ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON BERTRAND

La théorie des marées et les équations intégrales

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 40 (1923), p. 151-258
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1923_3_40__151_0>

LA THÉORIE DES MARÉES

ET

LES ÉQUATIONS INTÉGRALES

PAR M. L'ABBÉ GASTON BERTRAND.

L'équation des marées est l'une des plus intéressantes de la Physique mathématique.

Elle est du type elliptique.

Certains de ses coefficients deviennent infinis à la latitude critique.

Traitée par la méthode de Fredholm, elle introduit des intégrales dont on ne doit prendre que la valeur principale au sens de Cauchy.

Dans le cas de la nature où l'Océan est limité en partie par des plages, l'équation intégrale des marées est une équation de troisième espèce.

Voilà de nombreux titres à l'attention des analystes.

Rappelons brièvement comment cette équation a été introduite dans la Science.

Képler (1571-1630) admettait que, sur la Terre, l'eau a une tendance à se mouvoir vers le Soleil et vers la Lune. Mais il ne chercha pas à traduire cette idée en formules pour la soumettre au contrôle du calcul.

Galilée (1564-1642) regrettait qu'un homme aussi avisé que Képler ait soutenu une théorie qui ressuscitait les forces occultes. Quant à lui, il expliquait les marées par la rotation de la Terre, et voyait dans les mouvements périodiques de la mer une preuve importante du système de Copernic.

Newton dans ses « *Principes* », parus en 1687, établit sur des bases solides les fondements de toutes les découvertes ultérieures. Et, en effet, la théorie dynamique des marées est l'une des confirmations les plus impressionnantes de la loi classique de la gravitation universelle.

En 1738, l'Académie des Sciences de Paris proposa, comme sujet de prix, la théorie des marées. Quatre auteurs furent couronnés : Daniel Bernoulli, Euler, Maclaurin et Cavalleri. Les trois premiers adoptèrent les idées de Newton dans toute leur extension. C'est dans le sens de Bernoulli que s'est faite la marche des idées, les Mémoires d'Euler et de Maclaurin étant plutôt des développements mathématiques. Quant au P. Cavalleri, il basait son étude sur les propriétés des tourbillons.

Enfin Laplace vint. Il prend le sujet en mains vers 1774. Le premier, il reconnaît pleinement la difficulté du problème. Dans son *Traité de Mécanique céleste,* il montre que la rotation de la Terre est l'un des facteurs essentiels de la production des marées. En quelques pages d'une rare élégance, il établit l'équation des marées dans sa forme définitive, il en déduit d'importants théorèmes généraux, et, dans certains cas particuliers, il l'intègre à l'aide des belles fonctions qui portent son nom.

L'école anglaise s'appliqua surtout à prédire pratiquement les marées et à perfectionner l'analyse harmonique. M. Hough, astronome à l'Observatoire du Cap, reprit en 1897-1898 la méthode théorique de Laplace et l'appliqua à une mer de profondeur constante qui recouvrirait tout le globe. Poussant les calculs jusqu'aux applications numériques, il a découvert plusieurs faits inattendus, notamment l'existence de deux sortes de marées statiques.

En 1896, dans deux articles parus au *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* H. Poincaré envisagea le cas de la distribution réelle des mers et des continents. Il mit en œuvre ses méthodes générales pour étudier les équations de la Physique mathématique et en fit une heureuse application au problème de l'*équilibre et du mouvement des mers*.

Dans son Cours de 1908-1909, il reprit la question. Fredholm avait forgé une arme puissante; Poincaré la mania avec maîtrise, il mit les difficultés en évidence et fit sortir de l'ombre bien des points obscurs. C'est l'origine du Tome III de ses *Leçons de Mécanique céleste*. Pionnier hardi, chercheur intrépide, il traça dans un domaine vierge de vastes percées, laissant à ses disciples le soin de continuer et de parfaire son œuvre.

L'un d'eux, A. Blondel (*Thèse*, 1912) appliqua la méthode de Poincaré à l'étude des marées de la mer Rouge. Par de laborieux calculs, il détermina les ondes théoriques les plus importantes. Chose étrange ! ces ondes théoriques n'offrent qu'une lointaine ressemblance avec les ondes réelles que l'analyse harmonique permet de déduire des observations.

Récemment, M. Jager (*Thèse*, 1916) s'attacha plus spécialement aux marées d'un bassin aux parois verticales et il ramena la solution à la recherche d'une fonction de Green particulière. Poincaré avait transformé la question générale en un problème de calcul des variations. En se plaçant dans un cas spécial, M. Jager démontra l'existence de la « fonction minimisante » par une application très intéressante de la méthode de Ritz.

Ce travail comprend quatre Chapitres.

Le Chapitre I est consacré à la mise en équation du problème des marées. La question est reprise dès le début. Ainsi sont mises successivement en relief les nombreuses hypothèses qu'il faut faire avant d'arriver aux équations de Laplace. Les *latitudes critiques*, si gênantes, semblaient avoir une origine mystérieuse. On voit nettement comment elles s'introduisent, et comment on pourrait les éviter par une modification légère des équations.

Le Chapitre II traite des marées statiques ordinaires. On y voit que ces marées dépendent d'une équation intégrale remarquablement simple. Cette équation est facile à étudier à l'aide des méthodes aujourd'hui classiques résultant des travaux de M. Picard (¹). Dans le cas de la réalité, elle est toujours résoluble quelle que soit la forme des continents. La même méthode réussit pour l'une des équations des marées dynamiques, ce qui permet, dans la suite, de tenir compte de

(¹) E. Picard, *Sur la solution du problème généralisé de Dirichlet relatif à une équation linéaire du type elliptique au moyen de l'équation de Fredholm* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1906), et *Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de M. Fredholm* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1906).

l'attraction du bourrelet liquide, produit à la surface des mers par la marée elle-même [1].

Le Chapitre III est en grande partie une étude de certaines équations intégrales singulières. La condition aux limites du problème des marées contient non seulement la dérivée normale, mais encore la dérivée tangentielle de la fonction cherchée. Si donc l'on met celle-ci sous la forme d'un potentiel de simple couche, on introduira la dérivée tangentielle d'un tel potentiel. Or, cette dérivée s'exprime par une intégrale, dont on ne doit garder que la valeur principale au sens de Cauchy.

La théorie de ces équations intégrales singulières a été ébauchée par Poincaré. Elle a été, ici, précisée, complétée et appliquée à l'étude des marées qui se produisent dans un bassin limité par des falaises verticales [2].

Le Chapitre IV, d'un genre tout différent, ramène la résolution du problème des marées à la variation d'une intégrale double. L'intégrale donnée par Poincaré contient des termes qui deviennent infinis aux latitudes critiques. On a pu s'affranchir de cette difficulté et préparer ainsi un emploi plus aisé de la méthode de Ritz.

CHAPITRE I.

L'ÉQUATION GÉNÉRALE DES MARÉES.

1. Définition des marées. — Les marées sont des oscillations périodiques de la surface de la mer de part et d'autre de sa figure d'équilibre, sous l'influence de petites forces perturbatrices, elles aussi périodiques et dérivées de l'attraction de la Lune et du Soleil.

Dans une première approximation, l'étude des marées revient donc à celle des petites oscillations d'un *fluide parfait pesant* dans un bassin animé d'une rotation uniforme.

Dès lors, ces oscillations seront déterminées par les équations de l'hydrodynamique des fluides parfaits.

---

(1) G. Bertrand, *Comptes rendus Acad. Sc.*, 27 décembre 1921.
(2) G. Bertrand, *Ibidem*, 13 juin 1921.

2. Équations de l'Hydrodynamique. — Soient X, Y, Z *trois axes absolument fixes* et une masse fluide de densité $\rho(X, Y, Z)$ contenue dans un vase ouvert. J'envisage dans ce fluide, à l'instant t, un élément de volume $d\tau$ de masse $\rho\, d\tau$. Cette masse $\rho\, d\tau$ est soumise à un certain nombre de forces extérieures dont la résultante générale a pour projections

$$F_X \rho\, d\tau, \quad F_Y \rho\, d\tau, \quad F_Z \rho\, d\tau.$$

D'autre part, chaque élément $d\sigma$ de sa surface subit de la part du fluide environnant une pression normale

$$p(X, Y, Z, t)\, d\sigma.$$

Sous cette double action, $\rho\, d\tau$ prend une *accélération absolue* J, ayant pour composantes

$$J_X, \quad J_Y, \quad J_Z,$$

et l'on a les trois équations fondamentales

$$J_X = F_X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial X},$$

$$J_Y = F_Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial Y},$$

$$J_Z = F_Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial Z}.$$

Choix des unités. — Unité de masse. Dans tout ce qui suit, la densité de l'eau de mer sera supposée constante et prise pour unité $\rho = 1$. Cela revient à faire un choix convenable de l'unité de masse.

Unité de longueur. Le rayon de la Terre considérée comme sphérique.

Unité de force. Choisie de manière que le coefficient de l'attraction newtonienne soit égal à 1.

Les équations fondamentales s'écrivent alors

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} J_X &= F_X - \frac{\partial p}{\partial X},\\ J_Y &= F_Y - \frac{\partial p}{\partial Y},\\ J_Z &= F_Z - \frac{\partial p}{\partial Z}.\end{aligned}\right.$$

Conditions aux limites. — Elles sont de deux sortes.

Le long de la paroi, le déplacement de la molécule doit se faire tangentiellement.

A la surface libre de la mer, la pression doit être égale à la pression atmosphérique qu'on peut ici regarder comme une constante absolue C.

3. Premier système d'axes mobiles. — Je prends un système d'axes x, y, z parallèles aux premiers, mais dont l'*origine coïncide avec le centre de gravité de la Terre*, point qui a pour coordonnées ξ, η, ζ; d'où les relations

$$X = \xi + x, \qquad Y = \eta + y, \qquad Z = \zeta + z.$$

Les forces agissantes, c'est-à-dire les forces terrestres de pesanteur et les forces célestes d'attraction ont les mêmes composantes sur les axes fixes ou mobiles.

Nous regarderons la pression $p(X, Y, Z, t)$ comme indépendante de la position du centre de gravité de la Terre, ce sera une fonction $p(x, y, z, t)$ du point xyz.

Les équations fondamentales deviennent

$$J_\xi + J_x = F_x - \frac{\partial p}{\partial x},$$
$$J_\eta + J_y = F_y - \frac{\partial p}{\partial y},$$
$$J_\zeta + J_z = F_z - \frac{\partial p}{\partial z};$$

J_ξ, J_η, J_ζ désignant l'accélération absolue du centre de gravité de la Terre, et J_x, J_y, J_z l'accélération de la molécule liquide par rapport aux axes x, y, z.

Les forces terrestres qui agissent en x, y, z dérivent du potentiel $\Pi(x, y, z, t)$ créé en ce point par la masse totale actuelle de la Terre déformée par la marée elle-même, d'où les composantes

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Les forces célestes émanent de toutes les particules matérielles de l'Univers extérieures à la Terre et dérivent du potentiel

$$P = \sum \frac{\mu}{r},$$

d'où les équations

$$J_\xi + J_x = \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$J_\eta + J_y = \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$J_\zeta + J_z = \frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z}.$$

4. Élimination du centre de gravité de la Terre. — Dans les équations précédentes, J_ξ, J_η, J_ζ sont les composantes de l'accélération absolue du centre de gravité de la Terre, et ce centre de gravité se meut comme si toutes les forces extérieures y étaient transportées.

Mais, d'après un théorème célèbre de la Mécanique céleste, à cause du grand éloignement des astres et de la presque sphéricité de la Terre, le mouvement du centre de gravité de celle-ci se fait comme si la masse totale du globe y était condensée. Ce centre de gravité ayant pour coordonnées o, o, o, les composantes de la force qui y agit sur la masse unité sont

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_0.$$

Or, le potentiel P est une fonction de x, y, z développable en série entière

$$P = A + Bx + Cy + Dz + Ex^2 + \ldots.$$

Je pose

$$P_0 = A + Bx + Cy + Dz.$$

On a évidemment

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_0 = \frac{\partial P_0}{\partial x}, \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_0 = \frac{\partial P_0}{\partial y}, \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_0 = \frac{\partial P_0}{\partial z},$$

ce qui donne pour le mouvement absolu du centre de gravité

$$J_\xi = \frac{\partial P_0}{\partial x}, \qquad J_\eta = \frac{\partial P_0}{\partial y}, \qquad J_\zeta = \frac{\partial P_0}{\partial z}$$

et les équations précédentes s'écrivent

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} J_x &= \frac{\partial Q}{\partial x}, \\ J_y &= \frac{\partial Q}{\partial y}, \\ J_z &= \frac{\partial Q}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

En posant

$$Q = \Pi + (P - P_0) - p.$$

On s'est ainsi affranchi du système d'axes fixes, et l'on voit qu'on n'a pas à tenir compte de la force centrifuge due au mouvement orbital, à condition de ne considérer dans le développement du potentiel que les termes en x, y, z de degré au moins égal à 2.

5. Système d'axes tournants. — Je suppose la Terre en rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour d'un axe de direction fixe. Ce sera l'axe Oz précédent. Je prends maintenant un système d'axes tournants $Ox_1y_1z_1$. Oz_1 coïncide avec Oz. Quant à Ox_1 et Oy_1 ils passent par deux points fixes de l'équateur.

Les formules de passage sont

$$\begin{aligned} x &= x_1 \cos\omega t - y_1 \sin\omega t, & x_1 &= x \cos\omega t + y \sin\omega t, \\ y &= x_1 \sin\omega t + y_1 \cos\omega t, & y_1 &= -x \sin\omega t + y \cos\omega t. \end{aligned}$$

Les variables employées étant celles de Lagrange, les composantes de J dans les axes non tournants sont

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

et dans les axes tournants

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cos\omega t + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\sin\omega t = \frac{\partial Q}{\partial x}\cos\omega t + \frac{\partial Q}{\partial y}\sin\omega t = \frac{\partial Q}{\partial x_1}, \\ J_{y_1} &= -\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\sin\omega t + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cos\omega t = -\frac{\partial Q}{\partial x}\sin\omega t + \frac{\partial Q}{\partial y}\cos\omega t = \frac{\partial Q}{\partial y_1}, \\ J_{z_1} &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial z_1}. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x_1}{\partial t}\cos\omega t - \frac{\partial y_1}{\partial t}\sin\omega t - \omega x_1 \sin\omega t - \omega y_1 \cos\omega t,$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial x_1}{\partial t}\sin\omega t + \frac{\partial y_1}{\partial t}\cos\omega t + \omega x_1 \cos\omega t - \omega y_1 \sin\omega t;$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} - 2\omega\frac{\partial y_1}{\partial t} - \omega^2 x_1\right)\cos\omega t - \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + 2\omega\frac{\partial x_1}{\partial t} - \omega^2 y_1\right)\sin\omega t,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} - 2\omega\frac{\partial y_1}{\partial t} - \omega^2 x_1\right)\sin\omega t + \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + 2\omega\frac{\partial x_1}{\partial t} - \omega^2 y_1\right)\cos\omega t.$$

D'où en portant dans J_{x_1}, J_{y_1} les équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} - 2\omega\frac{\partial y_1}{\partial t} - \omega^2 x_1 = \frac{\partial Q}{\partial x_1},\\ &\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + 2\omega\frac{\partial x_1}{\partial t} - \omega^2 y_1 = \frac{\partial Q}{\partial y_1},\\ &\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} \qquad\qquad\qquad\quad = \frac{\partial Q}{\partial z_1}.\end{aligned}\right.$$

La première colonne correspond à l'accélération relative, la deuxième à l'accélération de Coriolis, la troisième à l'accélération centrifuge ordinaire.

On peut faire entrer ces derniers termes dans les seconds membres, car ils dérivent du potentiel $-\frac{\omega^2}{2}(x_1^2+y_1^2)$ et l'on obtient ainsi les équations

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} - 2\omega\frac{\partial y_1}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial x_1},\\ &\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + 2\omega\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial y_1},\\ &\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} \qquad\qquad\quad = \frac{\partial R}{\partial z_1}.\end{aligned}\right.$$

Avec

$$R = \Pi + \frac{\omega^2\delta^2}{2} + (P - P_0) - p,$$

où δ désigne la distance de la molécule liquide à l'axe de rotation de la Terre.

6. Introduction des déplacements u, v, w. — Je fais un changement de notations. J'appelle x, y, z les coordonnées de la molécule dans sa

position d'équilibre par rapport à la croûte terrestre, et u, v, w les composantes de son déplacement actuel, de sorte que l'on a

$$x_1 = x + u, \qquad y_1 = y + v, \qquad z_1 = z + w.$$

Quant à la fonction R, elle s'écrit

$$\begin{aligned} R(x_1, y_1, z_1) &= R(x+u, y+v, z+w) \\ &= R(x, y, z) + u\frac{\partial R}{\partial x} + v\frac{\partial R}{\partial y} + w\frac{\partial R}{\partial z} + \ldots. \end{aligned}$$

Dans le cas des marées, u, v, w sont petits et, à la suite de Laplace, on peut écrire

$$R(x_1, y_1, z_1) = R(x, y, z),$$

et les équations deviennent

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial x}, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial y}, \\ &\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad\quad\;\; = \frac{\partial R}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Remarque. — *Cette simplification a d'importantes conséquences, notamment en ce qui concerne la latitude critique.*

7. Équations en coordonnées sphériques. — Je prends comme coordonnées de la molécule M sa colatitude θ, sa longitude dans le sens direct ψ, son rayon vecteur r qui, sur la sphère est égal à 1,

$$x = r\sin\theta\cos\psi, \qquad y = r\sin\theta\sin\psi, \qquad z = r\cos\theta;$$

u, v, w désignant les composantes du déplacement sur les axes x, y, z, je désigne par U, V, W les composantes du même déplacement sur le méridien, sur le parallèle, sur le rayon vecteur. Cela étant, on établit aisément les formules suivantes :

$$\begin{aligned} U &= u\cos\theta\cos\psi + v\cos\theta\sin\psi - w\sin\theta, \\ V &= -u\sin\psi + v\cos\psi, \\ W &= u\sin\theta\cos\psi + v\sin\theta\sin\psi + w\cos\theta, \end{aligned}$$

$$U\cos\theta + W\sin\theta = u\cos\psi + v\sin\psi.$$

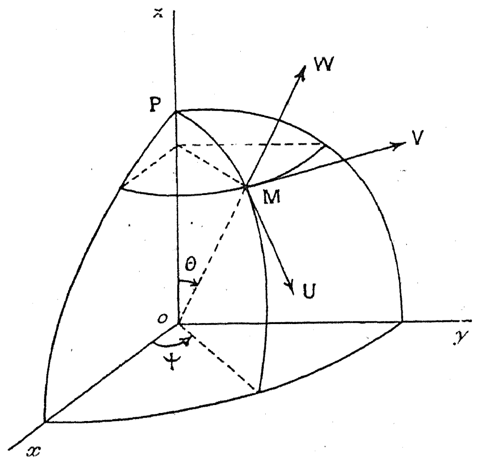
Puis

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = \frac{\partial R}{\partial x}\cos\theta\cos\psi + \frac{\partial R}{\partial y}\cos\theta\sin\psi - \frac{\partial R}{\partial z}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial R}{\partial \psi} = -\frac{\partial R}{\partial x}\sin\theta\sin\psi + \frac{\partial R}{\partial y}\sin\theta\cos\psi,$$

$$\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial x}\sin\theta\cos\psi + \frac{\partial R}{\partial y}\sin\theta\sin\psi + \frac{\partial R}{\partial z}\cos\theta.$$

Fig. 1.



Reprenons maintenant les équations (5)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial R}{\partial z}$$

et formons les combinaisons qui débutent par

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2};$$

nous obtenons ainsi les équations des marées en coordonnées sphériques

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2\omega \cos\theta \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2\omega \cos\theta \frac{\partial U}{\partial t} + 2\omega \sin\theta \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial R}{\sin\theta\, \partial\psi},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - 2\omega \sin\theta \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial r}.$$

8. La profondeur de la mer est infiniment petite. — On a le droit de faire cette hypothèse, parce que la profondeur de la mer est très petite par rapport à la longueur d'onde d'une ondulation de marée. En effet, la profondeur moyenne de la mer est d'environ 5^{km}, tandis que la longueur d'une onde marée est comparable aux dimensions mêmes des bassins océaniques.

Je me place au point x, y, z et j'y mène trois axes rectangulaires, l'axe des z étant le rayon vecteur de sorte que le déplacement w se confond avec W.

Si $h(\theta, \psi)$ désigne la profondeur de la mer au point θ, ψ, l'équation du fond de la mer est, au voisinage de Oz,

$$z = -h(x, y)$$

et h est une quantité très petite.

S'il n'y a pas de pentes abruptes, $\frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}$ sont elles-mêmes des quantités du même ordre de petitesse.

Au fond de la mer, le déplacement se fait tangentiellement à la paroi, on a donc

$$w + u\frac{\partial h}{\partial x} + v\frac{\partial h}{\partial y} = 0.$$

Par suite, au fond de la mer, w est une quantité infiniment petite du second ordre; appelons-la w_0.

Sur l'axe des z

$$\begin{aligned} w = w(0, 0, z) &= w(0, 0, -h + z + h) \\ &= w(0, 0, -h) + (z+h)\frac{\partial w}{\partial z} + \ldots \\ &= w_0 + (z+h)\frac{\partial w}{\partial z} + \ldots. \end{aligned}$$

$\frac{\partial w}{\partial z}$ et $z + h$ étant des infiniment petits du premier ordre, il s'ensuit que, tout le long de Oz, le déplacement w est négligeable, et qu'il en est de même de $\frac{\partial w}{\partial t}$ et de $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$.

Grâce à cette hypothèse, on obtient les équations définitives de Laplace :

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2\omega\cos\theta\dfrac{\partial V}{\partial t} = \dfrac{\partial R}{\partial \theta}, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2\omega\cos\theta\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial R}{\sin\theta\,\partial\psi}. \end{cases}$$

9. Condition à la surface libre. — On a vu plus haut que la condition à la surface libre s'écrit tout simplement

$$p = C.$$

On a donc à la surface libre

$$R = \Pi + \frac{\omega^2 \delta^2}{2} + (P - P_0) - C.$$

R n'intervenant que par ses dérivées, on peut faire $C = 0$, ce qui donne à la surface libre

$$R = \Pi + \frac{\omega^2 \delta^2}{2} + (P - P_0).$$

Envisageons la *surface libre d'équilibre* et sur cette surface libre la molécule liquide x, y, z; du fait de la marée, cette molécule subit un déplacement u, v, w, et elle prend la position $x + u$, $y + v$, $z + w$, située sur la surface libre actuelle. Or

$$R(x + u, y + v, z + w) = R(x, y, z) + u\frac{\partial R}{\partial x} + v\frac{\partial R}{\partial y} + w\frac{\partial R}{\partial z} + \ldots,$$

de sorte qu'en première approximation on peut prendre

$$R(x + u, y + v, z + w) = R(x, y, z).$$

Et de même pour $P - P_0$.

Reste à évaluer le potentiel $\Pi + \frac{\omega^2 \delta^2}{2}$ et sa valeur à la surface libre.

Π est le potentiel au point $x + u, y + v, z + w$ de toute la masse terrestre actuelle, masse qui peut se décomposer en deux.

La masse terrestre limitée par la surface d'équilibre Σ et qui produit un potentiel Π'.

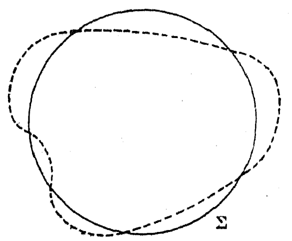
La masse du bourrelet liquide, tantôt positif, tantôt négatif, qui produit un potentiel Π''.

Posons

$$\Pi' + \frac{\omega^2 \delta^2}{2} = G,$$

G est le potentiel dû à l'attraction de la partie invariable limitée par la surface libre d'équilibre Σ, augmenté du potentiel dû à la force centri-

Fig. 2.



fuge; c'est donc le potentiel qui engendre la pesanteur. Dès lors, soit G_0 la valeur de G sur la surface libre d'équilibre, c'est une constante sur cette surface. Pour la molécule considérée, l'accroissement *infiniment petit* d'altitude est W; on a donc

$$G = G_0 - g W,$$

g désignant l'intensité de la pesanteur qui *sera supposée constante*.

Quant à Π'', on peut le regarder comme le potentiel au point en question d'une simple couche liquide, de densité W, répandue sur toute la surface libre d'équilibre Σ

$$\Pi''(x+u, y+v, z+w) = \int\int_{\Sigma} \frac{W' d\sigma'}{r},$$

en désignant par r la distance de l'élément $d\sigma'$ au point $x+u$, $y+v$, $z+w$; et comme précédemment on peut écrire

$$\Pi''(x+u, y+v, z+w) = \Pi''(x, y, z),$$

ce qui donne en coordonnées sphériques

$$\Pi''(\theta, \psi) = \int\int_{\Sigma} \frac{W(\theta', \psi')\, d\sigma'}{r(\theta, \psi; \theta', \psi')}.$$

Rassemblant tous ces résultats et faisant abstraction de la constante G_0, on obtient

$$R = -gW + \Pi'' + (P - P_0).$$

Au lieu de W, introduisons avec Poincaré la *dénivellation* ζ, nous trouvons, puisque $\zeta = -W$,

$$R = g\zeta + \Pi'' + (P - P_0)$$

avec

$$\Pi''(\theta, \psi) = -\int\int_{\Sigma} \frac{\zeta(\theta', \psi')\, d\sigma'}{r(\theta, \psi; \theta', \psi')}.$$

10. Condition au bord. — Au point θ, ψ, la profondeur de la mer est donnée par la fonction

$$h(\theta, \psi).$$

I. *Si la mer est limitée par une falaise verticale*, le déplacement de la molécule liquide doit se faire tangentiellement à cette falaise.

Soit donc ds un élément horizontal de la falaise, ses composantes sur le méridien et sur le parallèle sont

$$d\theta, \quad \sin\theta\, d\psi.$$

Le vecteur U, V doit être parallèle au vecteur ds, d'où la condition au bord

$$V\, d\theta - U \sin\theta\, d\psi = 0.$$

II. *Si la mer est limitée par une plage*, l'équation du bord est

$$h(\theta, \psi) = 0,$$

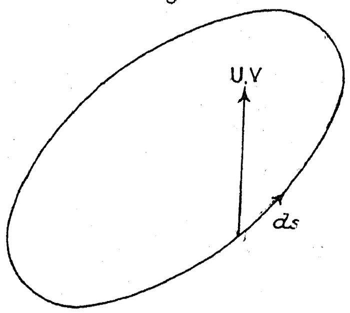
et la condition précédente est inapplicable.

III. *Condition générale*. — On voit qu'en combinant les deux relations précédentes on a constamment au bord

$$hV\, d\theta - hU \sin\theta\, d\psi = 0.$$

11. Équation de continuité en coordonnées sphériques. — Sur la surface d'équilibre du bassin océanique de profondeur $h(\theta, \psi)$, j'envisage une *courbe quelconque* C et le cône ayant pour sommet le centre

Fig. 3.



de la sphère et pour directrice la courbe C; puis j'évalue de deux manières l'accroissement ΔM que la marée fait subir au volume d'eau contenu dans ce petit cône.

D'une part, ΔM est égal à la quantité d'eau qui pénètre par la surface latérale du cône.

L'élément ds de sa directrice a pour projections

$$d\theta, \quad \sin\theta\, d\psi;$$

poussé par la marée, il subit un déplacement qui a pour composantes

$$U, \quad V.$$

La quantité de liquide qui entre par ds est donc

$$V\, d\theta - U \sin\theta\, d\psi;$$

celle qui entre par le rectangle de base ds et de hauteur h est par conséquent

$$hV\, d\theta - hU \sin\theta\, d\psi,$$

et celle qui entre par toute la surface latérale du cône

$$\Delta M = \int_C hV\, d\theta - hU \sin\theta\, d\psi.$$

D'autre part, du fait de la marée, l'élément de surface de base $d\sigma$ est dénivelé de ζ, et le cône subit un accroissement de volume

$$\Delta M = \int\int_S -\zeta\, d\sigma.$$

Si l'on suppose sphérique la surface d'équilibre

$$d\sigma = \sin\theta\, d\theta\, d\psi,$$

on obtient l'égalité

$$\int_C h V\, d\theta - h U \sin\theta\, d\psi = -\int\int_S \zeta \sin\theta\, d\theta\, d\psi;$$

transformée par la formule de Green, elle devient

$$\int\int_S \left(-\frac{\partial . hV}{\partial\psi} - \frac{\partial . hU\sin\theta}{\partial\theta}\right) d\theta\, d\psi = -\int\int_S \zeta \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Cela devant avoir lieu quelle que soit la courbe C entraîne

$$\zeta\sin\theta = \frac{\partial . hU\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial . hV}{\partial\psi}.$$

C'est l'équation de continuité.

12. Équations des marées en coordonnées sphériques. — En résumé, il y a quatre fonctions à déterminer

$$U, \quad V, \quad \zeta, \quad R.$$

Ces fonctions sont régies par les équations suivantes :

Équations indéfinies :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2\omega\cos\theta\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial\theta}, \\ &\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2\omega\cos\theta\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial R}{\sin\theta\,\partial\psi}, \\ &\zeta\sin\theta = \frac{\partial . hU\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial . hV}{\partial\psi}, \\ &R = g\zeta + \Pi'' + (P - P_0), \\ &\Pi'' = -\int\int\frac{\zeta\, d\sigma}{r}. \end{aligned}\right.$$

Condition au bord de la mer

$$hV\,d\theta - hU\sin\theta\,d\psi = 0.$$

Ce sont les équations données par Laplace au Tome II de la *Mécanique céleste*.

13. Équations des marées sur une carte géographique. — En coordonnées sphériques, colatitude θ et longitude ψ, le ds^2 de la sphère a pour expression

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\psi^2;$$

je fais du bassin océanique une représentation conforme en posant

$$x = x(\theta, \psi), \qquad y = y(\theta, \psi),$$

les fonctions x et y étant choisies de manière à donner au ds^2 la forme

$$ds^2 = \frac{1}{k^2}(dx^2 + dy^2);$$

d'où

$$dx^2 + dy^2 = k^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\psi^2),$$

k est le rapport de similitude. Si je considère un petit vecteur MM_1 sur la sphère, son image sur la carte a pour longueur kMM_1.

Cela étant posé, on a trouvé sur la sphère

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2\omega\cos\theta\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial\theta},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2\omega\cos\theta\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial R}{\sin\theta\,\partial\psi}.$$

Je choisis d'abord un système d'axes xy tels que les parallèles à Ox soient les images des méridiens et les parallèles à Oy les images des parallèles de la sphère. J'ai alors

$$dx = k\,d\theta, \qquad dy = k\sin\theta\,d\psi;$$

d'où les équations

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2\omega\cos\theta\frac{\partial V}{\partial t} = k\frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2\omega\cos\theta\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial R}{\partial y}.$$

Pour en déduire les équations par rapport à des axes quelconques, je n'ai qu'à faire subir une rotation aux précédents, ce qui donne, en désignant par u' et v' les composantes sur ces nouveaux axes du déplacement de la molécule liquide,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{u'}{k} - 2\omega\cos\theta\frac{\partial}{\partial t}\frac{v'}{k} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{v'}{k} + 2\omega\cos\theta\frac{\partial}{\partial t}\frac{u'}{k} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}.$$

et en introduisant les *pseudo-déplacements* u, v, définis par les relations

$$u = \frac{u'}{k}, \qquad v = \frac{v'}{k},$$

on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega\cos\theta\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega\cos\theta\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}.$$

Équation de continuité. — Je reprends le petit cône du n° 11.

Soit le ds sur la carte, sur la sphère il lui correspond $\frac{ds}{k}$, et la quantité d'eau qui rentre dans le petit rectangle de base ds et de hauteur h est

$$\frac{hv'}{k}\,dx - \frac{hu'}{k}\,dy = hv\,dx - hu\,dy.$$

Soit le $d\sigma$ sur la carte, sur la sphère il lui correspond $\frac{d\sigma}{k^2}$, d'où l'accroissement de volume dû à la marée

$$-\frac{\zeta\,dx\,dy}{k^2}.$$

Ce qui donne pour tout le cône l'équation

$$\int_{\mathrm{C}} hv\,dx - hu\,dy = -\int\int_{\mathrm{S}} \frac{\zeta\,dx\,dy}{k^2},$$

ou encore

$$-\int\int_{\mathrm{S}}\left(\frac{\partial.hu}{\partial x} + \frac{\partial.hv}{\partial y}\right)dx\,dy = -\int\int_{\mathrm{S}}\frac{\zeta\,dx\,dy}{k^2};$$

autrement dit,

$$\frac{\zeta}{k^2} = \frac{\partial . hu}{\partial x} + \frac{\partial . hv}{\partial y}.$$

Potentiel du bourrelet. — Sur la sphère c'est

$$\Pi''(\theta, \psi) = -\int\int_{\Sigma} \frac{\zeta(\theta', \psi')\, d\sigma'}{r(\theta, \psi; \theta', \psi')},$$

sur la carte c'est donc

$$\Pi''(x, y) = -\int\int \frac{\zeta(x', y')\, dx'\, dy'}{k'^2 r}$$

en désignant toujours par r la distance réelle des deux points de la sphère qui ont pour image x, y et x', y'.

En résumé, voici les équations des marées sur la carte géographique :

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega \cos\theta \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega \cos\theta \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}, \\ &\frac{\zeta}{k^2} = \frac{\partial . hu}{\partial x} + \frac{\partial . hv}{\partial y}, \\ &\mathrm{R} = g\zeta + \Pi'' + (\mathrm{P} - \mathrm{P}_0), \\ &\Pi'' = -\int\int \frac{\zeta'\, dx'\, dy'}{k'^2 r} \end{aligned} \right.$$

avec la condition au bord

$$hu\, dy - hv\, dx = 0.$$

14. Expression du potentiel perturbateur $\mathrm{P} - \mathrm{P}_0$. — Les astres troublants sont la Lune et le Soleil. Pour la Lune de masse μ, on a

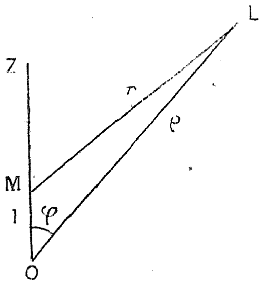
$$\mathrm{P} = \frac{\mu}{r},$$

r représentant ici la distance du centre de gravité L de la Lune à la molécule liquide considérée M.

Soient donc O le centre de la Terre; M la molécule liquide qui a pour coordonnées θ, ψ; OM sa verticale vers le zénith; $\rho =$ OL la distance géocentrique de la Lune; r la distance ML; φ l'angle MOL, on a

$$r^2 = \rho^2 - 2\rho\cos\varphi + 1;$$

Fig. 4.

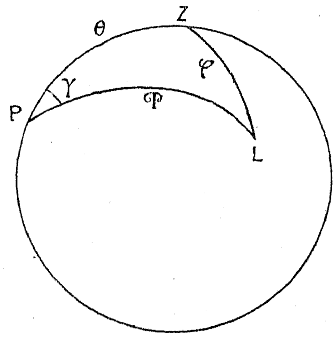


d'où, comme il est bien connu,

$$\frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{\rho} + \frac{\mu\cos\varphi}{\rho^2} + \mu\frac{3\cos^2\varphi - 1}{2\rho^3} + \ldots.$$

Il faut y introduire les coordonnées θ, ψ du point M.

Fig. 5.



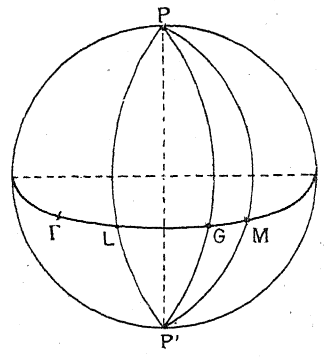
Figurons le pôle P, le zénith Z de la molécule liquide, la Lune L; ZL c'est l'angle φ précédent, ZP c'est la colatitude θ de la molécule. Soient, d'autre part, la distance polaire Φ et l'angle horaire γ de la Lune. Dans le triangle sphérique PZL, on a

$$\cos\varphi = \cos\Phi\cos\theta + \sin\Phi\sin\theta\cos\gamma.$$

Figurons maintenant l'équateur céleste, le point vernal Γ; le cercle horaire de la Lune PLP'; le méridien origine PGP'; le méridien de la molécule PMP'; on a évidemment

$$\Gamma L + LM = \Gamma G + GM,$$
$$Æ + \gamma = \omega t + \psi,$$

Fig. 6.



Æ étant l'ascension droite de la Lune, et ψ la longitude de M comptée positivement dans le sens direct, ce qui donne

$$\gamma = \psi + \omega t - Æ,$$
$$\cos\varphi = \cos\Phi\cos\theta + \sin\Phi\sin\theta\cos(\psi + \omega t - Æ)$$
$$= \cos\Phi\cos\theta + \sin\Phi\sin\theta\cos\psi\cos(\omega t - Æ) - \sin\Phi\sin\theta\sin\psi\sin(\omega t - Æ).$$

Et comme l'on a

$$x = \sin\theta\cos\psi, \qquad y = \sin\theta\sin\psi, \qquad z = \cos\theta,$$

il vient

$$\cos\varphi = z\cos\Phi + x\sin\Phi\cos(\omega t - Æ) - y\sin\Phi\sin(\omega t - Æ).$$

D'où il suit que $\frac{\mu}{\rho} + \frac{\mu\cos\varphi}{\rho^2}$ constituent P_0 (*voir* n° 4, p. 7).

Donc si l'on néglige les termes en $\frac{1}{\rho^4}$, on a, pour la Lune,

$$P - P_0 = \frac{\mu}{\rho^3}\,\frac{3\cos^2\varphi - 1}{2}$$

et, en y remplaçant $\cos\varphi$ par sa valeur,

$$\begin{aligned}P - P_0 = {} & \frac{3\mu}{4\rho^3}\sin^2\theta\sin^2\mathfrak{P}\cos 2(\omega t + \psi - \mathcal{R}) \\ & + \frac{3\mu}{4\rho^3}\sin 2\theta\sin 2\mathfrak{P}\cos(\omega t + \psi - \mathcal{R}) \\ & + \frac{\mu}{\rho^3}\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\,\frac{3\cos^2\mathfrak{P} - 1}{2},\end{aligned}$$

$P - P_0$ est donc une fonction sphérique du second ordre en θ, ψ.

Dans cette expression, ρ, $\cos\mathfrak{P}$, $\sin\mathfrak{P}$, $\cos\mathcal{R}$, $\sin\mathcal{R}$ sont des fonctions périodiques de t, mais à périodes lentes si on les compare à ω, de sorte que le potentiel perturbateur de la Lune et du Soleil peut s'écrire

$$\begin{aligned}P - P_0 = {} & \sin^2\theta e^{2i\psi}\Sigma A_2 e^{i(2\omega+\nu)t} + \sin^2\theta e^{-2i\psi}\Sigma A'_2 e^{-i(2\omega+\nu)t} \\ & + \sin 2\theta e^{i\psi}\,\Sigma A_1 e^{i(\omega+\nu)t} + \sin 2\theta e^{-i\psi}\,\Sigma A'_1 e^{-i(\omega+\nu)t} \\ & + \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\Sigma A_0 e^{i\nu t} + \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\Sigma A'_0 e^{-i\nu t}.\end{aligned}$$

Les A et les ν sont des nombres déterminés par la Mécanique céleste, les ν étant petits par rapport à ω.

La première ligne de $P - P_0$ comprend des termes dont la période est voisine de 12 heures, elle engendre les *marées semi-diurnes*.

La deuxième ligne comprend des termes dont la période est voisine de 24 heures, elle engendre les *marées diurnes*.

La troisième ligne engendre les *marées à longues périodes*.

Marées semi-diurnes, marées diurnes, marées à longues périodes constituent les *marées dynamiques*, ainsi appelées par opposition aux *marées statiques*, lesquelles seraient produites par les termes du potentiel dont la période serait supposée infiniment longue.

En résumé, le potentiel perturbateur qui produit les marées est une somme de termes de la forme

$$A Y_2(\theta, \psi) e^{i\alpha t},$$

Y_2 étant l'une des cinq fonctions

$$\sin^2\theta e^{2i\psi}, \quad \sin^2\theta e^{-2i\psi}, \quad \sin 2\theta e^{i\psi}, \quad \sin 2\theta e^{-i\psi}, \quad \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$$

et α une quantité réelle liée à la période T de ce terme par la relation

$$T = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

Les équations des marées étant linéaires, il suffit de considérer séparément chaque composante du potentiel et de chercher l'oscillation du bassin océanique qui en est la conséquence. Pour la commodité des notations, le potentiel a été décomposé en termes complexes. A chacun de ces termes correspondra ce qu'on a appelé une *oscillation contrainte isochrone complexe*. Les fonctions cherchées se présenteront donc sous forme de quantités complexes, dont les parties réelles et les parties imaginaires seront utilisées à la manière habituelle pour constituer les solutions physiques du problème.

15. Équations d'une oscillation contrainte isochrone complexe. — Dans le potentiel, je considère la composante

$$F(\theta, \psi)\, e^{i\alpha t}$$

et je cherche les solutions qui ont la même période. Pour cela, je poserai que chaque fonction χ est de la forme

$$\chi = \chi_1\, e^{i\alpha t}.$$

I. *Coordonnées sphériques.* — Je pose

$$\begin{aligned}
&U = U_1\, e^{i\alpha t}, &&\text{d'où} \quad \frac{\partial U}{\partial t} = i\alpha U_1\, e^{i\alpha t}, &&\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -\alpha^2 U_1\, e^{i\alpha t};\\
&V = V_1\, e^{i\alpha t}, &&\text{d'où} \quad \frac{\partial V}{\partial t} = i\alpha V_1\, e^{i\alpha t}, &&\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\alpha^2 V_1\, e^{i\alpha t};\\
&R = R_1\, e^{i\alpha t}, && &&\\
&\zeta = \zeta_1\, e^{i\alpha t} && &&
\end{aligned}$$

et les équations (7) s'écrivent en supprimant $e^{i\alpha t}$, l'indice et en posant

$$R = \alpha^2 \varphi,$$

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned}
&-\alpha U - 2 i\omega V \cos\theta = \alpha \frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\\
&-\alpha V + 2 i\omega U \cos\theta = \alpha \frac{\partial\varphi}{\sin\theta\, \partial\psi},\\
&\zeta \sin\theta = \frac{\partial . hU \sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial . hV}{\partial\psi},\\
&\alpha^2\varphi = g\zeta + \Pi'' + F(\theta, \psi)
\end{aligned}\right.$$

avec la condition au bord

$$h\mathrm{V}\,d\theta - h\mathrm{U}\sin\theta\,d\psi = 0.$$

II. *Équations sur la carte.* — On aura de même

$$(10)\qquad \begin{cases} -\alpha u - 2i\omega v\cos\theta = \alpha\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ -\alpha v + 2i\omega u\cos\theta = \alpha\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ \dfrac{\zeta}{k^2} = \dfrac{\partial.hu}{\partial x} + \dfrac{\partial.hv}{\partial y}, \\ \alpha^2\varphi = g\zeta + \Pi'' + \mathrm{F}(x, y) \end{cases}$$

avec la condition au bord

$$hv\,dx - hu\,dy = 0.$$

16. Élimination des déplacements. — I. *Sur la carte.* — Il suffit de tirer u et v des deux premières équations (10) et de porter leurs valeurs dans la troisième. On obtient ainsi

$$u = \frac{\alpha^2}{4\omega^2\cos^2\theta - \alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{2i\omega\alpha\cos\theta}{4\omega^2\cos^2\theta - \alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$
$$v = \frac{\alpha^2}{4\omega^2\cos^2\theta - \alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{2i\omega\alpha\cos\theta}{4\omega^2\cos^2\theta - \alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

La condition aux limites peut s'écrire

$$v\frac{dx}{ds} - u\frac{dy}{ds} = 0,$$

elle devient

$$\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dx}{ds} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dy}{ds}\right) + 2i\omega\cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right) = 0.$$

Soit le vecteur *ds* porté dans le sens positif, sur le bord de la mer, ses cosinus directeurs sont

$$\frac{dx}{ds},\quad \frac{dy}{ds}$$

et ceux de la *normale intérieure*

$$-\frac{dy}{ds},\quad \frac{dx}{ds},$$

de sorte que l'on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}=\frac{\partial\varphi}{\partial s},$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dx}{ds}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

et la condition aux limites prend la forme élégante

$$\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n}+2i\omega\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial s}=0.$$

Portant maintenant u et v dans l'équation de continuité, on trouve, pour les équations sur la carte,

$$(11)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\zeta}{k^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial h_2}{\partial y}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial h_2}{\partial x},\\&h_1=\frac{h\alpha^2}{4\omega^2\cos^2\theta-\alpha^2},\\&h_2=\frac{2i\omega\alpha h\cos\theta}{4\omega^2\cos^2\theta-\alpha^2},\end{aligned}\right.$$

avec la condition au bord

$$\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n}+2i\omega\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial s}=0.$$

II. *En coordonnées sphériques.*

$$\mathrm{U}=\frac{\alpha^2}{4\omega^2\cos^2\theta-\alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}-\frac{2i\alpha\omega\cos\theta}{4\omega^2\cos^2\theta-\alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\sin\theta\,\partial\psi},$$

$$\mathrm{V}=\frac{\alpha^2}{4\omega^2\cos^2\theta-\alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\sin\theta\,\partial\psi}+\frac{2i\alpha\omega\cos\theta}{4\omega^2\cos^2\theta-\alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},$$

ce qui donne les équations

$$(12)\quad\left\{\begin{aligned}&\zeta\sin\theta=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(h_1\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\psi}\left(h_1\frac{\partial\varphi}{\sin\theta\,\partial\psi}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial h_2}{\partial\psi}-\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\frac{\partial h_2}{\partial\theta},\\&h_1=\frac{h\alpha^2}{4\omega^2\cos^2\theta-\alpha^2},\\&h_2=\frac{2i\omega\alpha h\cos\theta}{4\omega^2\cos^2\theta-\alpha^2},\end{aligned}\right.$$

avec la même condition au bord

$$\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n}+2i\omega\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial s}=0.$$

Remarque. — Pour retrouver les équations données par Poincaré, il suffit de changer φ en $-\varphi$ et de poser

$$\alpha = -i\lambda,$$

ce qui transforme h_1 en $-h_1$ et conserve h_2.

17. Latitude critique. — Dans ces équations, il est à remarquer que les coefficients peuvent devenir infinis quand on a

$$4\omega^2\cos^2\theta - \alpha^2 = 0,$$
$$\cos\theta = \pm\frac{\alpha}{2\omega}.$$

Cette équation détermine ce qu'on a appelé *les latitudes critiques* et il y a une difficulté spéciale d'intégration si le bassin océanique les rencontre.

Pour les marées semi-diurnes, α égale environ 2ω, la latitude critique, si elle existe, est voisine des pôles, elle est donc peu gênante.

Pour les marées diurnes, α est voisin de ω, $\cos\theta = \pm\frac{1}{2}$, $\theta = \pm 60°$; la latitude critique est d'environ 30°.

Pour les marées à longue période, la latitude critique se rapproche de l'équateur.

Ici une question importante se pose : cette latitude critique est-elle une réalité physique, ou bien une simple apparence analytique, due aux hypothèses nombreuses qu'a nécessitées la mise en équation?

18. Comment s'introduit la latitude critique. — Je dis qu'elle s'introduit quand on suppose la mer infiniment peu profonde, et quand on néglige la variation de la force centrifuge ordinaire. Pour le démontrer, je reprends les équations (3) écrites par rapport à un système d'axes tournants, tels que Oz_1 coïncide avec la ligne des pôles

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} - 2\omega\frac{\partial y_1}{\partial t} - \omega^2 x_1 = \frac{\partial Q}{\partial x_1},$$
$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + 2\omega\frac{\partial x_1}{\partial t} - \omega^2 y_1 = \frac{\partial Q}{\partial y_1},$$
$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = \frac{\partial Q}{\partial z_1}.$$

Je pose, comme plus haut,

$$x_1 = x + u, \qquad y_1 = y + v, \qquad z_1 = z + w,$$

tout en faisant, *dans le second membre seul*, l'approximation

$$Q(x_1, y_1, z_1) = Q(x, y, z).$$

Les équations deviennent alors

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega \frac{\partial v}{\partial t} - \omega^2 u &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial u}{\partial t} - \omega^2 v &= \frac{\partial R}{\partial y}, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad\qquad\qquad &= \frac{\partial R}{\partial z},
\end{aligned}$$

à condition de poser

$$R = Q + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2);$$

d'où pour les deux premières composantes isochrones

$$\begin{aligned}
-(\alpha^2 + \omega^2)u - 2i\omega\alpha v &= \frac{\partial R}{\partial x}, \\
2i\omega\alpha u - (\alpha^2 + \omega^2) &= \frac{\partial R}{\partial y},
\end{aligned}$$

équations linéaires qui ont pour déterminant

$$\Delta = (\alpha^2 + \omega^2)^2 - 4\alpha^2\omega^2 = (\alpha^2 - \omega^2)^2,$$

il n'y a plus de latitude critique, mais un seul terme singulier, celui pour lequel

$$\alpha = \pm\omega.$$

C'est le terme du potentiel dont la période est exactement d'un jour sidéral. Mais pour ce terme les astres perturbateurs fictifs sont, pour ainsi dire, entraînés dans la rotation de la Terre, et la marée doit se calculer par la méthode statique.

Pour obtenir les équations de Laplace, on a commencé par supprimer $\omega^2 u$, $\omega^2 v$; ce qui donne les équations

$$-\alpha^2 u - 2i\omega\alpha v = \frac{\partial R}{\partial x},$$
$$2i\omega\alpha u - \alpha^2 v = \frac{\partial R}{\partial y}$$

dont le déterminant est

$$\Delta = \alpha^2(\alpha^2 - 4\omega^2).$$

On trouve ainsi le terme singulier

$$\alpha = \pm 2\omega.$$

Puis on a supposé nulle la composante du déplacement suivant le rayon vecteur, ce qui amène la latitude critique

$$\cos\theta = \pm \frac{\alpha}{2\omega}.$$

Qu'arrivera-t-il si l'on ne fait que cette dernière hypothèse; c'est-à-dire si l'on annule le déplacement W tout en gardant, dans les premiers membres des équations du mouvement, les termes qui dépendent de la force centrifuge ordinaire?

19. Forme nouvelle des équations des marées. — On a donc les équations

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega\frac{\partial v}{\partial t} - \omega^2 u &= \frac{\partial R}{\partial x},\\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2\omega\frac{\partial u}{\partial t} - \omega^2 v &= \frac{\partial R}{\partial y},\\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad\qquad\qquad &= \frac{\partial R}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Désignons, comme au n° 7, par U, V, W les composantes du déplacement sur le méridien, le parallèle, le rayon vecteur, ce qui donne les relations

$$\begin{aligned}
U &= u\cos\theta\cos\psi + v\cos\theta\sin\psi - w\sin\theta,\\
V &= -u\sin\psi + v\cos\psi,\\
W &= u\sin\theta\cos\psi + v\sin\theta\sin\psi + w\cos\theta,\\
U\cos\theta &+ W\sin\theta = u\cos\psi + v\sin\psi.
\end{aligned}$$

En combinant ces sept équations, on obtient aisément

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2\omega \cos\theta \frac{\partial V}{\partial t} - \omega^2 \cos\theta (U\cos\theta + W\sin\theta) = \frac{\partial R}{\partial \theta},\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2\omega \left(\cos\theta \frac{\partial U}{\partial t} + \sin\theta \frac{\partial W}{\partial t}\right) - \omega^2 V = \frac{\partial R}{\sin\theta\, \partial \psi},\\
&\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - 2\omega \sin\theta \frac{\partial V}{\partial t} - \omega^2 \sin\theta (U\cos\theta + W\sin\theta) = \frac{\partial R}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Si maintenant on suppose négligeable le déplacement suivant le rayon vecteur W, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2\omega \cos\theta \frac{\partial V}{\partial t} - \omega^2 U \cos^2\theta = \frac{\partial R}{\partial \theta},\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2\omega \cos\theta \frac{\partial U}{\partial t} - \omega^2 V = \frac{\partial R}{\sin\theta\, \partial \psi},
\end{aligned}$$

et, pour l'oscillation contrainte isochrone complexe de pulsation α,

$$\begin{aligned}
-(\alpha^2 + \omega^2 \cos^2\theta) U - 2i\omega\alpha V \cos\theta &= \alpha^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \theta},\\
2i\omega\alpha U \cos\theta - (\alpha^2 + \omega^2) V &= \alpha^2 \frac{\partial \varphi}{\sin\theta\, \partial \psi},
\end{aligned}$$

équations linéaires en U et V qui ont pour déterminant

$$\Delta = (\alpha^2 + \omega^2)(\alpha^2 + \omega^2 \cos^2\theta) - 4\omega^2 \alpha^2 \cos^2\theta$$

et d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}
U &= -\frac{\alpha^2(\alpha^2 + \omega^2)}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{2i\omega\alpha^3 \cos\theta}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\sin\theta\, \partial \psi},\\
V &= -\frac{\alpha^2(\alpha^2 + \omega^2 \cos^2\theta)}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\sin\theta\, \partial \psi} - \frac{2i\omega\alpha^3 \cos\theta}{\Delta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}.
\end{aligned}$$

Voyons d'abord la condition aux limites

$$U \sin\theta \frac{d\psi}{ds} - V \frac{d\theta}{ds} = 0,$$

elle devient

$$\begin{aligned}
&-(\alpha^2 + \omega^2 \cos^2\theta + \omega^2 \sin^2\theta) \sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{d\psi}{ds} + 2i\omega\alpha \cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \frac{d\psi}{ds}\\
&\quad + (\alpha^2 + \omega^2 \cos^2\theta) \frac{\partial \varphi}{\sin\theta\, \partial \psi} \frac{d\theta}{ds} + 2i\omega\alpha \cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds} = 0.
\end{aligned}$$

Or, l'on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{d\psi}{ds}+\qquad\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\frac{d\psi}{ds}=\frac{\partial\varphi}{\partial s},$$
$$-\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{d\psi}{ds}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\frac{d\theta}{ds}=\frac{\partial\varphi}{\partial n};$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{\partial\varphi}{\partial s}\frac{d\theta}{ds}-\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{d\psi}{ds}.$$

Transportant ces différentes valeurs dans la condition aux limites, on obtient sa forme nouvelle

$$\begin{aligned}(13)\qquad &\left(\alpha^2+\omega^2\cos^2\theta+\omega^2\sin^4\theta\frac{d\psi^2}{ds^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial n}\\ &+\left(2i\omega\alpha\cos\theta-\omega^2\sin^3\theta\frac{d\theta}{ds}\frac{d\psi}{ds}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial s}=0.\end{aligned}$$

Quant à l'équation de continuité

$$\zeta\sin\theta=\frac{\partial.h\mathrm{U}\sin\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial.h\mathrm{V}}{\partial\psi},$$

elle s'écrit

$$\begin{aligned}(14)\quad \zeta\sin\theta=&-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\alpha^2(\alpha^2+\omega^2)h\sin\theta}{\Delta}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right]-\frac{\partial}{\partial\psi}\left[\frac{\alpha^2(\alpha^2+\omega^2\cos^2\theta)h}{\Delta\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right]\\ &+\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{2i\omega\alpha^3\cos\theta}{\Delta}h\right)-\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{2i\omega\alpha^3\cos\theta}{\Delta}h\right).\end{aligned}$$

Nouvelles latitudes critiques. — Elles sont déterminées par l'équation

$$\begin{aligned}0=\Delta&=(\alpha^2+\omega^2)(\alpha^2+\omega^2\cos^2\theta)-4\omega^2\alpha^2\cos^2\theta\\ &=\alpha^2(\alpha^2+\omega^2)-(3\alpha^2-\omega^2)\omega^2\cos^2\theta,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\cos^2\theta=\frac{\alpha^2(\alpha^2+\omega^2)}{\omega^2(3\alpha^2-\omega^2)};$$

il n'y aura donc de latitude critique que si

$$3\alpha^2-\omega^2>0,$$

condition qui n'est réalisée que par les marées semi-diurnes ou diurnes.

Marées semi-diurnes : $\alpha = 2\omega$,

$$\cos^2\theta = \frac{20}{11}.$$

Donc pas de latitude critique.

Marées diurnes : $\alpha = \omega$,

$$\cos^2\theta = 1.$$

Les seuls points critiques sont les pôles, où il n'y a pas de mer libre.

Conclusion. — La nouvelle équation supprime la difficulté de la latitude critique; mais sa forme analytique est un peu plus compliquée que celle de Laplace.

CHAPITRE II.

LES MARÉES STATIQUES DE LA PREMIÈRE SORTE ET L'ÉQUATION DE FREDHOLM.

20. Définition et équations du problème. — Les marées à longue période sont produites par les termes du potentiel perturbateur $P - P_0$, qui ne dépendent ni de la rotation de la Terre, ni de la longitude de la molécule liquide, à savoir

$$\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \sum \frac{\mu}{\rho^3} \frac{3\cos^2\mathfrak{P} - 1}{2}.$$

Dans cette formule, θ désigne la colatitude de la molécule, μ la masse de l'astre perturbateur, ρ sa distance géocentrique et $\mathfrak{P}$ sa distance polaire.

Le facteur de $\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$ est une fonction du temps, que la Mécanique céleste apprend à calculer; on peut le décomposer en une somme de termes périodiques sous la forme

$$C = \sum \frac{\mu}{\rho^3} \frac{3\cos^2\mathfrak{P} - 1}{2} = \sum (A\cos\alpha t + B\sin\alpha t).$$

Les pulsations α étant de petits nombres comparés à ω.

Autrefois on calculait ces marées par la méthode statique. M. Hough a montré que le problème est plus complexe et qu'il faut distinguer deux sortes de marées statiques :

Les marées statiques de la première sorte qui se calculent par la théorie de l'équilibre;

Les marées statiques de la seconde sorte, qui sont la limite pour $\alpha = 0$ des marées dynamiques.

Il ne s'agira ici que des premières.

Dans les oscillations à longue période, les mouvements de la mer sont très lents. Dès lors, l'inertie de la molécule et la force centrifuge composée ne joueront qu'un faible rôle, et la surface de la mer à chaque instant prendra sensiblement sa figure d'équilibre sous l'action de l'astre et de la pesanteur.

Reprenons les équations (7) appliquées aux seules marées à longue période:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - 2\omega\cos\theta\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2\omega\cos\theta\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial R}{\sin\theta\, \partial\psi},$$

$$R = g\zeta + \Pi'' + C\frac{3\cos^2\theta - 1}{2},$$

$$\Pi'' = \int\int_M \frac{-\zeta'\, d\sigma'}{r};$$

l'intégrale double est étendue à toute la surface des mers, et C désigne la fonction du temps définie ci-dessus

$$C(t) = \sum \frac{\mu}{\rho^3}\frac{3\cos^2\mathfrak{L} - 1}{2}.$$

Dans les deux équations du mouvement, négligeons la force d'inertie $-\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, $-\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$ et la force centrifuge composée $+2\omega\cos\theta\frac{\partial V}{\partial t}$, $-2\omega\cos\theta\frac{\partial U}{\partial t}$, il reste tout simplement

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial \psi} = 0;$$

autrement dit,

$$R = k(t),$$

la quantité k pouvant dépendre du temps t, mais étant indépendante de θ et de ψ.

De sorte que l'équation des marées statiques s'écrit

$$g\zeta - \iint_M \frac{\zeta' d\sigma'}{r} + C\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} = k.$$

Supposons cette équation résolue par rapport à ζ *qui représente la dénivellation;* pour déterminer k il suffit de remarquer que le volume des mers reste constant, autrement dit que l'on a

$$\iint_M \zeta d\sigma = 0.$$

La constante g représente l'intensité de la pesanteur à la surface de la Terre. Soit D la densité moyenne de celle-ci. Dans le système d'unités choisi, le volume de la Terre est $\frac{4\pi}{3}$, sa masse $\frac{4\pi D}{3}$, et son attraction à la surface $\frac{4\pi D}{3}$, par conséquent

$$g = \frac{4\pi D}{3}.$$

Comme D égale environ 5,5, on a sensiblement pour g

$$g = 23.$$

Enfin, sur les continents, la dénivellation ζ est évidemment nulle :

$$\zeta = 0.$$

En résumé, on a pour les marées statiques de la première sorte les équations suivantes :

$$(15)\quad \left\{\begin{array}{ll} \text{Sur les mers,} & g\zeta(\theta,\psi) - \displaystyle\iint_M \frac{\zeta(\theta',\psi')\sin\theta'\, d\theta'\, d\psi'}{r(\theta,\psi;\theta',\psi')} + C\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} = k; \\ \text{Sur les continents,} & \zeta = 0. \end{array}\right.$$

Avec la condition qui détermine k,

$$\iint_M \zeta\, d\sigma = 0.$$

21. Équation intégrale des marées statiques. — La première équation (15) est une équation intégrale en ζ, mais elle n'a pas la forme clas-

sique, car l'intégrale double qu'elle contient est étendue à la seule surface des mers, c'est-à-dire à un domaine assez compliqué. Il est aisé, cependant, de transformer cette équation, et d'y faire entrer *une intégrale étendue à toute la surface de la Terre.*

Je pose d'abord

$$\frac{k}{g} - \frac{C}{g} \cdot \frac{3\cos^2\theta - 1}{2} = \chi(\theta).$$

Les équations du problème deviennent :

$$\zeta = \frac{1}{g} \iint_M \frac{\zeta' \, d\sigma'}{r} + \chi \qquad \text{sur les mers,}$$

$$\zeta = 0 \qquad \text{sur les continents.}$$

J'introduis la *fonction discontinue* $\varepsilon(\theta, \psi)$ définie de la façon suivante :

Sur les mers, $\varepsilon(\theta, \psi) = 1$,
Sur les continents, $\varepsilon(\theta, \psi) = 0$.

Cela étant, les deux équations précédentes se résument en une seule :

$$\zeta(\theta, \psi) = \frac{\varepsilon(\theta, \psi)}{g} \iint_M \frac{\zeta(\theta', \psi') \, d\sigma'}{r(\theta, \psi; \theta', \psi')} + \varepsilon(\theta, \psi)\chi(\theta).$$

Et comme on a visiblement

$$\iint_M \frac{\zeta(\theta', \psi') \, d\sigma'}{r(\theta, \psi; \theta', \psi')} = \iint \frac{\varepsilon(\theta', \psi')\zeta(\theta', \psi') \, d\sigma'}{r(\theta, \psi; \theta', \psi')},$$

l'intégrale sans indice étant étendue à toute la surface de la Terre, on obtient d'emblée l'équation de Fredholm remarquablement simple

$$(16) \qquad \zeta(\theta, \psi) = \frac{1}{g} \iint \frac{\varepsilon(\theta, \psi)\varepsilon(\theta', \psi')\zeta(\theta', \psi') \, d\sigma'}{r(\theta, \psi; \theta', \psi')} + \varepsilon(\theta, \psi)\chi(\theta).$$

22. L'ÉQUATION INTÉGRALE EN λ. — Je pose $\frac{1}{g} = \lambda$, et je considère λ comme un paramètre variable, d'où l'équation

$$\zeta(\theta, \psi) = \lambda \iint \frac{\varepsilon(\theta, \psi)\varepsilon(\theta', \psi')\zeta(\theta', \psi') \, d\sigma'}{r(\theta, \psi; \theta', \psi')} + \varepsilon(\theta, \psi)\chi(\theta).$$

Le noyau de l'équation, à savoir

$$\frac{\varepsilon(\theta, \psi)\,\varepsilon(\theta', \psi')}{r(\theta, \psi; \theta', \psi')},$$

devient infini du premier ordre quand les deux points θ, ψ et θ', ψ' viennent à se confondre; mais l'intégrale étant double, le noyau triplé reste fini, et la méthode de Fredholm est applicable.

Soit donc $K(\theta, \psi; \theta', \psi'; \lambda)$ la résolvante relative à ce noyau; c'est une fonction méromorphe de λ, qui donne la solution du problème par la formule

$$(17) \quad \zeta(\theta, \psi) = \varepsilon(\theta, \psi)\chi(\theta) + \lambda \int\int K(\theta, \psi; \theta', \psi'; \lambda)\,\varepsilon(\theta', \psi')\chi(\theta')\,d\sigma'.$$

Dans le cas des marées statiques, $\lambda = \frac{1}{g}$; donc tout revient à savoir si, oui ou non, $\frac{1}{g}$ est un pôle de la résolvante, ou encore un pôle de la fonction méromorphe de λ, $\zeta(\theta, \psi; \lambda)$, définie par l'expression précédente.

En vertu des théorèmes généraux, puisque le noyau est symétrique, *les pôles de la résolvante sont réels, simples, et il y en a au moins un.*

Pour obtenir encore plus de précision, il est commode de considérer Π'' et de faire appel aux propriétés des potentiels.

23. Le potentiel du bourrelet $\Pi(\rho, \theta, \psi)$. — $\zeta(\theta, \psi; \lambda)$ étant la fonction définie par l'équation de Fredholm qui précède, j'appelle $\Pi(\rho, \theta, \psi)$ le potentiel en un point quelconque du bourrelet liquide produit par la dénivellation ζ

$$\Pi(\rho, \theta, \psi) = -\int\int \frac{\zeta(\theta', \psi')\,d\sigma'}{r(\rho, \theta, \psi; \theta', \psi')}.$$

Je puis dire aussi que l'on a

$$\Pi(\rho, \theta, \psi) = -\int\int_{M} \frac{\zeta(\theta', \psi')\,d\sigma'}{r(\rho, \theta, \psi; \theta', \psi')},$$

ζ étant définie par l'équation de Fredholm

$$\xi(\theta, \psi) = \lambda \int\int_{M} \frac{\zeta(\theta', \psi')\,d\sigma'}{r(\theta, \psi; \theta', \psi')} + \chi(\theta).$$

Π *est donc le potentiel d'une simple couche dont la densité, continue habituellement, fait peut-être un saut brusque fini au bord de la mer.*

Considérée comme fonction de λ, Π est une fonction méromorphe qui a les mêmes pôles que ζ et que K.

Considérée comme fonction de ρ, θ, ψ, Π est une fonction harmonique à l'intérieur de la Terre, et à la surface d'après un théorème bien connu, on a

$$2\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \Pi = -4\pi\zeta.$$

Or, sur les mers (*voir* n° 21),

$$\zeta = -\lambda\Pi + \chi;$$

Sur les continents,

$$\zeta = 0;$$

Partout,

$$\zeta = \varepsilon(-\lambda\Pi + \chi).$$

La fonction harmonique Π est donc définie par les deux équations suivantes :

$$(18)\quad \begin{cases} \text{A l'intérieur de la Terre,} & \Delta\Pi = 0; \\ \text{Sur la surface,} & 2\dfrac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \Pi = 4\pi\varepsilon(\lambda\Pi - \chi). \end{cases}$$

Remarque importante. — Dans la suite on aura à considérer des potentiels Π_i, Π_j, potentiels de simple couche dont la densité, continue habituellement, fait peut-être un saut brusque fini au bord de la mer. Ce saut brusque n'occasionnera aucune difficulté, car on peut appliquer aux potentiels Π_i, Π_j les formules fondamentales de Green

$$\int\int\left(\Pi_i\frac{\partial \Pi_j}{\partial n} - \Pi_j\frac{\partial \Pi_i}{\partial n}\right)d\sigma = 0,$$

$$\int\int \Pi_i\frac{\partial \Pi_i}{\partial n}\,d\sigma + \int\int\int\left[\left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi_i}{\partial z}\right)^2\right]d\tau = 0.$$

Dans ces formules, dn représente un élément de normale intérieure et les intégrales sans indice sont étendues à toute la surface, ou à tout le volume de la Terre.

24. LES PÔLES DE $\zeta(\lambda)$ NE SONT PAS NÉGATIFS ET LE PREMIER EST AU MOINS

ÉGAL A $\frac{1}{4\pi}$. — Soit λ_0 un pôle de $\zeta(\lambda)$; on sait d'après la théorie générale que dans les équations intégrales précédentes on peut faire $\chi = 0$, et qu'il existe une fonction ζ_0 qui satisfait à l'équation

$$\zeta_0(\theta, \psi) = \lambda_0 \int\int \frac{\varepsilon(\theta, \psi)\varepsilon(\theta', \psi')\zeta_0(\theta', \psi')\,d\sigma'}{r(\theta, \psi; \theta', \psi')}.$$

Par suite le potentiel Π_0 du bourrelet formé par la dénivellation ζ_0 satisfait sur la surface à la condition

$$2\frac{\partial \Pi_0}{\partial \rho} + \Pi_0 = 4\pi\varepsilon\lambda_0\Pi_0,$$

ou encore

$$2\frac{\partial \Pi_0}{\partial \rho} = \Pi_0(4\pi\varepsilon\lambda_0 - 1).$$

Je multiplie par $\Pi_0\,d\sigma$ et j'intègre sur toute la surface

$$2\int\int \Pi_0 \frac{\partial \Pi_0}{\partial \rho}\,d\sigma = \int\int \Pi_0^2(4\pi\varepsilon\lambda_0 - 1)\,d\sigma.$$

Or

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \rho} = -\frac{\partial \Pi_0}{\partial n},$$

et l'une des formules de Green donne

$$\int\int \Pi_0 \frac{\partial \Pi_0}{\partial \rho}\,d\sigma = \int\int\int \left[\left(\frac{\partial \Pi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi_0}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz,$$

c'est-à-dire

$$\int\int \Pi_0^2\,(4\pi\varepsilon\lambda_0 - 1)\,d\sigma \geqq 0.$$

Cette inégalité est manifestement impossible si λ_0 *est négatif.* On peut l'écrire

$$4\pi\lambda_0 \int\int_M \Pi_0^2\,d\sigma \geqq \int\int \Pi_0^2\,d\sigma.$$

Ou encore en mettant en évidence la surface des mers (M) et la surface des continents (T)

$$4\pi\lambda_0 \int\int_M \Pi_0^2\, d\sigma \geqq \int\int_M \Pi_0^2\, d\sigma + \int\int_T \Pi_0^2\, d\sigma,$$

$$4\pi\lambda_0 \geqq 1 + \frac{\int\int_T \Pi_0^2\, d\sigma}{\int\int_M \Pi_0^2\, d\sigma}.$$

On a donc bien

$$4\pi\lambda_0 \geqq 1,$$

$$\lambda_0 \geqq \frac{1}{4\pi}.$$

Le premier pôle, s'il existe, est positif et au moins égal à $\frac{1}{4\pi}$.

Cas particulier. — Les mers recouvrent tout le globe. Il est bien connu qu'alors les solutions du problème sont les fonctions sphériques dont la première est une constante h

$$h = \lambda_0 \int\int \frac{h\, d\sigma}{r} = 4\pi\lambda_0 h,$$

et l'on a exactement

$$\lambda_0 = \frac{1}{4\pi}.$$

25. Calcul du premier pôle de $\zeta(\lambda)$. — C'est aussi le premier pôle de $\Pi(\lambda)$. Son calcul se fait à l'aide des *constantes de Schwarz*.

La fonction $\Pi(\lambda)$ étant méromorphe en λ et son premier pôle étant au moins égal à $\frac{1}{4\pi}$, on a au voisinage de $\lambda = 0$

$$\Pi = \Pi_0 + \lambda \Pi_1 + \lambda^2 \Pi_2 + \lambda^3 \Pi_3 + \ldots + \lambda^n \Pi_n + \ldots.$$

Comme la fonction Π est harmonique et déterminée par la condition à la surface

$$2\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \Pi = 4\pi\varepsilon\lambda\Pi - 4\pi\varepsilon\chi,$$

toutes les fonctions Π_0, Π_1, Π_2, ... sont également harmoniques, et déterminées par les conditions à la surface suivantes, obtenues en égalant les coefficients des mêmes puissances de λ :

$$2\frac{\partial \Pi_0}{\partial \rho} + \Pi_0 = -4\pi\varepsilon\chi,$$

$$2\frac{\partial \Pi_1}{\partial \rho} + \Pi_1 = 4\pi\varepsilon\Pi_0,$$

$$2\frac{\partial \Pi_2}{\partial \rho} + \Pi_2 = 4\pi\varepsilon\Pi_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\frac{\partial \Pi_n}{\partial \rho} + \Pi_n = 4\pi\varepsilon\Pi_{n-1}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Envisageons maintenant les constantes suivantes appelées constantes de Schwarz :

$$W_{p,q} = \int\int \varepsilon \Pi_p \Pi_q \, d\sigma.$$

D'après une formule de Green on a

$$2\int\int\left(\Pi_p \frac{\partial \Pi_q}{\partial \rho} - \Pi_q \frac{\partial \Pi_p}{\partial \rho}\right) d\sigma = 0.$$

Or

$$2\frac{\partial \Pi_q}{\partial \rho} = -\Pi_q + 4\pi\varepsilon\Pi_{q-1},$$

$$2\frac{\partial \Pi_p}{\partial \rho} = -\Pi_p + 4\pi\varepsilon\Pi_{p-1}.$$

Si l'on transporte ces valeurs dans l'intégrale précédente, on trouve

$$\int\int \varepsilon(\Pi_p \Pi_{q-1} - \Pi_q \Pi_{p-1})\, d\sigma = 0;$$

autrement dit,

$$W_{p,q-1} = W_{p-1,\, q},$$

ce qui, en changeant q en $q+1$, conduit à la formule de récurrence

$$W_{p,q} = W_{p-1,q+1},$$

laquelle, appliquée successivement, donne

$$W_{p,q} = W_{p-1,q+1} = W_{p-2,q+2} = \ldots = W_{0,p+q},$$

la constante W ne dépend que de la somme de ses indices.

Cela étant, considérons W_n.

Si n est pair, $n = 2p$,

$$W_n = W_{2p} = W_{p,p} = \int\int \varepsilon \Pi_p^2 \, d\sigma > 0.$$

Si n est impair, $n = 2p - 1$,

$$W_n = W_{2p-1} = W_{p,p-1} = \int\int \varepsilon \Pi_p \Pi_{p-1} \, d\sigma.$$

Or

$$\varepsilon \Pi_{p-1} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Pi_p}{\partial \rho} + \frac{1}{4\pi} \Pi_p,$$

et par conséquent

$$W_n = \frac{1}{2\pi} \int\int \Pi_p \frac{\partial \Pi_p}{\partial \rho} \, d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int\int \Pi_p^2 \, d\sigma.$$

Les deux intégrales du second membre sont essentiellement positives

$$W_n > 0.$$

Donc les constantes de Schwarz sont des nombres tous positifs.

Par ailleurs, on a, quels que soient α, β,

$$\int\int \varepsilon (\alpha \Pi_n + \beta \Pi_{n+1})^2 \, d\sigma > 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha^2 W_{2n} + 2\alpha\beta W_{2n+1} + \beta^2 W_{2n+2} > 0.$$

Envisageons maintenant

$$\int\int \varepsilon (\alpha \Pi_n + \beta \Pi_{n+1})(\alpha \Pi_{n-1} + \beta \Pi_n) \, d\sigma;$$

autrement dit,

$$\alpha^2 W_{2n-1} + 2\alpha\beta W_{2n} + \beta^2 W_{2n+1}.$$

Comme l'on a

$$\varepsilon \Pi_{n-1} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Pi_n}{\partial \rho} + \frac{1}{4\pi} \Pi_n,$$

$$\varepsilon \Pi_n = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Pi_{n+1}}{\partial \rho} + \frac{1}{4\pi} \Pi_{n+1},$$

l'intégrale double peut s'écrire

$$\frac{1}{4\pi} \int\int (\alpha \Pi_n + \beta \Pi_{n+1}) \left(2\alpha \frac{\partial \Pi_n}{\partial \rho} + 2\beta \frac{\partial \Pi_{n+1}}{\partial \rho} + \alpha \Pi_n + \beta \Pi_{n+1} \right) d\sigma,$$

où encore

$$\frac{1}{2\pi}\iint(\alpha\Pi_n+\beta\Pi_{n+1})\frac{\partial}{\partial\rho}(\alpha\Pi_n+\beta\Pi_{n+1})\,d\sigma+\frac{1}{4\pi}\iint(\alpha\Pi_n+\beta\Pi_{n+1})^2\,d\sigma,$$

ces deux intégrales sont positives.

Il s'ensuit que les deux formes quadratiques

$$\alpha^2 W_{2n-1}+2\alpha\beta W_{2n}+\beta^2 W_{2n+1},$$
$$\alpha^2 W_{2n}+2\alpha\beta W_{2n+1}+\beta^2 W_{2n+2}$$

sont définies positives, ce qui entraîne

$$W_{2n}^2-W_{2n-1}W_{2n+1}<0,\qquad W_{2n+1}^2-W_{2n}W_{2n+2}<0,$$

inégalités qui peuvent s'écrire

$$\frac{W_{2n}}{W_{2n-1}}<\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}}<\frac{W_{2n+2}}{W_{2n+1}}<\ldots.$$

Revenons maintenant à la série entière qui représente le potentiel Π au voisinage de $\lambda=0$:

$$\Pi=\Pi_0+\lambda\Pi_1+\lambda^2\Pi_2+\lambda^3\Pi_3+\ldots+\lambda^n\Pi_n+\ldots.$$

Multiplions les deux membres par $\varepsilon\Pi_0\,d\sigma$ et intégrons sur toute la sphère

$$\iint\varepsilon\Pi\Pi_0\,d\sigma=\iint\varepsilon\Pi_0^2\,d\sigma+\lambda\iint\varepsilon\Pi_0\Pi_1\,d\sigma$$
$$+\lambda^2\iint\varepsilon\Pi_0\Pi_2\,d\sigma+\ldots+\lambda^n\iint\varepsilon\Pi_0\Pi_n\,d\sigma+\ldots,$$

c'est-à-dire en désignant le premier membre par $W(\lambda)$

$$W(\lambda)=W_0+\lambda W_1+\lambda^2W_2+\lambda^3W_3+\ldots+\lambda^nW_n+\ldots.$$

Dans la série W envisageons le rapport $\frac{W_{2n}}{W_{2n-1}}$. On a

$$\frac{W_{2n}}{W_{2n-1}}=\frac{\iint\varepsilon\Pi_n^2\,d\sigma}{\iint\varepsilon\Pi_n\Pi_{n-1}\,d\sigma}=\frac{\iint\varepsilon\Pi_n^2\,d\sigma}{\frac{1}{4\pi}\iint\Pi_n^2\,d\sigma+\frac{1}{2\pi}\iint\Pi_n\frac{\partial\Pi_n}{\partial\rho}\,d\sigma}$$

et, puisque $\int\int \Pi_n \frac{\partial \Pi_n}{\partial \rho} d\sigma$ n'est pas négatif,

$$\frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} \leqq 4\pi \frac{\int\int \varepsilon \Pi_n^2 \, d\sigma}{\int\int \Pi_n^2 \, d\sigma}.$$

Dans ce dernier rapport le dénominateur est au moins égal au numérateur, donc

$$\frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} \leqq 4\pi.$$

Si donc dans la suite

$$W_0, \; W_1, \; W_2, \; \ldots, \; W_n, \; \ldots,$$

on envisage le rapport d'un terme au précédent $\frac{W_n}{W_{n-1}}$, ce rapport va constamment en croissant, de façon toutefois que $\frac{W_{2n}}{W_{2n-1}}$ soit toujours au plus égal à 4π; ce rapport a donc une limite finie non nulle $\frac{1}{\lambda_1}$,

$$0 < \lim \frac{W_n}{W_{n-1}} = \frac{1}{\lambda_1} \leqq 4\pi.$$

Dès lors, le rayon de convergence de la série $W(\lambda)$ est λ_1, avec

$$\lambda_1 = \lim_{n=\infty} \frac{W_{n-1}}{W_n} \geqq \frac{1}{4\pi}.$$

Je dis que c'est aussi le rayon de convergence de $\Pi(\lambda)$. Pour le démontrer, on peut se servir de l'inégalité de Schwarz.

Inégalité de Schwarz. — Soient $A(\theta, \psi)$, $B(\theta, \psi)$ deux fonctions intégrables et à carrés intégrables ; on a l'inégalité

$$\left[\int\int A(\theta, \psi) \, B(\theta, \psi) \, d\sigma\right]^2 \leqq \int\int A^2(\theta, \psi) \, d\sigma \times \int\int B^2(\theta, \psi) \, d\sigma.$$

D'autre part, on a entre Π_n et Π_{n-1} la relation

$$2 \frac{\partial \Pi_n}{\partial \rho} + \Pi_n = 4\pi\varepsilon \Pi_{n-1}$$

à la surface, c'est-à-dire

$$\mathrm{II}_n(\rho, \theta, \psi) = \iint \frac{\varepsilon(\theta', \psi')\,\mathrm{II}_{n-1}(\theta', \psi')}{r(\rho, \theta, \psi; \theta', \psi')}\, d\sigma';$$

le facteur de II_{n-1} n'a pas son carré intégrable; pour appliquer l'inégalité de Schwarz, il faut faire une itération. Tout d'abord le potentiel de simple couche étant continu sur la surface, on a

$$\mathrm{II}_n(\theta, \psi) = \iint \frac{\varepsilon(\theta', \psi')\,\mathrm{II}_{n-1}(\theta', \psi')}{r(\theta, \psi; \theta', \psi')}\, d\sigma'$$

et de même

$$\mathrm{II}_{n-1}(\theta', \psi') = \iint \frac{\varepsilon(\theta'', \psi'')\,\mathrm{II}_{n-2}(\theta'', \psi'')}{r(\theta', \psi'; \theta'', \psi'')}\, d\sigma''$$

et par conséquent

$$\mathrm{II}_n(\rho, \theta, \psi) = \iint \frac{\varepsilon(\theta', \psi')\, d\sigma'}{r(\rho, \theta, \psi; \theta', \psi')} \iint \frac{\varepsilon(\theta'', \psi'')\,\mathrm{II}_{n-2}(\theta'', \psi'')}{r(\theta', \psi'; \theta'', \psi'')}\, d\sigma''$$

ou encore, en intervertissant l'ordre des intégrations,

$$\mathrm{II}_n(\rho, \theta, \psi) = \iint \varepsilon(\theta'', \psi'')\,\mathrm{II}_{n-2}(\theta'', \psi'')\, d\sigma'' \iint \frac{\varepsilon(\theta', \psi')\, d\sigma'}{r(\theta', \psi'; \theta'', \psi'')\cdot r(\rho, \theta, \psi; \theta', \psi')}.$$

Quand les points ρ, θ, ψ; θ', ψ'; θ'', ψ'' se confondent en un seul, la seconde intégrale I ne devient au plus que logarithmiquement infinie [1]; on peut par suite appliquer l'inégalité de Schwarz qui donne

$$\mathrm{II}_n^2(\rho, \theta, \psi) \leq \iint \varepsilon^2(\theta'', \psi'')\,\mathrm{II}_{n-2}^2(\theta'', \psi'')\, d\sigma'' \iint \mathrm{I}^2\, d\sigma.$$

Or, d'après la définition même de ε,

$$\varepsilon^2(\theta'', \psi'') = \varepsilon(\theta'', \psi'').$$

Donc

$$\iint \varepsilon^2(\theta'', \psi'')\,\mathrm{II}_{n-2}^2(\theta'', \psi'')\, d\sigma'' = \iint \varepsilon(\theta'', \psi'')\,\mathrm{II}_{n-2}^2(\theta'', \psi'')\, d\sigma'' = \mathrm{W}_{2n-4}.$$

---

(1) *Voir*, par exemple, HEYWOOD et FRÉCHET, *L'équation de Fredholm*, p. 141. Note de M. HADAMARD.

Posons de plus

$$\iint I^2\, d\sigma = K^2,$$

il vient

$$\Pi_n^2 \leqq K^2 W_{2n-4},$$
$$|\Pi_n(\rho, \theta, \psi)| < K\sqrt{W_{2n-4}},$$
$$|\lambda^n \Pi_n(\rho, \theta, \psi)| < K|\lambda^n|\sqrt{W_{2n-4}}.$$

Autrement dit, la série $\Pi(\rho, \theta, \psi; \lambda)$ converge uniformément, si la série $\lambda^n\sqrt{W_{2n-4}}$ converge, ce qui a lieu dans le cercle de rayon λ_1.

Inversement, si la série $\Pi(\rho, \theta, \psi; \lambda)$ convergeait uniformément dans un cercle de rayon plus grand, il en serait de même de $\varepsilon\Pi_0(\theta, \psi)\,\Pi(\theta, \psi; \lambda)$ et de $\iint \varepsilon\Pi_0\Pi\, d\sigma = W(\lambda)$, ce qui est contre l'hypothèse.

Le rayon de convergence, c'est-à-dire le premier pôle de $\Pi(\lambda)$, *est donc*

$$\lambda_1 = \lim_{n=\infty} \frac{W_{n-1}}{W_n} \geqq \frac{1}{4\pi}.$$

26. Calcul du second pôle de $\zeta(\lambda)$. Existence d'une infinité de pôles. — D'après la théorie générale, on sait, et il serait facile de démontrer directement, que le pôle précédent λ_1 est simple et qu'il n'y a que lui seul sur le cercle de convergence. On peut donc écrire

$$\Pi = \frac{\Pi'}{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_1}} + v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \lambda^3 v_3 + \ldots + \lambda^n v_n + \ldots,$$

le rayon de convergence de la série en λ étant supérieur à λ_1.

Si l'on développe la fraction en série entière, et si l'on identifie les deux séries qui représentent Π, on obtient

$$\frac{\Pi'}{\lambda_1^n} + v_n = \Pi_n$$

ou encore

$$\Pi' = \lambda_1^n \Pi_n - \lambda_1^n v_n.$$

Quand n tend vers l'infini, $\lambda_1^n v_n$ tend vers zéro, puisque la série $\lambda^n v_n$ converge dans un cercle de rayon supérieur à λ_1; ce qui donne la valeur du résidu

$$\Pi' = \lim_{n=\infty} \lambda_1^n \Pi_n.$$

Maintenant, la fonction Π étant harmonique et étant définie par la condition à la surface

$$2\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} + \Pi = 4\pi\varepsilon\lambda\Pi - 4\pi\varepsilon\chi\, 4\pi\chi\varphi,$$

toutes les fonctions Π', v_0, v_1, v_2, $\ldots$, v_n, $\ldots$ sont aussi harmoniques et elles sont définies par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned}
2\frac{\partial \Pi'}{\partial \rho} + \Pi' &= 4\pi\varepsilon\lambda_1\Pi',\\
2\frac{\partial v_0}{\partial \rho} + v_0 &= -4\pi\varepsilon\chi\, 4\pi\chi\varphi - 4\pi\varepsilon\lambda_1\Pi',\\
2\frac{\partial v_1}{\partial \rho} + v_1 &= 4\pi\varepsilon v_0,\\
2\frac{\partial v_2}{\partial \rho} + v_2 &= 4\pi\varepsilon v_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
2\frac{\partial v_n}{\partial \rho} + v_n &= 4\pi\varepsilon v_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

d'où l'on voit que les v_n sont définis par récurrence exactement comme les Π_n.

On a donc de nouvelles constantes de Schwarz W'_n essentiellement positives et répondant aux inégalités

$$\frac{W'_1}{W'_0} < \frac{W'_2}{W'_1} < \ldots < \frac{W'_n}{W'_{n-1}} < \ldots$$

et l'on en conclut que $\frac{W'_n}{W'_{n-1}}$ a une limite $\frac{1}{\lambda_2}$ nécessairement finie, sans quoi la série

$$v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 v_2 + \ldots + \lambda^n v_n + \ldots$$

ne convergerait que pour $\lambda = 0$, ce qui n'a pas lieu puisqu'elle converge certainement au delà de λ_1.

On peut aussi établir que

$$|v_n(\rho, \theta, \psi)| < K'\sqrt{W'_{2n-4}}$$

et enfin que les deux séries

$$\varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \ldots + \lambda^n\varphi_n + \ldots,$$
$$W'_0 + \lambda W'_1 + \lambda^2 W'_2 + \ldots + \lambda^n W'_n + \ldots$$

ont le même cercle de convergence.

On arrive ainsi au second pôle $\lambda_2 > \lambda_1$, et ainsi de suite aux pôles en nombre infini $\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n, \ldots$.

CONCLUSION. — *La résolvante de l'équation intégrale des marées statiques a une infinité de pôles simples, tous positifs dont le premier est au moins égal à $\frac{1}{4\pi}$; et cela quelle que soit la forme des continents.*

27. CAS PARTICULIER DES FONCTIONS SPHÉRIQUES. — *Si les mers recouvraient tout le globe*, la solution complète du problème serait fournie par les fonctions sphériques. C'est là un résultat bien connu qui confirme l'analyse précédente. On peut se reporter, par exemple, au *Cours d'Analyse mathématique* de M. Goursat (t. III, p. 532).

$Y_n(\theta, \psi)$ étant une fonction sphérique d'ordre n, on a

$$Y_n(\theta, \psi) = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{r}Y_n(\theta', \psi')\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi';$$

les pôles de la fonction méromorphe sont alors

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{4\pi} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, +\infty),$$

et à chaque pôle λ_n correspondent $2n+1$ solutions linéairement indépendantes qui sont les $2n+1$ fonctions de Laplace d'ordre n.

Il est alors aisé d'intégrer l'équation des marées statiques, à savoir

$$g\zeta - \int\int\frac{\zeta'\,d\sigma'}{r} + C\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} = k;$$

les termes connus k et $+C\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$ sont à des facteurs près une fonction de Laplace Y_0 et une fonction Y_2. Posons donc

$$\zeta = a_0 Y_0 + a_2 Y_2 = a_0 + a_2\frac{3\cos^2\theta - 1}{2};$$

l'équation devient

$$g a_0 - 4\pi a_0 - k + \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\left(g a_2 - \frac{4\pi a_2}{5} + C\right) = 0.$$

d'où l'on tire

$$a_0 = \frac{k}{g - 4\pi}, \qquad a_2 = \frac{C}{\frac{4\pi}{5} - g},$$

$$\zeta = \frac{k}{g - 4\pi} + \frac{C}{\frac{4\pi}{5} - g}\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}.$$

Pour déterminer k, écrivons que le volume des mers reste constant

$$\iint \zeta\, d\sigma = 0;$$

on a d'abord

$$\iint \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\, d\sigma = 0$$

puisque les fonctions sphériques forment un système orthogonal, et il reste tout simplement

$$0 = \frac{4\pi k}{g - 4\pi}, \qquad k = 0.$$

La dénivellation ζ de la marée statique d'une mer recouvrant tout le globe est par conséquent donnée par la formule

$$\zeta = \frac{1}{\frac{4\pi}{5} - g}\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\sum \frac{\mu}{\rho^3}\,\frac{3\cos^2\Psi - 1}{2},$$

ou encore, en nous souvenant que D étant la densité moyenne de la Terre (D = 5,5), on a

$$g = \frac{4\pi D}{3},$$

$$\zeta = \frac{1}{\frac{4\pi}{5} - \frac{4\pi D}{3}}\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\sum \frac{\mu}{\rho^3}\,\frac{3\cos^2\Psi - 1}{2}.$$

28. Solution du cas général. — *Quelle que soit la forme des continents,* le premier pôle de la résolvante est au moins égal à $\frac{1}{4\pi}$ ou $\frac{1}{13}$, et dans

le cas de la nature $g = 23$ environ, $\frac{1}{g} = \frac{1}{23}$, il s'ensuit que $\frac{1}{g}$ n'est certainement pas un pôle de la résolvante et par suite l'équation intégrale du problème a toujours une solution.

Soit $K(\theta, \psi; \theta', \psi'; \lambda)$ la résolvante relative au noyau $\frac{1}{r(\theta, \psi; \theta', \psi')}$ et au bassin océanique, l'équation des marées statiques

$$\zeta(\theta, \psi) = \frac{1}{g} \int\int_M \frac{\zeta(\theta', \psi')\, d\sigma'}{r(\theta, \psi; \theta', \psi')} + \frac{k}{g} - \frac{C}{g} \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$$

peut s'inverser et donne

$$\begin{aligned}\zeta(\theta, \psi) = {} & \frac{k}{g} - \frac{C}{g} \frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \\ & + \frac{1}{g^2} \int\int K\left(\theta, \psi; \theta', \psi'; \frac{1}{g}\right)\left(k - C\frac{3\cos^2\theta' - 1}{2}\right) d\sigma';\end{aligned}$$

une fois ζ calculé, on déterminera k par la condition

$$\int\int \zeta\, d\sigma = 0.$$

Remarque. — Dans le cas de la Terre actuelle, $\frac{1}{g}$ est nettement inférieur à $\frac{1}{4\pi}$; mais puisque $\frac{1}{g} = \frac{3}{4\pi D}$, on peut imaginer dans une planète une densité moyenne et une distribution des continents, telles que $\frac{1}{g}$ et le premier pôle de la résolvante soient extrêmement voisins. L'intumescence formée par les eaux de la mer tendrait alors à devenir énorme, tout au moins si l'on suppose que les équations précédentes restent applicables.

29. Application aux marées dynamiques. — L'équation à la surface des marées dynamiques est, comme on l'a vu au n° 15,

$$\alpha^2\varphi = g\zeta + \Pi'' + F(\theta, \psi);$$

il faut ici distinguer deux cas :

I. Le bassin océanique comprend l'ensemble de toutes les mers du globe (M), alors

$$\Pi'' = -\int\int_{M} \frac{\zeta'}{r}\,d\sigma'$$

et l'équation s'écrit

$$\alpha^2\varphi = g\zeta - \int\int_{M} \frac{\zeta'}{r}\,d\sigma' + F(\theta, \psi).$$

II. Le bassin océanique considéré $(\mathfrak{D})$ ne forme qu'une partie des mers, on a toujours

$$\Pi'' = -\int\int_{M} \frac{\zeta'}{r}\,d\sigma',$$

ce qui se décompose en deux

$$\Pi'' = -\int\int_{(\mathfrak{D})} \frac{\zeta'}{r}\,d\sigma' - \int\int_{M-(\mathfrak{D})} \frac{\zeta'}{r}\,d\sigma'.$$

Dans la seconde intégrale, on peut supposer que ζ est connu par l'observation directe; cette intégrale devient alors une fonction connue de θ, ψ qu'on peut faire rentrer dans F.

En définitive, *pour un bassin océanique quelconque* $(\mathfrak{D})$, on a l'équation intégrale

$$\alpha^2\varphi = g\zeta - \int\int_{(\mathfrak{D})} \frac{\zeta'}{r}\,d\sigma' + F(\theta, \psi)$$

ou encore

$$\zeta = \frac{1}{g}\int\int_{(\mathfrak{D})} \frac{\zeta'}{r}\,d\sigma' - \frac{F(\theta, \psi)}{g} + \frac{\alpha^2}{g}\varphi;$$

elle exprime φ en fonction de ζ; mais pour l'analyse qui va suivre, il plus commode d'exprimer ζ en fonction de φ.

D'après les propositions ci-dessus démontrées, *cela est toujours possible quel que soit le bassin océanique* $(\mathfrak{D})$.

Soit donc $K(\theta, \psi; \theta', \psi'; \lambda)$ la résolvante relative au noyau $\frac{1}{r}$ et au bassin océanique $(\mathfrak{D})$, on a pour ζ

$$\begin{aligned}\zeta(\theta, \psi) = &-\frac{F(\theta, \psi)}{g} - \frac{1}{g^2}\int\int_{(\mathfrak{D})} K\left(\theta, \psi; \theta', \psi'; \frac{1}{g}\right) F(\theta', \psi')\,d\sigma' \\ &+ \frac{\alpha^2}{g}\varphi + \frac{\alpha^2}{g^2}\int\int_{(\mathfrak{D})} K\left(\theta, \psi; \theta', \psi'; \frac{1}{g}\right)\varphi(\theta', \psi')\,d\sigma'\end{aligned}$$

ou encore en posant

$$\Phi(\theta, \psi) = -\frac{F(\theta, \psi)}{g} - \frac{1}{g^2}\int\int_{(D)} K\left(\theta, \psi; \theta', \psi'; \frac{1}{g}\right) F(\theta', \psi')\, d\sigma',$$

on obtient

$$\zeta(\theta, \psi) = \Phi(\theta, \psi) + \frac{\alpha^2}{g}\varphi + \frac{\alpha^2}{g^2}\int\int_{(D)} K\left(\theta, \psi; \theta', \psi'; \frac{1}{g}\right)\varphi'(\theta', \psi')\, d\sigma'.$$

Pour passer de la sphère à la carte, il suffit de faire la représentation conforme

$$\theta = \theta(x, y), \qquad \psi = \psi(x, y),$$

telle que

$$dx^2 + dy^2 = k^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2),$$

ce qui donne pour la dénivellation ζ

$$\zeta(x, y) = \Phi(x, y) + \frac{\alpha^2}{g}\varphi(x, y) + \frac{\alpha^2}{g^2}\int\int_{(D)} K\left(x, y; x', y'; \frac{1}{g}\right)\varphi(x', y')\frac{dx'\, dy'}{k'^2}. \tag{19}$$

Cette transformation donne un moyen aisé de tenir compte, dans les problèmes qui suivent, de l'attraction du bourrelet.

CHAPITRE III.

L'ÉQUATION DES MARÉES ET LES ÉQUATIONS DE FREDHOLM A INTÉGRALES PRINCIPALES.

30. Position de la question. — Dans ce Chapitre, on envisagera *un bassin océanique* (D), *limité par des falaises verticales qui forment un contour* C *non traversé par la latitude critique, et l'on tiendra compte de l'attraction du bourrelet.*

Les équations des marées sur la carte sont alors [*voir* nos 15 et 16, équations (10) et (11)]

$$
(20)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\zeta}{k^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h_1 \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial h_2}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial h_2}{\partial x},\\
&\alpha^2\varphi = g\zeta + \Pi'' + \mathrm{F}(x, y),\\
&h_1 = \frac{\alpha^2 h}{4\omega^2\cos^2\theta - \alpha^2}, \qquad h_2 = \frac{2i\omega\alpha h\cos\theta}{4\omega^2\cos^2\theta - \alpha^2},\\
&\Pi'' = -\int\int_{(L)} \frac{\zeta'}{k'^2 r}\,dx'\,dy'
\end{aligned}
\right.
$$

avec la condition au bord

$$
\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + 2i\omega\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0.
$$

L'équation en ζ donne, en développant et en divisant par h_1 qui ne peut s'annuler,

$$
(21)\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{\partial h_2}{\partial x}\right) = \frac{\zeta}{k^2 h_1}.
$$

D'un autre côté, l'équation à la surface

$$
\alpha^2\varphi = g\zeta + \Pi'' + \mathrm{F}(x, y)
$$

peut être inversée à l'aide de la formule (19)

$$
\begin{aligned}
(19)\quad \zeta(x, y) = \Phi(x, y) &+ \frac{\alpha^2}{g}\varphi(x, y)\\
&+ \frac{\alpha^2}{g^2}\int\int_{(L)} \mathrm{K}\left(x, y; x', y'; \frac{1}{g}\right)\varphi(x', y')\frac{dx'\,dy'}{k'^2};
\end{aligned}
$$

on peut donc éliminer ζ entre les deux équations, et l'on obtient ainsi l'*équation intégro-différentielle des marées dynamiques*

$$
\begin{aligned}
(22)\quad &\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{\partial h_2}{\partial x}\right)\\
&\quad = \frac{\Phi(x, y)}{k^2 h_1} + \frac{\alpha^2}{g k^2 h_1}\varphi(x, y)\\
&\qquad + \frac{\alpha^2}{g^2 k^2 h_1}\int\int_{(L)} \mathrm{K}\left(x, y; x', y'; \frac{1}{g}\right)\varphi(x', y')\frac{dx'\,dy'}{k'^2}.
\end{aligned}
$$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \Delta,$$

$$\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y}\right) = a$$

$$\frac{1}{h_1}\left(\frac{\partial h_1}{\partial y} - \frac{\partial h_2}{\partial x}\right) = b$$

$$-\frac{\alpha^2}{g\,k^2\,h_1} = c,$$

$$-\frac{\alpha^2}{g^2\,k^2\,h_1} = e,$$

$$\frac{\Phi(x, y)}{k^2 h_1} = f,$$

$$\frac{\mathrm{K}\left(x, y; x', y'; \frac{1}{g}\right)}{k'^2} = \mathrm{K}'(x, y; x', y'),$$

et nous obtenons ainsi

$$(22') \qquad \Delta\varphi + a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\varphi + e\int\int_{(\omega)} \mathrm{K}'(x, y; x', y')\,\varphi(x', y')\,dx'\,dy' = f,$$

équation intégro-différentielle, à laquelle la fonction inconnue φ doit satisfaire en tout point intérieur au domaine ω ; sur le contour C, elle est assujettie à la condition

$$(23) \qquad \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + 2i\omega\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0.$$

31. La fonction de Green G. — Admettons provisoirement l'existence d'une fonction $G(x, y; \xi, \eta)$ définie par les conditions suivantes :

1° En tout point x, y intérieur au domaine ω, la fonction

$$G_1(x, y; \xi, \eta)$$

déterminée par la relation

$$G_1(x, y; \xi, \eta) = \log\frac{1}{r} - G(x, y; \xi, \eta),$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$$

devra être harmonique

$$\Delta G_1 = 0.$$

2° Si le point x, y se trouve sur le contour, G devra satisfaire à l'équation

$$\alpha \frac{\partial G}{\partial n} + 2 i \omega \cos \theta \frac{\partial G}{\partial s} = 0.$$

Cela étant, M. F. Jager (Thèse) a démontré dans le cas d'un bourrelet nul, et l'on démontre de la même manière dans le cas du bourrelet non nul, que la solution des équations (22') et (23) est donnée par la fonction $\varphi(x, y)$ définie par la relation suivante :

$$(24) \quad \begin{aligned} \varphi(x, y) & - \frac{1}{2\pi} \int_C (a'\alpha' + b'\beta') G \varphi(\xi, \eta)\, ds' \\ & + \frac{1}{2\pi} \int\int_{(\mathfrak{D})} \left(\frac{\partial a' G}{\partial \xi} + \frac{\partial b' G}{\partial \eta} - c' G \right) \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\ & - \frac{1}{2\pi} \int\int_{(\mathfrak{D})} e' G\, d\xi\, d\eta \int\int_{(\mathfrak{D})} K'(\xi, \eta; x', y') \varphi(x', y')\, dx'\, dy' \\ = & - \frac{1}{2\pi} \int\int_{(\mathfrak{D})} f' G\, d\xi\, d\eta. \end{aligned}$$

Dans cette formule, les termes accentués signifient que x et y doivent être remplacés par ξ et η : de plus, α' et β' désignent les cosinus directeurs de la normale intérieure à l'élément ds' du contour.

Grâce à la fonction de Green G, l'équation intégro-différentielle des marées dynamiques est ainsi ramenée à une équation de Fredholm contenant une intégrale simple, une intégrale double et une intégrale quadruple.

Donc tout revient à trouver cette fonction de Green $G(x, y; \xi, \eta)$, ou, puisque $G_1 = \log \frac{1}{r} - G$, à trouver une fonction G_1 harmonique dans un domaine $\mathfrak{D}$, et assujettie à vérifier sur le contour C la relation

$$\alpha \frac{\partial G_1}{\partial n} + 2 i \omega \cos \theta \frac{\partial G_1}{\partial s} = \alpha \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} + 2 i \omega \cos \theta \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial s};$$

autrement dit, il faut :

Établir l'existence d'une fonction V, *harmonique en tout point inté-*

rieur au domaine $\mathcal{D}$, *et répondant à la condition aux limites*

$$\alpha \frac{\partial V}{\partial n} + 2 i \omega \cos\theta \frac{\partial V}{\partial s} = \chi(s),$$

où $\chi(s)$ est une fonction donnée.

C'est le point laissé en suspens par M. Jager et que nous allons aborder maintenant.

32. Potentiel logarithmique de simple couche. — La méthode de Fredholm consiste à exprimer V à l'aide du potentiel logarithmique d'une simple couche de densité $\rho(s)$ répandue sur le contour C qui limite le domaine $\mathcal{D}$.

Soient sur ce contour un point arbitraire M_0 pris pour origine des arcs, et M' un point quelconque déterminé par son abscisse curviligne $M_0M' = s'$, comptée dans le sens positif ; $\xi(s')$ et $\eta(s')$ les coordonnées du point M' ; $\rho(s')$ une fonction continue de s' ; x et y les coordonnées d'un point quelconque du plan ; enfin

$$r = \sqrt{[x - \xi(s')]^2 + [y - \eta(s')]^2}$$

on appelle potentiel logarithmique $V(x, y)$ relatif au point x, y, à la densité ρ et à la ligne attirante C, *l'intégrale*

$$V(x, y) = \int_C \rho(s') \log \frac{1}{r} ds'.$$

Ce potentiel possède les propriétés suivantes :

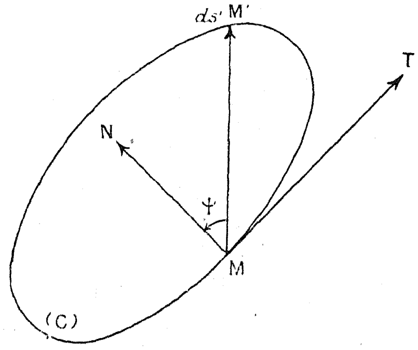
I. *Continuité.* — En tout point, à distance finie du plan, le potentiel est une fonction continue des variables x et y.

II. *Harmonie.* — En tout point n'appartenant pas à la courbe C, V est une fonction harmonique de x, y

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

III. *Dérivées normales.* — Soit le potentiel *à l'intérieur* de C ; sa dérivée prise suivant la normale intérieure au contour, et $\frac{\partial V}{\partial n}$ la limite de cette dérivée quand le point x, y tend vers le point M de la courbe, qui a pour abscisse curviligne s.

Fig. 7.



Soit de même le potentiel *à l'extérieur* de C; sa dérivée normale intérieure, et $\frac{\partial V'}{\partial n}$ la limite de cette dérivée quand le point x, y tend vers le même point M.

On a les relations classiques

(25)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial n} &= -\pi\rho(s) + \int_C \rho(s')\frac{\cos\psi}{r}\,ds', \\ \frac{\partial V'}{\partial n} &= \pi\rho(s) + \int_C \rho(s')\frac{\cos\psi}{r}\,ds'. \end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, r est la distance du point M précédent à l'élément d'intégration ds' situé en M'. Quant à ψ, c'est l'angle du vecteur MM' avec la normale intérieure MN.

IV. *Dérivée tangentielle* (¹). — Par contre, le potentiel à l'intérieur et le potentiel à l'extérieur ont la même dérivée tangentielle.

Quelle est l'expression de cette dérivée?

Envisageons d'abord l'intégrale

(T)
$$\int_C \rho(s')\frac{\sin\psi}{r}\,ds',$$

(¹) *Voir* Poincaré, *Potentiel newtonien*, p. 117, et Jager, *Thèse*, p. 11.

ψ étant l'angle précédent affecté du signe $+$ si MM′ est dans l'angle TMN; affecté du signe $-$ dans le cas contraire. Cette intégrale n'a pas de sens par elle-même; en effet, si les points M et M′ se confondent, $\sin\psi = 1$ et $\frac{1}{r}$ est infini du premier ordre.

Mais on peut lui donner un sens, en prenant ce que *Cauchy a appelé sa valeur principale, que l'on désignera dans la suite par un signe somme accentué*

$$\text{(T}'\text{)} \qquad \int_{\mathrm{C}}' \rho(s') \frac{\sin\psi}{r}\, ds'.$$

Voici ce qu'il faut entendre par là :

De chaque côté du point M d'abscisse curviligne s, on exclura l'arc compris entre les points $s - h$ et $s + h$; on calculera l'intégrale au sens ordinaire et (T′) en sera la limite quand h tend vers o.

Cela étant, *si le rayon de courbure du contour reste supérieur à un nombre fixe, et si la fonction* $\rho(s)$ *a une dérivée, la convergence de* (T′) *vers sa limite, la dérivée tangentielle, est uniforme quel que soit le point du contour,*

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial s} = \int_{\mathrm{C}}' \rho(s') \frac{\sin\psi}{r}\, ds'. \tag{26}$$

33. Équation intégrale singulière du problème. — Il est aisé maintenant de mettre en équation le problème qui nous occupe.

Posons

$$\mathrm{V}(x, y) = \int_{\mathrm{C}} \rho(s') \log\frac{1}{r}\, ds'.$$

La fonction V est harmonique dans le domaine ω, et il ne reste plus qu'à déterminer la fonction inconnue $\rho(s)$ de manière que V satisfasse à la condition aux limites

$$\alpha \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n} + 2i\omega \cos\theta \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial s} = \chi(s),$$

ce qui fournit l'équation

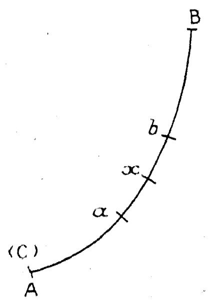
$$-\alpha\pi\rho(s) + \alpha \int_{\mathrm{C}} \rho(s') \frac{\cos\psi}{r}\, ds' + 2i\omega\cos\theta \int_{\mathrm{C}}' \rho(s') \frac{\sin\psi}{r}\, ds' = \chi(s). \tag{27}$$

C'est bien une équation du type de Fredholm. Mais l'un des signes d'intégration n'a plus le sens ordinaire, et représente une intégrale principale au sens de Cauchy.

Dès lors, il y a lieu de commencer par la question suivante. *Étudier les équations intégrales dans lesquelles les intégrales ordinaires sont remplacées par leur valeur principale au sens de Cauchy.*

34. Valeur principale d'une intégrale. — I. *Définition.* — Je désigne par x et y deux variables *complexes* dont les plans sont superposés,

Fig. 8.



et par $f(y)$ une fonction de y. Soient C un arc de courbe quelconque du plan, et x et y deux points situés sur cette courbe.

L'intégrale

$$\int_C \frac{f(y)\,dy}{y-x}$$

n'ayant aucun sens par elle-même, définissons avec Cauchy *sa valeur principale*.

De part et d'autre du point x, excluons deux arcs *égaux*, xa, xb, de longueur h, et considérons l'intégrale ordinaire

$$\mathrm{F}(x,h) = \int_{\mathrm{C}-ab} \frac{f(y)\,dy}{y-x}.$$

Cette intégrale est une fonction de h ; si cette fonction tend vers une limite quand h tend vers o, cette limite est par définition la *valeur principale* de l'intégrale.

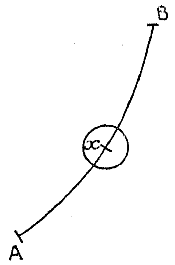
II. *Notation pour la valeur principale.* — Dans tout ce qui suit, on désignera la valeur principale par le symbole

$$\int_C' \frac{f(y)\,dy}{y-x};$$

c'est le signe somme habituel suivi d'un accent.

III. *Définition équivalente.* — Au lieu de prendre, de part et d'autre de x, les extrémités de deux petits arcs égaux, on peut évidemment

Fig. 9.



prendre les points de rencontre de la courbe avec une circonférence de centre x et de rayon h.

IV. *Remarque concernant les extrémités.* — Aucune des deux définitions précédentes ne peut s'appliquer aux extrémités de la ligne d'intégration. C'est pourquoi, dorénavant, *nous ne raisonnerons que sur des chemins fermés.*

35. Théorème I. — *Dans le cas d'une fonction $f(y)$ holomorphe dans un domaine connexe $\mathfrak{D}$.*

Dans ce domaine $\mathfrak{D}$ soient une courbe fermée sans point double (C) et, de part et d'autre de (C), deux courbes quelconques (M) et (M′), dont chacune peut par déformation continue se réduire à (C) sans rencontrer de points singuliers de la fonction $f(y)$.

Soient (M) le chemin intérieur et (M′) le chemin extérieur, parcourus dans le sens direct. La variable x restant constamment sur (C), les deux intégrales

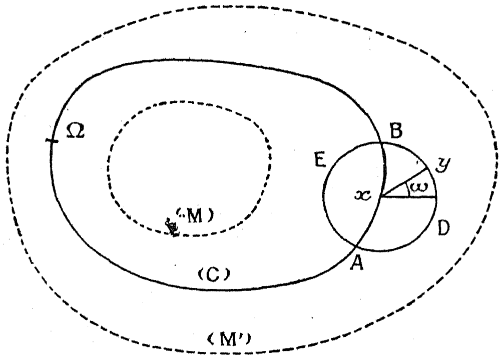
$$\int_{M} \frac{f(y)}{y-x} dy, \quad \int_{M'} \frac{f(y)}{y-x} dy$$

ont un sens parfaitement déterminé, ainsi que leur demi-somme $\frac{S}{2}$:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \int_{M} \frac{f(y)\,dy}{y-x} + \frac{1}{2} \int_{M'} \frac{f(y)\,dy}{y-x}.$$

Autour du point x, pris comme centre, et avec un rayon égal à h, je

Fig. 10.



décris une circonférence ADBE, qui coupe la courbe (C) aux points A et B.

Soit Ω un point auxiliaire sur (C).

Sans traverser de point singulier pour la fonction holomorphe $\frac{f(y)}{y-x}$, le chemin (M) peut être réduit à BΩAEB; le chemin (M′) peut être réduit à BΩADB, de sorte qu'on a une nouvelle expression de $\frac{S}{2}$:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{2} \int_{B\Omega A} \frac{f(y)\,dy}{y-x} + \frac{1}{2} \int_{AEB} \frac{f(y)\,dy}{y-x} + \frac{1}{2} \int_{B\Omega A} \frac{f(y)\,dy}{y-x} + \frac{1}{2} \int_{ADB} \frac{f(y)\,dy}{y-x},$$

ou encore

$$\frac{S}{2} = \int_{B\Omega A} \frac{f(y)\,dy}{y-x} + \frac{1}{2} \int_{AEB} \frac{f(y)\,dy}{y-x} + \frac{1}{2} \int_{ADB} \frac{f(y)\,dy}{y-x}.$$

Mais l'intégrale

$$\int_{B\Omega A} \frac{f(y)\,dy}{y-x},$$

c'est ce qu'on a appelé plus haut $F(x, h)$. On a donc l'égalité

$$F(x, h) = \frac{S}{2} - \frac{1}{2}\int_{AEB} \frac{f(y)}{y-x}\,dy - \frac{1}{2}\int_{ADB} \frac{f(y)\,dy}{y-x}.$$

Quand h tend vers o, $\frac{S}{2}$ reste constant. Tout revient donc à calculer

$$\lim_{h=0}\left[\int_{AEB} \frac{f(y)}{y-x}\,dy + \int_{ADB} \frac{f(y)\,dy}{y-x}\right].$$

Il est aisé de calculer la limite de chacune de ces intégrales.

Sur le cercle de rayon h, on a

$$y = x + h\,e^{i\omega},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{dy}{y-x} = i\,d\omega.$$

D'autre part, puisque $f(y)$ est holomorphe,

$$f(y) = f(x + h\,e^{i\omega}) = f(x) + \mathrm{A}h,$$

A étant une fonction dont la valeur absolue est inférieure à un nombre fixe. Par suite,

$$\int_{AEB} \frac{f(x)}{y-x}\,dy = i f(x)\int_{AEB} d\omega + ih\int_{AEB} \mathrm{A}\,d\omega.$$

Quand h tend vers o, il en est de même de la seconde intégrale, et il reste tout simplement

$$\lim_{h=0}\int_{AEB} \frac{f(y)}{y-x}\,dy = i f(x)\lim_{h=0}\int_{AEB} d\omega.$$

Or

$$\int_{AEB} d\omega$$

n'est pas autre chose que l'angle au centre de l'arc BEA, affecté du signe moins,

$$\lim_{h=0}\int_{AEB} \frac{f(y)\,dy}{y-x} = i f(x) \times \lim_{h=0}(-\text{ angle de BEA}),$$

et l'on aurait de même

$$\lim_{h=0} \int_{\text{ADB}} \frac{f(y)\,dy}{y-x} = if(x) \times \lim_{h=0} (\text{angle de ADB}),$$

d'où, en ajoutant,

$$\lim_{h=0} \left[\int_{\text{AEB}} \frac{f(y)\,dy}{y-x} + \int_{\text{ADB}} \frac{f(y)\,dy}{y-x} \right]$$
$$= if(x) \lim_{h=0} (\text{angle de ADB} - \text{angle de BEA}).$$

Cette limite est évidemment nulle si la courbe (C) a une tangente unique au point x.

Ce mode de raisonnement exclut les points anguleux et les points de rebroussement.

Conclusion. — *Étant donnée une courbe fermée* (C) *à tangente unique (sans points anguleux, ni points de rebroussement), sur laquelle se meut la variable complexe x, et une fonction $f(y)$ holomorphe dans une bande* $\mathfrak{D}$ *s'étendant de part et d'autre de la courbe* (C); *si l'on prend dans cette bande un contour fermé* (M) *intérieur à* (C) *et un contour fermé* (M′) *extérieur à* (C), *on a l'égalité fondamentale*

$$\int_{\text{C}}' \frac{f(y)\,dy}{y-x} = \frac{1}{2}\int_{\text{M}} \frac{f(y)\,dy}{y-x} + \frac{1}{2}\int_{\text{M}'} \frac{f(y)\,dy}{y-x}. \tag{28}$$

Cette égalité ramène l'intégrale singulière à une somme d'intégrales ordinaires, mais elle exige que $f(y)$ soit holomorphe dans tout le voisinage de la courbe (C).

Transformation de l'égalité fondamentale. — Envisageons le domaine $\mathfrak{D}$ et la fonction de y

$$\frac{f(y)}{y-x}.$$

Cette fonction de y est analytique et uniforme en tout point de $\mathfrak{D}$, sauf au point x où elle a un pôle simple de résidu $f(x)$. On a donc, d'après le théorème de Cauchy,

$$\int_{\text{M}'} \frac{f(y)\,dy}{y-x} - \int_{\text{M}} \frac{f(y)\,dy}{y-x} = 2i\pi f(x);$$

en combinant cette équation avec la précédente, on obtient immédiatement

$$\int_{C}' \frac{f(y)\,dy}{y-x} = \int_{M'} \frac{f(y)\,dy}{y-x} - i\pi f(x),$$

$$\int_{C}' \frac{f(y)\,dy}{y-x} = \int_{M} \frac{f(y)\,dy}{y-x} + i\pi f(x).$$

Remarque. — On pourrait dire que ces formules résolvent le problème des équations comportant des valeurs principales ; cependant, il y a lieu de chercher d'autres formules ne faisant intervenir que la courbe (C) et les valeurs de $f(y)$ sur cette courbe.

Prolongement analytique de $\int_{C}' \frac{f(y)\,dy}{y-x}$. — Les formules précédentes définissent une fonction $F(x)$

$$F(x) = \int_{C}' \frac{f(y)\,dy}{y-x},$$

qui est bien déterminée en chaque point de (C).

Cette fonction est holomorphe en chaque point de (C), car les chemins d'intégration (M) et (M′) peuvent évidemment être supposés de longueur finie; de plus, $F(x)$ est uniforme sur (C), donc $F(x)$ est holomorphe dans une bande à cheval sur (C) ; cette bande peut aller jusqu'aux contours (M) et (M′), qui, à leur tour, peuvent serrer de près les limites du domaine initial $\mathcal{D}$.

36. Théorème II : Multiplication des noyaux singuliers [1]. — Nous arrivons au théorème le plus important.

Soient dans le plan de la variable complexe une courbe (C); une fonction $f_0(x)$ holomorphe dans une bande $\mathcal{D}$ à cheval sur (C) ; $A(x, y)$ et $B(x, y)$ deux fonctions des deux variables x et y, holomorphes quand x et y varient dans la même bande.

Je considère les deux intégrales

$$f_1(x) = \int_{C}' \frac{A(x,y)}{y-x} f_0(y)\,dy,$$

$$f_2(x) = \int_{C}' \frac{B(x,y)}{y-x} f_1(y)\,dy,$$

(1) Comparer Poincaré, *Théorie des marées*, p. 253.

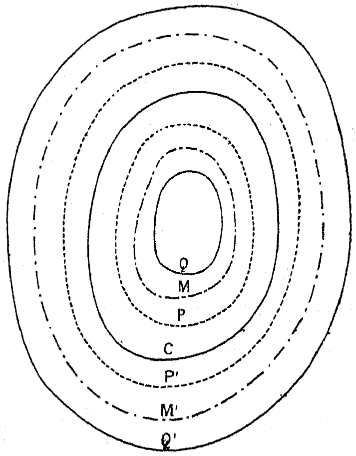
de sorte qu'on peut écrire

$$f_1(y) = \int_{\mathrm{C}}' \frac{\mathrm{A}(y, z)}{z - y} f_0(z)\, dz$$

et finalement

$$f_2(x) = \int_{\mathrm{C}}' \frac{\mathrm{B}(x, y)}{y - x}\, dy \int_{\mathrm{C}}' \frac{\mathrm{A}(y, z)}{z - y} f_0(z)\, dz.$$

Fig. 11.



Il s'agit de *trouver une seconde expression de* $f_2(x)$. Je calcule d'abord

$$f_1(y) = \int_{\mathrm{C}}' \frac{\mathrm{A}(y, z)}{z - y} f_0(z)\, dz;$$

dans cette intégrale, y et z varient sur la courbe (C). Dans le domaine $\mathcal{D}$, je trace le contour (M) intérieur à (C) et le contour (M′) extérieur. En vertu du théorème I, je puis écrire

$$f_1(y) = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{M}} \frac{\mathrm{A}(y, z)}{z - y} f_0(z)\, dz + \frac{1}{2} \int_{\mathrm{M}'} \frac{\mathrm{A}(y, z)}{z - y} f_0(z)\, dz,$$

et ces expressions donnent le prolongement analytique de la fonction $f_1(y)$, qui est holomorphe dans la bande comprise entre (M) et (M′), et en particulier sur (P) et (P′); (P) étant un contour situé entre (M) et (C), et (P′) un contour entre (C) et (M′).

On a, par suite,

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\int_{P} \frac{B(x, y)}{y - x} f_1(y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{P'} \frac{B(x, y)}{y - x} f_1(y)\,dy;$$

d'où, en réunissant ces résultats,

$$\begin{aligned} f_2(x) = {} & \frac{1}{4}\int_{P} \frac{B(x, y)}{y - x}\,dy \int_{M} \frac{A(y, z)}{z - y} f_0(z)\,dz \\ & + \frac{1}{4}\int_{P} \frac{B(x, y)}{y - x}\,dy \int_{M'} \frac{A(y, z)}{z - y} f_0(z)\,dz \\ & + \frac{1}{4}\int_{P'} \frac{B(x, y)}{y - x}\,dy \int_{M} \frac{A(y, z)}{z - y} f_0(z)\,dz \\ & + \frac{1}{4}\int_{P'} \frac{B(x, y)}{y - x}\,dy \int_{M'} \frac{A(y, z)}{z - y} f_0(z)\,dz. \end{aligned}$$

Toutes ces intégrales que je désigne par I_1, I_2, I_3, I_4 sont prises dans le sens direct.

Je mène le contour (Q) intérieur à (M), et le contour (Q′) extérieur à (M′), tous deux dans le domaine $\mathfrak{D}$, et j'envisage successivement les quatre intégrales.

Intégrale I_1 :

$$I_1 = \int_{P} \frac{B(x, y)}{y - x}\,dy \int_{M} \frac{A(y, z)}{z - y} f_0(z)\,dz;$$

j'ajoute et je retranche

$$\int_{Q} \frac{B(x, y)}{y - x}\,dy \int_{M} \frac{A(y, z)}{z - y} f_0(z)\,dz,$$

qui est une fonction bien déterminée

$$I_1 = \int_{Q} \frac{B(x, y)}{y - x}\,dy \int_{M} \frac{A(y, z)}{z - y} f_0(z)\,dz + \int_{P-Q} \frac{B(x, y)}{y - x}\,dy \int_{M} \frac{A(y, z)}{z - y} f_0(z)\,dz.$$

Il s'agit ici d'intégrales doubles ordinaires, chaque variable se déplaçant sur sa courbe : x sur (C), y sur (Q), z sur (M); de sorte qu'on peut *intervertir l'ordre des intégrations* :

$$I_1 = \int_{M} f_0(z)\,dz \int_{Q} \frac{B(x, y)}{y - x} \frac{A(y, z)}{z - y}\,dy + \int_{M} f_0(z)\,dz \int_{P-Q} \frac{B(x, y)}{y - x} \frac{A(y, z)}{z - y}\,dy.$$

Envisageons

$$\int_{P-Q} \frac{B(x,y)}{y-x}\,\frac{A(y,z)}{z-y}\,dy;$$

c'est l'intégrale étendue dans le sens direct à la frontière du domaine compris entre (P) et (Q); comme x varie sur (C) et z sur (M), la fonction de y, $\frac{B(x,y)}{y-x}\,\frac{A(y,z)}{z-y}$, n'a pas d'autre singularité dans ce domaine que le pôle $y=z$, dont le résidu est

$$-\frac{B(x,z)\,A(z,z)}{z-x};$$

par suite,

$$\int_{P-Q} \frac{B(x,y)}{y-x}\,\frac{A(y,z)}{z-y}\,dy = -2\pi i\,\frac{B(x,z)\,A(z,z)}{z-x},$$

d'où, finalement,

$$I_1 = \int_M f_0(z)\,dz \int_Q \frac{B(x,y)}{y-x}\,\frac{A(y,z)}{z-y}\,dy - 2\pi i \int_M \frac{B(x,z)\,A(z,z)}{z-x} f_0(z)\,dz.$$

Intégrale I_2 :

$$I_2 = \int_P \frac{B(x,y)}{y-x}\,dy \int_M \frac{A(y,z)}{z-y} f_0(z)\,dz;$$

j'intervertis l'ordre des intégrations

$$I_2 = \int_{M'} f_0(z)\,dz \int_P \frac{B(x,y)}{y-x}\,\frac{A(y,z)}{z-y}\,dy.$$

Ici, z est sur (M′) et x est sur (C). Je puis donc, sans rencontrer de points singuliers, déformer le contour (P) et le faire coïncider avec (Q). Par suite,

$$I_2 = \int_{M'} f_0(z)\,dz \int_Q \frac{B(x,y)}{y-x}\,\frac{A(y,z)}{z-y}\,dy.$$

Intégrale I_3 :

$$I_3 = \int_{P'} \frac{B(x,y)}{y-x}\,dy \int_M \frac{A(y,z)}{z-y} f_0(z)\,dz;$$

j'intervertis l'ordre des intégrations

$$I_3 = \int_M f_0(z)\,dz \int_{P'} \frac{B(x,y)}{y-x}\,\frac{A(y,z)}{z-y}\,dy.$$

Ici, z est sur (M) et x est sur (C). Je puis donc, sans rencontrer de points singuliers, déformer le contour (P′) et le faire coïncider avec (Q′). Par suite,

$$I_3 = \int_M f_0(z)\,dz \int_{Q'} \frac{B(x, y)}{y - x} \frac{A(y, z)}{z - y} dy.$$

Intégrale I_4 :

$$I_4 = \int_{P'} \frac{B(x, y)}{y - x} dy \int_{M'} \frac{A(y, z)}{z - y} f_0(z)\,dz;$$

j'ajoute et je retranche

$$\int_{Q'} \frac{B(x, y)}{y - x} dy \int_{M'} \frac{A(y, z)}{z - y} f_0(z)\,dz,$$

qui est une fonction bien déterminée :

$$I_4 = \int_{Q'} \frac{B(x, y)}{y - x} dy \int_{M'} \frac{A(y, z)}{z - y} f_0(z)\,dz + \int_{P'-Q'} \frac{B(x, y)}{y - x} dy \int_{M'} \frac{A(y, z)}{z - y} f_0(z)\,dz.$$

J'intervertis l'ordre des intégrations

$$I_4 = \int_{M'} f_0(z)\,dz \int_{Q'} \frac{B(x, y)}{y - x} \frac{A(y, z)}{z - y} dy + \int_{M'} f_0(z)\,dz \int_{P'-Q'} \frac{B(x, y)}{y - x} \frac{A(y, z)}{z - y} dy.$$

Envisageons

$$\int_{P'-Q'} \frac{B(x, y)}{y - x} \frac{A(y, z)}{z - y} dy;$$

c'est l'intégrale étendue *dans le sens négatif* à la frontière du domaine compris entre (P′) et (Q′). Dans ce domaine, comme x varie sur (C) et z sur (M′), la fonction de y, $\frac{B(x, y)}{y - x} \frac{A(y, z)}{z - y}$, n'a pas d'autre singularité que le pôle $y = z$, dont le résidu est

$$-\frac{B(x, z)\,A(z, z)}{z - x};$$

par suite,

$$\int_{P'-Q'} \frac{B(x, y)}{y - x} \frac{A(y, z)}{z - y} dy = +2\pi i \frac{B(x, z)\,A(z, z)}{z - x},$$

d'où, finalement,

$$I_4 = \int_{M'} f_0(z)\,dz \int_{Q'} \frac{B(x, y)}{y - x}\,\frac{A(y, z)}{z - y}\,dy + 2\pi i \int_{M'} \frac{B(x, z)\,A(z, z)}{z - x} f_0(z)\,dz.$$

Et en rassemblant I_1, I_2, I_3, I_4, il vient

$$\begin{aligned} f_2(x) = {} & \frac{\pi}{2} i \int_{M'} \frac{B(x, z)\,A(z, z)}{z - x} f_0(z)\,dz - \frac{\pi}{2} i \int_{M} \frac{B(x, z)\,A(z, z)}{z - x} f_0(z)\,dz \\ & + \frac{1}{4} \int_{M} f_0(z)\,dz \int_{Q} \frac{B(x, y)}{y - x}\,\frac{A(y, z)}{z - y}\,dy \\ & + \frac{1}{4} \int_{M} f_0(z)\,dz \int_{Q'} \frac{B(x, y)}{y - x}\,\frac{A(y, z)}{z - y}\,dy \\ & + \frac{1}{4} \int_{M'} f_0(z)\,dz \int_{Q} \frac{B(x, y)}{y - x}\,\frac{A(y, z)}{z - y}\,dy \\ & + \frac{1}{4} \int_{M'} f_0(z)\,dz \int_{Q'} \frac{B(x, y)}{y - x}\,\frac{A(y, z)}{z - y}\,dy. \end{aligned}$$

Calcul de la somme Σ des deux intégrales simples :

$$\begin{aligned} \Sigma & = \frac{\pi i}{2} \int_{M'} \frac{B(x, z)\,A(z, z)}{z - x} f_0(z)\,dz - \frac{\pi i}{2} \int_{M} \frac{B(x, z)\,A(z, z)}{z - x} f_0(z)\,dz \\ & = \frac{\pi i}{2} \int_{M'-M} \frac{B(x, z)\,A(z, z)}{z - x} f_0(z)\,dz. \end{aligned}$$

Mais l'intégrale $\int_{M'-M}$, c'est l'intégrale étendue dans le sens positif à la frontière du domaine compris entre (M) et (M'). Dans ce domaine, comme x varie sur (C), la fonction de z, $\frac{B(x, z)\,A(z, z)}{z - x} f_0(z)$, n'a pas d'autre singularité que le pôle $z = x$, dont le résidu est

$$B(x, x)\,A(x, x)\,f_0(x);$$

par suite,

$$\begin{aligned} \Sigma & = \frac{\pi i}{2}\, 2\pi i\, B(x, x)\,A(x, x)\,f_0(x) \\ & = -\quad \pi^2\,A(x, x)\,B(x, x)\,f_0(x). \end{aligned}$$

Calcul de la somme Σ' des quatre intégrales doubles :

$$\begin{aligned}\Sigma' = {} & \frac{1}{4}\int_{M} f_0(z)\,dz\int_{Q} \frac{B(x,y)}{y-x}\,\frac{A(y,z)}{z-y}\,dy \\ & + \frac{1}{4}\int_{M} f_0(z)\,dz\int_{Q'} \frac{B(x,y)}{y-x}\,\frac{A(y,z)}{z-y}\,dy \\ & + \frac{1}{4}\int_{M'} f_0(z)\,dz\int_{Q} \frac{B(x,y)}{y-x}\,\frac{A(y,z)}{z-y}\,dy \\ & + \frac{1}{4}\int_{M'} f_0(z)\,dz\int_{Q'} \frac{B(x,y)}{y-x}\,\frac{A(y,z)}{z-y}\,dy.\end{aligned}$$

Je considère

$$\int_{Q} \frac{B(x,y)}{y-x}\,\frac{A(y,z)}{z-y}\,dy.$$

C'est une fonction de x et de z, qui ne devient pas infinie même si $x=z$, pourvu que le chemin d'intégration ne passe pas par ce point. Et il en est de même pour l'intégrale

$$\int_{Q'} \frac{B(x,y)}{y-x}\,\frac{A(y,z)}{z-y}\,dy.$$

Je pose

$$BA(x,z) = \frac{1}{2}\int_{Q+Q'} \frac{B(x,y)}{y-x}\,\frac{A(y,z)}{z-y}\,dy.$$

Dans cette intégrale, x et z peuvent varier sur la même courbe (C); $BA(x,z)$ est holomorphe dans le domaine compris entre (Q) et (Q').

J'envisage maintenant l'intégrale singulière

$$\int_{C}' \frac{B(x,y)}{y-x}\,\frac{A(y,z)}{z-y}\,dy,$$

où les trois variables x, y, z se meuvent sur la même courbe (C). Si cette intégrale a un sens, la fonction qu'elle définit coïncide avec $BA(x,z)$ et l'on peut écrire

$$BA(x,z) = \int_{C}' \frac{B(x,y)}{y-x}\,\frac{A(y,z)}{z-y}\,dy,$$

ce qui a l'avantage de ne faire intervenir que des éléments définis sur la courbe (C).

Cela posé, la somme Σ' s'écrit

$$\Sigma' = \frac{1}{2}\int_{M} f_0(z)\,\mathrm{BA}(x, z)\,dz + \frac{1}{2}\int_{M'} f_0(z)\,\mathrm{BA}(x, z)\,dz,$$

où encore

$$\Sigma' = \frac{1}{2}\int_{M+M'} f_0(z)\,\mathrm{BA}(x, z)\,dz.$$

Mais la fonction $\mathrm{BA}(x, z)$ étant holomorphe, ainsi que $f_0(z)$, dans le domaine compris entre (Q) et (Q′), je puis, sans rencontrer de singularités, déformer chacun des contours (M) et (M′) et les faire coïncider avec (C); et l'on obtient finalement

$$\Sigma' = \int_C \mathrm{BA}(x, z)\, f_0(z)\,dz.$$

Conclusion. — *On a ainsi la formule fondamentale*

$$(29)\qquad \int_C' \frac{\mathrm{B}(x, y)}{y-x}\,dy \int_C' \frac{\mathrm{A}(y, z)}{z-y} f_0(z)\,dz$$
$$= -\pi^2\,\mathrm{B}(x, x)\,\mathrm{A}(x, x)\,f_0(x) + \int_C \mathrm{BA}(x, z)\,f_0(z)\,dz$$

en posant

$$\mathrm{BA}(x, z) = \frac{1}{2}\int_{Q+Q'} \frac{\mathrm{B}(x, y)}{y-x}\,\frac{\mathrm{A}(y, z)}{z-y}\,dy,$$

ou, s'il y a lieu,

$$\mathrm{BA}(x, z) = \int_C' \frac{\mathrm{B}(x, y)}{y-x}\,\frac{\mathrm{A}(y, z)}{z-y}\,dy.$$

Remarques sur cette formule. — Cette formule est démontrée sommairement par Poincaré, pages 253-256 de la *Théorie des marées*. L'expression trouvée ci-dessus *diffère du résultat de Poincaré par le signe qui précède* π^2.

Grâce à elle, la fonction $f_0(x)$ sort du signe intégrale, ce qui est très avantageux, quand on a affaire à des équations de première espèce où figurent des valeurs principales.

Enfin, elle permet d'*itérer* les noyaux singuliers; et un changement de variables va la rendre applicable au domaine réel.

37. Théorème III : Multiplication des noyaux singuliers, réels et périodiques. — La formule (29) suppose que les variables x, y, z sont *complexes* et que les fonctions $B(x, y)$, $A(y, z)$, $f_0(z)$ de ces variables sont *holomorphes dans une bande à cheval sur* (C), *le contour* (C) *étant une courbe fermée à tangente unique*.

Pour passer au domaine réel, on a besoin de deux lemmes préliminaires.

Lemme I. — *Soient* $A(x,y)$, $B(x,y)$, $f_0(x)$ *des fonctions de* variables réelles, *admettant la période* Ω *par rapport à chacune de ces variables, et holomorphes quand* x *et* y *décrivent, dans leurs plans respectifs, une petite bande à cheval sur l'axe réel.*

Posons

$$u = e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}, \qquad v = e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}, \qquad w = e^{\frac{2i\pi z}{\Omega}};$$

d'après un théorème bien connu, on peut écrire

$$\begin{aligned} f_0(x) &= F_0\left(e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}\right) = F_0(u), \\ B(x, y) &= \beta\left(e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}, e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}\right) = \beta(u, v), \\ A(x, y) &= \alpha\left(e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}, e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}\right) = \alpha(u, v), \end{aligned}$$

les fonctions $F_0(u)$, $\beta(u, v)$, $\alpha(u, v)$ étant holomorphes quand u et v varient dans une couronne comprenant en son intérieur la circonférence de rayon 1.

J'envisage maintenant la cascade

$$f_1(x) = \int_0^{\Omega} A(x, y) \frac{i e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}} - e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}} f_0(y)\, dy,$$

$$f_2(x) = \int_0^{\Omega} B(x, y) \frac{i e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}} - e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}} f_1(y)\, dy,$$

ce qui donne

$$f_1(y) = \int_0^{\Omega} A(y, z) \frac{i e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}}{e^{\frac{2i\pi z}{\Omega}} - e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}} f_0(z)\, dz$$

et, par suite,

$$f_2(x) = \int_0^{\Omega} B(x, y) \frac{i e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}} - e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}} dy \int_0^{\Omega} A(y, z) \frac{i e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}}{e^{\frac{2i\pi z}{\Omega}} - e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}} f_0(z)\, dz;$$

dans cette intégrale, je fais le changement de variables défini par les équations

$$u = e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}, \qquad v = e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}, \qquad w = e^{\frac{2i\pi z}{\Omega}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dv}{v} = \frac{2i\pi}{\Omega} dy, \qquad \frac{dw}{w} = \frac{2i\pi}{\Omega} dz,$$

et j'obtiens

$$f_2(x) = \int_C' \beta(u, v) \frac{\Omega}{2\pi} \frac{u}{v - u} \frac{dv}{v} \int_C' \alpha(v, w) \frac{\Omega}{2\pi} \frac{v}{w - v} F_0(w) \frac{dw}{w},$$

(C) représentant la circonférence de rayon 1.

Je rentre bien ainsi dans les conditions d'applicabilité de la formule (29), laquelle donne

$$\begin{aligned} f_2(x) = &- \frac{\pi^2\Omega^2}{4\pi^2} \beta(u, u)\, \alpha(u, u)\, F_0(u) \\ &+ \int_C F_0(w) \frac{\Omega}{2\pi} \frac{dw}{w} \int_C' \beta(u, v)\, \alpha(v, w) \frac{uv}{(v-u)(w-v)} \frac{\Omega}{2\pi} \frac{dv}{v}; \end{aligned}$$

d'où, en revenant aux variables x, y, z,

$$\begin{aligned} f_2(x) = &- \frac{\Omega^2}{4} \beta\left(e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}, e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}\right) \alpha\left(e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}, e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}\right) F_0\left(e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}\right) \\ &+ \int_0^{\Omega} F_0\left(e^{\frac{2i\pi z}{\Omega}}\right) i\, dz \int_0^{\Omega} \beta\left(e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}, e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}\right) \\ &\times \alpha\left(e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}, e^{\frac{2i\pi z}{\Omega}}\right) \frac{e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}} - e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}} \frac{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}}{e^{\frac{2i\pi z}{\Omega}} - e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}} i\, dy, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} (30) \quad f_2(x) = &- \frac{\Omega^2}{4} B(x, x)\, A(x, x)\, f_0(x) + \int_0^{\Omega} f_0(z)\, dz \\ &\times \int_0^{\Omega} B(x, y)\, A(y, z) \frac{i e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}} - e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}} \frac{i e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}}{e^{\frac{2i\pi z}{\Omega}} - e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}} dy. \end{aligned}$$

Lemme II. — *Soit* $M(x, y)$ *un noyau réel admettant la période* Ω *par rapport à chacune des variables* x *et* y, *et qui, considéré comme une fonction de* y, *n'admet comme singularité que le pôle simple* $y = x$; *autrement dit, tel qu'on ait, au voisinage de* $y = x$,

$$M(x, y) = M_0(x, y) + \frac{M_1(x)}{y - x},$$

$M_0(x, y)$ *et* $M_1(x)$ *étant deux fonctions holomorphes de* x *et* y.

On a, par conséquent,

$$M_1(x) = \lim_{y=x}[(y - x) M(x, y)].$$

J'envisage

$$\frac{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}} - e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{i e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}} M(x, y)$$

et j'en cherche la limite L pour $y = x$,

$$L = \lim_{y=x}\left[\frac{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}} - e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{i e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}} \frac{1}{y - x}(y - x) M(x, y)\right].$$

Or,

$$\lim_{y=x}\left[\frac{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}} - e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{i e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}} \frac{1}{y - x}\right] = \frac{2\pi}{\Omega},$$

et, d'après ce qui précède,

$$\lim_{y=x}[(y - x) M(x, y)] = M_1(x);$$

d'où, pour le résidu $M_1(x)$, l'expression

$$\frac{2\pi}{\Omega} M_1(x) = \lim_{y=x}\left[\frac{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}} - e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{i e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}} M(x, y)\right]. \tag{31}$$

Application. — Soient $M(x, y)$ et $N(x, y)$ deux fonctions du type précédent et soit la cascade

$$f_1(x) = \int_0^{'\Omega} M(x, y) f_0(y)\, dy,$$

$$f_2(x) = \int_0^{'\Omega} N(x, y) f_1(y)\, dy.$$

On peut évidemment écrire

$$f_1(x)=\int_0^{'\Omega} \mathrm{M}(x,y)\frac{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}-e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{ie^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}\frac{ie^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}-e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}f_0(y)\,dy,$$

$$f_2(x)=\int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x,y)\frac{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}-e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{ie^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}\frac{ie^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}-e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}f_1(y)\,dy;$$

la fonction $\mathrm{M}(x,y)\dfrac{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}-e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{ie^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}$ n'a plus de pôle pour $y=x$, elle est holomorphe quand x et y suivent l'axe réel, et elle a la période Ω par rapport à x et à y. Il en est de même de $\mathrm{N}(x,y)$, si bien qu'on peut appliquer la formule (30) du lemme I, ce qui donne

$$\begin{aligned}f_2(x)=&-\frac{\Omega^2}{4}\lim_{y=x}\left[\mathrm{N}(x,y)\frac{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}-e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{ie^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}\right]\\&\times\lim_{y=x}\left[\mathrm{M}(x,y)\frac{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}-e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{ie^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}\right]f_0(x)\\&+\int_0^{\Omega}f_0(z)\,dz\int_0^{'\Omega}\mathrm{N}(x,y)\frac{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}-e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{ie^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}\frac{ie^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}-e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}\\&\times\mathrm{M}(y,z)\frac{e^{\frac{2i\pi z}{\Omega}}-e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}}{ie^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}}\frac{ie^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}}{e^{\frac{2i\pi z}{\Omega}}-e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}}\,dy.\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\mathrm{N}_1(x)=\text{résidu pour } y=x \text{ de } \mathrm{N}(x,y),$$
$$\mathrm{M}_1(x)=\text{résidu pour } y=x \text{ de } \mathrm{M}(x,y).$$

On a, d'après la formule (31) du lemme II,

$$\lim_{y=x}\left[\mathrm{N}(x,y)\frac{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}-e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{ie^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}\right]=\frac{2\pi}{\Omega}\mathrm{N}_1(x),$$

$$\lim_{y=x}\left[\mathrm{M}(x,y)\frac{e^{\frac{2i\pi y}{\Omega}}-e^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}{ie^{\frac{2i\pi x}{\Omega}}}\right]=\frac{2\pi}{\Omega}\mathrm{M}_1(x)$$

et l'on obtient la formule cherchée :

$$(32)\quad \int_0^{'\Omega} N(x, y)\,dy \int_0^{'\Omega} M(y, z) f(z)\,dz$$
$$= -\pi^2 N_1(x) M_1(x) f(x) + \int_0^{\Omega} f(z)\,dz \int_0^{'\Omega} N(x, y) M(y, z)\,dy.$$

C'est la formule d'interversion de l'ordre des intégrations dans une intégrale double avec valeurs principales.

Corollaire. — Si l'une des fonctions n'a pas de pôle, le produit $M_1(x) N_1(x)$ est nul et l'on retombe sur la formule habituelle

$$\int_0^{\Omega} N(x, y)\,dy \int_0^{'\Omega} M(y, z) f(z)\,dz = \int_0^{\Omega} f(z)\,dz \int_0^{'\Omega} N(x, y) M(y, z)\,dy,$$

ou encore

$$\int_0^{'\Omega} N(x, y)\,dy \int_0^{\Omega} M(y, z) f(z)\,dz = \int_0^{\Omega} f(z)\,dz \int_0^{'\Omega} N(x, y) M(y, z)\,dy.$$

38. Noyau de la dérivée tangentielle du potentiel logarithmique de simple couche. — Soient une courbe fermée (C), A un point quelconque de cette courbe dont les coordonnées x et y sont des fonctions périodiques d'un paramètre variable t, ce qu'on peut toujours supposer,

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t).$$

En particulier, la variable t peut se confondre avec l'arc s compté à partir d'une origine arbitraire, mais ce n'est pas nécessaire, je suppose simplement que quand t croît de o à Ω, le point A décrit toute la courbe (C) dans le sens direct.

Soient :

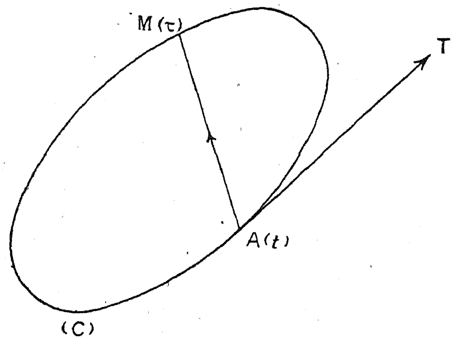
A, le point attiré de coordonnées $x(t), y(t)$;
M, le point attirant de coordonnées $x(\tau), y(\tau)$;
$\rho(\tau)$, la densité au point attirant de paramètre τ.

Je cherche l'attraction exercée par toute la courbe sur le point A; et la composante de cette attraction sur la demi-tangente aux arcs croissants AT.

Or, l'attraction de l'élément ds sur le point A a pour valeur

$$\frac{\rho(\tau)\,ds}{\text{AM}},$$

Fig. 12.



la composante de cette attraction sur la demi-tangente AT,

$$\frac{\rho(\tau)\cos(\text{TAM})\,ds}{\text{AM}},$$

ce qui donne, pour toute la courbe,

$$(\text{T}) = \int_0^{'\Omega} \frac{\rho(\tau)\cos(\text{TAM})\,ds}{\text{AM}}.$$

Il ne reste plus qu'à évaluer chacune de ces fonctions à l'aide de t et de τ :

$$\text{AM} = \sqrt{[x(\tau) - x(t)]^2 + [y(\tau) - y(t)]^2},$$
$$ds = \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)}\,d\tau.$$

Les cosinus directeurs de AT sont

$$\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}, \quad \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}$$

et ceux de AM

$$\frac{x(\tau) - x(t)}{\text{AM}}, \quad \frac{y(\tau) - y(t)}{\text{AM}},$$

ce qui donne, pour l'angle TAM,

$$\cos(\text{TAM}) = \frac{x'(t)\,[x(\tau) - x(t)] + y'(t)\,[y(\tau) - y(t)]}{\text{AM}\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}};$$

d'où la dérivée tangentielle cherchée :

$$(\mathrm{T})=\int_0^{\prime\Omega} \frac{x'(t)[x(\tau)-x(t)]+y'(t)[y(\tau)-y(t)]}{[x(\tau)-x(t)]^2+[y(\tau)-y(t)]^2}\,\frac{\sqrt{x'^2(\tau)+y'^2(\tau)}}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}\,\rho(\tau)\,d\tau.$$

Contour régulièrement analytique (¹). — Je suppose le contour (C) régulièrement analytique, c'est-à-dire que $x=f(t)$, $y=\varphi(t)$ sont des fonctions holomorphes de t dans le voisinage de la valeur réelle quelconque $t=t_0$; et que, de plus, on a pu choisir le paramètre t, dont dépendent analytiquement x et y, de telle sorte que

$$f'(t_0) \quad \text{et} \quad \varphi'(t_0)$$

ne soient pas nuls à la fois.

C'est, par exemple, le cas d'une ellipse quelconque dont les équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} x &= x_0+\mathrm{A}\cos t+\mathrm{B}\sin t,\\ y &= y_0+\mathrm{C}\cos t+\mathrm{D}\sin t. \end{aligned}$$

Singularité du noyau. — Ce noyau $\mathrm{N}(\tau, t)$ a pour expression

$$\mathrm{N}(\tau, t)=\frac{x'(t)[x(\tau)-x(t)]+y'(t)[y(\tau)-y(t)]}{[x(\tau)-x(t)]^2+[y(\tau)-y(t)]^2}\,\frac{\sqrt{x'^2(\tau)+y'^2(\tau)}}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}.$$

Considéré comme fonction de τ, le dénominateur ne s'annule que pour $\tau=t$, et, au voisinage du point t, on a

$$\begin{aligned} \tau &= t+h;\\ x(\tau) &= x(t)+hx'(t)+\frac{h^2}{1.2}x''(t)+\frac{h^3}{1.2.3}x'''(t)+\ldots,\\ x'(\tau) &= x'(t)+hx''(t)+\frac{h^2}{1.2}x'''(t)+\ldots;\\ y(\tau) &= y(t)+hy'(t)+\frac{h^2}{1.2}y''(t)+\frac{h^3}{1.2.3}y'''(t)+\ldots,\\ y'(\tau) &= y'(t)+hy''(t)+\frac{h^2}{1.2}y'''(t)+\ldots; \end{aligned}$$

(¹) *Voir* E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 298.

d'où l'on tire, en sous-entendant la variable t,

$$\begin{aligned} x'(t)[x(\tau)-x(t)]+y'(t)[y(\tau)-y(t)] \\ = h(x'^2+y'^2)+\frac{h^2}{1.2}(x'x''+y'y'')+\ldots,\end{aligned}$$

$$x'^2(\tau)+y'^2(\tau)=x'^2+y'^2+2h(x'x''+y'y'')+\ldots,$$

$$[x(\tau)-x(t)]^2+[y(\tau)-y(t)]^2=h^2(x'^2+y'^2)+h^3(x'x''+y'y'')+\ldots,$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{N}(\tau,t)=\frac{\left\{\begin{array}{c}\left[h(x'^2+y'^2)+\dfrac{h^2}{1.2}(x'x''+y'y'')+\ldots\right] \\ \times\sqrt{x'^2+y'^2+2h(x'x''+y'y'')+\ldots}\end{array}\right\}}{[h^2(x'^2+y'^2)+h^3(x'x''+y'y'')+\ldots]\sqrt{x'^2+y'^2}},$$

h est en facteur commun; la courbe (C) étant régulièrement analytique $x'^2+y'^2$ n'est jamais nul, de sorte qu'on peut écrire

$$\mathrm{N}(\tau,t)=\frac{\left[1+\dfrac{h}{2}\dfrac{x'x''+y'y''}{x'^2+y'^2}+\ldots\right]\sqrt{1+2h\dfrac{x'x''+y'y''}{x'^2+y'^2}+\ldots}}{h\left[1+h\dfrac{x'x''+y'y''}{x'^2+y'^2}+\ldots\right]},$$

ou encore

$$\mathrm{N}(\tau,t)=\frac{1}{h}+\frac{1}{2}\frac{x'x''+y'y''}{x'^2+y'^2}+\alpha h+\beta h^2+\ldots,$$

$$\mathrm{N}(\tau,t)=\frac{1}{\tau-t}+\frac{1}{2}\frac{x'x''+y'y''}{x'^2+y'^2}+\ldots$$

Conclusion. — *Le noyau de la dérivée tangentielle du potentiel logarithmique de simple couche devient infini quand les deux points se confondent. Cette singularité est un pôle simple de résidu* 1.

39. Équations intégrales avec valeurs principales. — Soient $\mathrm{H}(x,y)$ un noyau continu et $\mathrm{K}(x,y)$ un noyau singulier ayant en $y=x$ un pôle du premier ordre, et envisageons l'équation intégrale

$$f(x)=\varphi(x)+\int_0^{\Omega}\mathrm{H}(x,y)f(y)\,dy+\int_0^{'\Omega}\mathrm{K}(x,y)f(y)\,dy$$

dans laquelle $f(x)$ est la fonction inconnue.

Remarquons d'abord que quand une intégrale existe au sens ordinaire du mot, elle se confond avec sa valeur principale; si bien que l'équation précédente peut s'écrire

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^{'\Omega} [\mathrm{H}(x, y) + \mathrm{K}(x, y)] f(y)\, dy$$

ou en posant

$$\mathrm{N}(x, y) = \mathrm{H}(x, y) + \mathrm{K}(x, y),$$

$$\text{(A)} \qquad f(x) = \varphi(x) + \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, y) f(y)\, dy.$$

Soit $f(x)$ une solution de l'équation (A), on a

$$f(y) = \varphi(y) + \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(y, z) f(z)\, dz.$$

Par conséquent toute solution de l'équation (A) est solution de l'équation (B) suivante :

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} f(x) = \varphi(x) &+ \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, y)\varphi(y)\, dy \\ &+ \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, y)\, dy \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(y, z) f(z)\, dz, \end{aligned}$$

équation qu'on transformera à l'aide de la formule fondamentale (32).

Inversement, soit $f(x)$ une solution de l'équation (B). J'envisage la fonction auxiliaire $\psi(x)$,

$$\psi(x) = f(x) - \varphi(x) - \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, y) f(y)\, dy.$$

J'écris d'abord

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, t)\varphi(t)\, dt + \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, t)\, dt \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(t, z) f(z)\, dz,$$

ou encore

$$f(y) = \varphi(y) + \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(y, t)\varphi(t)\, dt + \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(y, t)\, dt \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(t, z) f(z)\, dz;$$

portant ces deux valeurs dans l'expression de $\psi(x)$, on obtient

$$\begin{aligned}\psi(x) = \varphi(x) &+ \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, t)\varphi(t)\,dt \\ &+ \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, t)\,dt \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(t, z) f(z)\,dz - \varphi(x) \\ &- \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, y)\varphi(y)\,dy - \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, y)\,dy \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(y, t)\varphi(t)\,dt \\ &- \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, y)\,dy \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(y, t)\,dt \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(t, z) f(z)\,dz.\end{aligned}$$

Tout d'abord $\varphi(x)$ disparaît et l'on a

$$\int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, t)\varphi(t)\,dt = \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, y)\varphi(y)\,dy;$$

il reste donc

$$\begin{aligned}\psi(x) = &\int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, t)\,dt \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(t, z) f(z)\,dz \\ &- \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, y)\,dy \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(y, t)\varphi(t)\,dt \\ &- \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, y)\,dy \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(y, t)\,dt \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(t, z) f(z)\,dz.\end{aligned}$$

Ces intégrales ne dépendent que de x, je puis donc échanger les lettres intermédiaires y, z, t, ce qui donne

$$\begin{aligned}\psi(x) = &\int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, t)\,dt \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(t, z) f(z)\,dz \\ &- \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, t)\,dt \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(t, z)\varphi(z)\,dz \\ &- \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, t)\,dt \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(t, z)\,dz \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(z, y) f(y)\,dy,\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$\psi(x) = \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, t)\,dt \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(t, z)\,dz \left[f(z) - \varphi(z) - \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(z, y) f(y)\,dy \right].$$

Or, le crochet n'est pas autre chose que $\psi(z)$. La fonction auxiliaire $\psi(x)$ satisfait donc à l'équation

$$\psi(x) = \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, t)\, dt \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(t, z)\psi(z)\, dz.$$

Mais, cette équation, c'est l'équation (B) où $\varphi(x) = 0$; c'est une équation intégrale homogène, qui n'a de solution que dans certains cas particuliers.

Donc, en général,

$$\psi(x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^{'\Omega} \mathrm{N}(x, y) f(y)\, dy.$$

Toute solution de l'équation (B) est solution de l'équation (A).

CONCLUSION. — *Il est légitime d'itérer les équations contenant des intégrales dont on ne doit prendre que la valeur principale.*

40. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION INTÉGRALE SINGULIÈRE DU PROBLÈME DES MARÉES. — Nous sommes maintenant en mesure d'intégrer l'équation (27) du n° 33, équation qui permet de déterminer la fonction de Green $G(x, y; \xi, \eta)$. Cette équation est la suivante :

$$-\alpha\pi\rho(s) + \alpha \int_C \rho(s') \frac{\cos\psi}{r}\, ds' + 2i\omega\cos\theta \int_C' \rho(s') \frac{\sin\psi}{r}\, ds' = \chi(s).$$

Si le contour (C) est régulièrement analytique, toutes les fonctions qui figurent ici sont périodiques en s et s' et holomorphes quand s et s' varient sur l'axe réel. Seule $\frac{\sin\psi}{r}$ a un pôle simple de résidu égal à 1 quand $s' = s$.

Pour alléger l'écriture, je transcris l'équation sous la forme

$$\rho(s) = \int_C \mathrm{A}(s, s')\rho(s')\, ds' + \int_C' \mathrm{B}(s, s')\rho(s')\, ds' + \eta(s),$$

en posant

$$\eta(s) = -\frac{\chi(s)}{\pi\alpha} \qquad \text{(fonction régulière),}$$

$$A(s, s') = \frac{1}{\pi}\frac{\cos\psi}{r} \qquad \text{id.}$$

$$B(s, s') = \frac{2i\omega\cos\theta}{\pi\alpha}\frac{\sin\psi}{r},$$

cette dernière fonction est régulière sauf au point $s' = s$ où elle a un résidu égal à $\frac{2i\omega\cos\theta}{\pi\alpha}$.

Appliquons le procédé classique de l'*itération*. On a d'abord

$$\rho(s') = \int_C A(s', s'')\rho(s'')\,ds'' + \int_C^{\prime} B(s', s'')\rho(s'')\,ds'' + \eta(s'),$$

et, en portant cette valeur dans l'équation en $\rho(s)$,

$$\begin{aligned} \rho(s) = & \int_C A(s, s')\,ds' \int_C A(s', s'')\rho(s'')\,ds'' \\ & + \int_C A(s, s')\,ds' \int_C^{\prime} B(s', s'')\rho(s'')\,ds'' + \int_C A(s, s')\eta(s')\,ds' \\ & + \int_C^{\prime} B(s, s')\,ds' \int_C A(s', s'')\rho(s'')\,ds'' + \int_C^{\prime} B(s, s')\,ds' \\ & \qquad \times \int_C^{\prime} B(s', s'')\rho(s'')\,ds'' + \int_C B(s, s')\eta(s')\,ds' + \eta(s); \end{aligned}$$

d'où, en utilisant les formules (32) qui donnent le moyen d'intervertir l'ordre des intégrations,

$$\begin{aligned} \rho(s) = & \int_C \rho(s'')\,ds'' \int_C A(s, s')A(s', s'')\,ds' \\ & + \int_C \rho(s'')\,ds'' \int_C^{\prime} A(s, s')B(s', s'')\,ds' + \int_C A(s, s')\eta(s')\,ds' \\ & + \int_C \rho(s'')\,ds'' \int_C^{\prime} B(s, s')A(s', s'')\,ds'' - \pi^2\Big[\lim_{s'=s}(s'-s)B(s, s')\Big]^2 \rho(s) \\ & + \int_C \rho(s'')\,ds'' \int_C^{\prime} B(s, s')B(s', s'')\,ds' + \int_C^{\prime} B(s, s')\eta(s')\,ds' + \eta(s). \end{aligned}$$

Or, on a vu que

$$\lim_{s'=s}(s'-s)\,\mathrm{B}(s,s')=\frac{2i\omega\cos\theta}{\pi\alpha}.$$

D'où l'équation définitive

$$(33)\qquad \left(1-\frac{4\omega^2\cos^2\theta}{\alpha^2}\right)\rho(s)=\int_{\mathrm{C}}\mathrm{K}(s,s'')\,\rho(s'')\,ds''+\Theta(s),$$

dans laquelle le nouveau noyau $\mathrm{K}(s,s'')$ est donné par l'expression

$$\begin{aligned}\mathrm{K}(s,s'')= & \int_{\mathrm{C}}\mathrm{A}(s,s')\mathrm{A}(s',s'')\,ds'+\int_{\mathrm{C}}^{\prime}\mathrm{A}(s,s')\mathrm{B}(s',s'')\,ds'\\ & +\int\mathrm{B}(s,s')\mathrm{A}(s',s'')\,ds'+\int_{\mathrm{C}}\mathrm{B}(s,s')\mathrm{B}(s',s'')\,ds'\end{aligned}$$

et la fonction $\Theta(s)$

$$\Theta(s)=\eta(s)+\int_{\mathrm{C}}\mathrm{A}(s,s')\,\eta(s')\,ds'+\int_{\mathrm{C}}^{\prime}\mathrm{B}(s,s')\,\eta(s')\,ds'.$$

D'après les hypothèses faites au début de ce Chapitre, le binome $1-\dfrac{4\omega^2\cos^2\theta}{\alpha^2}$ ne s'annule pas, puisque *le bassin océanique ne traverse pas la latitude critique*. L'équation (33) est donc une équation ordinaire de Fredholm, et aura, *en général*, une solution.

L'existence de la fonction de Green $\mathrm{G}(x,y;\xi,\eta)$ *est donc ainsi démontrée*.

Il ne reste plus qu'à intégrer l'équation (24), à savoir :

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) & -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}}(a'\alpha'+b'\beta')\,\mathrm{G}\varphi(\xi,\eta)\,ds'\\ & +\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{(\mathrm{E})}\left(\frac{\partial.a'\mathrm{G}}{\partial\xi}+\frac{\partial.b'\mathrm{G}}{\partial\eta}-c'\mathrm{G}\right)\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\\ & -\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{(\mathrm{E})}e'\mathrm{G}\,d\xi\,d\eta\int\!\!\int_{(\mathrm{E})}\mathrm{K}'(\xi,\eta;x',y')\,\varphi(x',y')\,dx'\,dy'\\ = & -\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{(\mathrm{E})}f'\mathrm{G}\,d\xi\,d\eta.\end{aligned}$$

Cette équation de Fredholm sera, *en général*, pourvue d'une solution, et comme elle est exactement équivalente à l'équation intégro-différentielle des marées, nous arrivons à la conclusion de toute cette étude.

Conclusion. — *Si l'on envisage un bassin océanique* $\mathfrak{D}$ *limité par des falaises verticales qui forment un contour* C, *non traversé par la latitude critique, et si l'on tient compte de l'attraction du bourrelet, les équations des marées relatives à ce bassin ont*, en général, *une solution*. Cette solution est donnée par la résolution successive de trois équations de Fredholm.

Le sens des mots *en général* sera précisé par l'étude d'un bassin exceptionnel.

Remarque. — Si l'on n'exclut pas les latitudes critiques, l'équation (33) est *une équation de troisième espèce*, pour employer la terminologie de M. Picard (¹). Mais alors l'équation en $\varphi(x, y)$ n'a plus de sens; et le problème nécessite une étude spéciale.

41. Étude d'un cas d'exception. — Je considère un bassin océanique $\mathfrak{D}$ ayant la forme d'une calotte sphérique, limitée par un parallèle

$$\theta = \text{const.}$$

La condition au bord devient tout simplement

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{2 i \omega \cos \theta_0}{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

et en posant

$$A = \frac{2 \omega \cos \theta_0}{\alpha},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} + i A \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0.$$

Je fais une carte de ce bassin, de manière que l'image de $\mathfrak{D}$ soit un cercle. Ce sera, par exemple, une projection stéréographique.

Le problème préliminaire est alors le suivant :

Déterminer pour un cercle de rayon R *une fonction de Green* G, *telle*

(¹) E. Picard, *Sur les équations intégrales de troisième espèce* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1911).

que l'on ait, sur la circonférence (C) *qui lui sert de frontière, la relation*

$$\frac{\partial G}{\partial n} + i A \frac{\partial G}{\partial s} = 0.$$

Impossibilité du problème. — Je multiplie les deux termes de l'équation précédente par ds et j'intègre tout le long du contour (C)

$$\int_C \frac{\partial G}{\partial n} ds + i A \int_C \frac{\partial G}{\partial s} ds = 0.$$

Mais la fonction G *étant supposée uniforme*

$$\int_C \frac{\partial G}{\partial s} ds = \int dG = 0;$$

on aurait donc

$$\int_C \frac{\partial G}{\partial n} ds = 0.$$

Je dis que c'est impossible; en effet

$$G = \log \frac{1}{r} - G_1,$$

G_1 étant une fonction harmonique, on a par suite

$$\int_C \frac{\partial G}{\partial n} ds = \int_C \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} ds - \int_C \frac{\partial G_1}{\partial n} ds.$$

Cette dernière intégrale est égale à

$$-\int\int_{(D)} \Delta G_1 \, dx \, dy,$$

et, par conséquent, est nulle puisque G_1 est harmonique. Par ailleurs

$$\int_C \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} ds = \int_C d\theta,$$

$d\theta$ désignant l'angle sous lequel on voit l'élément ds d'un point intérieur à (C). Par suite

$$\int_C \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial n} ds = 2\pi,$$

ce qui est en contradiction avec l'équation d'où nous sommes partis.

Il faut donc modifier la définition de la fonction de Green.

Modification de la condition aux limites. — Posons au bord

$$\frac{\partial G}{\partial n} + iA\frac{\partial G}{\partial s} = K,$$

d'où multipliant par ds et en intégrant

$$\int_C \frac{\partial G}{\partial n} ds = K\int_C ds = 2\pi RK,$$

ce qui, d'après ce qui précède, donne l'égalité

$$2\pi = 2\pi RK,$$

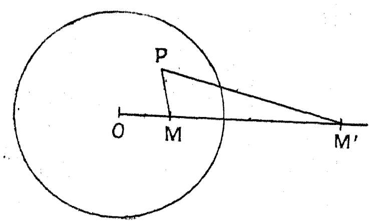
$$K = \frac{1}{R};$$

d'où la nouvelle condition à la frontière (1)

$$\frac{\partial G}{\partial n} + iA\frac{\partial G}{\partial s} = \frac{1}{R}.$$

Expression de la fonction de Green G. — Soient M le point singulier de la fonction de Green, M' son conjugué par rapport à la circonférence, P le point variable x, y.

Fig. 13.



Je pose, avec Poincaré (p. 263),

$$G = \log\frac{1}{MP} + \alpha\log\frac{1}{M'P} + \beta.\widehat{PM'M},$$

(1) Si la frontière était une courbe quelconque, on aurait $K = \frac{2\pi}{L}$, L étant la longueur de la courbe. Poincaré (p. 260 et 263), a écrit $K = 2\pi$.

et je cherche à déterminer α et β de manière que l'on ait sur le cercle de rayon R

$$\frac{\partial G}{\partial n} + i A \frac{\partial G}{\partial s} = \frac{1}{R}.$$

Soient $(a, 0)$ les coordonnées de M.

Celles de M' sont $\left(\frac{R^2}{a}, 0\right)$ et l'on a

$$\begin{aligned} G(x, y; a) = \log \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \\ + \alpha \log \frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{R^2}{a}\right)^2 + y^2}} + \beta \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{\frac{R^2}{a} - x}; \end{aligned}$$

d'où les dérivées

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \alpha \frac{x - \frac{R^2}{a}}{\left(x - \frac{R^2}{a}\right)^2 + y^2} + \beta \frac{y}{\left(x - \frac{R^2}{a}\right)^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \alpha \frac{y}{\left(x - \frac{R^2}{a}\right)^2 + y^2} + \beta \frac{x - \frac{R^2}{a}}{\left(x - \frac{R^2}{a}\right)^2 + y^2}.$$

Sur la frontière où $x^2 + y^2 = R^2$, on a

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{R^2(a-x) + \alpha a (R^2 - ax) + \beta a^2 y}{R^2(R^2 - 2ax + a^2)},$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{-R^2 y - \alpha a^2 y + \beta a (R^2 - ax)}{R^2(R^2 - 2ax + a^2)}.$$

Or

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial x}\frac{x}{R} - \frac{\partial G}{\partial y}\frac{y}{R},$$

$$\frac{\partial G}{\partial s} = -\frac{\partial G}{\partial x}\frac{y}{R} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{x}{R},$$

ce qui donne les équations

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{ax - R^2 + \alpha a (x-a) + \beta a y}{R(R^2 - 2ax + a^2)},$$

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \frac{-ay - \alpha a y + \beta a (x-a)}{R(R^2 - 2ax + a^2)}$$

et, en portant dans l'équation de condition,

$$\frac{\partial G}{\partial n} + i\mathrm{A}\frac{\partial G}{\partial s} = \frac{1}{\mathrm{R}},$$

$$-ax + \mathrm{R}^2 - \alpha a(x-a) - \beta a y + i\mathrm{A}[-ay - \alpha a y + \beta a(x-a)]$$
$$= \mathrm{R}^2 - 2ax + a^2$$

qui doit être une identité en x, y, a, R^2 :

Terme en ax nul,

$$-1 - \alpha + i\mathrm{A}\beta = -2;$$

Terme en ay nul,

$$-\beta - i\mathrm{A} - i\mathrm{A}\alpha = 0;$$

Terme en a^2 nul,

$$\alpha - i\mathrm{A}\beta = 1;$$

Terme en R^2 nul,

$$1 = 1.$$

D'où les deux équations qui déterminent α et β

$$\alpha - i\mathrm{A}\beta = 1,$$
$$i\mathrm{A}\alpha + \beta = -i\mathrm{A};$$

ce qui donne les valeurs cherchées :

$$\alpha = \frac{1+\mathrm{A}^2}{1-\mathrm{A}^2}, \qquad \beta = \frac{-2i\mathrm{A}}{1-\mathrm{A}^2}.$$

Conclusion. — Si $1 - \mathrm{A}^2 \neq 0$, la fonction de Green du problème est

$$G(x, y; \xi, \eta) = \log\frac{1}{\mathrm{PM}} + \frac{1+\mathrm{A}^2}{1-\mathrm{A}^2}\log\frac{1}{\mathrm{PM}'} - \frac{2i\mathrm{A}}{1-\mathrm{A}^2}\widehat{\mathrm{PM}'\mathrm{M}}$$

ou encore, en mettant en évidence les variables (x, y), (ξ, η),

$$G(x, y; \xi, \eta) = \log\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}$$
$$+ \frac{1+\mathrm{A}^2}{1-\mathrm{A}^2}\log\frac{1}{\sqrt{\left(x - \frac{\mathrm{R}^2\xi}{\xi^2+\eta^2}\right)^2 + \left(y - \frac{\mathrm{R}^2\eta}{\xi^2+\eta^2}\right)^2}}$$
$$+ \frac{2i\mathrm{A}}{1-\mathrm{A}^2}\operatorname{arc\,tang}\frac{y - \frac{\mathrm{R}^2\eta}{\xi^2+\eta^2}}{x - \frac{\mathrm{R}^2\xi}{\xi^2+\eta^2}}.$$

Intégration de l'équation des marées. — Montrons maintenant comment, dans le cas actuel, on intégrera l'équation indéfinie

$$\Delta\varphi + a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + c\varphi + e\int\int_{(\mathfrak{D})} \mathrm{K}'(x, y;\, x', y')\,\varphi(x', y')\,dx'\,dy' = f$$

avec la condition au bord

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} + i\mathrm{A}\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0, \qquad \mathrm{A}^2 - 1 \neq 0.$$

$\mathrm{G}(x, y;\, \xi, \eta)$ étant la fonction de Green précédente et k *une constante auxiliaire*, il suffit de poser

$$\begin{aligned}\varphi + k = \frac{1}{2\pi}\int\int_{(\mathfrak{D})} \mathrm{G}\,d\xi\,d\eta \\ \times\left[a'\frac{\partial\varphi'}{\partial\xi} + b'\frac{\partial\varphi'}{\partial\eta} + c'\varphi' - f' + e'\int\int_{(\mathfrak{D})} \mathrm{K}'(\xi, \eta;\, x', y')\,\varphi(x', y')\,dx'\,dy'\right].\end{aligned}$$

Les termes accentués signifient que x et y doivent y être remplacés par ξ et η.

A l'aide d'intégrations par parties, cette équation prend la forme de Fredholm; et, si l'on ne se trouve pas dans un cas singulier, elle admet une solution unique φ qui dépend linéairement de la constante auxiliaire k

$$\varphi = \varphi_0 + k\varphi_1.$$

Cette fonction φ satisfait à l'équation indéfinie et il ne reste plus qu'à exprimer qu'elle remplit la condition au bord.

Tenant compte du fait que, à ce bord,

$$\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial n} + i\mathrm{A}\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial s} = \frac{1}{\mathrm{R}}$$

on a

$$\begin{aligned}0 = \frac{\partial\varphi}{\partial n} + i\mathrm{A}\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{1}{2\pi\mathrm{R}}\int\int_{(\mathfrak{D})} d\xi\,d\eta \\ \times\left[a'\frac{\partial\varphi'}{\partial\xi} + b'\frac{\partial\varphi'}{\partial\eta} + c'\varphi' - f' + e'\int\int_{(\mathfrak{D})} \mathrm{K}'\,\varphi(x', y')\,dx'\,dy'\right],\end{aligned}$$

ce qui permet de déterminer k, et le *problème est ainsi complètement résolu.*

42. Cas doublement singulier. — Les calculs précédents tombent en

défaut, si l'on a

$$A = \pm 1$$

ou en remplaçant A par sa valeur

$$\frac{2\omega \cos \theta_0}{\alpha} = \pm 1,$$

c'est-à-dire s'il s'agit d'une oscillation dont la pulsation α est précisément égale à $\pm 2\omega \cos\theta_0$; autrement dit, *si le bord du bassin océanique coïncide avec le parallèle critique*. Il ne s'agira pas ici de l'équation générale des marées, mais simplement de la recherche d'une fonction de Green G qui vérifie, sur la circonférence qui limite le domaine ϖ, l'équation

$$\frac{\partial G}{\partial n} + i\frac{\partial G}{\partial s} = \frac{1}{R}.$$

Calculons d'abord deux intégrales auxiliaires.

L'intégrale I_1. — Soit le noyau singulier

$$N_1(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{y-x}{2}}{\sin \frac{y-x}{2}}$$

qui admet la période 2π par rapport à chacune des variables x et y, et qui a au point $y = x$ un pôle simple dont le résidu est égal à 1.

J'envisage l'intégrale singulière

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{y-x}{2}}{\sin \frac{y-x}{2}} dy.$$

D'après la définition même de I_1, on a

$$I_1 = \lim_{h=0} \left(\int_0^{x-h} \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{y-x}{2}}{\sin \frac{y-x}{2}} dy + \int_{x+h}^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{y-x}{2}}{\sin \frac{y-x}{2}} dy \right).$$

Une primitive est

$$\log \left| \sin \frac{y-x}{2} \right|$$

ce qui donne

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \lim_{h=0}\left[\left(\log\sin\frac{x-y}{2}\right)_0^{x-h} + \left(\log\sin\frac{y-x}{2}\right)_{x+h}^{2\pi}\right] \\
&= \lim_{h=0}\left[\log\sin\frac{h}{2} - \log\sin\frac{x}{2} + \log\sin\left(\pi-\frac{x}{2}\right) - \log\sin\frac{h}{2}\right] = 0.
\end{aligned}
$$

On a donc

$$
I_1 = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{y-x}{2}}{\sin\frac{y-x}{2}}\,dy = 0.
$$

L'intégrale I_2. — J'itère une fois le noyau précédent et je pose

$$
I_2 = N_2(x, y) = \int_0^{2\pi} N_1(x, z)\, N_1(z, y)\, dz
$$

ou encore

$$
I_2 = \int_0^{2\pi}\frac{\cos\frac{z-x}{2}\cos\frac{y-z}{2}}{4\sin\frac{z-x}{2}\sin\frac{y-z}{2}}\,dz,
$$

ce qu'on peut écrire

$$
I_2 = \int_0^{2\pi}\frac{\cos\frac{z-x}{2}\cos\frac{y-z}{2} - \sin\frac{z-x}{2}\sin\frac{y-z}{2} + \sin\frac{z-x}{2}\sin\frac{y-z}{2}}{4\sin\frac{z-x}{2}\sin\frac{y-z}{2}}\,dz,
$$

$$
I_2 = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4} + \frac{\cos\frac{y-x}{2}}{4\sin\frac{z-x}{2}\sin\frac{y-z}{2}}\right)dz,
$$

$$
I_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\cos\frac{y-x}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dz}{\sin\frac{z-x}{2}\sin\frac{y-z}{2}}.
$$

D'autre part, on a l'identité évidente

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos\frac{z-x}{2}}{\sin\frac{z-x}{2}} + \frac{\cos\frac{y-z}{2}}{\sin\frac{y-z}{2}} &= \frac{\sin\frac{y-z}{2}\cos\frac{z-x}{2} + \cos\frac{y-z}{2}\sin\frac{z-x}{2}}{\sin\frac{z-x}{2}\sin\frac{y-z}{2}} \\
&= \sin\frac{y-x}{2}\,\frac{1}{\sin\frac{z-x}{2}\sin\frac{y-z}{2}}.
\end{aligned}
$$

De sorte que l'intégrale I_2 peut se mettre sous la forme

$$I_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\cot\frac{y-x}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\frac{z-x}{2}}{\sin\frac{z-x}{2}}dz + \frac{1}{4}\cot\frac{y-x}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\frac{y-z}{2}}{\sin\frac{y-z}{2}}dz.$$

Or on vient de voir ci-dessus que chacune de ces intégrales est nulle, et il reste simplement

$$I_2 = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\frac{\cos\frac{z-x}{2}\cos\frac{y-z}{2}}{\sin\frac{z-x}{2}\sin\frac{y-z}{2}}dz = \frac{\pi}{2}.$$

Vérification de la formule fondamentale. — Calculons

$$J = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{y-x}{2}}{\sin\frac{y-x}{2}}dy\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\frac{\cos\frac{z-y}{2}}{\sin\frac{z-y}{2}}dz.$$

On sait à l'avance que $J = 0$, d'après la valeur de I_1. Mais, en vertu de la formule (32), on a aussi

$$J = -\pi^2 + \int_0^{2\pi}dz\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\frac{\cos\frac{y-x}{2}\cos\frac{z-y}{2}}{\sin\frac{y-x}{2}\sin\frac{z-y}{2}}dz,$$

c'est-à-dire, d'après la valeur de I_2,

$$J = -\pi^2 + \int_0^{2\pi}\frac{\pi}{2}dz = 0.$$

Théorème. — *S'il existe une fonction* G, *il en existe une infinité.* Soit une première fonction de Green G, vérifiant au bord la condition

$$\frac{\partial G}{\partial n} + i\frac{\partial G}{\partial s} = \frac{1}{R},$$

et une seconde du même genre G′

$$\frac{\partial G'}{\partial n} + i\frac{\partial G'}{\partial s} = \frac{1}{R};$$

leur différence

$$V = G' - G$$

est une fonction *harmonique* ayant pour condition à la limite

$$\frac{\partial V}{\partial n} + i\frac{\partial V}{\partial s} = 0.$$

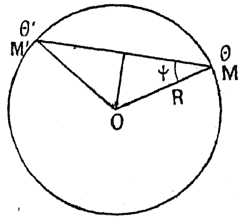
Conformément à la méthode de Fredholm, j'essaie de représenter V par un potentiel logarithmique de simple couche, dont je prends la densité $\rho(s)$ pour inconnue

$$V(x, y) = \int_C \rho(s') \log\frac{1}{r}\, ds'.$$

Je porte cette valeur dans la condition au bord et j'obtiens l'équation homogène

$$-\pi\rho(s) + \int_C \rho(s')\frac{\cos\psi}{r}\, ds' + i\int_C \rho(s')\frac{\sin\psi}{r}\, ds' = 0.$$

Fig. 14.



Comme la frontière est une circonférence de rayon R, cette équation prend une forme très simple.

Soient θ et θ' les angles qui déterminent M et M'.

On a d'abord

$$r = MM' = 2R\cos\psi,$$

d'où, par conséquent,

$$\frac{\cos\psi}{r}\, ds' = \frac{1}{2R}\, ds' = \frac{1}{2R}\, R\, d\theta' = \frac{d\theta'}{2},$$

puis

$$\frac{\sin\psi}{r}\, ds' = \frac{\sin\psi}{2R\cos\psi}\, ds' = \frac{1}{2}\frac{\sin\psi}{\cos\psi}\, d\theta' = \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\theta'-\theta}{2}}{\sin\frac{\theta'-\theta}{2}}\, d\theta';$$

d'où l'équation de Fredholm

$$-\pi\rho(\theta)+\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\rho(\theta')\,d\theta'+i\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,\frac{\cos\dfrac{\theta'-\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta'-\theta}{2}}\rho(\theta')\,d\theta',$$

ou encore

$$\rho(\theta)=\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\,\frac{\cos\dfrac{\theta'-\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta'-\theta}{2}}\rho(\theta')\,d\theta'+k,$$

en posant

$$k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho(\theta')\,d\theta'.$$

Essayons d'abord d'appliquer la méthode générale

$$\rho(\theta')=\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cot\frac{\theta''-\theta'}{2}\,\rho(\theta'')\,d\theta''+k,$$

ce qui donne

$$\rho(\theta)=k-\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cot\frac{\theta'-\theta}{2}\,d\theta'\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cot\frac{\theta''-\theta'}{2}\,\rho(\theta'')\,d\theta''$$
$$+\frac{ik}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cot\frac{\theta'-\theta}{2}\,d\theta'.$$

J'applique la formule fondamentale et je tiens compte des valeurs ci-dessus trouvées pour I_1 et I_2; j'obtiens

$$\rho(\theta)=\rho(\theta)-\frac{1}{\pi^2}\times\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}\rho(\theta')\,d\theta'+0+k.$$

Et comme

$$k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho(\theta')\,d\theta',$$

l'équation itérée se réduit à une identité.

La méthode générale étant illusoire, je distingue dans ρ la partie réelle et la partie imaginaire

$$\rho(\theta)=\rho_1(\theta)+i\rho_2(\theta);$$

l'équation en ρ se sépare en deux :

$$\rho_1(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_C' \cot\frac{\theta'-\theta}{2}\rho_2(\theta')\,d\theta' + \frac{1}{2\pi}\int_C \rho_1(\theta')\,d\theta',$$

$$\rho_2(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_C' \cot\frac{\theta'-\theta}{2}\rho_1(\theta')\,d\theta' + \frac{1}{2\pi}\int_C \rho_2(\theta')\,d\theta'.$$

Je dis que chacune de ces deux équations est la conséquence de l'autre.

Pour le démontrer je me donne *arbitrairement* $\rho_1(\theta)$ et je pose

$$\rho_2(\theta') = \frac{1}{2\pi}\int_C' \cot\frac{\theta''-\theta'}{2}\rho_1(\theta'')\,d\theta'' + \frac{1}{2\pi}\int_C \rho_2(\theta'')\,d\theta''.$$

Je multiplie tous les termes par $\frac{1}{2}\cot\frac{\theta'-\theta}{2}$, j'intègre tout le long de la circonférence et j'en prends les valeurs principales

$$\frac{1}{2}\int_C' \cot\frac{\theta'-\theta}{2}\rho_2(\theta')\,d\theta' = \frac{1}{4\pi}\int_C' \cot\frac{\theta'-\theta}{2}\,d\theta'\int_C' \cot\frac{\theta''-\theta'}{2}\rho_1(\theta'')\,d\theta'';$$

d'où, en appliquant la formule fondamentale,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_C' &\cot\frac{\theta'-\theta}{2}\rho_2(\theta')\,d\theta' \\ &= -\pi\rho_1(\theta) + \frac{1}{4\pi}\int_C \rho_1(\theta'')\,d\theta''\int_C' \cot\frac{\theta'-\theta}{2}\cot\frac{\theta''-\theta'}{2}\,d\theta'\end{aligned}$$

et, en se reportant à I_2,

$$\frac{1}{4}\int_C' \cot\frac{\theta'-\theta}{2}\cot\frac{\theta''-\theta'}{2}\,d\theta' = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{1}{2}\int_C' \cot\frac{\theta'-\theta}{2}\rho_2(\theta')\,d\theta' = -\pi\rho_1(\theta) + \frac{1}{2}\int_C \rho_1(\theta'')\,d\theta'';$$

on obtient ainsi exactement la première équation

$$\rho_1(\theta) = -\frac{1}{2\pi}\int_C' \cot\frac{\theta'-\theta}{2}\rho_2(\theta')\,d\theta' + \frac{1}{2\pi}\int_C \rho_1(\theta')\,d\theta'.$$

Conclusion. — Étant donnée une fonction de Green G_0 vérifiant au bord la condition

$$\frac{\partial G_0}{\partial n} + i\frac{\partial G_0}{\partial s} = \frac{1}{R},$$

on en obtient une infinité d'autres G en se donnant $\rho_1(\theta)$ *arbitraire*, et en posant successivement

$$\rho_2(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_C' \cot\frac{\theta'-\theta}{2}\,\rho_1(\theta')\,d\theta' + \frac{1}{2\pi}\int_C \rho_2(\theta')\,d\theta',$$

$$\rho(s) = \rho_1(s) + i\rho_2(s),$$

$$G = G_0 + \int_C \rho(s)\log\frac{1}{r}\,ds.$$

Relation avec les fonctions analytiques. — Soit $f(z)$ une fonction quelconque de la variable complexe $z = x + iy$

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

On a les relations

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Je pose

$$\varphi(x, y) = P(x, y) - iQ(x, y)$$

et je cherche la valeur sur la circonférence de rayon R de

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} + i\frac{\partial\varphi}{\partial s},$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial n} &= -\frac{1}{R}\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = -\frac{1}{R}\left[x\left(\frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial P}{\partial y} - i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right],\\
\frac{\partial\varphi}{\partial s} &= -\frac{1}{R}\left(y\frac{\partial\varphi}{\partial x} - x\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = -\frac{1}{R}\left[y\left(\frac{\partial P}{\partial x} - i\frac{\partial Q}{\partial x}\right) - x\left(\frac{\partial P}{\partial y} - i\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right],
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial n} &= -\frac{1}{R}\left[\quad x\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial P}{\partial y}\right) + y\left(\frac{\partial P}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial x}\right)\right],\\
\frac{\partial\varphi}{\partial s} &= -\frac{1}{R}\left[-x\left(\frac{\partial P}{\partial y} - i\frac{\partial P}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right],
\end{aligned}\right.$$

ce qui donne, quelle que soit la fonction $f(z)$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} + i\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0.$$

La proposition précédente peut donc s'énoncer ainsi :

Pour un bassin circulaire limité par un parallèle critique, s'il existe une fonction de Green G_0 *vérifiant au bord la relation*

$$\frac{\partial G_0}{\partial n} + i\frac{\partial G_0}{\partial s} = \frac{1}{R},$$

il en existe une infinité définie par la formule

$$G = G_0 + P(x, y) - iQ(x, y),$$

où P *et* Q *sont les deux fonctions associées d'une fonction analytique.*

Ces deux exemples (nos 41 et 42) donnent une idée des circonstances diverses qui peuvent se présenter dans le cas général.

CHAPITRE IV.

LES ÉQUATIONS DES MARÉES ET LE CALCUL DES VARIATIONS.

43. Énoncé du problème et rappel des équations des marées. — Le but de ce Chapitre est de ramener les équations des marées à un problème de calcul des variations. Dans l'intention de provoquer des recherches et de préparer l'application de la méthode de Ritz, H. Poincaré a donné une solution de la question et il a été suivi dans cette voie par A. Blondel et M. F. Jager. Mais *l'intégrale de Poincaré* renferme des coefficients qui deviennent infinis à la *latitude critique*. Conséquemment, il n'est pas sans intérêt de chercher à éviter cette première difficulté.

D'après les équations (10) du n° 15, chaque oscillation contrainte harmonique complexe du bassin formé par l'ensemble des océans est déterminée par les équations suivantes, où x et y désignent les coordonnées *sur la carte* de la molécule liquide mise en mouvement par la marée.

En tout point intérieur au bassin océanique $\mathcal{D}$,

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &u + 2i\frac{\omega\cos\theta}{\alpha}v = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ &v - 2i\frac{\omega\cos\theta}{\alpha}u = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\\ &\frac{\zeta}{k^2} = \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y},\\ &\alpha^2\varphi = g\zeta + \Pi'' + F(x, y),\\ &\Pi'' = -\int\int_{\mathcal{D}} \frac{\zeta' \, dx' \, dy'}{k'^2 r}. \end{aligned}\right.$$

Au bord (C) du bassin, la condition suivante doit être vérifiée :

$$h v\, dx - h u\, dy = 0.$$

44. L'INTÉGRALE DE POINCARÉ J. — Si l'on élimine les pseudo-déplacements u et v, on obtient les équations (11) du n° 16, qui, en modifiant légèrement les notations, peuvent s'écrire

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\zeta}{k^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right),\\
\alpha^2 \varphi &= g\zeta + \Pi'' + F(x, y),\\
h_1 &= \frac{h\alpha^2}{4\omega^2 \cos^2\theta - \alpha^2},\\
\eta &= \frac{2\omega h_1 \cos\theta}{\alpha} = \frac{2\omega \alpha h \cos\theta}{4\omega^2 \cos^2\theta - \alpha^2},
\end{aligned}\right.$$

avec la condition au bord

$$h\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{2i\omega \cos\theta}{\alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right) = 0.$$

Pour obtenir la forme cherchée, dans toutes ces équations je sépare la partie réelle et la partie imaginaire en posant

$$\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_1 + i\varphi_2,\\
\zeta &= \zeta_1 + i\zeta_2,\\
\Pi'' &= \Pi''_1 + i\Pi''_2,\\
F &= F_1 + iF_2,
\end{aligned}$$

et j'obtiens ainsi les quatre équations indéfinies

$$(36)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\zeta_1}{k^2} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\zeta_2}{k^2} = 0,\\
&\qquad - \frac{\varphi_1}{k^2} + \frac{g\zeta_1}{\alpha^2 k^2} + \frac{\Pi''_1}{\alpha^2 k^2} + \frac{F_1}{\alpha^2 k^2} = 0,\\
&\qquad - \frac{\varphi_2}{k^2} + \frac{g\zeta_2}{\alpha^2 k^2} + \frac{\Pi''_2}{\alpha^2 k^2} + \frac{F_2}{\alpha^2 k^2} = 0,
\end{aligned}\right.$$

et les deux équations à la frontière

$$(37)\qquad \begin{cases} h\left(\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \dfrac{2\omega\cos\theta}{\alpha}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial s}\right) = 0, \\ h\left(\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n} + \dfrac{2\omega\cos\theta}{\alpha}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial s}\right) = 0. \end{cases}$$

Je multiplie respectivement les quatre équations indéfinies (36) par

$$\delta\varphi_1\,dx\,dy,\qquad \delta\varphi_2\,dx\,dy,\qquad \delta\zeta_1\,dx\,dy,\qquad \delta\zeta_2\,dx\,dy,$$

et j'intègre dans tout le bassin océanique $\mathfrak{O}$, limité par le contour (C); cette intégrale doit évidemment être nulle.

Je dis que cette intégrale se ramène à la variation exacte δJ d'une intégrale J dont je vais chercher l'expression.

Les deux premiers termes de la première équation (36) intégrés par parties donnent

$$\begin{aligned}\iint_{\mathfrak{O}} &\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)\right]\delta\varphi_1\,dx\,dy \\ &= -\iint_{\mathfrak{O}} h_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\,\delta\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\,\delta\varphi_1}{\partial y}\right)dx\,dy + \int_{C} h_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}dy - \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}dx\right)\delta\varphi_1,\end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$-\frac{1}{2}\delta\iint_{\mathfrak{O}} h_1\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy - \int_{C}\delta\varphi_1\,h_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\,ds,$$

et les termes analogues de la seconde équation donneront

$$\begin{aligned}\iint_{\mathfrak{O}} &\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(h_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)\right]\delta\varphi_2\,dx\,dy \\ &= -\frac{1}{2}\delta\iint_{\mathfrak{O}} h_1\left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy - \int_{C}\delta\varphi_2\,h_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\,ds.\end{aligned}$$

Envisageons

$$\iint_{\mathfrak{O}}\left(-\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\delta\varphi_1\,dx\,dy;$$

cette intégrale peut s'écrire

$$\int\int_{(\mathrm{k})}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)\right]\delta\varphi_1\,dx\,dy$$
$$=\int\int_{(\mathrm{k})}\left[-\eta\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\frac{\partial\,\delta\varphi_1}{\partial x}+\eta\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\frac{\partial\,\delta\varphi_1}{\partial y}\right]dx\,dy+\int_{\mathrm{C}}\eta\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}dy\right)\delta\varphi_1;$$

autrement dit,

$$=\int\int_{(\mathrm{k})}\left[-\eta\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\frac{\partial\,\delta\varphi_1}{\partial x}+\eta\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\frac{\partial\,\delta\varphi_1}{\partial y}\right]dx\,dy+\int_{\mathrm{C}}\eta\frac{\partial\varphi_2}{\partial s}\delta\varphi_1\,ds.$$

On a de même

$$\int\int_{(\mathrm{k})}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)\delta\varphi_2\,dx\,dy$$
$$=\int\int_{(\mathrm{k})}\left[\eta\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\frac{\partial\,\delta\varphi_2}{\partial x}-\eta\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\,\delta\varphi_2}{\partial y}\right]dx\,dy-\int_{\mathrm{C}}\eta\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}\delta\varphi_2\,ds.$$

D'où, en réunissant ces quatre intégrales, on a d'abord pour les intégrales doubles

$$-\frac{1}{2}\delta\int\int_{(\mathrm{k})}h_1\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$
$$+\delta\int\int_{(\mathrm{k})}\eta\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

puis pour les intégrales simples, en se rappelant que

$$\eta=\frac{2\omega\cos\theta}{\alpha}h_1$$

$$-\int_{\mathrm{C}}h_1\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}+\frac{2\omega\cos\theta}{\alpha}\frac{\partial\varphi_1}{\partial s}\right)\delta\varphi_2\,ds-\int_{\mathrm{C}}h_1\left(\frac{d\varphi_1}{dn}-\frac{2\omega\cos\theta}{\alpha}\frac{\partial\varphi_2}{\partial s}\right)\delta\varphi_1\,ds.$$

Si l'on se reporte aux conditions à la frontière (37), on voit que ces deux intégrales curvilignes sont nulles, car h_1 contient h en facteur.

On a ensuite

$$\int\int_{(\mathrm{k})}\left(-\frac{\zeta_1}{k^2}\delta\varphi_1-\frac{\varphi_1}{k^2}\delta\zeta_1\right.$$
$$\left.+\frac{g\zeta_1}{\alpha^2k^2}\delta\zeta_1+\frac{\mathrm{F}_1}{\alpha^2k^2}\delta\zeta_1-\frac{\zeta_2}{k^2}\delta\varphi_2-\frac{\varphi_2}{k^2}\delta\zeta_2+\frac{g\zeta_2}{\alpha^2k^2}\delta\zeta_2+\frac{\mathrm{F}_2\,\delta\zeta_2}{\alpha^2k^2}\right)dx\,dy,$$

qui est une variation exacte, à savoir

$$\delta \int\int_{(\mathrm{E})} \left[-\frac{\zeta_1\varphi_1+\zeta_2\varphi_2}{k^2} + \frac{g(\zeta_1^2+\zeta_2^2)}{2\alpha^2 k^2} + \frac{\mathrm{F}_1\zeta_1+\mathrm{F}_2\zeta_2}{\alpha^2 k^2} \right] dx\, dy,$$

et il reste

$$\int\int_{(\mathrm{E})} \frac{\Pi''_1\,\delta\zeta_1+\Pi''_2\,\delta\zeta_2}{\alpha^2 k^2}\, dx\, dy.$$

Envisageons ζ_1 et Π''_1,

$$\Pi''_1(x, y) = -\int\int_{(\mathrm{E})} \frac{\zeta_1(x', y')}{k^2(x', y')\, r(x, y; x', y')}\, dx'\, dy',$$

et par conséquent

$$\delta\,\Pi''_1(x, y) = -\int\int_{(\mathrm{E})} \frac{\delta\zeta_1(x', y')}{k^2(x', y')\, r(x, y; x', y')}\, dx'\, dy',$$

puis

$$\int\int_{(\mathrm{E})} \frac{\zeta_1\,\delta\Pi''_1}{k^2}\, dx\, dy$$
$$= -\int\int_{(\mathrm{E})} \frac{\zeta_1(x, y)}{k^2(x, y)}\, dx\, dy \int\int_{(\mathrm{E})} \frac{\delta\zeta_1(x', y')}{k^2(x', y')\, r(x, y; x', y')}\, dx'\, dy';$$

d'un autre côté,

$$\int\int_{(\mathrm{E})} \frac{\Pi''_1\,\delta\zeta_1}{k^2}\, dx\, dy$$
$$= -\int\int_{(\mathrm{E})} \frac{\delta\zeta_1(x, y)}{k^2(x, y)}\, dx\, dy \int\int_{(\mathrm{E})} \frac{\zeta_1(x', y')}{k^2(x', y')\, r(x, y; x', y')}\, dx'\, dy'.$$

La fonction $r(x, y; x', y')$ est symétrique par rapport aux paires de variables $x, y; x', y'$; les deux intégrales quadruples sont donc égales et l'on a

$$\int\int_{(\mathrm{E})} \frac{\zeta_1\,\delta\Pi''_1}{k^2}\, dx\, dy$$
$$= \int\int_{(\mathrm{E})} \frac{\Pi''_1\,\delta\zeta_1}{k^2}\, dx\, dy = \int\int \frac{\zeta_1\,\delta\Pi''_1+\Pi''_1\,\delta\zeta_1}{2k^2}\, dx\, dy = \delta\int\int \frac{\Pi''_1\,\zeta_1}{2k^2}\, dx\, dy.$$

On a donc

$$\int\int_{(\mathrm{D})} \frac{\Pi''_1\,\delta\zeta_1 + \Pi''_2\,\delta\zeta_2}{\alpha^2 k^2}\,dx\,dy = \delta \int\int_{(\mathrm{D})} \frac{\Pi''_1\,\zeta_1 + \Pi''_2\,\zeta_2}{2\,\alpha^2 k^2}\,dx\,dy.$$

Rassemblant tous ces résultats, nous voyons que les six équations du problème ont pour conséquence

$$\delta \mathrm{J} = 0,$$

en désignant par J l'intégrale suivante

$$(38)\quad \mathrm{J} = \int\int_{(\mathrm{D})} \left\{ -\frac{h_1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2\right] \right.$$
$$+ \eta\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right) - \frac{\zeta_1\varphi_1 + \zeta_2\varphi_2}{k^2}$$
$$\left. + \frac{g(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)}{2\,\alpha^2 k^2} + \frac{\zeta_1\Pi''_1 + \zeta_2\Pi''_2}{2\,\alpha^2 k^2} + \frac{\zeta_1 \mathrm{F}_1 + \zeta_2 \mathrm{F}_2}{\alpha^2 k^2} \right\} dx\,dy.$$

Remarque. — Cette intégrale, trouvée par Poincaré dans le cas de $h = 0$ au bord de la mer, est encore valable si le bassin océanique est limité par une falaise verticale, comme l'a montré M. Jager. La marche suivie ici prouve que le même théorème est vrai si le bord de la mer se compose en partie de plages, et en partie de falaises.

Réciproquement. — Dans le champ fonctionnel φ_1, φ_2, ζ_1, ζ_2, où les fonctions φ_1, φ_2 vérifient les équations aux limites, si l'on cherche le système de fonctions qui annule la variation première δJ, on trouve que ces fonctions sont déterminées par les quatre équations (36) qui ont servi de point de départ.

45. L'intégrale J_1. — L'intégrale de Poincaré J contient h_1 et η qui deviennent infinis à *la latitude critique*. Il est aisé de former une intégrale J_1 qui ne présente pas cette difficulté. Pour cela, il suffit de reprendre les équations (34) et de refaire le raisonnement précédent. Posons donc dans ces équations

$$\begin{aligned} u &= u_1 + i u_2, \\ v &= v_1 + i v_2, \\ \varphi &= \varphi_1 + i \varphi_2, \\ \zeta &= \zeta_1 + i \zeta_2, \\ \Pi'' &= \Pi''_1 + i \Pi''_2, \\ \mathrm{F} &= \mathrm{F}_1 + i \mathrm{F}_2; \end{aligned}$$

elles deviennent

$$u_1 - \frac{2\omega\cos\theta}{\alpha} v_2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = 0,$$

$$u_2 + \frac{2\omega\cos\theta}{\alpha} v_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = 0,$$

$$v_1 + \frac{2\omega\cos\theta}{\alpha} u_2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0,$$

$$v_2 - \frac{2\omega\cos\theta}{\alpha} u_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial h u_1}{\partial x} + \frac{\partial h v_1}{\partial y} - \frac{\zeta_1}{k^2} = 0,$$

$$\frac{\partial h u_2}{\partial x} + \frac{\partial h v_2}{\partial y} - \frac{\zeta_2}{k^2} = 0,$$

$$-\frac{\varphi_1}{k^2} + \frac{g\zeta_1}{\alpha^2 k^2} + \frac{\Pi''_1}{\alpha^2 k^2} + \frac{F_1}{\alpha^2 k^2} = 0,$$

$$-\frac{\varphi_2}{k^2} + \frac{g\zeta_2}{\alpha^2 k^2} + \frac{\Pi''_2}{\alpha^2 k^2} + \frac{F_2}{\alpha^2 k^2} = 0;$$

la condition au bord se dédouble en deux équations :

$$h u_1\, dy - h v_1\, dx = 0,$$
$$h u_2\, dy - h v_2\, dx = 0.$$

Je donne à u_1, u_2, v_1, v_2 de petites variations δu_1, δu_2, δv_1, δv_2 respectant les conditions au bord, à φ_1, φ_2, ζ_1, ζ_2 les variations $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$, $\delta\zeta_1$, $\delta\zeta_2$; je multiplie les équations respectivement par $-h\,\delta u_1$, $-h\,\delta u_2$, $-h\,\delta v_1$, $-h\,\delta v_2$, $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$, $\delta\zeta_1$, $\delta\zeta_2$, puis par $dx\,dy$, et j'intègre sur toute la surface ω du bassin océanique. J'obtiens ainsi une intégrale qui est évidemment nulle.

J'ai d'abord

$$\int\!\!\int_{\omega} -h(u_1\,\delta u_1 + u_2\,\delta u_2 + v_1\,\delta v_1 + v_2\,\delta v_2)\,dx\,dy,$$

qui peut s'écrire

$$\delta \int\!\!\int_{\omega} -\frac{h}{2}(u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2)\,dx\,dy,$$

puis

$$\int\!\!\int_{\omega} \frac{2\omega\cos\theta}{\alpha} h(v_2\,\delta u_1 - v_1\,\delta u_2 - u_2\,\delta v_1 + u_1\,\delta v_2)\,dx\,dy,$$

qui s'écrit

$$\delta \iint_{(\mathrm{D})} \frac{2\omega \cos\theta}{\alpha} h(u_1 v_2 - v_1 u_2)\, dx\, dy;$$

vient ensuite

$$-\iint_{(\mathrm{D})} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} h\, \delta u_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} h\, \delta u_2 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} h\, \delta v_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} h\, \delta v_2 \right) dx\, dy,$$

qui, par l'application des formules de Green,

$$\iint_{(\mathrm{D})} \mathrm{P} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} dx\, dy = \int_{\mathrm{C}} \mathrm{PQ}\, dy - \iint_{(\mathrm{D})} \mathrm{Q} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} dx\, dy,$$

$$\iint_{(\mathrm{D})} \mathrm{P} \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} dx\, dy = -\int_{\mathrm{C}} \mathrm{PQ}\, dx - \iint_{(\mathrm{D})} \mathrm{Q} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} dx\, dy,$$

se dédouble en deux intégrales

$$-\int_{\mathrm{C}} \varphi_1 h\, \delta u_1\, dy + \varphi_2 h\, \delta u_2\, dy - \varphi_1 h\, \delta v_1\, dx - \varphi_2 h\, \delta v_2\, dx,$$

$$+\iint_{(\mathrm{D})} \left[\varphi_1 \left(\frac{\partial h\, \delta u_1}{\partial x} + \frac{\partial h\, \delta v_1}{\partial y} \right) + \varphi_2 \left(\frac{\partial h\, \delta u_2}{\partial x} + \frac{\partial h\, \delta v_2}{\partial y} \right) \right] dx\, dy;$$

l'intégrale simple est nulle, puisque δu_1, δv_1, δu_2, δv_2 vérifient les conditions à la frontière.

On a maintenant

$$\iint_{(\mathrm{D})} \left[\delta\varphi_1 \left(\frac{\partial h\, u_1}{\partial x} + \frac{\partial h\, v_1}{\partial y} \right) + \delta\varphi_2 \left(\frac{\partial h\, u_2}{\partial x} + \frac{\partial h\, v_2}{\partial y} \right) \right] dx\, dy;$$

la somme des deux dernières intégrales doubles forme une variation exacte, à savoir

$$\delta \iint_{(\mathrm{D})} \left[\varphi_1 \left(\frac{\partial h\, u_1}{\partial x} + \frac{\partial h\, v_1}{\partial y} \right) + \varphi_2 \left(\frac{\partial h\, u_2}{\partial x} + \frac{\partial h\, v_2}{\partial y} \right) \right] dx\, dy.$$

Puis on a

$$-\iint_{(\mathrm{D})} \frac{\zeta_1\, \delta\varphi_1 + \varphi_1\, \delta\zeta_1 + \zeta_2\, \delta\varphi_2 + \varphi_2\, \delta\zeta_2}{k^2} dx\, dy = -\delta \iint_{(\mathrm{D})} \frac{\zeta_1 \varphi_1 + \zeta_2 \varphi_2}{k^2} dx\, dy,$$

$$+\iint_{(\mathrm{D})} \frac{g}{\alpha^2 k^2} (\zeta_1\, \delta\zeta_1 + \zeta_2\, \delta\zeta_2)\, dx\, dy = \delta \iint_{(\mathrm{D})} \frac{g}{2\alpha^2 k^2} (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)\, dx\, dy,$$

$$+\iint_{(\mathrm{D})} \frac{1}{\alpha^2 k^2} (\mathrm{F}_1\, \delta\zeta_1 + \mathrm{F}_2\, \delta\zeta_2)\, dx\, dy = \delta \iint_{(\mathrm{D})} \frac{\mathrm{F}_1 \zeta_1 + \mathrm{F}_2 \zeta_2}{\alpha^2 k^2} dx\, dy,$$

et comme ci-dessus

$$\int\int_{(\mathfrak{D})} \frac{\Pi''_1 \delta\zeta_1 + \Pi''_2 \delta\zeta_2}{\alpha^2 k^2} dx\, dy = \delta \int\int_{(\mathfrak{D})} \frac{\Pi''_1 \zeta_1 + \Pi''_2 \zeta_2}{2\alpha^2 k^2} dx\, dy.$$

En rassemblant tous ces résultats, on voit que les dix équations de départ ont pour conséquence

$$\delta J_1 = 0,$$

à condition de poser

$$(39) \quad \begin{aligned} J_1 = &-\int\int_{(\mathfrak{D})} \frac{h}{2}\left[u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - \frac{4\omega\cos\theta}{\alpha}(u_1 v_2 - v_1 u_2)\right] dx\, dy \\ &+ \int\int_{(\mathfrak{D})} \left[\varphi_1\left(\frac{\partial h u_1}{\partial x} + \frac{\partial h v_1}{\partial y}\right) + \varphi_2\left(\frac{\partial h u_2}{\partial x} + \frac{\partial h v_2}{\partial y}\right)\right] dx\, dy \\ &+ \int\int_{(\mathfrak{D})} \left[-\frac{\zeta_1\varphi_1 + \zeta_2\varphi_2}{k^2} + \frac{g(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)}{2\alpha^2 k^2}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{\Pi''_1 \zeta_1 + \Pi''_2 \zeta_2}{2\alpha^2 k^2} + \frac{F_1\zeta_1 + F_2\zeta_2}{\alpha^2 k^2}\right] dx\, dy. \end{aligned}$$

Réciproquement. — Dans le champ fonctionnel u_1, v_1; u_2, v_2; φ_1, φ_2; ζ_1, ζ_2; où u_1, v_1, u_2, v_2 satisfont aux conditions au bord, si l'on cherche le système de fonctions qui annule la variation première δJ_1, on trouve que ces fonctions sont déterminées par les huit équations indéfinies qui ont servi de point de départ.

Il suffit pour le vérifier de refaire les calculs précédents, mais en sens inverse.

L'intégrale J_1 ne contient plus aucun coefficient susceptible de devenir infini.

46. L'INTÉGRALE J_2. — Dans l'intégrale J_1, il est facile d'éliminer φ et ζ. On a, en effet,

$$\frac{\zeta_1}{k^2} = \frac{\partial h u_1}{\partial x} + \frac{\partial h v_1}{\partial y},$$

$$\frac{\zeta_2}{k^2} = \frac{\partial h u_2}{\partial x} + \frac{\partial h v_2}{\partial y}.$$

Le problème des marées revient donc à écrire

$$\delta J_2 = 0$$

en désignant par J_2 l'intégrale suivante

$$(40)\quad \begin{aligned} J_2 = &-\iint_{(k)} \frac{h}{2}\left[u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - \frac{4\omega\cos\theta}{\alpha}(u_1 v_2 - v_1 u_2)\right] dx\,dy \\ &+\iint_{(k)} \left[\frac{gk^2}{2\alpha^2}\left(\frac{\partial h u_1}{\partial x} + \frac{\partial h v_1}{\partial y}\right)^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\Pi_1''}{2\alpha^2}\left(\frac{\partial h u_1}{\partial x} + \frac{\partial h v_1}{\partial y}\right) + \frac{F_1}{\alpha^2}\left(\frac{\partial h u_1}{\partial x} + \frac{\partial h v_1}{\partial y}\right)\right] dx\,dy \\ &+\iint_{(k)} \left[\frac{gk^2}{2\alpha^2}\left(\frac{\partial h u_2}{\partial x} + \frac{\partial h v_2}{\partial y}\right)^2 \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\Pi_2''}{2\alpha^2}\left(\frac{\partial h u_2}{\partial x} + \frac{\partial h v_2}{\partial y}\right) + \frac{F_2}{\alpha^2}\left(\frac{\partial h u_2}{\partial x} + \frac{\partial h v_2}{\partial y}\right)\right] dx\,dy \end{aligned}$$

avec

$$\Pi'' = -\iint_{(k)} \frac{1}{r}\left(\frac{\partial h u}{\partial x} + \frac{\partial h v}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Cette intégrale J_2 ne contient plus que quatre fonctions inconnues.

47. L'INTÉGRALE J_1 SUR LA SPHÈRE. — Il est aisé de transformer J_1, en revenant de la carte à la sphère elle-même; il suffit pour cela de se rappeler que

$$dx^2 + dy^2 = k^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2)$$

et que u et v sont des pseudo-déplacements liés aux déplacements réels u' et v' par les équations

$$u = \frac{u'}{k}, \qquad v = \frac{v'}{k}.$$

Soient maintenant U et V les composantes du déplacement sur le méridien et le parallèle; on a

$$\begin{aligned} u_1^2 + v_1^2 &= \frac{u_1'^2 + v_1'^2}{k^2} = \frac{U_1^2 + V_1^2}{k^2}, \\ u_2^2 + v_2^2 &= \frac{u_2'^2 + v_2'^2}{k^2} = \frac{U_2^2 + V_2^2}{k^2}, \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 &= \frac{u_1' v_2' - v_1' u_2'}{k^2} = \frac{U_1 V_2 - V_1 U_2}{k^2}. \end{aligned}$$

On a par ailleurs, pour la dénivellation ζ :

Sur la carte,

$$\frac{\zeta}{k^2} = \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y};$$

Sur la sphère,

$$\zeta \sin\theta = \frac{\partial h\mathrm{U}\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial h\mathrm{V}}{\partial\psi};$$

d'où l'égalité

$$k^2\left(\frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y}\right) = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial h\mathrm{U}\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial h\mathrm{V}}{\partial\psi}\right].$$

Quant aux éléments d'intégration,

$$dx\,dy = k^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi.$$

Et l'on voit que l'intégrale J_1 peut s'écrire

$$(41)\quad \begin{aligned} J_1 = &-\int\int_{(\mathfrak{D})} \frac{h}{2}\left[\mathrm{U}_1^2 + \mathrm{V}_1^2 + \mathrm{U}_2^2 + \mathrm{V}_2^2 - \frac{4\omega\cos\theta}{\alpha}(\mathrm{U}_1\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1\mathrm{U}_2)\right]\sin\theta\, d\theta\, \psi \\ &+\int\int_{(\mathfrak{D})}\left[\varphi_1\left(\frac{\partial h\mathrm{U}_1\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial h\mathrm{V}_1}{\partial\psi}\right) + \varphi_2\left(\frac{\partial h\mathrm{U}_2\sin\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial h\mathrm{V}_2}{\partial\psi}\right)\right] d\theta\, d\psi \\ &+\int\int_{(\mathfrak{D})}\left[-(\zeta_1\varphi_1 + \zeta_2\varphi_2) + \frac{g(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)}{2\alpha^2}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{\Pi_1''\zeta_1 + \Pi_2''\zeta_2}{2\alpha^2} + \frac{\mathrm{F}_1\zeta_1 + \mathrm{F}_2\zeta_2}{\alpha^2}\right]\sin\theta\, d\theta\, d\psi. \end{aligned}$$

48. Conclusion. — Cette formule ne contient aucun élément susceptible de devenir infini; elle est donc tout à fait adaptée à l'application formelle de *la méthode de Ritz*.

Dans le cas fictif d'une mer recouvrant tout le globe terrestre, il n'y a pas à se préoccuper de conditions aux limites. On pourra, par exemple, développer les huit fonctions inconnues en série de fonctions sphériques, et cela permettra facilement de tenir compte de l'attraction du bourrelet.

Envisageons, en effet, le potentiel du bourrelet à l'intérieur de la sphère terrestre

$$\Pi''(\rho, \theta, \psi) = -\int\int_{(\mathfrak{D})} \frac{\zeta(\theta', \psi')\sin\theta'\, d\theta'\, d\psi'}{r(\rho, \theta, \psi; \theta', \psi')};$$

dans le cas présent le domaine $(\mathfrak{D})$ c'est la sphère tout entière, et, d'après un théorème fréquemment invoqué au Chapitre II,

$$\lim_{\rho=1}\left(2\rho\frac{\partial\Pi''}{\partial\rho}+\Pi''\right)=-4\pi\zeta.$$

Décomposons donc en série de fonctions sphériques ζ sur la sphère et Π'' en son intérieur

$$\zeta\ =\Sigma A_n X_n,$$
$$\Pi''=\Sigma B_n \rho^n X_n;$$

la relation précédente donne

$$B_n=-4\pi\frac{A_n}{2n+1}$$

et l'on pourra traiter le problème dans toute sa généralité.