ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEORGES VALIRON

Recherches sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions entières

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 39 (1922), p. 317-341
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1922_3_39__317_0>

RECHERCHES SUR LE THÉORÈME DE M. PICARD

DANS

LA THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES

PAR M. G. VALIRON

Professeur à l'Université de Strasbourg.

Ce court Mémoire est le développement d'une Note aux *Comptes rendus* (1), dans laquelle j'énonçais le théorème suivant :

« Si $f(z)$ est une fonction entière d'ordre fini, $n(r, x)$ le nombre des zéros de $f(z) - x$ dont le module est au plus égal à r et k un nombre donné supérieur à 1, il existe un nombre positif H tel que, quels que soient a et b $(a \neq b)$, l'inégalité

$$\int_{\alpha}^{r} [n(x, a) + n(x, b)] \frac{dx}{x} > \mathrm{H} \log \mathrm{M}\left(\frac{r}{k}\right) \qquad (\alpha > 0)$$

est vérifiée à partir d'une valeur $r(a, b)$ de r. »

$\mathrm{M}(r)$ désigne le maximum du module de $f(z)$ pour $|z| = r$ et le premier membre de l'inégalité précédente est l'expression qui s'introduit dans le théorème de M. Jensen, de telle sorte que la limite inférieure obtenue ainsi pour la somme $n(r, a) + n(r, b)$ est analogue à la limite supérieure fournie par le théorème de M. Jensen. L'inégalité donnée ci-dessus est surtout précieuse pour les fonctions à croissance irrégulière, c'est le premier résultat valable *quel que soit* r obtenu pour ces fonctions.

Dans le cas de l'ordre infini, il est nécessaire, comme toujours, d'écarter les intervalles dans lesquels la croissance de $\log \mathrm{M}(r)$ devient brusquement trop rapide, on est alors conduit à un résultat très précis donné dans le théorème II (p. 326), mais je me bornerai ici à signaler

(1) 10 octobre 1921.

que l'on peut encore assurer dans ce cas que le premier membre de l'inégalité précédente reste supérieur, à partir d'une valeur $r(a, b)$ de r à

$$\left[\log M\left(\frac{r}{k}\right)\right]^{1-\varepsilon},$$

k étant toujours un nombre arbitraire donné supérieur à 1, et ε étant un nombre positif donné arbitrairement. Cette proposition, qui n'est pas la plus précise de celles que je donne, me semble cependant remarquable par sa simplicité et aussi par la façon très directe dont on l'obtient. Comme dans le cas de l'ordre fini, les résultats que je donne pour l'ordre infini sont les premiers résultats généraux que l'on possède et qui soient valables quel que soit r.

J'ai appliqué le théorème général donné ci-dessus pour le cas de l'ordre fini à la généralisation au cas de l'ordre entier d'une proposition qui, dans le cas de l'ordre non entier, était implicitement contenue dans les travaux de M. Boutroux : pour toute fonction entière d'ordre fini non nul, on peut trouver une suite de couronnes de même épaisseur relative, $r''_p \leqq |z| \leqq r'_p$ $(r''_p = kr'_p,\ k < 1)$, telles que le nombre des zéros de $f(z) - x$, contenus dans chaque couronne de rang p suffisamment grand $[p > p(x)]$, soit égal, sauf peut-être pour une valeur de x, à

$$h \log M(r'_p),$$

h étant compris entre deux nombres positifs fixes. Dans le cas de l'ordre non entier, la valeur exceptionnelle n'existe pas.

Pour les fonctions d'ordre infini, j'ai montré la possibilité de l'existence de plusieurs distributions anormales pour les zéros de $f(z) - x$, c'est-à-dire de plusieurs valeurs x pour lesquelles le rapport de $\log n(r, x)$ à $\log_2 M(r)$ a une limite inférieure nulle. Il peut y avoir une infinité non dénombrable de telles distributions. Il en est de même pour les distributions que M. Blumenthal avait appelées infranormales.

I. — Démonstration du théorème général.

1. Je rappellerai d'abord quelques propositions bien connues. Les notations que j'emploierai dans les énoncés serviront dans la suite.

A. *Théorème de Jensen.* — Si $\varphi(z)$ est une fonction holomorphe pour $|z| \leqq r$, $M(r)$ le maximum de son module pour $|z| = r$, le nombre $n(x, a)$ des zéros de $f(z) - a$, ayant un module inférieur ou égal à x, vérifie l'inégalité

$$(1) \qquad F(r, a) = \int_\beta^r \frac{n(x, a)}{x} dx < \log M(r) + K(\beta, a),$$

β étant un nombre positif fixe arbitraire et K une constante ne dépendant que de β et du premier coefficient non nul de $\varphi(z) - a$, donc de a.

B. *Théorème de Hadamard-Borel.* — Si $\varphi(z)$ est holomorphe pour $|z| \leqq R$ et nulle à l'origine, le maximum $A(R)$ de sa partie réelle sur le cercle $|z| = R$ vérifie l'inégalité

$$(2) \qquad M(r) < \frac{4r}{R-r} A(R) \qquad (r < R).$$

C. *Théorème sur la dérivée.* — Si $M'(r)$ est le maximum du module de la dérivée $\varphi'(z)$ de $\varphi(z)$ pour $|z| = r$, on a

$$(3) \qquad M'(r) < \frac{M(R)}{R-r} \qquad (R > r).$$

D. *Théorème de Boutroux.* — Étant donné un polynome $P(z)$ de la forme

$$P(z) = \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{\alpha_N}\right)$$

dont les N zéros sont intérieurs au sens large au cercle $|z| \leqq R$, et k' étant un nombre supérieur à 1, il existe dans chaque couronne

$$\frac{R}{k'} \leqq |z| \leqq R, \qquad \frac{R}{k'^3} \leqq |z| \leqq \frac{R}{k'^2},$$

des cercles $|z| = r$ sur lesquels on a

$$(4) \qquad \log|P(z)| > -Nh$$

avec

$$h = 4k'^3 \log 2e + 4 \log k' - \log(k' - 1) \quad (^1).$$

---

(1) *Voir* la thèse de M. Boutroux (*Acta mathematica*, 1903). La démonstration de la formule donnée ici se trouve dans les leçons sur la théorie générale des fonctions entières que j'ai données à l'University College of Wales à Aberystwyth en février-mars 1922.

2. En utilisant les quatre propositions précédentes et une limite supérieure du module du polynome $P(z)$ considéré ci-dessus que l'on obtient facilement, on peut appliquer la méthode que M. Borel a employée pour démontrer le théorème de M. Picard. Supposons que, a et b étant deux nombres différents, on ait à la fois, pour des valeurs r arbitrairement grandes,

$$(5) \qquad F(r, x) \leqq H \log M\left(\frac{r}{k}\right), \qquad (x = a,\ x = b,\ k > 1).$$

Cette inégalité donnera une limite supérieure du nombre des zéros de $f(z) - x$, pour $x = a$ et $x = b$, dans un cercle de rayon r' compris entre $\frac{r}{k}$ et r. En écrivant

$$(6) \qquad f(z) - a = P(z, a)\, e^{\varphi(z, a)},$$

$P(z, a)$ étant un polynome admettant les zéros de $f(z) - a$ intérieurs au cercle $|z| \leqq r'$ et $\varphi(z, a)$ étant une fonction holomorphe dans ce cercle et nulle à l'origine, on peut, en utilisant le théorème D, puis la proposition B, enfin le théorème sur la dérivée, trouver des limites supérieures pour les modules de $P(z, a)$, $P'(z, a)$, $\varphi'(z, a)$ valables dans un cercle de rayon r'' compris entre $\frac{r}{k}$ et r'. Ces limites conviennent de même pour les fonctions analogues obtenues dans la décomposition de $f(z) - b$. On peut, d'autre part, trouver une limite inférieure du maximum $A\left(\frac{r}{k}, a\right)$ de la partie réelle de $\varphi(z, a)$ sur le cercle de rayon $\frac{r}{k}$.

En écrivant l'identité de M. Borel

$$P(z, a)\, e^{\varphi(z, a)} - P(z, b)\, e^{\varphi(z, b)} \equiv b - a,$$

en dérivant et en éliminant l'un des facteurs exponentiels, on arrive à une identité de la forme

$$e^{\varphi(z, a)}\, \varphi_1(z, a, b) \equiv \varphi_2(z, a, b),$$

où φ_1 et φ_2 sont des fonctions holomorphes dans le cercle de rayon r', pour lesquelles on connaît une limite supérieure du module sur le cercle de rayon r''. En décomposant encore une fois φ_1 en un produit et en appliquant les propositions B et D, on trouve une limite supérieure du module de l'exponentielle sur un cercle de rayon supérieur à $\frac{r}{k}$. En comparant à la limite inférieure de $A\left(\frac{r}{k}, a\right)$ que l'on avait obtenue précédemment, on arrivera à une contradiction si H, k et r sont convenablement choisis.

3. Le nombre des opérations successives à effectuer étant égal à 8, je poserai

$$R_1 = \frac{r}{k}, \qquad R_2 = R_1 k', \qquad \ldots, \qquad R_8 = R_1 k'^7, \qquad R_9 = r \qquad (k'^8 = k).$$

L'inégalité (5) donne de suite (comme l'inégalité de M. Jensen) une limite supérieure du nombre $N = n(R_8, a)$ des zéros de $f(z) - a$ dans le cercle de rayon R_8. On a

$$N < \frac{H}{\log k'} \mu \tag{7}$$

en posant

$$\mu = \log M(R_1).$$

Si l'on suppose que le premier terme de $f(z) - a$ est γz^q et si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{N-q}$ les zéros non nuls de cette fonction ayant un module au plus égal à R_8, on a

$$P(z, a) = \gamma z^q \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{\alpha_{N-q}}\right)$$

et le module de ce polynome pour $|z| = R_8$ est au plus égal à

$$|\gamma| \frac{R_8^N}{|\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{N-q}|} 2^{N-q}.$$

Le logarithme du premier facteur ne diffère que d'une constante (indépendante de r) de $F(R_8, a)$, on a donc

$$\log|P(z, a)| < H\left(\frac{3}{2} + \frac{\log 2}{\log k'}\right)\mu \tag{8}$$

pour $|z| \leqq R_8$ et pourvu que r soit assez grand.

Comme le premier membre de l'identité (6) a un module supérieur à $\frac{1}{2}$M(r) pourvu que r soit supérieur à un nombre fixe, le maximum de la partie réelle de $\varphi(z, a)$ vérifiera l'inégalité

$$\text{(9)} \qquad A(R_1, a) > \mu\left[1 - H\left(2 + \frac{\log 2}{\log k'}\right)\right].$$

En appliquant le théorème de M. Boutroux au polynome $P(z, a)$, on obtient une limite inférieure du module de ce polynome sur un cercle dont le rayon est compris entre R_7 et R_8, et l'identité (6) permet d'en déduire une limite supérieure de $A(r, a)$ sur ce même cercle et *a fortiori* sur le cercle R_7. On obtient

$$\text{(10)} \qquad A(R_7, a) < 2\log M(R_9) + H\frac{h}{\log k'}\mu = \mu_1,$$

h étant le nombre défini dans la proposition D. En appliquant le théorème d'Hadamard-Borel, on déduit de cette inégalité une limite supérieure du module de $\varphi(z, a)$ sur le cercle de rayon R_6, et le théorème sur la dérivée fournit alors une limite supérieure du module de $\varphi'(z, a)$ sur le cercle de rayon R_5. On trouve, pourvu que r soit assez grand,

$$\text{(11)} \qquad |\varphi'(z, a)| < \frac{1}{(k'-1)^2}\mu_1.$$

Le théorème C donne de même une limite supérieure du module de la dérivée de $P(z, a)$ sur ce même cercle de rayon R_5, et l'on en déduit que, sur ce cercle, on a

$$\text{(12)} \qquad |P'(z, a) + \varphi'(z, a)P(z, a)| < \frac{2\mu_1}{(k'-1)^2}M(R_1)^{\left(\frac{3}{2} + \frac{\log 2}{\log k'}\right)H} = e^{\mu_2}.$$

Le module de l'expression analogue formée à partir de $f(z) - b$ vérifie la même inégalité sur le même cercle. Or, de l'identité de M. Borel, on tire, comme il a été dit, la nouvelle identité

$$\text{(13)} \qquad e^{\varphi(z,a)}\varphi_1(z, a, b) \equiv \varphi_2(z, a, b),$$

où φ_1 et φ_2 sont des sommes de produits des fonctions P′, P, φ'. Il résulte des inégalités (8) et (12) que le module de ces fonctions sur le cercle R_5 est moindre que $e^{3\mu_2}$ et leur premier terme, qui est le produit de $(b - a)$ par le premier terme de $f'(z)$, ne dépend pas du rayon R_8. On peut décomposer φ_1 en un produit de la forme

$$P(z, a, b)\, e^{\varphi_3},$$

φ_3 étant holomorphe dans le cercle de rayon R_4 et nulle à l'origine, et $P(z, a, b)$ étant un polynome admettant les mêmes zéros que $\varphi_1(z, a, b)$ à l'intérieur de ce cercle. On obtiendra encore une limite supérieure du nombre N' des zéros de $P(z, a, b)$

$$N' < \frac{3\mu_2}{\log k'},$$

puis une limite inférieure du module de ce polynome sur un cercle dont le rayon est compris entre R_3 et R_4, et sur un cercle de rayon compris entre R_1 et R_2

$$|\log P(z, a, b)| > -3h \frac{\mu_2}{\log k'}.$$

De la limite inférieure du module de $P(z, a, b)$ sur le premier de ces cercles, on déduit une limite supérieure de la partie réelle de φ_3 sur ce même cercle, et *a fortiori* sur le cercle de rayon R_3, puis par le théorème B une limite inférieure de cette partie réelle sur le cercle de rayon R_2, soit

$$\frac{12}{k'-1}\left(1 + \frac{h}{\log k'}\right)\mu_2.$$

Enfin du minimum du module de $P(z, a, b)$ sur le cercle compris dans la couronne $R_1 \leqq |z| \leqq R_2$, de la limite inférieure de la partie réelle de φ_3 qui vient d'être donnée et du maximum du module de φ_2, on déduit que, sur le cercle considéré, le logarithme du module de $\frac{\varphi_2}{\varphi_1}$ est moindre que

$$3\,\frac{k'+3}{k'-1}\left(1 + \frac{h}{\log k'}\right)\mu_2.$$

Donc, en vertu de l'identité (13), on a

$$A(R_1, a) < 3\,\frac{k'+3}{k'-1}\left(1 + \frac{h}{\log k'}\right)\mu_2, \tag{14}$$

ce qui est incompatible avec l'inégalité (9) si l'on a

$$(15) \qquad 3\mu_2 \frac{k'+3}{k'-1}\left(1+\frac{h}{\log k'}\right) < \mu\left[1 - \mathrm{H}\left(2+\frac{\log 2}{\log k'}\right)\right].$$

Les valeurs de μ, μ_2, h sont données dans les inégalités (4), (7), (10), (12).

4. Plaçons-nous tout d'abord dans le cas de l'ordre fini, ou plus généralement, supposons que, pour $r = \mathrm{R}_9$, $\log \mathrm{M}(r)$ soit inférieur à r^λ, λ étant un nombre fixe indépendant de r. D'après la définition de μ_1, nous aurons

$$\mu_1 < \left(2 + \mathrm{H}\frac{h}{\log k'}\right)\mathrm{R}_9^\lambda$$

et, par suite, si l'on suppose que H et k' sont indépendants de r, et en prenant r assez grand,

$$\mu_2 < \mu\,\mathrm{H}\left(2+\frac{\log 2}{\log k'}\right),$$

car le rapport de μ à $\log \mathrm{R}_1$ croît indéfiniment avec R_1. L'inégalité (15) est alors vérifiée si l'on a

$$(16) \qquad \mathrm{H}\left(2+\frac{\log 2}{\log k'}\right)\left[1 + 3\frac{k'+3}{k'-1}\left(1+\frac{h}{\log k'}\right)\right] < 1.$$

Si H vérifie cette inégalité, il est impossible que les inégalités (5) aient lieu simultanément pour les valeurs de r suffisamment grande. On a donc démontré la proposition suivante :

I. *Pour toute fonction entière d'ordre fini, on peut faire correspondre à tout nombre donné k supérieur à* 1, *un nombre positif* H, *tel que*, a *étant différent de* b, *on ait l'inégalité*

$$(17) \qquad \mathrm{F}(r, a) + \mathrm{F}(r, b) > \mathrm{H}\log \mathrm{M}\left(\frac{r}{k}\right)$$

à partir d'une valeur $r(a, b)$ *de* r.

Cette proposition reste vraie pour les fonctions entières quelconques et pour les valeurs de r pour lesquelles $\log \mathrm{M}(r)$ est inférieur à r^λ, λ étant une constante fixée à l'avance.

5. Dans le cas général de l'ordre infini, nous supposerons que k' est une fonction de r qui tend vers 1 lorsque r croît indéfiniment. Comme H sera choisi de telle façon que μH ait pour limite l'infini, on tire de l'inégalité (10) la nouvelle inégalité

$$\log\mu_1 < \log_2 M(R_9) + \log(\mu H) + \log\frac{h}{\log k'}.$$

Si l'on pose $k' = 1 + \varepsilon$ et si l'on suppose que ε est inférieur à un nombre fixe suffisamment petit, on voit sur l'expression de h que ce nombre est moindre que $2\log\frac{1}{\varepsilon}$, de sorte que le troisième terme dans l'inégalité précédente est moindre que $2\log\frac{1}{\varepsilon}$. D'après l'inégalité (12), on aura, pour limite supérieure de μ_2,

$$\frac{2}{\varepsilon}\mu H + \log_2 M(R_9).$$

et l'inégalité (15) sera vérifiée si l'on a

$$3\mu H + \varepsilon\log_2 M(R_9) < \varepsilon^4\mu.$$

En prenant pour H la valeur $\frac{\varepsilon^4}{4}$, cette inégalité s'écrit

$$\log_2 M(R_9) < \frac{\varepsilon^3}{4}\mu.$$

En introduisant de nouveau la valeur $k = k'^8$, on voit que les inégalités (5) ne peuvent avoir lieu simultanément pour une même valeur de r suffisamment grande si l'on prend

$$k = 1 + \eta, \qquad H = \frac{\eta^4}{4\cdot 9^4},$$

η étant un nombre inférieur à un nombre fixe, et si l'on a

$$(18) \qquad \log_2 M(r) < \frac{\eta^3}{4\cdot 9^3}\log M\left(\frac{r}{1+\eta}\right).$$

Il est visible que si l'on suppose η fixe, cette condition (18) limite supérieurement la croissance de $\log M(r)$, mais elle peut être cependant réalisée pour des classes étendues de fonctions, et le sera vraisemblablement toujours pour celles que l'on rencontrera d'une façon naturelle.

Pour les fonctions vérifiant la condition (18) *avec une certaine valeur pour* η, *le théorème I est encore vrai si l'on y prend* $k = 1 + \eta$.

Pour obtenir un résultat général, il suffit d'appliquer la méthode de M. Borel. Changeons de variable en posant

$$r' = \frac{r}{1+\eta}$$

et prenons

$$\eta = [\log M(r')]^{-\varepsilon'},$$

ε' étant un nombre fixe très petit. On a

$$\log r < \log r'' = \log r' + [\log M(r')]^{-\varepsilon'};$$

or pour cette valeur r'' on aura, en général,

$$\log M(r'') < [\log M(r')]^{1+\varepsilon'}, \tag{19}$$

c'est-à-dire *a fortiori* l'inégalité (18) avec la valeur choisie pour η. M. Borel a montré en effet que l'inégalité (19) a lieu, sauf peut-être pour des valeurs de r' (donc de r'') intérieures à une suite d'intervalles dans lesquels la variation totale de $\log r'$ pour $r' > R_0$ est inférieure à $K\left[\log M\left(\frac{R_0}{k}\right)\right]^{-\varepsilon'}$, K étant un nombre fixe et k supérieur à 1. Si r' est une valeur pour laquelle l'inégalité (19) est vérifiée, nous avons, si r' est assez grand,

$$F(r'', a) + F(r'', b) > K[\log M(r')]^{1-3\varepsilon'},$$

K étant une constante. Mais on peut remplacer r' en fonction de r'' dans le second membre en vertu de l'inégalité (19) et l'on obtient cette proposition :

II. *Pour toute fonction entière, l'inégalité*

$$F(r, a) + F(r, b) > [\log M(r)]^{1-\alpha}, \tag{20}$$

où α *est un nombre fixe aussi petit que l'on veut, a lieu à partir d'une valeur* $r(a, b)$ *de* r, *sauf peut-être dans des intervalles dans lesquels la* *variation totale de* $\log r$ *pour* $r > R_0$ *est moindre que*

$$\left[\log M\left(\frac{R_0}{k}\right)\right]^{-\frac{\alpha}{5}} \qquad (k > 1).$$

Si l'on prend pour r une valeur exceptionnelle pour laquelle la proposition n'a pas lieu, il existe une valeur r' inférieure à r pour laquelle la proposition est vraie, et telle que

$$\log r' > \log r - \left[\log M\left(\frac{r}{k}\right)\right]^{-\frac{\alpha}{5}},$$

et puisque $F(r, x)$ est croissant, on arrive à cette proposition un peu moins précise, mais générale.

II'. *Quel que soit* r *supérieur à* $r(a, b)$, *on a*

$$F(r, a) + F(r, b) > [\log M(r')]^{1-\alpha} \qquad (\alpha > 0) \tag{21}$$

avec

$$\log r' = \log r - \left[\log M\left(\frac{r}{k}\right)\right]^{-\frac{\alpha}{5}} \qquad (k > 1).$$

A fortiori, si l'on remplace r' par $\frac{r}{k}$ dans l'inégalité (21), cette inégalité est encore vraie quel que soit r. On a ainsi le résultat donné dans l'introduction.

6. Il est bien évident que l'on peut utiliser l'inégalité (18) d'une façon plus complète et obtenir des résultats plus précis dans certains cas. On pourra prendre, par exemple,

$$\eta = [\log_p M(r')]^{-1} \qquad (p \geqq 2);$$

si l'on pose alors

$$\log r'' = \log r' + \eta,$$

l'inégalité (18) sera réalisée si l'on a

$$\log_2 M(r'') < K \log M(r') [\log_p M(r')]^{-3}.$$

Or, la méthode de M. Borel montre encore que cette inégalité sera vérifiée en général, sauf peut-être dans des invervalles dans lesquels la variation totale de $\log r'$ est inférieure à

$$K_1\left[\log M\left(\frac{R_0}{k}\right)\right]^{-1}$$

(si l'on suppose $r' > R_0$). On aura ainsi l'inégalité

$$F(r'', a) + F(r'', b) > K' \log M(r')[\log_p M(r')]^{-4}$$

pourvu que r' soit assez grand et sauf dans les intervalles considérés. Mais il n'est plus possible de remplacer ici r' en fonction de r'' et l'on pourrait même se demander si le gain réalisé par la meilleure approximation du second membre de l'inégalité n'est pas toujours détruit par suite du plus grand écart entre $\log r''$ et $\log r'$. En fait, cette inégalité ne devra être employée que lorsque $\log M(r)$ est connu d'une façon suffisamment précise [si l'approximation ne permet pas de distinguer les valeurs de $\log M(r)$ et $\log M(kr)$, le résultat donné dans l'introduction suffit], et elle peut donner un résultat meilleur que le théorème II. Ainsi si l'on a

$$\log M(r) = he^{r^\rho},$$

h étant compris entre deux nombres positifs fixés, on prendra $p = 2$ et l'on trouvera

$$F(r, a) + F(r, b) > K' e^{r^\rho} r^{-4\rho},$$

K' étant un nombre fixe et l'inégalité étant valable quel que soit r.

II. — Application aux fonctions d'ordre fini.

7. Je désignerai dorénavant par $n(x, a, b)$ le nombre des zéros du produit $[f(z) - a][f(z) - b]$ dont le module est inférieur ou égal à x. Le théorème I, joint au théorème de Jensen, exprime que la moyenne logarithmique de $n(x, a, b)$ entre β et r est égale à $h \log M(rh')$, h' étant compris entre 1 et un nombre donné inférieur à 1 et h ayant des limites d'indétermination positives, la limite supérieure étant au plus égale à 2.

Si l'on ne fait aucune autre hypothèse sur la fonction $f(z)$, on ne peut tirer du théorème I une limite supérieure précise de $n(x, a, b)$ valable pour toutes les fonctions d'ordre fini. L'inégalité évidente

$$n(r, a, b) \log r > H \log M\left(\frac{r}{k}\right)$$

est bien la plus précise que l'on puisse obtenir. Elle est atteinte, à un facteur fini près, pour toutes les fonctions pour lesquelles on peut trouver un nombre fini K tel que

$$\log M(r) < (\log r)^K,$$

comme on le voit de suite en appliquant le théorème de Jensen. De telles fonctions sont d'ordre nul, mais le résultat reste valable pour une suite de valeurs de r lorsque l'inégalité précédente a lieu seulement pour une suite de valeurs indéfiniment croissantes de r. A moins de supposer que $\log M(r)$ croît régulièrement, on ne pourra trouver une limite précise de $n(r, a, b)$ valable quel que soit r, mais on peut obtenir un résultat intéressant au sujet du nombre des zéros des fonctions $f(z) - x$ dans une suite infinie de couronnes. Pour obtenir cette propriété, je ferai usage de ce résultat contenu en partie dans la thèse de M. Boutroux et que j'ai déjà employé dans des travaux précédents (¹) :

Si $f(z)$ est d'ordre fini non nul égal à ρ, on peut trouver une fonction croissante $V(r)$ telle que le rapport de $\log M(r)$ à $V(r)$ ait une limite supérieure pour r infini égale à 1, cette fonction $V(r)$ étant en outre telle que α et β étant deux nombres positifs donnés, les fonctions

$$\frac{V(r)}{r^{\alpha}}, \quad \frac{r^{\rho+\beta}}{V(r)}$$

soient croissantes à partir d'une valeur de r.

Il résulte de ces propriétés de croissance de la fonction $V(r)$ que, si R est un nombre suffisamment grand pour lequel $\log M(R)$ est supérieur à $\lambda V(R)$ $(0 < \lambda < 1)$, on a les inégalités

$$(22) \qquad \begin{cases} \log M(kR) < \dfrac{1}{\lambda} k^{\rho+\beta} \log M(R) & (k > 1), \\ \log M(k'R) < \dfrac{1}{\lambda} k'^{\alpha} \log M(R) & (k' < 1). \end{cases}$$

Appliquons alors le théorème I en prenant pour r la valeur kR, nous

(¹) En particulier dans ma Thèse (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1913).

aurons, en tenant compte de la première inégalité (22),

$$(23) \qquad \mathrm{H}\log \mathrm{M}(k\mathrm{R}) < \frac{1}{\lambda} k^{\rho+\beta}[\mathrm{F}(k\mathrm{R},\, a) + \mathrm{F}(k\mathrm{R},\, b)].$$

D'autre part, en décomposant l'intégrale $\mathrm{F}(k\mathrm{R}, x)$ en une intégrale prise jusqu'à $k_1\mathrm{R}$ ($k_1 < k$) et une intégrale prise de $k_1\mathrm{R}$ à $k\mathrm{R}$, en remplaçant la première intégrale par $\mathrm{K} + \log \mathrm{M}(k_1\mathrm{R})$ qui lui est supérieur d'après le théorème de Jensen, puis en utilisant la seconde inégalité (22), et en remplaçant dans la seconde intégrale $n(y, x)$ par $n(k\mathrm{R}, x)$, nous obtenons

$$\mathrm{F}(k\mathrm{R},\, x) < \mathrm{K} + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{k_1}{k}\right)^{\alpha} \log \mathrm{M}(k\mathrm{R}) + n(k\mathrm{R},\, x) \log \frac{k}{k_1}.$$

On peut supposer k_1 assez petit pour que, en remplaçant dans le second membre de (23) $\mathrm{F}(k\mathrm{R}, x)$ par cette expression et en résolvant par rapport à $n(k\mathrm{R}, a, b)$, le coefficient de $\log \mathrm{M}(\mathrm{R}k)$ soit positif. On aura ainsi

$$(24) \qquad n(k\mathrm{R},\, a,\, b) > \mathrm{K} \log \mathrm{M}(k\mathrm{R}),$$

K étant un nombre positif ne dépendant que de k. Si l'on se donne k, la suite des valeurs $k\mathrm{R}$ pour laquelle l'inégalité précédente est valable (à partir d'une valeur de $k\mathrm{R}$) est bien déterminée. Soit $r_1, r_2, \ldots, r_p, \ldots$ cette suite ($r_p = k\mathrm{R}_p$, $\lim r_p = \infty$).

Deux cas sont possibles : ou bien quel que soit a, on a à partir d'une valeur $r_p(a)$

$$n(r_p,\, a) > \frac{\mathrm{K}}{2} \log \mathrm{M}(r_p);$$

ou bien il existe au moins un nombre a tel que l'inégalité contraire ait lieu pour une suite de valeurs $r'_1, r'_2, \ldots, r'_p, \ldots$ extraite de la suite r_p. Dans ce dernier cas, pour $b \neq a$, on aura, d'après l'inégalité (24), à partir d'une valeur $r'_p(b)$,

$$(25) \qquad n(r'_p,\, b) > \frac{\mathrm{K}}{2} \log \mathrm{M}(r'_p).$$

Il existe donc toujours une suite de nombres r'_p pour lesquels l'inégalité (25) a lieu pour tout nombre b, sauf peut-être pour une seule valeur exceptionnelle, à partir d'un certain indice. (Dans le cas de l'ordre non entier, on peut choisir cette suite r'_p de telle façon qu'il n'y ait pas de valeur exceptionnelle, c'est ce qui découle des résultats de M. Boutroux.)

Les valeurs $R'_p = \frac{r'_p}{k}$ sont parmi celles pour lesquelles les inégalités (21) sont vérifiées, on voit alors en appliquant le théorème de Jensen que l'on peut associer à r'_p un nombre $r''_p = r'_p k''$ ($k'' < 1$) tel que l'inégalité

$$n(r''_p, x) < \frac{K}{4} \log M(r'_p)$$

ait lieu pour toute valeur de x à partir d'un indice p. En comparant à l'inégalité (25), et en remarquant que l'on a aussi une limite supérieure de $n(r'_p, x)$ de la forme $K' \log M(r'_p)$, on arrive à la proposition suivante :

III. *$f(z)$ étant une fonction entière d'ordre fini non nul, il existe une suite infinie de couronnes D_p*

$$r''_p \leqq |z| \leqq r'_p \qquad (r''_p = k'' r'_p)$$

et deux nombres positifs K' et K tels que toute fonction $f(z) - x$, sauf peut-être une seule dans le cas où l'ordre est entier, possède

$$\lambda \log M(r'_p) \qquad (K' < \lambda < K)$$

zéros dans toute couronne D_p de rang suffisamment grand $[p > p(x)]$.

8. Si l'on suppose que $\log M(r)$ est à croissance régulière, on obtiendra pour la somme $n(r, a) + n(r, b)$ une limite inférieure analogue à celle que l'on obtient dans la théorie des fonctions d'ordre non entier. La méthode pour arriver à ces résultats est celle qui vient d'être employée ci-dessus : le théorème de Jensen donne une limite supérieure de $n(r, x)$; en utilisant cette limite et en décomposant l'intégrale qui figure dans le théorème I en deux parties, on obtiendra le résultat cherché. Par exemple, si $V(r)$ satisfaisant aux conditions de croissance de M. Boutroux données ci-dessus, le rapport de $\log M(r)$ à $V(r)$ finit par rester compris entre deux nombres positifs, il est bien connu que l'inégalité

$$n(r, x) < K V(r),$$

où K est un nombre fixe, aura lieu à partir d'une valeur r_x de r, mais on peut en outre assurer que l'on aura

$$n(r, a) + n(r, b) > K_1 V(r)$$

pourvu que r soit assez grand. C'est là un résultat nouveau, même pour les fonctions d'ordre non entier, car, dans ses recherches basées sur la considération de la décomposition en facteurs de Weierstrass, M. Boutroux devait supposer que le nombre α est supérieur à la partie entière p de ρ et que $\rho + \beta$ est inférieur à $p + 1$.

Lorsque l'ordre est entier, il peut se faire que pour une valeur a le rapport de $n(r, a)$ à $V(r)$ tende vers zéro, alors, pour toute autre valeur b, le nombre $n(r, b)$ est égal à $hV(r)$, h étant compris entre deux nombres fixes. D'une façon générale, si pour la valeur a le rapport de $F(r, a)$ à $\log M\left(\frac{r}{k}\right)$ tend vers zéro (ou même est inférieur à un certain nombre H), pour $b \neq a$, $F(r, b)$ est égal à $h \log M\left(\frac{r}{h'}\right)$, h étant compris entre deux nombres fixes et h' compris entre k et 1. On retrouve ainsi en particulier certains résultats obtenus par M. Lindelöf dans le cas des fonctions d'ordre entier à croissance régulière (¹).

Mais on sait que pour de telles fonctions d'ordre entier et à croissance même très régulière, le nombre $n(r, x)$ des zéros de $f(z) - x$ peut ne pas être à croissance régulière pour un ensemble de valeurs x dont la puissance peut être effectivement la puissance du continu (²). Dans ce cas-là encore le théorème I apporte un complément : la croissance de la somme $n(r, a) + n(r, b)$ est toujours régulière. Dans le cas que je viens de signaler, il s'agit de l'irrégularité de la croissance de $n(r, x)$ celle de $F(r, x)$ en découle de suite puisque $F(r, x)$ est inférieure à $F\left(\frac{r}{\lambda}, x\right) + n(r, x) \log \lambda$. Il existe donc des cas où le rapport de $F(r, x)$ à $\log M\left(\frac{r}{k}\right)$ peut avoir une limite inférieure nulle pour une infinité non dénombrable de valeurs de x. Lorsque la croissance de $\log M(r)$ est très régulière, l'ensemble de ces valeurs x est un

(¹) *Annales de l'École Normale*, 1906.

(²) *Voir* un Mémoire de M. Sire (*Journal de Mathématiques*, 1913) et deux articles de l'auteur (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1919 et 1920).

ensemble *ponctuel,* mais il semble difficile de voir ce qui se passe dans le cas des croissances irrégulières.

En résumé, on peut dire que, dans tous les cas, pour une fonction d'ordre fini (même nul), *la connaissance des modules des zéros de* $f(z) - x$ *pour deux valeurs de* x [ou même simplement la connaissance de deux valeurs de $F(r, x)$] *détermine d'une façon très précise le mode de croissance de* $\log M(r)$.

9. Dans la démonstration du théorème I on a fait implicitement usage d'une limite inférieure du module de la fonction sur certains cercles. Il est facile de compléter par cette méthode un résultat connu sur le minimum du module d'une fonction entière. Le résultat que nous trouverons est d'ailleurs général et non pas limité au cas de l'ordre fini.

Supposons pour simplifier que $f(0) = 1$ et mettons $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = P(z)\, e^{\varphi(z)},$$

$P(z)$ étant un polynome admettant les zéros de $f(z)$ intérieurs au cercle de rayon kR $(k < 1)$ et $\varphi(z)$ étant holomorphe dans ce même cercle et nulle à l'origine. Le nombre N des zéros de $P(z)$ est au plus égal à

$$-\frac{1}{\log k} \log M(R),$$

le théorème de M. Boutroux donne alors une limite inférieure du module de $P(z)$ sur un cercle de rayon R′ compris entre Rk^2 et Rk et sur un cercle de rayon R″ compris entre Rk^4 et Rk^3. De la première limite on déduit une limite supérieure de la partie réelle de $\varphi(z)$ sur le cercle R′, donc sur le cercle Rk^2, et de cette limite on tire par l'application du théorème B une limite du module de $\varphi(z)$ sur le cercle Rk^3, donc sur le cercle R″. D'où ce résultat :

A tout nombre k' *supérieur à* 1, *on peut faire correspondre un nombre* H′ *tel que l'inégalité*

$$\log|f(z)| > -H' \log M(rk') \tag{26}$$

ait lieu au moins une fois lorsque r *décrit un intervalle* R, Rk' *suffisamment éloigné.*

En utilisant les considérations du n° 6 on voit que lorsque l'ordre est fini, il existe une suite de cercles de rayons indéfiniment croissants sur lesquels on a une égalité de la forme (26), mais où dans le second membre on peut supprimer le facteur k'. C'est avec une précision moindre d'un certain point de vue (valeur du coefficient H'), mais plus grande d'un autre point de vue [l'inégalité a lieu sur des cercles connus lorsque $M(r)$ est connu] un résultat qui avait été déduit par divers auteurs d'un théorème de M. Wiman. D'ailleurs le résultat tel qu'il a été donné est plus général que cette conséquence; on peut le compléter encore en prenant le théorème de M. Boutroux sous une forme un peu différente, on montrera alors qu'on a une inégalité de la forme (26) sauf dans des aires entourant les zéros.

Pour les fonctions d'ordre infini on remplacera H' par sa valeur en fonction de k' en prenant pour k' une fonction de r tendant vers 1 comme il a été fait plus haut.

10. Parmi les autres résultats que l'on peut tirer du théorème I je signalerai le suivant :

Pour toute fonction d'ordre fini ρ supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$, on peut trouver une suite de cercles de rayons indéfiniment croissants sur lesquels l'inégalité

$$\log|f(z)| > \mathrm{H}\log\mathrm{M}(r),$$

où H est une certaine constante positive, est vérifiée sur des arcs dont la mesure est au moins $\frac{2\pi}{q}$, q étant l'entier immédiatement supérieur à 2ρ [1].

C'est l'extension au cas de l'ordre quelconque du thérorème de M. Wiman relatif aux fonctions d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$; mais pour qu'elle soit parfaite, il faudrait montrer que le nombre $\frac{2\pi}{q}$ peut être remplacé par $\frac{\pi}{\rho}$.

On pourra également déduire du théorème I des renseignements sur

(1) J'avais donné ce résultat dans ma Thèse, citée plus haut, dans le cas de l'ordre non entier. J'ai donné la démonstration dans mon cours à Aberystwyth.

l'ordre de multiplicité des zéros plus précis que ceux que l'on déduit du théorème de M. Borel [1].

III. — Application aux fonctions d'ordre infini.

11. Pour les fonctions d'ordre infini, le résultat obtenu est à rapprocher de la proposition que M. Blumenthal a appelée *le grand théorème de M. Picard*, en réservant le nom de *petit théorème* à la proposition énoncée par M. Borel : pour les fonctions de la forme $f(z) - x$, l'ordre réel est égal à l'ordre apparent sauf peut-être pour une valeur de x. Mais le résultat donné ici est plus précis, c'est $\log n(r, x)$ qui est comparé à $\log_2 M(r)$ tandis que dans la méthode de M. Blumenthal on compare les logarithmes de ces fonctions [2]. En outre, ce résultat est plus complet, on compare directement les fonctions $n(r, x)$ et $\log M(r)$ au lieu de comparer des majorantes régularisées de ces fonctions.

L'inégalité (20) étant valable sauf dans des intervalles où $\log r$ varie d'une quantité finie, on en déduit que l'inégalité

$$n(r, a) + n(r, b) > [\log M(r)]^{1-\varepsilon}, \tag{27}$$

où ε est un nombre positif arbitrairement petit, a encore lieu pour presque tous les points des intervalles où le second membre est supérieur à r^α, α étant fixe et arbitraire. Si l'on prend une suite indéfiniment croissante de tels points, l'inégalité (27) est valable, quels que soient a et b, pour tous les points de rang suffisamment élevé. C'est là en somme le contenu du *grand théorème* auquel on pourra donner une forme analogue à celle de M. Blumenthal en construisant une fonction $W(r)$ supérieure ou égale à $\log M(r)$ pour tous les r, l'inégalité ayant lieu pour des r indéfiniment croissants et vérifiant les conditions de la croissance normale [inégalité (19)], en construisant une fonction analogue pour le premier membre de l'inégalité (27) et en montrant que ces fonctions ont leurs logarithmes égaux à un facteur voisin de 1

(1) J'ai donné ces résultats dans une Note aux *Comptes rendus*, novembre 1921.

(2) Se reporter au Livre de M. Blumenthal : *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini*.

près. Mais ce genre d'opération est inutile ici où l'inégalité (27) donne une relation entre les éléments mêmes que l'on désire comparer [1].

12. M. Blumenthal a amorcé l'étude de la distribution des modules des zéros des fonctions $f(z) - x$ pour les diverses valeurs de x, il a appelé *distribution normale* une distribution des modules des zéros telle que les fonctions exposant et ordre soient égales (à l'approximation choisie près), la distribution est *exceptionnelle* si l'exposant est constamment inférieur à l'ordre. Lorsque la distribution des zéros n'est pas normale sans cependant être exceptionnelle, il dit que la distribution est *infra-normale*. Je dirai de même que la distribution x est *normale* lorsque r variant dans les intervalles pour lesquels on a la relation (27) [ces intervalles ne dépendent que de $\log M(r)$], le rapport

$$\frac{\log n(r, x)}{\log_2 M(r)} \tag{28}$$

a une limite inférieure pour r infini supérieure ou égale à $1 - \varepsilon$, que la distribution est *exceptionnelle* lorsque la limite supérieure du rapport est moindre que $1 - \varepsilon$ et qu'elle est *anormale* dans les autres cas.

Il ne peut y avoir qu'une seule distribution exceptionnelle et, s'il y en a une, toutes les autres distributions sont normales. Les exemples de ce cas se forment bien simplement.

Il est de même évident que l'on peut former des fonctions pour lesquelles existe *une* valeur anormale. Il suffit de multiplier une fonction $f_1(z)$ à distribution normale par une fonction $e^{f_2(z)}$ choisie de telle façon que le module maximum soit donné dans certains intervalles par le module de la première fonction et dans d'autres par celui de la seconde, ce second module étant supposé suffisamment grand par rapport au premier.

Je vais montrer que *l'on peut former des fonctions admettant un ensemble de distributions anormales ayant la puissance du continu*. Je me servirai de la méthode qui a été employée par M. Sire puis par

---

[1] Les notions d'exposant et d'ordre minimun de M. Blumenthal permettent dans certains cas d'arriver à un résultat de la forme (27).

moi-même pour former des exemples analogues dans le cas des fonctions d'ordre fini entier. Je m'appuierai sur cette proposition :

Étant donnée une suite de points A_n denses dans un carré C (par exemple le carré ayant son centre à l'origine des axes, ses côtés parallèles aux axes et pour côté 1), et la suite des carrés C_n de centre A_n de côtés parallèles à ceux du grand carré et de côté ε_n, si rapide que soit la convergence de la série $\sum \varepsilon_n$, l'ensemble des points P qui sont intérieurs à une infinité de carrés C_n admet pour point de condensation tout point intérieur à C [1].

Considérons alors la fonction

$$\Phi(z, x) = x\varphi(z) - \psi(z)$$

avec

$$\varphi(z) = e^{e^z} = e + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

$$\psi(z) = y + \sum_1^\infty \theta_n c_n z^n.$$

Les nombres c_n sont évidemment positifs. De l'inégalité de Cauchy on déduit que l'on a, pour $n > n_0$,

$$\log c_n < -\frac{1}{2} n \log_2 n.$$

On en déduit facilement que, pour $z = r$, la somme des termes $\varphi(z)$ dont le rang est moindre que $\log r$ a un logarithme inférieur à $2(\log r)^2$, tandis que la somme des termes de rang supérieur à e^{r^4} a un logarithme négatif.

Nous supposerons que x, y et les nombres θ_n sont intérieurs au carré C de côté 1 dont il vient d'être question. Dans ce carré nous nous donnerons une suite des points η_p dense dans tout le carré (par exemple la suite des points à coordonnées rationnelles) et nous prendrons

$$\theta_n = \eta_p \quad \text{si} \quad N_{p-1} \leqq n < N_p,$$

les nombres N_p étant définis par les conditions

$$N_0 = 1, \qquad N_{p+1} = 3^{3^{4N_p}}.$$

(1) La démonstration se fait en suivant la méthode indiquée dans ma Note *Sur les ensembles réguliers de mesure nulle* (*Comptes rendus*, t. 169).

Pour la valeur

$$r'_p = 3^{N_{p-1}} \qquad (p > p_0),$$

quels que soient x et y intérieurs à C, la somme des modules des termes de $\Phi(z, x)$ dont le rang est extérieur à l'intervalle N_{p-1}, N_p a son logarithme moindre que

$$3(\log r'_p)^2,$$

les termes restants sont les termes de $\varphi(z)$ multipliés par $x - \eta_p$, le module de leur somme est moindre que

$$|x - \eta_p| e^{e^{r'_p}} = |x - \eta_p| (\varepsilon_p)^{-1}$$

en posant

$$\log_2 \frac{1}{\varepsilon_p} = r'_p = \left(\frac{\log N_p}{\log 3}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Par suite, si l'on associe au point η_p le carré C_p de côté ε_p ainsi défini, pour tout point x intérieur à une infinité de ces carrés, on aura, pour une suite de valeurs de r indéfiniment croissantes,

$$(29) \qquad \log|\Phi(z, x)| < 4(\log r)^2,$$

quel que soit d'ailleurs y intérieur au carré C.

Pour choisir y nous procéderons de la façon suivante : considérons la fonction

$$\Phi(z, 1) = \varphi(z) - \psi(z),$$

le maximum du module de cette fonction est évidemment moindre que $2\varphi(r)$; d'autre part, sa partie réelle pour $z = r$ est de la forme

$$\Sigma c_n u_n r^n,$$

les u_n étant compris entre $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Le module maximum de $\Phi(z, 1)$ est donc de la forme

$$h(r) e^{e^r},$$

$h(r)$ étant compris entre $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ et 2. Cette fonction $\Phi(z, 1)$ dépend d'ailleurs de la constante y, considérons la fonction $F(r, y)$ correspondante. Si pour une valeur y nous avons

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{F(r, y)}{e^{\sqrt{r}}} < 2,$$

y sera évidemment une valeur *anormale*. Donc si pour toute valeur y appartenant au carré C nous avions cette inégalité, la fonction

$$e + \sum_{1}^{\infty} c_n(1 - \theta_n) z^n$$

admettrait un ensemble de distributions *anormales* comprenant tous les points d'un carré, la proposition que nous voulons établir serait démontrée.

Plaçons-nous dans le cas contraire : il existe un point y du carré C pour lequel

$$F(r, y) > e^{\sqrt{r}} \qquad (r > r_0). \tag{30}$$

Nous prenons cette valeur de y et nous considérons les fonctions

$$f(z) - x$$

avec

$$f(z) = \psi(z)\, e^{-e^z}.$$

Pour $x = 1$, $f(z) - 1$ admet les mêmes zéros que $\Phi(z, 1)$, donc d'après l'inégalité (30) le module maximum $M(r)$ de $f(z)$ vérifie l'inégalité

$$\log M(r) > e^{\sqrt{r}} - K \qquad (r > r_0),$$

tandis que, d'après l'inégalité (29), la fonction $F(r, x)$ relative à $f(z)$ [qui est la même que pour $\Phi(z, x)$] vérifie l'inégalité

$$F(r, x) < 4(\log r)^2 + K$$

pour une suite de valeurs de r indéfiniment croissantes lorsque x appartient à un certain ensemble admettant tout point du carré C pour point de condensation. Ces valeurs x donnent encore des distributions anormales et la proposition en vue est encore établie dans ce cas.

Il est clair que cet exemple se généralise sans difficultés, mais les ensembles que l'on trouve dans la seconde hypothèse seront toujours des ensembles de mesure nulle dont l'ordre (au sens de M. Borel) est à croissance très rapide.

Il est manifeste que la question posée par M. Blumenthal au sujet des valeurs infra-normales est du même coup résolue; les distributions anormales trouvées ci-dessus sont également des distributions infra-normales.

Il resterait à chercher si, dans certains cas, les distributions dites *anormales* ne peuvent pas être plus probables que les distributions normales et aussi si, dans les cas de régularité de la croissance, on a un résultat analogue à celui obtenu pour l'ordre fini entier.

13. Toutes les fois que l'on connaîtra une limite inférieure de $M(r)$, le théorème II donnera une limite inférieure pour le nombre des zéros du produit $[f(z)-a][f(z)-b]$. C'est ce qui aura lieu lorsque la fonction $f(z)$ admettra des valeurs asymptotiques ou même restera simplement bornée sur certains chemins allant à l'infini. Il résulte en effet d'un théorème de M. Carleman [1] que, si une fonction entière reste bornée sur p chemins non contigus [c'est-à-dire tels que, entre deux quelconques des chemins, $f(z)$ ne reste pas bornée] le module maximum satisfait à la condition

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{\log_2 M(r)}{\log r} > \frac{p}{5}. \tag{31}$$

D'après le théorème II, on aura alors

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{\log n(r,\, a,\, b)}{\log r} > \frac{p}{5}. \tag{32}$$

On peut encore se demander dans ce cas si la considération simultanée de deux distributions est bien nécessaire et si l'on ne pourrait pas remplacer $n(r,\, a,\, b)$ par $n(r,\, x)$ dans l'inégalité précédente (l'une des valeurs x pouvant être exceptée). Lorsque l'ordre de la fonction est moindre que 1 $\left(\text{et naturellement au moins égal à } \frac{1}{2}\right)$, l'existence d'un chemin sur lequel $f(z)$ reste fini lorsqu'on s'éloigne indéfiniment

(1) *Arkiv för Mathematik*, t. XV, n° 10.

entraîne *a fortiori* que le minimum du module de $f(z)$ sur tout cercle $|z|=r$ reste fini. En remplaçant alors la fonction $f(z)$ par la fonction $\mathfrak{F}(z)$ ayant ses zéros sur l'axe réel négatif, le module de ces zéros étant le même que pour $f(z)$, on voit que $\mathfrak{F}(-r)$ reste borné. La méthode de Phragmèn-Lindelöf permet d'en déduire que pour cette fonction $\mathfrak{F}(z)$, le premier membre de l'inégalité (31) est au moins $\frac{1}{2}$, et l'inégalité

$$\log M(r) < K + \int_0^r \frac{n(x)}{x}\,dx + r\int_r^\infty \frac{n(x)}{x^2}\,dx,$$

valable pour les fonctions de genre zéro, montre alors que ρ étant l'ordre de $f(z)$, on aura pour cette fonction

$$\varliminf_{r=\infty} \frac{\log n(r,a)}{\log r} \geqq 1-\rho, \tag{33}$$

quel que soit a. Ainsi pour une fonction d'ordre ρ compris entre $\frac{1}{2}$ et 1, l'existence d'un chemin sur lequel la fonction est bornée entraîne l'inégalité (33).

Mais il n'en est plus de même *en général*, on ne peut déduire de l'existence d'un tel chemin une conséquence de la forme (33) relative à une distribution prise isolément. Dans le cas de la fonction $f(z) - x$ considérée au nº 12, quel que soit d'ailleurs y, $f(z)$ est bornée sur l'axe réel positif, et pour un ensemble non dénombrable de valeurs x le rapport

$$\frac{n(r,x)}{\log r}$$

reste borné pour une infinité de valeurs indéfiniment croissantes de r. On peut même faire en sorte que le rapport de $n(r, x)$ à une fonction aussi lentement croissante que l'on veut jouisse encore de cette propriété. De même pour les fonctions d'ordre fini entier.