n-1})\Gamma_{n-2}^\lambda+\sigma_{n-1}\Gamma_{n-1}^\lambda$$
$$=\sigma_1\Gamma_1^{\lambda-1}+\sigma_2\Gamma_2^{\lambda-1}+\ldots+\sigma_{n-1}\Gamma_{n-1}^{\lambda-1},$$

ce qui est précisément le nombre des monomes distincts d'ordre $p+\lambda-1$ qui ne sont multiples d'aucun (M). Les monomes obtenus sont donc distincts.

Tous les monomes d'ordre $\geqq p$ *qui ne sont multiples d'aucun* **M** *se groupent en un nombre fini d'ensembles sans éléments communs, les éléments d'ordre* $\geqq p$ *d'un ensemble se déduisant d'un* N^0 *(d'ordre* $p-1$*) en le multipliant par un monome d'ordre* $\geqq 1$ en $x_i \ldots x_1$ (i dépendant de N^0).

11. Donnons ici un exemple de système de formes en involution, auquel nous appliquerons les remarques des paragraphes précédents.

Ce sera un système du deuxième ordre à 5 variables pour lequel on a $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = 4$, $\sigma_3 = \sigma_4 = 0$.

Les *derniers* monomes des formes Φ d'un tel système (*voir* n° 7) sont nécessairement : x_5^2, $x_5 x_4$, x_4^2, $x_5 x_3$, $x_4 x_3$, x_3^2 (M).

Considérons les formes particulières [1]

$$\begin{aligned}
F_6 &= x_5^2 - x_4 x_1,\\
F_5 &= x_5 x_4 - x_3 x_1,\\
F_4 &= x_4^2 - x_2 x_1,\\
F_3 &= x_5 x_3 - x_2 x_1,\\
F_2 &= x_4 x_3 - x_5 x_2,\\
F_1 &= x_3^2 - x_4 x_2,
\end{aligned}$$

dont les *derniers* monomes sont respectivement les (M).

On a identiquement

$$\begin{aligned}
x_5 F_5 &= x_4 F_6 + x_1 F_4 - x_1 F_3,\\
x_5 F_4 &= x_4 F_5 + x_1 F_2,\\
x_5 F_3 &= x_3 F_6 + x_1 F_2,\\
x_5 F_2 &= - x_2 F_6 + x_3 F_5 + x_1 F_1,\\
x_5 F_1 &= - x_2 F_5 + x_3 F_3,
\end{aligned}
\qquad
\left\{\begin{aligned}
x_4 F_3 &= x_3 F_5 + x_1 F_1,\\
x_4 F_2 &= - x_2 F_5 + x_3 F_4,\\
x_4 F_1 &= - x_2 F_4 + x_2 F_3 + x_3 F_2.
\end{aligned}\right.$$

Le système des formes (F) est donc bien en involution (*voir* n° 6).

Les monomes d'ordre supérieur ou égal à 2 qui ne sont multiples d'aucun M se groupent en 9 classes sans éléments communs, les monomes de $\sigma_2 = 4$ de ces classes s'obtenant respectivement en multipliant $x_5 x_2$, $x_4 x_2$, $x_3 x_2$, x_2^2 par les monomes en x_1, x_2; les monomes des $\sigma_1 = 5$ autres s'obtenant respectivement en multipliant $x_5 x_1$, $x_4 x_1$, $x_3 x_1$, $x_2 x_1$, x_1^2 par les monomes en x_1 (*voir* n° 9).

---

[1] Ces formes sont précisément celles qui ont été traitées comme exemple dans ma thèse, par une méthode différente (*J. Math.*, 1920, p. 145). Signalons un léger changement de notations; on a appelé ici x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 les variables qui, dans le travail cité, s'appelaient respectivement x_5, x_1, x_2, x_3, x_4; indiquons l'origine de cet exemple en utilisant les *anciennes* notations; le module considéré est le module des formes qui s'annulent pour tout point de la multiplicité $x_1 = u^4, x_2 = u^3 v, x_3 = u^2 v^2, x_4 = u v^3, x_5 = v^4$ (*voir* HILBERT, *Math. Ann.*, t. 36).

On peut aller plus loin et dire que les monomes d'ordre supérieur ou égal à 1 qui ne sont multiples d'aucun M se groupent en $\sigma_1 = 5$ classes sans éléments communs, les monomes de $\sigma_2 = 4$ de *ces classes* s'obtenant respectivement en multipliant x_5, x_4, x_3, x_2 par les monomes en x_1, x_2 et les monomes de $\sigma_1 - \sigma_2 = 1$ de ces classes s'obtenant en multipliant x_1 par les monomes en x_1.

12. Nous avons mis en évidence au n° 10 certains monomes distincts de degré $p-1$, les N^0_{n-1}, N^0_{n-2}, ..., N^0_1 en nombres respectivement égaux à

$$\sigma_{n-1},\quad \sigma_{n-2}-\sigma_{n-1},\quad \ldots,\quad \sigma_1-\sigma_2.$$

Appelons M^0 les monomes d'ordre $p-1$ qui ne figurent pas parmi les précédents, ils sont au nombre de $\Gamma_n^{p-1} - \sigma_1$. Formons un tableau à double entrée, dont les lignes correspondent respectivement à chacun des N_{n-1}, puis des N^0_{n-2}, ..., N^0_1, M^0 et les colonnes aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et faisons figurer dans chaque case le monome d'ordre p obtenu en multipliant le monome d'ordre $p-1$ et la variable x auxquels cette case se trouve correspondre. Considérons les σ_i premières cases de la i^e colonne, et donnons à i les valeurs $1, 2, \ldots, n-1$. Les $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n-1}$ cases ainsi obtenues sont occupées par les $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{n-1}$ monomes (N) d'ordre p.

Les Γ_n^{p-1} cases d'une colonne déterminée x_k sont occupées par des monomes distincts : tous les monomes d'ordre p contenant effectivement x_k; pour la première ce sont tous les monomes de première classe; comme les σ_1 premières sont occupées par les N_1, les autres sont occupées par les M_1.

La k^e colonne se compose des N_k, des M_k, et de certains monomes de classes inférieures à k.

Autrement dit, les $\Gamma_n^{p-1} - \sigma_k$ dernières cases de la k^e colonne contiennent :

1° Tous les M_k;
2° Certains monomes (M ou N) de classe $< k$.

Ces remarques sont utiles comme introduction au paragraphe suivant.

13. *Généralisations.* — Considérons, plus généralement, des indéterminées u_1, u_2 ..., u_σ réparties en groupes N^0_n, N^0_{n-1}, ..., N^0_1, M^0 contenant respectivement σ_n, $\sigma_{n-1}-\sigma_n$, ..., $\sigma_1-\sigma_2$, $\sigma-\sigma_1$ indéterminées (u) $(\sigma \geqq \sigma_1 \geqq \sigma_2 \geqq \ldots \geqq \sigma_n)$.

Formons un tableau à double entrée dont les lignes correspondent respectivement à chacune de ces indéterminées et les colonnes aux variables x; faisons figurer dans chaque case le produit de l'indéterminée u_ρ par la variable x_i auxquelles cette case correspond. Donnons-nous des relations linéaires $E_{\rho i}$ correspondant respectivement aux $u_\rho x_i$ pour lesquelles $\rho > \sigma_i$; nous supposons que $E_{\rho i}$ donne $u_\rho x_i$ en fonction des $u_\tau x_k$ pour lesquelles $k \leqq i$ et $\tau \leqq \sigma_k$. Si nous multiplions chacune des $E_{\rho i}$ par une quelconque des variables indépendantes, nous obtenons des équations linéaires en $u_\lambda x_\alpha x_\beta$. Considérons ces quantités comme autant de variables indépendantes (en regardant bien entendu $u_\lambda x_\alpha x_\beta$ et $u_\lambda x_\beta x_\alpha$ comme représentant la même variable). La solution du système d'équations linéaires ainsi obtenu dépend au plus de $\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n$ arbitraires, les autres sont déterminées en fonction de celles-là par certaines équations $E_{\rho i k}$. *Supposons atteint ce nombre d'arbitraires* et recommençons la même opération en prenant pour indéterminées N^0_n, N^0_{n-1}, ..., N^0_1, M^0 respectivement:

$$\left.\begin{array}{llll}
u_1x_n, & u_2x_n, & \ldots, & u_{\sigma_n}x_n, \\
u_1x_{n-1}, & u_2x_{n-1}, & \ldots, & u_{\sigma_{n-1}}x_{n-1}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots, \\
u_1x_1, & u_2x_1, & \ldots, & u_{\sigma_1}x_1, \\
\multicolumn{4}{l}{\text{tous les autres } u_i x_k}
\end{array}\right\}
\begin{array}{c}\text{que nous}\\ \text{appellerons,}\\ \text{pour abréger,}\\ \text{quantités}\end{array}
\left\{\begin{array}{l}(n);\\ (n-1)\\ \ldots;\\ (1);\\ (0);\end{array}\right.$$

opérons comme sur le système primitif en prenant [1] pour équations $E_{\rho i}$ les $E_{\rho i k}$.

---

[1] On peut démontrer de la manière suivante que les équations $E_{\rho i k}$ peuvent effectivement se mettre sous la forme imposée aux équations $E_{\rho i}$, autrement dit que ces équations $E_{\rho i k}$ donnent les produits des quantités (0), (1), (2), ..., $(l-1)$ par x_l en fonction des produits par $x_h(h \leqq l)$ des quantités (h), $(h+1)$, ..., (n). Le fait s'aperçoit immédiatement lorsque $l=1$: il suffit de multiplier par x_1 les deux membres d'une équation $E_{\rho i}$ écrite sous la forme imposée. Admettons qu'il soit vérifié lorsque $l \leqq \lambda$ et démontrons qu'il l'est lorsque $l=\lambda+1$: 1° le produit par $x_{\lambda+1}$ d'une quantité $(1)(2)\ldots(\lambda)$ est égal au produir par $x_\mu(\mu \leqq \lambda)$ soit d'une quantité $(\lambda+1)$, soit d'une quantité (0), dans le premier

La solution dépend exactement de $\sigma'_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma'_n$ *arbitraires* en posant

$$\sigma'_n = \sigma_n \quad \sigma'_{n-1} = \sigma_n + \sigma_{n-1} \ldots \sigma'_1 = \sigma_n + \sigma_{n-1} + \ldots + \sigma_1.$$

Pour le faire voir, nous allons considérer les équations $E_{\rho i}$ comme des équations aux dérivées partielles relativement aux fonctions u_ρ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $u_{\rho i}$ désignant la dérivée $\frac{\partial u_\rho}{\partial x_i}$ et nous allons utiliser un théorème connu *relatif aux conditions d'intégrabilité* des systèmes canoniques (on pourrait, bien entendu, si l'on tient à rester dans l'ordre d'idées précédent, exposer la démonstration du théorème effectivement utilisé d'une manière purement algébrique).

En adoptant pour les variables et fonctions les cotes suivantes :

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	u_1	u_2	$\ldots$	u_σ
1	1	$\ldots$	1	0	0	$\ldots$	0
1	2	$\ldots$	n	0	0	$\ldots$	0
0	0	$\ldots$	0	1	2	$\ldots$	σ

on voit que chaque second membre ne contient que des dérivées antérieures au premier membre correspondant; en effet une lettre x qui est variable de dérivation au second membre a un indice inférieur ou au plus égal à celui de la variable de dérivation du premier, et s'il y a égalité l'indice de la fonction correspondante est inférieur à l'indice de la fonction u du premier membre. En dérivant une fois les équations $E_{\rho i}$ de manière à n'avoir que des dérivées du deuxième ordre *distinctes* dans les premiers membres, on obtient des équations (A) distinctes; si toutes les autres équations (A′) obtenues en dérivant une fois les $E_{\rho i}$ sont conséquences des précédentes A, le système est complètement intégrable. Mais dire que les A′ sont conséquences des A équivaut à dire que la solution du système (A, A′) aux inconnues $\frac{\partial^2 u_\rho}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ dépend de $\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n$ arbitraires. Le système étant alors

---

as la démonstration est terminée; dans le second il suffit pour la terminer d'utiliser l'hypothèse faite lorsque $l \leqq \lambda$; 2° le produit par $x_{\lambda+1}$ d'une quantité (o) s'exprime grâce à une équation $E_{\rho i}$ à l'aide des produits par $x_{\lambda+1}$ des quantités $(\lambda+1), (\lambda+2), \ldots, (n)$, et des quantités (1), (2),..., (λ), la remarque (1°) appliquée à ces derniers produits achève la démonstration.

complètement intégrable, toutes les dérivées *paramétriques* du troisième ordre seront arbitraires, en entendant par dérivées paramétriques du troisième ordre les dérivées du troisième ordre des u qui ne sont dérivées d'aucun premier membre de $E_{\rho i}$; ces dérivées sont respectivement celles des u d'indices inférieurs ou égaux à σ_1 et supérieur à σ_2 par rapport à x_1, des u d'indices inférieurs ou égaux à σ_2 et supérieur à σ_3 par rapport à $x_1, x_2, \ldots$, des u d'indices inférieurs ou égaux à σ_n par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Elles sont en nombre

$$\sigma_1 - \sigma_2 + \Gamma_2^3(\sigma_2 - \sigma_3) + \ldots + \Gamma^3 \sigma_n,$$

c'est-à-dire que la solution du système d'équations ordinaires (B) obtenu en dérivant une fois les A dépend de

$$\sigma'_1 + 2\sigma'_2 + \ldots + n\sigma'_n$$

arbitraires, où

$$\sigma'_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n, \qquad \sigma'_2 = \sigma_2 + \ldots + \sigma_n, \qquad \sigma'_n = \sigma_n.$$

Nous retrouvons ainsi *dans toute sa généralité* un théorème algébrique obtenu par M. Cartan, sous une forme peut-être un peu moins intuitive que la forme actuelle [1].

14. *Nouvelle forme du théorème fondamental.* — Indiquons ici une nouvelle forme que l'on peut donner à l'énoncé fondamental 1°.

Soit un système de formes quelconques (F) d'ordre P; et, comme précédemment, F′ les formes obtenues en multipliant une forme F quelconque par une variable (x) quelconque.

Si l'on substitue, dans une forme F à tout monome $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ la forme linéaire en $\omega_1\, \omega_2 \ldots \omega_n$

$$x_1^{\alpha_1+1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} \omega_1 + x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2+1} \ldots x_n^{\alpha_n} \omega_2 + \ldots + x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n+1} \omega_n,$$

le coefficient de chacun des ω dans l'expression trouvée est une forme F′, et l'on obtient ainsi toutes les formes F′. Si donc on cherche à annuler *identiquement en* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ *toutes* les expressions obtenues

(1) *Annales École Normale*, 1904, p. 166.

en substituant dans les F aux monomes $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\dots x_n^{\alpha_n}$ respectivement des expressions de la forme

$$p_{\alpha_1+1\,\alpha_2\dots\alpha_n}\omega_1 + p_{\alpha_1\,\alpha_2+1\dots\alpha_n}\omega_2 + \dots + p_{\alpha_1\,\alpha_2\dots\alpha_n+1}\omega_n,$$

où les p sont de nouvelles inconnues (à n indices, dont la somme est $\mathrm{P}+1$), il suffit pour connaître le degré de généralité de la solution de connaître le rang m' des formes F'; on peut donc dire qu'il y aura au plus

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + \dots + (n-1)\sigma_{n-1}$$

des quantités $p_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$ qui seront arbitraires, et que la condition nécessaire et suffisante pour que ce nombre d'arbitraires soit atteint est que le système F soit en involution; les quantités $p_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_n}$ arbitraires sont celles qui correspondront aux $\sigma_1 + 2\sigma_2 + \dots + (n-1)\sigma_{n-1}$ monomes d'ordre $\mathrm{P}+1$ qui ne sont pas des M' (n° 9).

On est amené ainsi à l'énoncé suivant :

Etant donné [1] un système d'équations linéaires homogènes (F) relativement à des variables à n indices positifs ou nuls

$$p_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} \qquad (\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n = k),$$

désignons par σ_1 le nombre dont s'accroît le rang de ce système lorsqu'on lui adjoint les équations

$$a_1^{(1)}p_{\beta_1+1\,\beta_2\dots\beta_n} + a_2^{(1)}p_{\beta_1\,\beta_2+1\dots\beta_n} + \dots + a_n^{(1)}p_{\beta_1\,\beta_2\dots\beta_{n-1}\,\beta_n+1} = 0,$$

où $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ prennent tous les systèmes de valeurs entières (positives ou nulles) telles que $\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n = k-1$ et où les (a) ont des valeurs déterminées *arbitraires* [2], et d'une manière générale par $\sigma_1+\sigma_2+\dots+\sigma_h$ le nombre dont s'accroît le rang du système (F) quand on lui adjoint les équations

$$(\mathrm{G}_i)\qquad a_1^{(i)}p_{\beta_1+1\,\beta_2\dots\beta_n} + a_2^{(i)}p_{\beta_1\,\beta_2+1\dots\beta_n} + \dots + a_n^{(i)}p_{\beta_1\,\beta_2\dots\beta_{n-1}\,\beta_n+1} = 0,$$

où i prend toutes les valeurs $1, 2, \dots, h$, où $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ prennent tous les systèmes de valeurs entières (positives ou nulles) telles que

---

[1] Nous donnons cette nouvelle forme à l'énoncé du n° 1 simplement pour le rapprocher plus étroitement des énoncés de M. Cartan (*Ann. de l'École Normale*, 1904, p. 162 et 166).

[2] C'est-à-dire : ne satisfaisant, peut-être, qu'à des conditions d'inégalité.

$\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n=k-1$ et où les a ont des valeurs déterminées *arbitraires* ([1]).

Si l'on cherche à satisfaire au système $F=0$ identiquement en ω par des expressions de la forme

$$p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}=p_{\alpha_1+1\,\alpha_2\ldots\alpha_n}\omega_1+p_{\alpha_1\,\alpha_2+1\ldots\alpha_n}\omega_2+\ldots+p_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n+1}\omega_n,$$

$\sigma_1+2\sigma_2+\ldots+(n-1)\sigma_{n-1}$ *au plus* des lettres $p_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_n}$.

$(\alpha'_1+\alpha'_2+\ldots+\alpha'_n=k+1)$ seront arbitraires; si ce nombre d'arbitraires *est atteint*, le système (F') obtenu en écrivant les équations linéaires qui lient les variables $p_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_n}$ jouit précisément de la propriété que nous venons de supposer appartenir au système (F); les nombres σ' du système F' se déduisent d'ailleurs aisément des σ (voir n° 2): et l'on a les inégalités

$$\sigma_{n-1}\leqq\sigma_{n-2}\leqq\ldots\leqq\sigma_1.$$

15. *On peut prolonger un système quelconque de manière à obtenir un système en involution.*

Considérons maintenant un système *quelconque* de formes algébriques d'ordre p (F).

Si l'on adjoint à ce système toutes les formes

$$(a_1^{(1)}x_1+a_2^{(1)}x_2+\ldots+a_n^{(1)}x_n)m_{p-1},$$

où les m_{p-1} désignant tous les monomes d'ordre $p-1$ et où les $a^{(1)}$ sont des constantes données *arbitraires*, le rang augmente de σ_1. Si, de même, on adjoint au système constitué par les F et tous les

$$(a_1^{(1)}x_1+\ldots+a_n^{(1)}x_n)m_{p-1},\qquad (a_1^{(2)}x_1+\ldots+a_n^{(2)}x_n)m_{p-1},\qquad \ldots,$$
$$(a_1^{(k-1)}x_1+\ldots+a_n^{(k-1)}x_n)m_{p-1},$$

toutes les formes $(a_1^{(k)}x_1+\ldots+a_n^{(k)}x_n)\,m_{p-1}$ où les a sont encore des constantes données *arbitraires*, le rang augmente de σ_k. Considérons maintenant toutes les formes obtenues en multipliant *une* forme F quelconque par *une* variable x_i quelconque; on pourra définir pour les formes (F') d'ordre $p+1$, ainsi obtenues, des nombres σ' analogues

---

([1]) C'est-à-dire : ne satisfaisant, peut-être, qu'à des conditions d'inégalité.

$\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_n$. Il résulte de ce que l'on a vu au commencement de cette étude [1] que l'on a

$$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \ldots + \sigma'_n \leqq \sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + n\sigma_n.$$

Nous avons étudié dans ce qui précède le cas où l'égalité a lieu; supposons au contraire qu'il y ait *inégalité*. Nous étudions alors le système (F') comme nous venons d'étudier le système (F); on a

$$\sigma''_1 + \sigma''_2 + \ldots + \sigma''_n \leqq \sigma'_1 + 2\sigma'_2 + \ldots + n\sigma'_n.$$

Si l'égalité a lieu, on connaît parfaitement la constitution des systèmes suivants F'', F''',..., nous considérons l'opération comme terminée; si l'égalité n'a pas lieu, nous traiterons (F') comme nous venons de traiter (F), c'est-à-dire que nous étudierons (F'') et ainsi de suite..., Je dis que l'opération se terminera; autrement dit, que *l'inégalité ne pourra se présenter indéfiniment*.

Il nous suffira pour le voir d'utiliser la proposition suivante :

Soit

$$T_1 = \tau_1 + \frac{P+1}{1}\tau_2 + \frac{(P+1)(P+2)}{1.2}\tau_3 + \ldots + \frac{(P+1)(P+2)\ldots(P+n-2)}{1.2\ldots(n-2)}\tau_{n-1}$$

le polynome caractéristique [2] d'un module quelconque donné (M); le polynome caractéristique du module obtenu en adjoignant aux formes de (M) *une* forme *linéaire arbitraire* est

$$T_2 = \tau_2 + \frac{P+1}{1}\tau_3 + \frac{(P+1)(P+2)}{1.2}\tau_4 + \ldots + \frac{(P+1)(P+2)\ldots(P+n-3)}{1.2\ldots(n-3)}\tau_{n-1},$$

---

(1) Faisons le changement de variables défini par les n égalités $\Sigma a_k^{(i)} x_k = X_i$. Les m_{p-1} constituent Γ_n^{p-1} combinaisons linéairement indépendantes des Γ_n^{p-1}, monomes d'ordre $p-1$ en $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Le rang d'un système de formes d'ordre p, relativement aux monomes d'ordre p en x, est d'ailleurs égal au rang du système transformé, relativement aux monomes d'ordre p en X; les nombres σ définis ici sont donc bien égaux respectivement aux nombres σ du début pour le système en X.

(2) C'est-à-dire le polynome en P auquel se réduit, dès que P est assez grand, le nombre des conditions indépendantes auxquelles doit satisfaire une forme d'ordre P pour faire partie du module.

ou plus brièvement, le polynome caractéristique de (M, l) où l est une forme linéaire *arbitraire* est la *différence première* du polynome caractéristique de M. Admettons cette proposition, que nous démontrerons d'ailleurs plus loin. Nous en déduisons immédiatement que le polynome caractéristique de (M, l, l') où l, l' sont deux formes linéaires *arbitraires* est

$$T_3 = \tau_3 + \frac{P+1}{1}\tau_4 + \ldots + \frac{(P+1)(P+2)\ldots(P+n-4)}{1.2\ldots(n-4)}\tau_{n-1},$$

ou si l'on préfère, la *différence seconde* du polynome caractéristique de (M). D'une manière générale, le polynome caractéristique de $(M, l_1, l_2, \ldots, l_k)$ où les (l) sont k formes linéaires *arbitraires* est la différence $k^{\text{ième}}$ du polynome caractéristique de (M). Choisissons P_0 de manière que les polynomes précédents représentent effectivement dès que $P \geqq P_0$ le nombre des conditions indépendantes auxquelles doit satisfaire une forme d'ordre P pour faire partie des modules $(M)(M, l)$, $(M, l, l')\ldots$, etc. Les nombres (σ) du système des formes d'ordre P du module M sont respectivement

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= T_1 - T_2,\\
\sigma_2 &= T_2 - T_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\sigma_{n-2} &= T_{n-2} - T_{n-1},\\
\sigma_{n-1} &= T_{n-1}.
\end{aligned}$$

Les nombres (σ) des formes d'ordre $P+1$, nombres que nous appellerons (σ'), sont respectivement

$$\begin{aligned}
\sigma'_1 &= T'_1 - T'_2,\\
\sigma'_2 &= T'_2 - T'_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\sigma'_{n-2} &= T'_{n-2} - T'_{n-1},\\
\sigma'_{n-1} &= T'_{n-1}.
\end{aligned}$$

où $T'_1, T'_2, \ldots, T'_{n-1}$ sont les valeurs des polynomes $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ où P a été remplacé par $P+1$.

Des expressions des (σ) on déduit [1]

$$\begin{aligned}\sigma_1 + 2\sigma_2 + \ldots + (n-1)\sigma_{n-1} = \tau_1 &+ \frac{P+1}{1}\tau_2 + \ldots + \frac{(P+1)\ldots(P+n-2)}{1.2\ldots(n-2)}\tau_{n-1}\\ &+ \tau_2 \quad + \ldots\ldots + \frac{(P+1)\ldots(P+n-3)}{1.2\ldots(n-3)}\tau_{n-1}\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+ \tau_{n-1}\\ = \tau_1 &+ \frac{P+1+1}{1}\tau_2 + \ldots\\ &+ \frac{(P+1+1)(P+1+2)\ldots(P+1+n-2)}{1.2\ldots(n-2)}\tau_{n-1}.\end{aligned}$$

Mais cette quantité n'est autre que

$$T'_1 = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \ldots + \sigma'_{n-1}.$$

Les formes d'ordre P du module ont donc la propriété annoncée.

16. Nous avons utilisé la proposition suivante, qui s'applique à un module M quelconque : « le polynome caractéristique du module (M, l), où l est une forme linéaire *arbitraire*, est la différence première du polynome caractéristique du module (M). »

Cette proposition est évidemment une conséquence immédiate de la suivante :

« A partir d'un certain ordre p, on obtient un système *complet* des formes d'ordre $p+1$ du module divisibles par l (forme linéaire à coefficients arbitraires), en multipliant par l les formes d'ordre p qui appartiennent au module. »

Ou, sous une forme géométrique, pour le cas où le module est défini comme l'ensemble des formes qui s'annulent pour tous les points d'une multiplicité donnée :

« A partir d'un certain ordre p, on obtient toutes les surfaces [2] d'ordre $p+1$, passant par une multiplicité donnée et contenant un

---

[1] En utilisant les formules connues

$$\Gamma_1^P + \Gamma_2^P + \ldots + \Gamma_k^P = \Gamma_k^{P+1}.$$

[2] Surface = variété à $n-2$ dimensions dans l'espace à $n-1$ dimensions (coordonnées homogènes $x_1, x_2, \ldots, x_n$); plan = surface du premier degré.

plan *arbitraire* donné, en considérant toutes les surfaces formées par ce plan et une surface d'ordre p passant par la multiplicité donnée. »

La proposition prend ainsi un aspect intuitif, mais il est utile d'en donner une démonstration algébrique qui montrera nettement son caractère général.

Soient (M) un module quelconque donné; l une forme linéaire telle que si l'on fait varier ses coefficients indépendamment les uns des autres (au moins dans certaines limites) la fonction caractéristique du module (M, l) ne change pas. Faisons un changement linéaire et homogène de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n \mid X_1, X_2, \ldots, X_n$ dont une des équations de définition soit $X_1 = l$. Si dans le module en (X) obtenu on remplace X_1 par $X_1 + h_2 X_2 + \ldots + h_n X_n$ on obtient un module μ dépendant [1] des paramètres h tel que la fonction caractéristique du module (μ, X_1) est indépendante des h (pourvu que les valeurs absolues de ces paramètres ne dépassent pas certaines limites).

Il sera commode pour suivre la démonstration de se représenter un tableau à double entrée :

Soit une forme quelconque du module μ_0 ordonnée suivant les puissances croissantes de X_1; le premier terme $X_1^\lambda G_q^{\lambda}$ est de degré λ en X_1 et de degré q en $(X_2, X_3, \ldots, X_n)$.

Nous placerons G_q^λ dans la case correspondant à la ligne λ et à la colonne q. Les formes d'une même ligne constituent un module à $n-1$ variables $X_2, \ldots, X_n$. Celles de la première ligne en particulier constituent un module ν, qui joint à *toutes* les formes contenant X_1 en facteur reproduit le module à n variables (μ_0, X_1), et qui par suite a même fonction caractéristique que lui.

1° Considérons le module ν à $n-1$ variables et rappelons d'abord que si le produit d'une forme Φ d'ordre q en $X_2 \ldots X_n$ par une même puissance de chacune des variables $X_2, \ldots, X_n$ fait partie de ce module [2],

---

(1) Lorsque tous les paramètres sont nuls, le module μ se réduit à un module que nous désignons par μ_0; lorsque tous les paramètres h sont nuls sauf h_k, le module μ se réduit à un module que nous désignons par μ_{h_k}.

(2) Soit p_0 l'ordre maximum des formes définissant le module considéré (M), ces formes étant supposées constituer *un système canonique « complètement intégrable »* (*voir* Mémoire déjà cité du *Journal de Mathématiques*, 1920, p. 110 et 117). Supposons que Φ soit d'ordre P supérieur ou égal à p_0, et soit telle que son produit par une puissance

la forme Φ fait elle-même partie de ce module dès que, du moins, on suppose $q \geqq q_0$, q_0 dépendant du module considéré (ν). Considérons une forme quelconque G du module μ_0 telle que le coefficient de la plus basse puissance de X_1 qui y entre soit d'ordre $q \geqq q_0$ (q_0 relatif au module ν)

$$G = X_1^\lambda G_q + X_1^{\lambda+1} H_{q-1} + \ldots,$$

où G_q, $H_{q-1}\ldots$ sont des formes en $X_2, \ldots, X_n$ d'ordre $q, q-1, \ldots$.

Soit k l'un quelconque des nombres 2, 3, ..., n. La forme

$$(X_1 + h_k X_k)^\lambda G_q + (X_1 + h_k X_k)^{\lambda+1} H_{q-1} + \ldots,$$

faisant partie du module μ_{h_k} son terme indépendant de X_1

$$h_k^\lambda (X_k^\lambda G_q + h_k X_k^{\lambda+1} H_{q-1} + \ldots)$$

fait partie du module (μ_{h_k}, X_1); il en est donc de même de son quotient par h_k^λ

$$X_k^\lambda G_q + h_k X_k^{\lambda+1} H_{q-1} + \ldots.$$

Mais alors X_k^λ G_q fait partie du module (μ_0, X_1), donc du module (ν), il en est donc de même de G_q puisque k peut prendre toutes les valeurs 2, 3, ..., n et que $q \geqq q_0$.

Nous affectons les formes précédentes G_q de l'indice supérieur λ; toute forme G_q^λ est aussi [1] une forme $G_q^{\lambda+1}$. Cette remarque rapprochée de la précédente montre que le système $G_q^{(\lambda)}$ est indépendant de λ.

2° Considérons les formes *du module* μ_0 telles que le coefficient

---

convenable de chacune des variables (x) fasse partie du module. Si Φ ne faisait pas partie du module, on pourrait en déduire une forme Φ_1 ayant les mêmes propriétés mais ne contenant *que les monomes paramétriques* d'ordre P; portons notre attention sur celui de ces monomes $\mathfrak{M}$ qui est postérieur à tous les autres; soit x_h l'une de ses variables multiplicatrices (tout monome paramétrique d'ordre $P \geqq p_0$ a au moins une variable multiplicatrice, puisqu'il est obtenu lui-même comme le produit, par une de ses « *variables multiplicatrices* » d'un des monomes complémentaires des « monomes M premiers membres » du système considéré), le produit de $\mathfrak{M}$ par une puissance quelconque de x_h serait paramétrique; d'autre part, si $\Phi_1 x_h^\lambda$ faisait partie du module (M), le *dernier* monome de $\Phi_1 x_h^\lambda$ serait principal; or, ce dernier monome est précisément $\mathfrak{M}\, x_h^\lambda$, il y a donc contradiction.

[1] Car si $G = X_1^\lambda G_q^{(\lambda)} + X_1^{\lambda+1} H_{q-1} + \ldots$ fait partie de μ_0, son produit par X_1 en fait aussi partie.

$G_r^{(\lambda)}$ de la plus basse puissance de X_1 qui y entre soit d'ordre r inférieur à q_0. Toute forme $G_r^{(\lambda)}$ est aussi une forme $G_r^{(\lambda+1)}$; il en résulte que dès que $\lambda \geqq \lambda_r$, λ_r désignant un nombre qui peut dépendre de r, le système $G_r^{(\lambda)}$ est identique au système $G_r^{(\lambda_r)}$. Désignons par Λ le plus grand des λ_r $(r = 0, 1, 2 \ldots q_0 - 1)$.

3° P étant un entier quelconque $\geqq q_0 + \Lambda - 1$, considérons maintenant les formes F_P d'ordre P du module μ_0, le rang des formes F_P est égal à la somme des rangs des systèmes

$$G_0^P, \quad G_1^{P-1}, \quad \ldots, \quad G_{q_0-1}^{P-q_0+1}$$

et des systèmes

$$G_{q_0}^0, \quad G_{q_0+1}^0, \quad \ldots, \quad G_P^0$$

puisque le système G_q^λ est identique au système G_q^0 si l'on suppose $q \geqq q_0$ (remarque 1). De même le rang des formes d'ordre P + 1 du module μ_0 est égal à la somme des rangs des systèmes

$$G_0^{P+1}, \quad G_1^P, \quad \ldots, \quad G_{q_0-1}^{P-q_0+2}$$

et des systèmes

$$G_{q_0}^0, \quad G_{q_0+1}^0, \quad \ldots, \quad G_P^0, \quad G_{P+1}^0$$

Or, les systèmes

$$G_0^P, \quad G_1^{P-1}, \quad \ldots, \quad G_{q_0-1}^{P-q_0+1}$$

sont respectivement identiques aux systèmes

$$G_0^{P+1}, \quad G_1^P, \quad \ldots, \quad G_{q_0-1}^{P-q_0+}$$

puisque $P - q_0 + 1 \geqq \Lambda$ (remarque 2). Par suite *le rang du système* G_{P+1}^0 *n'est autre que la différence des rangs des* F_{P+1} et des F_P.

La proposition que nous avions annoncée est maintenant immédiate ; il suffit d'exprimer celle que nous venons d'obtenir en introduisant explicitement le nombre des conditions N_M^p auxquelles doit satisfaire une forme d'ordre p pour appartenir au module M

$$\Gamma_{n-1}^{P+1} - N_{(\mu_0 X_1)}^{P+1} = (\Gamma_n^{P+1} - N_{\mu_0}^{P+1}) - (\Gamma_n^P - N_{\mu_0}^P).$$

En utilisant l'identité connue

$$\Gamma_{n-1}^{P+1} = \Gamma_n^{P+1} - \Gamma ,$$

on obtient

$$N_{(\mu_0 X_1)}^{P+1} = N_{\mu_0}^{P+1} - N_{\mu_0}^P.$$

17. Étant donné un module de formes, il existe un entier p_0 tel que les formes du module d'un ordre p quelconque donné $\geqq p_0$ sont en involution. On a vu précédemment la signification algébrique des nombres σ correspondant à l'ordre p; on a vu en particulier qu'ils suffisent à faire connaître le polynome caractéristique du module. Ces nombres ont une interprétation fort simple lorsque l'on considère au lieu du module de formes lui-même le système aux dérivées partielles qui s'en déduit en remplaçant chaque monome $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ par la dérivée $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ correspondante et égalant à zéro les expressions obtenues : aux monomes (N) d'ordre p, monomes *complémentaires* des *derniers monomes* d'ordre p des formes du système, correspondent les dérivées d'ordre p que l'on peut se donner arbitrairement sur certaines multiplicités à $1, 2, \ldots, n-1$ dimensions issues de 0 [1]. Ces fonctions arbitraires suffisent, avec un nombre fini de constantes arbitraires, correspondant à certains monomes d'ordre inférieur à p, à déterminer entièrement la solution générale; il y a respectivement $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ monomes (N) qui ont $1, 2, \ldots, n-1$ variables multiplicatrices; la solution générale sera donc déterminée par la donnée, outre un nombre fini σ de constantes arbitraires correspondant à des dérivées d'ordre inférieur à p, de $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ fonctions arbitraires de $1, 2, \ldots, n-1$ variables sur certaines multiplicités linéaires (se comprenant d'ailleurs les unes les autres) de certaines dérivées *d'ordre p*. Après un changement *arbitraire* (linéaire et homogène) des variables indépendantes, la solution sera encore déterminée par σ constantes arbitraires et $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ *fonctions de* $1, 2, \ldots, n-1$ *variables*.

Il y a plus : les mêmes nombres (σ) de constantes et de fonctions arbitraires se retrouveront dans toute autre forme « canonique complètement intégrable » (ψ) [1] dont sera susceptible le système des formes d'ordre p que nous venons de considérer. Supposons que l'on puisse définir le module considéré par un système de formes d'ordre $\leqq p$ « complètement intégrable » dont les derniers monomes (M) forment un système « complet ». Le système des monomes qui ne sont multiples

---

(1) *Voir* Mémoire déjà cité (*Journal de Mathématiques*, 1920, pages 106 et 117).

d'aucun M se compose : 1° d'un certain nombre (fini) de monomes d'ordre inférieur à p; 2° de monomes d'ordre $\geqq p$ qui se répartissent en un nombre fini de classes sans éléments communs, chaque classe étant constituée par les produits d'un monome (N_p) par tous les monomes formés avec certaines variables déterminées (variables multiplicatrices de N_p). Soient $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{n-1}$ les nombres de monomes N_p qui ont $1, 2, \ldots, n-1$ variables multiplicatrices; le nombre des conditions pour qu'une forme d'ordre $P \geqq p$ fasse partie du module est

$$\Sigma_1 + \Sigma_2 \frac{P-p+1}{1} + \Sigma_3 \frac{(P-p+1)(P-p+2)}{1.2} + \ldots$$
$$+ \Sigma_{n-1} \frac{(P-p+1)\ldots(P-p+n-2)}{1.2\ldots(n-2)}.$$

Ce polynome est égal, quel que soit $P \geqq p$, au polynome

$$\sigma_1 + \sigma_2 \frac{P-p+1}{1} + \sigma_3 \frac{(P-p+1)(P-p-2)}{1.2} + \ldots$$
$$+ \sigma_{n-1} \frac{(P-p+1)\ldots(P-p+n-2)}{1.2\ldots(n-2)}.$$

Mais cela n'est possible que si l'on a

$$\Sigma_{n-1} = \sigma_{n-1}, \qquad \Sigma_{n-2} = \sigma_{n-2}, \qquad \ldots, \qquad \Sigma_1 = \sigma_1.$$

Or, les nombres $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{n-1}$ indiquent précisément les nombres de fonctions arbitraires de $1, 2, \ldots, n-1$ variables qui permettent de déterminer une solution de la forme (ψ) *quand on s'astreint à se donner comme fonctions arbitraires les valeurs de certaines dérivées d'ordre p* (des dérivées d'ordre inférieur à p n'intervenant qu'à titre de *constantes arbitraires*). Cette convention a l'avantage d'introduire des nombres de fonctions arbitraires *bien déterminés*. Nous venons de voir, de plus, que les nombres qu'elle introduit sont précisément les nombres *invariants* qui avaient été définis précédemment.

18. De ce qui précède, il résulte qu'au point de vue où nous nous plaçons actuellement, le degré de généralité de la solution du système aux dérivées partielles correspondant à un module de formes donné est caractérisé (outre un certain nombre de constantes arbitraires) par les nombres $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$, correspondant à un ordre *connu p* pour lequel les formes du module constituent un système en involution. Les nombres (σ) correspondant aux ordres *plus élevés* $p+1$, $p+2$, ... pourront jouer un rôle analogue. Mais on peut aller plus loin et dire *dans un sens analogue* que, même si les formes en involution d'ordre p ne peuvent pas être considérées comme les formes de cet ordre d'un module défini par des formes en involution d'ordre $p-1$, le degré de généralité est caractérisé par les nombres

$$\sigma_1-\sigma_2,\quad \sigma_2-\sigma_3,\quad \ldots,\quad \sigma_{n-2}-\sigma_{n-1},\quad \sigma_{n-1};$$

c'est ce qui résulte des remarques faites au n° 10 : ces remarques montrent en effet que la solution générale est entièrement caractérisée par la donnée de constantes arbitraires et de

$$\sigma_1-\sigma_2,\quad \sigma_2-\sigma_3,\quad \ldots,\quad \sigma_{n-2}-\sigma_{n-1},\quad \sigma_{n-1}$$

fonctions arbitraires de $1, 2, \ldots, n-2, n-1$ variables (ces nombres ayant encore une signification « invariante »).

Donnons pour terminer un exemple très simple auquel on pourra appliquer ce résultat ainsi que ceux des numéros précédents.

Soient ([1]) deux formes du deuxième degré à 4 variables dont les coefficients ne soient pas proportionnels; excluons le cas où elles seraient constituées toutes deux par le produit de la même forme linéaire par deux formes linéaires (distinctes) et seraient par suite en involution; on peut alors par changement de variables et combinaison linéaire en déduire deux formes A, B

$$\left.\begin{aligned} A &\equiv x_4^2 + a x_3^2 + \ldots \\ B &\equiv x_4 x_3 + b x_3^2 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad a+b^2 \neq 0,$$

les termes non écrits contenant l'une au moins des lettres x_2, x_1. Le système des deux formes *n'est pas en involution;* celui des formes du troisième ordre que l'on en déduit en multipliant chacune d'elles par chacune des lettres x *est en involution;* on peut s'en rendre compte rapidement de la manière suivante. Formons l'expression

$$C \equiv x_3 A + (b x_3 - x_4) B \equiv (a+b^2) x_3^3 + \ldots,$$

([1]) Cf. *C. R. Acad. Sc.*, t. **174**, 1922, p. 991.

les termes non écrits contenant au moins l'une des lettres x_2, x_1; et considérons le système des équations obtenues en égalant à zéro A, B, C résolues respectivement par rapport à x_4^2, $x_4 x_3$, x_3^3. Ce système de monomes est *complet* (¹); si d'ailleurs on adopte pour le classement des monomes d'un ordre déterminé celui qui a été indiqué au nº 7, on constate aisément que le système d'équations aux dérivées partielles correspondant à celui dont nous venons de parler est sous forme *canonique* et *complètement intégrable;* ce point étant admis, on aperçoit immédiatement les valeurs des nombres (σ) relatifs à l'ordre 2 et à l'ordre 3 en considérant les deux systèmes de monomes « premiers membres »

$$M_2 = (x_4^2,\ x_4 x_3), \qquad M_3 = (x_4^3,\ x_4^2 x_3,\ x_4 x_3^2,\ x_3^3,\ x_4^2 x_2,\ x_4 x_3 x_2,\ x_4^2 x_1,\ x_4 x_3 x_1).$$

Le tableau M_2 donne

$$\sigma_1^{(2)} = 4, \qquad \sigma_2^{(2)} = 3, \qquad \sigma_3^{(2)} = 1.$$

La somme $\sigma_1^{(2)} + 2\sigma_2^{(2)} + 3\sigma_3^{(2)}$ est 13, nombre *supérieur* au nombre des monomes d'ordre 3 qui ne figurent pas dans le tableau M_3.

Le tableau M_3 donne

$$\sigma_1^{(3)} = 8, \qquad \sigma_2^{(3)} = 4, \qquad \sigma_3^{(3)} = 0.$$

La somme $\sigma_1^{(3)} + 2\sigma_2^{(3)} + 3\sigma_3^{(3)}$ est 16, nombre *égal* au nombre des monomes d'ordre 4 qui ne sont multiples d'aucun M_3.

Si l'on s'en tient aux nombres σ_1, σ_2, σ_3 correspondant à la forme en involution d'ordre le moins élevé dont est susceptible le module, on pourra dire que le degré de généralité de la solution du système aux dérivées partielles considéré est caractérisé par les nombres

$$8, \quad 4, \quad 0 \qquad (\text{ordre } 3).$$

La remarque faite plus haut précise comment on peut dire, dans un sens *analogue*, que le degré de généralité est caractérisé par les nombres

$$8 - 4 = 4, \quad 4, \quad 0 \qquad (\text{ordre } 2).$$

(¹) Voir *Journal de Math.*, 1920, p. 77.