ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN CHAZY

Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 39 (1922), p. 29-130

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1922_3_39__29_0>

SUR L'ALLURE DU MOUVEMENT

DANS

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

QUAND LE TEMPS CROÎT INDÉFINIMENT

PAR M. JEAN CHAZY

Introduction.

1. Je me propose dans le présent travail d'étudier l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment.

On a remarqué depuis très longtemps que si deux distances mutuelles croissent indéfiniment et si la troisième reste finie, le problème des trois corps se réduit à un double problème des deux corps. Il importe toutefois de préciser cette réduction, d'étudier les variations des trois distances mutuelles et des douze éléments osculateurs, soit en fonction du temps sur une même trajectoire, soit, s'il est possible, en fonction des conditions initiales.

On est conduit ainsi à distinguer le mouvement qu'on peut appeler *hyperbolique-elliptique* (¹), où deux distances mutuelles sont des infiniment grands d'ordre 1 par rapport au temps, et où la troisième est bornée supérieurement; et le mouvement *parabolique-elliptique*, où deux distances mutuelles sont des infiniment grands d'ordre $\frac{2}{3}$ et où la

(¹) Nous plaçons les deux adjectifs dans cet ordre, parce que par exemple dans le système composé du Soleil, de la Terre et de la Lune, on étudie d'abord le mouvement du centre de gravité du système partiel Terre-Lune par rapport au Soleil, puis le mouvement de la Lune par rapport à la Terre.

troisième est bornée. Un second cas limite du mouvement hyperbolique-elliptique est le mouvement *hyperbolique-parabolique*, où les trois distances mutuelles sont des infiniment grands, deux d'entre elles d'ordre 1 et la troisième d'ordre $\frac{2}{3}$. Dans ces trois premiers mouvements douze éléments osculateurs, convenablement choisis, tendent en général vers des limites finies quand le temps croît indéfiniment.

D'autre part, il existe des mouvements du problème des trois corps où les trois distances mutuelles croissent indéfiniment, et où une sorte d'équilibre entre elles s'établit avec le temps. Dans les uns ces trois distances sont des infiniment grands d'ordre 1 par rapport au temps, ce sont les mouvements *hyperboliques ;* dans les autres ces trois distances sont des infiniment grands d'ordre $\frac{2}{3}$, ce sont les mouvements *paraboliques*.

Dans le Chapitre I de ce Mémoire, je forme les équations différentielles classiques ou connues du problème des trois corps.

Dans le Chapitre II, je traite le cas où *la constante des forces vives* (demi-force vive moins fonction de forces) *est positive*. Je démontre le théorème : *Dans le problème des n corps, quand le mouvement dure indéfiniment, le rapport de la plus petite à la plus grande des distances mutuelles tend vers une limite si la constante des forces vives est positive.*

Quand la limite du rapport précédent est positive, le mouvement est hyperbolique, chacune des coordonnées cartésiennes et des distances mutuelles est le produit du temps t par une série entière en $\frac{1}{t}$ et $\frac{\log t}{t}$, convergente si t est assez grand. Si la limite est nulle dans le problème des trois corps, le mouvement est hyperbolique-parabolique ou hyperbolique-elliptique, et dans le premier cas peut encore être représenté par des développements en séries analogues, où le temps figure à la puissance $\frac{1}{3}$.

En outre, les valeurs limites des rapports des distances mutuelles, et les coefficients des séries obtenues ou les valeurs limites des douze éléments osculateurs sont des *fonctions continues des conditions initiales : le mouvement des trois corps est instable*, on le sait, *si la constante des forces vives est positive, mais* SON INSTABILITÉ EST CONTINUE.

Dans le Chapitre III, je traite le cas où *la constante des forces vives* *est nulle* dans le problème des trois corps : le mouvement est hyperbolique-elliptique ou parabolique. J'ai démontré précédemment que dans le mouvement parabolique chacune des différences de coordonnées et des distances mutuelles est en général le produit de $t^{\frac{2}{3}}$ par une série entière en $t^{-\frac{1}{3}}$ et en deux ou trois puissances du temps, dont les exposants, négatifs, dépendent des rapports des masses.

Dans le Chapitre IV, je considère le cas où *la constante des forces vives est négative* dans le problème des trois corps. Le problème, plus important au point de vue pratique, devient aussi plus complexe. Dans les calculs s'introduit la quantité $m_2 m_3 r_{23}^2 + m_3 m_1 r_{31}^2 + m_1 m_2 r_{12}^2$. Si cette quantité tend vers l'infini avec le temps, le mouvement est hyperbolique-elliptique ou parabolique-elliptique. *Dans ce cas, comme quand la constante des forces vives est positive ou nulle, j'épuise la question, je démontre qu'*IL N'Y A PAS D'AUTRES MOUVEMENTS POSSIBLES QUE CEUX QUI VIENNENT D'ÊTRE ÉNUMÉRÉS ET REPRÉSENTÉS.

La quantité $m_2 m_3 r_{23}^2 + m_3 m_1 r_{31}^2 + m_1 m_2 r_{12}^2$ peut être finie, comme dans les solutions périodiques et dans les solutions asymptotiques aux solutions périodiques. Et la question de savoir si cette quantité peut être tantôt bornée, tantôt infiniment grande, est posée depuis plus de cent ans par les théorèmes de Lagrange et de Poisson sur l'invariabilité des grands axes. Dans les deux éventualités il restera encore à savoir si l'allure finale de la trajectoire est fonction continue des conditions initiales comme quand la constante des forces vives est positive, ou en est au contraire fonction discontinue, comme par exemple M. Hadamard l'a établi pour les lignes géodésiques restant à distance finie sur les surfaces à courbures opposées d'ordre de connexion supérieur à 2.

Les diverses représentations obtenues (1) s'appliquent en parti-

---

(1) Ces représentations m'ont conduit à compléter comme il suit une proposition classique de Poincaré : *Dans le problème des trois corps dans l'espace, quand la constante des forces vives est négative, les trajectoires de l'espace à douze dimensions ne possédant pas la stabilité à la Poisson* (dans l'intervalle $t = 0$, $t = +\infty$), *peuvent être dans tout volume fini enfermées dans des hypersphères dont la somme des volumes est aussi petite que l'on veut.* Or, parmi les trajectoires ne possédant pas la stabilité à la Poisson figurent évidemment les trajectoires asymptotes à des trajectoires fermées, et les trajectoires hyperboliques-elliptiques et paraboliques-elliptiques. *Les trajectoires hyperboliques-ellip-*

culier au prolongement analytique du mouvement au delà de la valeur infinie du temps, prolongement que Poincaré a considéré pour étendre la notion de stabilité à la Poisson. Mais *dans le problème des trois corps, les trajectoires non exceptionnelles* (les seules de la stabilité desquelles on puisse tirer des conséquences pratiques) *ou bien possèdent la stabilité à la Poisson sans être prolongées au delà de la valeur infinie du temps, ou bien ne sont pas susceptibles d'être prolongées par des trajectoires réelles.*

Dans le Chapitre V, je complète certaines propositions données par M. Sundman dans le cas où l'une au moins des constantes des aires est différente de zéro. M. Sundman a démontré, dans ce cas et de $t = -\infty$ à $t = +\infty$, que deux distances mutuelles sont à chaque instant supérieures ou égales à une certaine longueur l, et que d'autre part la vitesse d'un corps dont à un instant les distances aux deux autres sont supérieures ou égales à l, est à cet instant inférieure à une certaine vitesse V. M. Hadamard a repris et simplifié ces deux propositions de M. Sundman, en conservant la même restriction. Je présente les faits dans un ordre nouveau, et *je limite la vitesse d'un corps* dont les distances aux deux autres sont limitées inférieurement *dans certains cas où les trois constantes des aires sont nulles.*

Le Chapitre VI contient deux théorèmes relatifs au problème des trois corps :

Théorème A. — *Dans le problème des trois corps, quand le temps croît indéfiniment, il est impossible que deux corps tendent l'un vers l'autre, en restant à distance du troisième corps supérieure à une longueur fixe.*

Théorème B. — *Dans le problème des trois corps, tout choc de deux corps a lieu dans le plan du maximum des aires.*

---

tiques sont donc, *quand la constante des forces vives est négative, moins nombreuses que les autres.*

La démonstration de la proposition précédente ne s'applique pas à la proposition analogue dans le mouvement plan des trois corps, et ne s'applique pas non plus au mouvement dans l'espace quand une ou deux masses s'annulent. D'ailleurs, quand deux masses sont nulles, la proposition énoncée est manifestement inexacte, et précisément la comparaison en fait ressortir la signification : en effet, l'espace à douze dimensions est divisé alors en trois continua à douze dimensions, correspondant aux deux sortes de trajectoires hyperboliques-elliptiques et aux trajectoires composées de deux ellipses; *les trajectoires hyperboliques-elliptiques sont* ainsi, *quand la constante des forces vives est négative et que deux masses sont nulles, aussi nombreuses que les autres.*

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET REMARQUES PRÉLIMINAIRES.

2. Si m_i, x_i, y_i, z_i désignent les masses (toutes positives) et les coordonnées cartésiennes rectangulaires des n corps, r_{ik} la distance des deux corps de masses m_i et m_k, et U la fonction de forces

$$U = \sum \frac{m_i m_k}{r_{ik}} = \sum \frac{m_i m_k}{\sqrt{S(x_i - x_k)^2}},$$

les équations différentielles du problème des n corps sont les $3n$ équations :

$$(1) \quad m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

L'équation des forces vives est

$$T = U + h,$$

si T désigne la demi-force vive du système des n corps

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

et h la *constante des forces vives*.

Outre l'équation des forces vives, nous utiliserons fréquemment, à l'exemple de M. Sundman, une combinaison des équations différentielles (1) et de l'équation des forces vives, combinaison formée par Lagrange dans le problème des trois corps et par Jacobi dans le problème des n corps, savoir

$$(2) \qquad I'' = 2U + 4h,$$

où I désigne la somme

$$I = \Sigma m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

et h la constante des forces vives.

Une conséquence de l'équation (2) est immédiate. Dans tout mouvement *réel* [1]) des n corps, dans la mesure où le problème des n corps représente une *réalité* physique, les coordonnées sont des fonctions holomorphes du temps, et en particulier sont finies ainsi que leurs dérivées : donc *la fonction* I *et sa dérivée* I' *sont* de même *finies à chaque instant du mouvement*. Or l'équation (2) montre que, si la constante h est positive ou nulle, la dérivée seconde I'' est toujours positive. D'où la conséquence : *Quand la constante des forces vives est positive ou nulle, la fonction* I *n'a pas de maximum et a au plus un minimum pendant toute la durée du mouvement réel*, c'est-à-dire de $t = -\infty$ à $t = +\infty$, si le mouvement n'est pas limité par un ou deux chocs.

Pour étudier au moyen de la théorie des fonctions analytiques les coordonnées en fonction du temps dans le problème des trois corps, et dans un but de généralisation mathématique ([2]), M. Sundman a prolongé analytiquement et *réellement* le mouvement au delà de tout choc de deux corps, au moyen des séries entières en $t^{\frac{1}{3}}$ représentant les coordonnées au voisinage et en deçà de l'instant du choc, $t = 0$. Dans le problème des trois corps et dans le problème des n corps nous ferons le même prolongement. Plus généralement, nous prolongerons le mouvement au delà de tout choc au voisinage de l'instant, $t = 0$, duquel les coordonnées s'expriment en séries entières à coefficients réels d'une puissance de t, $t^{\frac{1}{N}}$, N désignant un nombre entier positif impair ([3]). A tout autre point singulier, situé sur l'axe réel, des

([1]) Nous employons à peu de lignes d'intervalles le mot *réel* dans deux sens différents qu'il convient de distinguer. Le mouvement que M. Sundman obtient par prolongement analytique de part et d'autre de l'instant $t = 0$ d'un choc de deux corps est un mouvement *réel* au sens de la théorie des quantités complexes, car M. Sundman choisit, après comme avant le choc, la détermination *réelle* de la fonction $t^{\frac{1}{3}}$, mais ce mouvement ne représente aucune *réalité* physique.

([2]) Supposons que dans le mouvement elliptique de deux corps l'ellipse s'aplatisse et tende vers un segment de droite : ce segment de droite peut être considéré comme une trajectoire particulière correspondant à un mouvement périodique avec chocs des deux corps. Bien qu'un tel mouvement ne puisse pas se trouver réalisé par les planètes ou les astres, l'étude de ce mouvement donne des renseignements sur le mouvement elliptique général, *dont il est la limite mathématique*, et semble nécessaire à la conception des mouvements réels.

([3]) Par exemple, dans le problème des trois corps, au voisinage de l'instant du choc des fonctions analytiques représentant les coordonnées, par exemple à un choc de trois corps en général, le mouvement sera limité.

Avec cette extension de la durée du mouvement, les intégrales $\int \frac{dt}{r_{ik}}$ restent encore finies pendant tout le mouvement, car à l'instant de l'un des chocs considérés les distances r_{ik} sont nécessairement des infiniment petits d'ordre $\frac{2}{3}$ par rapport au temps (¹); d'après l'équation (2) *la dérivée* I' et par conséquent *la fonction* I *sont de même finies*. Donc, *pendant toute cette durée du mouvement encore, la fonction* I *n'a pas de maximum, quand la constante h est positive ou nulle, et a au plus un minimum,* qui en particulier peut limiter le mouvement.

Nous supposerons toujours que le mouvement des n corps est rapporté au centre de gravité commun, c'est-à-dire que l'on a

$$\Sigma m_i x_i = 0, \qquad \Sigma m_i y_i = 0, \qquad \Sigma m_i z_i = 0.$$

On déduit alors de l'identité de Lagrange :

$$\begin{aligned}\Sigma m_i \times \Sigma m_i x_i'^2 &= (\Sigma m_i x_i')^2 + \Sigma m_i m_k (x_i' - x_k')^2 = \Sigma m_i m_k (x_i' - x_k')^2,\\ \Sigma m_i \times \Sigma m_i x_i^2 &= (\Sigma m_i x_i)^2 + \Sigma m_i m_k (x_i - x_k)^2 = \Sigma m_i m_k (x_i - x_k)^2,\end{aligned}$$

de sorte que la demi-force vive des n corps et leur moment d'inertie

---

trois corps, les expressions des neuf coordonnées cartésiennes sont des séries entières par rapport à $t^{\frac{1}{3}}$ et en général par rapport à une ou deux puissances du temps, t^p, dont les exposants p sont des fonctions algébriques des rapports des masses. Si l'on écarte des mouvements qui se ramènent aux mouvements rectilignes du problème des deux corps, ces séries entières ne peuvent être prolongées réellement au delà de l'instant $t = 0$ que pour des valeurs particulières des masses (*cf.* Henrik Block, *Arkiv für Matematik, Astronomi och Fysik*, Band V, 1908, nº 9; et Chazy, *Bulletin astronomique*, t. XXXV, 1918, p. 375, 378, et p. 383, note 3).

(¹) M. Sundman a démontré que, dans le problème des trois corps, la distance de deux corps qui se choquent, ou les trois distances mutuelles si les trois corps se choquent, sont des infiniment petits d'ordre $\frac{2}{3}$ par rapport au temps compté jusqu'à l'instant du choc (*Acta Soc. sc. Fenn.*, t. XXIV, 1907, nº 6, p. 19-26; t. XXV, 1909, nº 9, p. 13; *Acta math.*, t. XXXVI, 1912, p. 126). J'ai étendu cette propriété à tous les chocs du problème des n corps où toutes les distances mutuelles tendent vers des limites finies, nulles ou différentes de zéro (*Bulletin astronomique*, t. XXXV, 1918, p. 332, en note. Le raisonnement contient une erreur, mais se rétablit facilement).

par rapport au centre de gravité peuvent se mettre sous la forme

$$T = \frac{1}{2M} \Sigma m_i m_k S(x'_i - x'_k)^2, \qquad I = \frac{1}{M} \Sigma m_i m_k r_{ik}^2,$$

avec

$$M = \Sigma m_i.$$

3. Dans le problème des trois corps, nous considérerons fréquemment le cas où l'une des trois distances mutuelles est petite par rapport aux deux autres. Nous nous servirons alors des notations bien connues, employées pour la première fois par Jacobi. Soient m_1 et m_2 les deux masses voisines relativement à la troisième : posant $r_{12} = r$, nous désignerons par ξ, η, ζ les coordonnées de la masse m_3 par rapport au centre de gravité des masses m_1 et m_2, par ρ la distance de la masse m_3 à ce centre de gravité $(\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2})$, enfin par x, y, z les coordonnées de la masse m_2 par rapport à la masse m_1 $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$. Avec ces notations les équations différentielles des deux mouvements relatifs que nous venons de définir sont les six équations

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} &= -M\xi\left(\frac{a_1}{r_{23}^3} + \frac{a_2}{r_{13}^3}\right) + a_1 a_2 M x\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right), \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} &= -M\eta\left(\frac{a_1}{r_{23}^3} + \frac{a_2}{r_{13}^3}\right) + a_1 a_2 M y\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right), \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -M\zeta\left(\frac{a_1}{r_{23}^3} + \frac{a_2}{r_{13}^3}\right) + a_1 a_2 M z\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right), \end{aligned} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{(m_1 + m_2)x}{r^3} - m_3 x\left(\frac{a_1}{r_{13}^3} + \frac{a_2}{r_{23}^3}\right) + m_3\xi\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{(m_1 + m_2)y}{r^3} - m_3 y\left(\frac{a_1}{r_{13}^3} + \frac{a_2}{r_{23}^3}\right) + m_3\eta\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{(m_1 + m_2)z}{r^3} - m_3 z\left(\frac{a_1}{r_{13}^3} + \frac{a_2}{r_{23}^3}\right) + m_3\zeta\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right), \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \qquad a_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

de sorte que l'on a

$$a_1 + a_2 = 1,$$
$$r_{13}^2 = (\xi + a_1 x)^2 + (\eta + a_1 y)^2 + (\zeta + a_1 z)^2,$$
$$r_{23}^2 = (\xi - a_2 x)^2 + (\eta - a_2 y)^2 + (\zeta - a_2 z)^2.$$

En dérivant deux fois l'équation $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, on obtient

$$\rho\rho'' + \rho'^2 = \mathrm{S}\xi\xi'' + \mathrm{S}\xi'^2.$$

Si dans le second membre on substitue à ξ'', η'', ζ'' leurs expressions tirées des équations (3), et à la somme $\mathrm{S}\xi'^2$ l'expression

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \rho'^2 + \frac{\mathrm{S}(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2}{\rho^2},$$

tirée de l'identité (¹) de Lagrange, on forme l'équation

$$(5)\quad \frac{d^2\rho}{dt^2} = -\mathrm{M}\rho\left(\frac{a_1}{r_{23}^3} + \frac{a_2}{r_{13}^3}\right) + a_1 a_2 \mathrm{M}\,\frac{\mathrm{S}x\xi}{\rho}\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right) + \frac{\mathrm{S}(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2}{\rho^3}.$$

Par un calcul symétrique on obtient l'équation

$$(6)\quad \begin{aligned}\frac{d^2 r}{dt^2} = &-\frac{m_1 + m_2}{r^2} - m_3 r\left(\frac{a_1}{r_{13}^3} + \frac{a_2}{r_{23}^3}\right)\\ &+ m_3\,\frac{\mathrm{S}x\xi}{r}\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right) + \frac{\mathrm{S}(yz' - zy')^2}{r^3}.\end{aligned}$$

L'équation des forces vives s'écrit

$$(7)\quad \frac{(m_1 + m_2)m_3}{\mathrm{M}}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 2\mathrm{U} + 2h,$$

ou aussi

$$(8)\quad \begin{aligned}&\frac{(m_1 + m_2)m_3}{\mathrm{M}}\left[\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - 2\mathrm{M}\left(\frac{a_1}{r_{23}} + \frac{a_2}{r_{13}}\right)\right]\\ &\qquad + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2\,\frac{m_1 + m_2}{r}\right) = 2h.\end{aligned}$$

Les intégrales des aires s'écrivent

$$\begin{aligned}\frac{(m_1 + m_2)m_3}{\mathrm{M}}(\eta\zeta' - \zeta\eta') + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(yz' - zy') &= \lambda,\\ \frac{(m_1 + m_2)m_3}{\mathrm{M}}(\zeta\xi' - \xi\zeta') + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(zx' - xz') &= \mu,\\ \frac{(m_1 + m_2)m_3}{\mathrm{M}}(\xi\eta' - \eta\xi') + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(xy' - yx') &= \nu,\end{aligned}$$

λ, μ, ν désignant les trois *constantes des aires*.

(¹) C'est-à-dire de l'identité

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')^2 + \mathrm{S}(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2,$$

où l'on a

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \rho^2, \qquad \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = \rho\rho'.$$

Enfin le moment d'inertie des trois corps par rapport au centre de gravité commun admet l'expression

$$\mathrm{I} = \frac{(m_1 + m_2) m_3}{\mathrm{M}} \rho^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2. \tag{9}$$

Ajoutons ici deux remarques que nous appliquerons fréquemment dans la suite. La première [1] est due à M. Sundman. Si dans l'équation des forces vives (7) on substitue l'expression

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2 + \frac{\mathrm{S}(yz' - zy')^2}{r^2},$$

on voit que chacune des quatre quantités

$$rr'^2, \quad \frac{(yz' - zy')^2}{r}, \quad \frac{(zx' - xz')^2}{r}, \quad \frac{(xy' - yx')^2}{r}$$

est inférieure ou égale à l'expression

$$2(m_1 + m_2) + 2\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\left(\frac{m_1 m_3 r}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3 r}{r_{23}} + hr\right),$$

donc à une quantité bornée, *pourvu que la distance r soit inférieure aux deux autres*, r_{13} et r_{23}, et *pourvu que de plus la distance r soit bornée :* d'où, sous ces deux conditions [2], les formules [3]

$$r' = \frac{b}{\sqrt{r}},$$

$$yz' - zy' = b\sqrt{r}, \qquad zx' - xz' = b\sqrt{r}, \qquad xy' - yx' = b\sqrt{r}. \tag{10}$$

La seconde remarque est relative aux développements bien connus

---

(1) Cf. *Acta Soc. sc. Fennicæ*, t. XXXIV, 1907, n° 6, p. 28; *Acta mathematica*, t. XXXVI, 1912, p. 123 et 168.

(2) Nous appliquerons ces formules dans plusieurs cas où la constante des forces vives h est négative : si h est négatif ou nul, la seconde condition est évidemment superflue.

(3) Dans ce Mémoire nous considérons un grand nombre de quantités bornées supérieurement en valeur absolue et un grand nombre de quantités infiniment petites en valeur absolue, *quand le temps croît indéfiniment*. Nous désignerons le plus souvent, pour simplifier nos formules, toutes les quantités de la première catégorie par la même lettre b sans les distinguer l'une de l'autre, et de même toutes les quantités de la seconde catégorie par la lettre ε; de sorte que nous pourrons avoir des égalités telles que $2b = b$, $2\varepsilon = \varepsilon$, sans que b ni ε soient nuls.

suivant les puissances du quotient $\frac{r}{\rho}$, de l'expression $\frac{a_1}{r_{23}} + \frac{a_2}{r_{13}}$ figurant dans la fonction de forces U et dans l'équation des forces vives (8), et de l'expression $\frac{a_1}{r_{23}^3} + \frac{a_2}{r_{13}^3}$ figurant dans les équations (3) en $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ et dans l'équation (5) en $\frac{d^2\rho}{dt^2}$. Les développements de ces deux expressions sont valables pour $\left|\frac{r}{\rho}\right| < 1$. Les premiers termes sont respectivement $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\rho^3}$ $(a_1 + a_2 = 1)$, les termes en $\frac{r}{\rho^2}$ et $\frac{r}{\rho^4}$ se détruisent; de sorte que si $\frac{r}{\rho}$ est inférieur à un nombre fixe inférieur à 1, on a les formules

$$(11) \qquad \frac{a_1}{r_{23}} + \frac{a_2}{r_{13}} = \frac{1}{\rho} + \frac{br^2}{\rho^3}, \qquad \frac{a_1}{r_{23}^3} + \frac{a_2}{r_{13}^3} = \frac{1}{\rho^3} + \frac{br^2}{\rho^5}.$$

Au contraire, dans le développement de l'expression $\frac{a_1}{r_{13}^3} + \frac{a_2}{r_{23}^3}$ figurant dans les équations (4) en $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ et dans l'équation (6) en $\frac{d^2r}{dt^2}$, le terme en $\frac{r}{\rho^4}$ n'est identiquement nul que si l'on a $m_2 = m_1$.

CHAPITRE II.

LA CONSTANTE DES FORCES VIVES EST POSITIVE.

4. Nous diviserons notre discussion en trois parties, en supposant successivement la constante des forces vives h positive, nulle, puis négative.

Supposons d'abord h positif, et supposons que dans le problème des n corps le mouvement dure indéfiniment de $t = 0$ à $t = +\infty$. Considérons l'équation de Lagrange et Jacobi

$$I'' = 4h + 2U.$$

Désignons par I_0 et I'_0 les valeurs de la fonction I et de la dérivée I' à l'instant $t = 0$, et intégrons deux fois de suite l'équation précédente :

$$(12) \qquad I' = 4ht + 2\int_0^t U\,dt + I'_0,$$

$$(13) \qquad I = 2ht^2 + 2\int_0^t dt \int_0^t U\,dt + I'_0\,t + I_0.$$

La valeur initiale I_0 est nécessairement positive ou nulle. L'équation (12) montre que si I'_0 est négatif, I' devient positif quand t est positif et assez grand, car la fonction U et l'intégrale $\int_0^t U\,dt$ sont évidemment positives : donc, en changeant au besoin l'origine du temps, on peut supposer I'_0 positif.

De l'équation (13) on déduit alors pour $t > 0$ l'inégalité

$$(14) \qquad I > 2ht^2.$$

Cette inégalité nous amène à considérer la plus grande des distances mutuelles r_{ik}, que nous désignerons à chaque instant par R; et nous désignerons de même à chaque instant la plus petite des distances mutuelles par r. Les distances r et R ne sont pas nécessairement les distances des deux mêmes masses pendant tout le mouvement. Le couple de masses, dont la distance est la plus grande ou la plus petite des distances mutuelles, peut changer : à l'instant où ce couple change, R ou r est une fonction continue du temps, pourvue d'une dérivée à droite et d'une dérivée à gauche, différentes en général.

Si l'on compare le carré R^2 et la quantité I, on a évidemment l'inégalité

$$\Sigma m_i m_k \times R^2 \geqq \Sigma m_i m_k r_{ik}^2 = MI,$$

et l'on déduit de l'inégalité (14) pour $t > 0$

$$(15) \qquad R^2 > \frac{2Mh}{\Sigma m_i m_k} t^2.$$

Nous avons ainsi à chaque instant une limite inférieure de la quantité I et une limite inférieure de la distance R. Il résulte en particulier que, quand le temps croît indéfiniment, le quotient $\frac{R}{t}$ est borné inférieurement.

Théorème. — *Dans le problème des n corps, si la constante des forces vives h est positive, le quotient* $\frac{r}{R}$ *tend vers une limite quand le temps croît indéfiniment.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons faire subir à l'expression

$$2T = \frac{1}{M} \Sigma m_i m_k S(x'_i - x'_k)^2$$

des transformations du même genre que les transformations opérées par Lagrange dans le problème des trois corps, et d'où l'identité de Lagrange a tiré son nom.

Cette identité donne d'abord

$$\mathrm{S}(x_i - x_k)^2 \times \mathrm{S}(x'_i - x'_k)^2 = [\mathrm{S}(x_i - x_k)(x'_i - x'_k)]^2 + \mathrm{S}[(y_i - y_k)(z'_i - z'_k) - (z_i - z_k)(y'_i - y'_k)]^2,$$

d'où, d'après l'équation

$$\mathrm{S}(x_i - x_k)^2 = r_{ik}^2$$

et son équation dérivée

$$\mathrm{S}(x_i - x_k)(x'_i - x'_k) = r_{ik} r'_{ik},$$

$$\mathrm{S}(x'_i - x'_k)^2 = r'^2_{ik} + \frac{\mathrm{S}[(y_i - y_k)(z'_i - z'_k) - (z_i - z_k)(y'_i - y'_k)]^2}{r_{ik}^2}.$$

On déduit

$$2\mathrm{T} = \frac{1}{\mathrm{M}} \Sigma m_i m_k r'^2_{ik} + \mathrm{Q}^2,$$

Q^2 désignant une somme de $\dfrac{3n(n-1)}{2}$ carrés.

Si l'on multiplie la somme $\Sigma m_i m_k r'^2_{ik}$ par la somme $\Sigma m_i m_k r^2_{ik}$, égale à MI, l'identité de Lagrange donne encore l'équation

$$\Sigma m_i m_k r^2_{ik} \times \Sigma m_i m_k r'^2_{ik} = (\Sigma m_i m_k r_{ik} r'_{ik})^2 + \Sigma m_i m_k m_j m_l (r_{ik} r'_{jl} - r_{jl} r'_{ik})^2,$$

où la dernière somme est étendue à tous les couples de distances mutuelles et comprend ainsi $\dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}$ termes. On obtient d'ailleurs par dérivation

$$2\Sigma m_i m_k r_{ik} r'_{ik} = \mathrm{MI}';$$

d'où l'on déduit

$$\Sigma m_i m_k r'^2_{ik} = \frac{\mathrm{MI}'^2}{4\mathrm{I}} + \frac{\Sigma m_i m_k m_j m_l (r_{ik} r'_{jl} - r_{jl} r'_{ik})^2}{\mathrm{MI}}$$

et

$$2\mathrm{T} = \frac{\mathrm{I}'^2}{4\mathrm{I}} + \frac{\Sigma m_i m_k m_j m_l (r_{ik} r'_{jl} - r_{jl} r'_{ik})^2}{\mathrm{M}^2 \mathrm{I}} + \mathrm{Q}^2.$$

Telle est l'expression cherchée.

Au moyen de cette expression nous pouvons écrire l'équation des forces vives

$$\frac{\mathrm{I}'^2}{4\mathrm{I}} + \frac{\Sigma m_i m_k m_j m_l (r_{ik} r'_{jl} - r_{jl} r'_{ik})^2}{\mathrm{M}^2 \mathrm{I}} + \mathrm{Q}^2 = 2\mathrm{U} + 2h,$$

et si nous désignons par m la plus petite des n masses m_i, nous en déduisons l'inégalité

$$\frac{m^4(\mathrm{R}r' - r\mathrm{R}')^2}{\mathrm{M}^2\mathrm{I}} \leqq 2\mathrm{U} + 2h - \frac{\mathrm{I}'^2}{4\mathrm{I}},$$

ou encore

$$\left[\left(\frac{r}{\mathrm{R}}\right)'\right]^2 = \frac{b\mathrm{I}}{\mathrm{R}^4}\left(2\mathrm{U} + 2h - \frac{\mathrm{I}'^2}{4\mathrm{I}}\right), \tag{16}$$

b désignant une quantité bornée [1].

Formons des limites supérieures des deux facteurs du second membre $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{R}^4}$ et $2\mathrm{U} + 2h - \frac{\mathrm{I}'^2}{4\mathrm{I}}$. De l'inégalité

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{R}^2} \leqq \frac{\Sigma m_i m_k}{\mathrm{M}},$$

et de l'inégalité (15) on tire

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{R}^4} = \frac{b}{t^2}.$$

On a d'autre part

$$\mathrm{U} = \frac{\Sigma m_i m_k}{r_{ik}} \leqq \frac{\Sigma m_i m_k}{r}.$$

Enfin la différence $2h - \frac{\mathrm{I}'^2}{4\mathrm{I}}$, au moyen des expressions (12) et (13) des quantités I' et I, et après réductions, devient

$$\frac{16h\left(\int_0^t dt \int_0^t \mathrm{U}\,dt - t\int_0^t \mathrm{U}\,dt\right) + 8h\mathrm{I}_0 - 4\left(\int_0^t \mathrm{U}\,dt\right)^2 - 4\mathrm{I}'_0\int_0^t \mathrm{U}\,dt - \mathrm{I}'^2_0}{4\mathrm{I}}. \tag{17}$$

Or d'après les hypothèses énoncées au n° 2, la fonction $\int_0^t \mathrm{U}\,dt$, *a fortiori* la fonction $\int_0^t dt\int_0^t \mathrm{U}\,dt$, et par conséquent la fonction

$$\int_0^t dt\int_0^t \mathrm{U}\,dt - t\int_0^t \mathrm{U}\,dt$$

[1] *Cf.* page 38, note 3.

sont finies pour toute valeur finie du temps. D'ailleurs cette dernière fonction est évidemment nulle pour $t=0$, et sa dérivée par rapport à t,

$$\int_0^t \mathrm{U}\,dt - \int_0 \mathrm{U}\,dt - t\mathrm{U} = -t\mathrm{U},$$

est négative si t est positif : donc la fonction considérée est négative aussi si t est positif. Si au numérateur de l'expression (17), nous supprimons le premier terme et d'autre part les trois termes précédés du signe $-$, ce numérateur se réduit à $8h\mathrm{I}_0$ et a augmenté :

$$2h - \frac{\mathrm{I}'^2}{4\mathrm{I}} < \frac{2h\mathrm{I}_0}{\mathrm{I}}.$$

Par substitution des limites supérieures obtenues, l'équation (16) devient

$$\left|\left(\frac{r}{\mathrm{R}}\right)'\right| = \frac{b}{t}\sqrt{\frac{\Sigma m_i m_k}{r} + \frac{h\mathrm{I}_0}{\mathrm{I}}}.$$

Sous le radical le rapport du second terme au premier est $\dfrac{h\mathrm{I}_0}{\Sigma m_i m_k} \times \dfrac{r}{\mathrm{I}}$: or de l'inégalité

$$r^2 \Sigma m_i m_k \leqq \Sigma m_i m_k r_{ik}^2 = \mathrm{MI} \qquad \text{ou} \qquad \frac{r}{\sqrt{\mathrm{I}}} \leqq \sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\Sigma m_i m_k}}$$

et de l'inégalité (14), on déduit que le quotient $\dfrac{r}{\mathrm{I}}$ tend vers zéro quand le temps croît indéfiniment. On peut écrire

$$\left|\left(\frac{r}{\mathrm{R}}\right)'\right| = \frac{b}{t\sqrt{r}},$$

et par suite et d'après l'inégalité (15),

$$\sqrt{\frac{r}{\mathrm{R}}}\left|\left(\frac{r}{\mathrm{R}}\right)'\right| = \frac{b}{t\sqrt{\mathrm{R}}} = \frac{b}{t^{\frac{3}{2}}}. \tag{18}$$

Puisque l'intégrale $\displaystyle\int \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$ tend vers une limite finie quand la limite inférieure est positive et fixe et que la limite supérieure croît indéfiniment, l'équation obtenue montre que la quantité $\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}$, donc *le rapport* $\frac{r}{R}$, *tendent aussi vers des limites :* ce qui démontre le théorème énoncé.

Soit l la limite du rapport $\frac{r}{R}$: on a, en intégrant de l'instant $t=+\infty$ à l'instant t les deux extrêmes des trois quantités égales (18),

$$\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}-l^{\frac{3}{2}}=\frac{b}{\sqrt{t}};$$

le rapport $\frac{r}{R}$ et la limite l ne peuvent évidemment être extérieurs à l'intervalle de 0 à 1. Si la limite l est nulle, l'équation précédente devient

$$\frac{r}{R}=\frac{b}{t^{\frac{1}{3}}}. \tag{19}$$

Une remarque nous sera utile plus loin. Si sur un faisceau de trajectoires la constante h est comprise entre deux quantités positives fixes, et si les valeurs initiales I_0 et I'_0 (celle-ci avant d'être éventuellement rendue positive) sont bornées, les quantités b des équations (18) et (19) sont inférieures à une même quantité, et le rapport $\frac{r}{R}$ tend vers sa limite *uniformément* sur toutes ces trajectoires : par suite *cette limite est une fonction continue des conditions initiales*. Au fond c'est ici que réside la démonstration de la continuité de l'allure finale des trajectoires en fonction des conditions initiales, dans le problème des trois corps et quand la constante des forces vives est positive.

5. Mouvement hyperbolique. — Dans le problème des n corps *supposons* encore *positive la constante des forces vives, et supposons plus grande que zéro la limite* l *du rapport* $\frac{r}{R}$: nous allons donner des expressions des $3n$ coordonnées x_i, y_i, z_i en fonction du temps au voisinage de la valeur $t=+\infty$.

On a d'abord

$$r=lR(1+\varepsilon),$$

Si r_{ik} désigne l'une quelconque des $\frac{n(n-1)}{2}$ distances mutuelles, on déduit de l'équation précédente et de l'inégalité (15)

$$(20) \qquad \frac{1}{r_{ik}^2} \leqq \frac{1}{r^2} = \frac{1+\varepsilon}{t^2 R^2} < \frac{\Sigma m_i m_k (1+\varepsilon)}{2 M h t^2} \times \frac{1}{t^2}.$$

Puisqu'on a d'autre part les inégalités telles que $|x_i - x_k| \leqq r_{ik}$, les équations différentielles (1) sont de la forme

$$(21) \qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{b}{t^2}, \qquad \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{b}{t^2}, \qquad \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{b}{t^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Donc les $3n$ projections des vitesses x'_i, y'_i, z'_i tendent vers des valeurs limites quand t tend vers $+\infty$: soient $A_i, B_i, C_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ ces $3n$ valeurs limites; on obtient en intégrant la première équation (21) de l'instant $t = +\infty$ à l'instant t

$$x'_i = A_i + \frac{b}{t}.$$

En intégrant à nouveau l'équation précédente à partir d'une valeur t_0 arbitraire mais assez grande, on obtient

$$x_i = x_{i0} + A_i(t - t_0) + b(\log t - \log t_0),$$

où, une fois fixé l'instant t_0, b désigne comme d'ordinaire une fonction bornée de t quand t croît indéfiniment. D'où les $3n$ équations

$$(22) \qquad x_i = A_i t + b \log t, \qquad y_i = B_i t + b \log t, \qquad z_i = C_i t + b \log t$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous savons seulement jusqu'ici que dans les $3n$ expressions (22) les $3n$ coefficients de $\log t$ sont des fonctions bornées : je dis que ces $3n$ coefficients tendent vers des limites. En effet, pour que les $\frac{n(n-1)}{2}$ quantités $\frac{r_{ik}^2}{t^2}$ soient bornés inférieurement selon l'inégalité (20), il est nécessaire que les $\frac{n(n-1)}{2}$ sommes $S(A_i - A_k)^2$ soient différentes de zéro, et l'on tire alors (1) des expressions (22)

$$r_{ik}^2 = S(A_i - A_k)^2 \times t^2 \left(1 + b\frac{\log t}{t}\right),$$

$$\frac{1}{r_{ik}^3} = \frac{1}{[S(A_i - A_k)^2]^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1 + b\dfrac{\log t}{t}}{t^3}.$$

Posons

$$(23)\quad \begin{cases} \alpha_i = \Sigma m_k \dfrac{A_i - A_k}{[S(A_i - A_k)]^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{1}{m_i}\dfrac{\partial U}{\partial A_i}, \\ \beta_i = -\dfrac{1}{m_i}\dfrac{\partial U}{\partial B_i}, \qquad \gamma_i = -\dfrac{1}{m_i}\dfrac{\partial U}{\partial C_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

en remplaçant dans la fonction U les variables x_i, y_i, z_i par les variables A_i, B_i, C_i. L'équation (1) en $\dfrac{d^2 x_i}{dt^2}$ prend la forme

$$x_i'' = -\frac{\alpha_i}{t^2} + b\frac{\log t}{t^3}.$$

En intégrant cette nouvelle équation de l'instant $t = +\infty$ à l'instant t, on obtient d'abord (2)

$$(24)\qquad x_i' = A_i + \frac{\alpha_i}{t} + b\frac{\log t}{t^2}.$$

Intégrons une seconde fois à partir d'un instant quelconque; puisque les coefficients A_i et α_i sont des constantes, on voit que *la différence $x_i - A_i t - \alpha_i \log t$ tend vers une limite finie quand le temps croît*

---

(1) Car l'on a par exemple

$$\frac{\log^2 t}{t^2} = \frac{\log t}{t} \times \frac{\log t}{t}$$

et la fonction $\dfrac{\log t}{t}$ est bornée, puisqu'elle tend vers zéro.

(2) Car l'on a encore

$$\int_\infty^t \frac{\log t}{t^3}\,dt = -\frac{\log t}{2t^2} - \frac{1}{4t^2} = -\frac{\log t}{2t^2}\left(1 + \frac{1}{2\log t}\right).$$

$1 + \dfrac{1}{2\log t}$ est borné, puisque $\log t$ tend vers $+\infty$.

indéfiniment. Il résulte de même que les $3n-1$ différences analogues tendent vers des limites finies quand t tend vers $+\infty$.

On pourrait continuer l'application du même procédé d'approximation. Au point où nous en sommes, il sera plus simple pour obtenir l'ensemble de nos développements de les rattacher aux théorèmes d'existence des solutions des systèmes différentiels.

Soient D_i, E_i, $F_i (i=1, 2, \ldots, n)$ les $3n$ valeurs limites des $3n$ fonctions $x_i - A_i t - \alpha_i \log t$, $y_i - B_i t - \beta_i \log t$, $z_i - C_i t - \gamma_i \log t$. Posons

$$\begin{aligned} x_i &= A_i t + \alpha_i \log t + D_i + X_i, \\ y_i &= B_i t + \beta_i \log t + E_i + Y_i, \\ z_i &= C_i t + \gamma_i \log t + F_i + Z_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n); \end{aligned}$$

les $3n$ quantités X_i, Y_i, Z_i tendront vers zéro. Posons d'autre part

$$(25) \qquad t\frac{dX_i}{dt} = \xi_i, \qquad t\frac{dY_i}{dt} = \eta_i, \qquad t\frac{dZ_i}{dt} = \zeta_i \qquad (i=1, 2, \ldots, n);$$

d'après l'équation (24) et les équations analogues, les $3n$ fonctions ξ_i, η_i, ζ_i tendront aussi vers zéro. Posons enfin $t=\frac{1}{T}$, de façon que la variable indépendante T tende vers zéro comme les $6n$ fonctions X_i, Y_i, Z_i, ξ_i, η_i, ζ_i.

Le système des $3n$ équations différentielles du second ordre (1) se transforme en un système de $6n$ équations différentielles du premier ordre, composé des $3n$ équations (25) et de $3n$ autres équations, analogues entre elles, dont l'une est

$$T\frac{d\xi_i}{dT} = -\xi_i + P_1(T, T\log T, X_1 T, X_2 T, \ldots, Y_1 T, \ldots, Z_1 T, \ldots, Z_n T),$$

la fonction P_1 désignant une série entière sans terme constant, convergente si ses $3n+2$ arguments sont assez petits. Nous devons chercher la ou les solutions de ce système transformé où les $6n$ fonctions X_i, Y_i, Z_i, ξ_i, η_i, ζ_i tendent vers zéro avec la variable positive T.

Pour obtenir un système de la forme classique, dont les seconds membres soient holomorphes par rapport à toutes les variables, il suffit de considérer une nouvelle variable en posant

$$u = T\log T,$$

et d'ajouter l'équation

$$(26) \qquad \mathrm{T}\frac{du}{d\mathrm{T}} = u + \mathrm{T}.$$

Nous avons alors un nouveau système composé de $6n+1$ équations entre les $6n+1$ fonctions X_i, Y_i, Z_i, ξ_i, η_i, $\zeta_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ et u de la variable T; les seconds membres de ces $6n+1$ équations sont holomorphes et nuls pour les valeurs nulles des $6n+1$ fonctions et de la variable T.

Cherchons les solutions [1] de ce système où les $6n+1$ fonctions tendent vers zéro avec la variable indépendante T. L'équation caractéristique est visiblement

$$(S+1)^{3n} S^{3n} (S-1)^2 = 0.$$

La seule racine de partie réelle positive est la racine double $S = 1$, à laquelle correspond le diviseur élémentaire double $(S-1)^2$. Les solutions cherchées sont développables par rapport aux deux

---

[1] Parmi les différents travaux relatifs à cette sorte de systèmes différentiels (cf. *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, édition française, t. I, vol. III, fasc. II, article de P. Painlevé, p. 49-53), le système considéré ici rentre dans les cas traités par Horn (*Journal de Crelle*, Band 117, 1897, p. 110 et 262). La présence dans l'équation caractéristique d'une racine nulle d'ordre $3n$ pourrait donner à craindre que ce système différentiel admette des solutions où les $6n+1$ fonctions tendent vers zéro avec la variable indépendante, et qui échappent à notre mode de représentation (*cf.* Cotton, *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXVIII, 1911, p. 512). En réalité, l'existence de ces $3n$ racines nulles correspond à ce fait que les $3n$ coefficients D_i, E_i, F_i sont arbitraires dans les expressions (27), et que par suite le système considéré doit admettre des solutions où les $3n$ fonctions X_i, Y_i, Z_i ont des valeurs constantes et arbitraires. De même l'existence de $3n$ racines égales à -1 dans l'équation caractéristique correspond à ce fait que dans les expressions (27) les $3n$ coefficients A_i, B_i, C_i sont arbitraires.

On pourrait arriver aux mêmes développements à partir du système primitif contenant $\mathrm{T}\log\mathrm{T}$ dans les seconds membres, par une légère extension de la méthode que M. Picard (*Traité d'Analyse*, 2e édition; t. III, p. 32) applique aux deux équations

$$\frac{dx}{dt} = x + P_2(x, y),$$

$$\frac{dy}{dt} = \mu x + y + P_2(x, y),$$

les $P_2(x, y)$ désignant des séries entières convergentes en x et y et sans termes constants ni termes du premier degré.

variables T et T log T. Les développements contiennent une constante arbitraire K telle qu'on ait, d'après l'équation (26),

$$u = \mathrm{KT} + \mathrm{T}\log\mathrm{T}.$$

Pour se borner aux solutions du système primitif, il suffit selon l'équation qui a introduit la variable u, $u = \mathrm{T}\log\mathrm{T}$, de faire $\mathrm{K} = 0$.

Donc les solutions considérées du système primitif, et en particulier les $3n$ fonctions X_i, Y_i, Z_i admettent des développements en séries entières en T et T log T, sans termes constants et sans constante arbitraire nouvelle, séries convergentes si les deux variables T et T log T sont assez petites.

Il résulte que *les $3n$ coordonnées x_i, y_i, z_i sont développables sous la forme* (1)

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} x_i &= \mathrm{A}_i t + \alpha_i \log t + \mathrm{D}_i + \mathrm{P}_1\left(\frac{\log t}{t}, \frac{1}{t}\right),\\ y_i &= \mathrm{B}_i t + \beta_i \log t + \mathrm{E}_i + \mathrm{P}_1\left(\frac{\log t}{t}, \frac{1}{t}\right),\\ z_i &= \mathrm{C}_i t + \gamma_i \log t + \mathrm{F}_i + \mathrm{P}_1\left(\frac{\log t}{t}, \frac{1}{t}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),\end{aligned}\right.$$

les fonctions $\mathrm{P}_1\left(\frac{\log t}{t}, \frac{1}{t}\right)$ désignant des séries entières en $\frac{\log t}{t}$ et $\frac{1}{t}$, sans terme constant et convergentes si t est assez grand.

Les développements (27) renferment les $6n$ paramètres A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, satisfaisant aux $\frac{n(n-1)}{2}$ inégalités

$$\mathrm{S}(\mathrm{A}_i - \mathrm{A}_k)^2 \neq 0.$$

Pour rapporter le mouvement au centre de gravité, il suffit d'imposer aux $6n$ paramètres A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i les six conditions

$$\Sigma m_i \mathrm{A}_i = 0, \qquad \Sigma m_i \mathrm{B}_i = 0, \qquad \Sigma m_i \mathrm{C}_i = 0,$$
$$\Sigma m_i \mathrm{D}_i = 0, \qquad \Sigma m_i \mathrm{E}_i = 0, \qquad \Sigma m_i \mathrm{F}_i = 0:$$

(1) M Bohlin a donné par approximations successives cette forme de développement dans les mouvements rectilignes des deux corps et des trois corps sans toutefois en démontrer la convergence (*Astronomiska Jakttagelser och undersökningar*, Band 9, 1908, n° 1, p. 14 et 45). J'ai donné ces développements dans le problème général des n corps dans une Note des *Comptes rendus* (t. 157, 1913, p. 1398).

les trajectoires correspondantes dépendent alors de $6n-6$ *paramètres arbitraires comme les trajectoires les plus générales du problème des n corps.* De même, dans les mouvements plan et rectiligne, les trajectoires représentées par les équations (27) dépendent du même nombre de paramètres arbitraires que les trajectoires les plus générales.

Quand le temps croît indéfiniment, la figure formée par les n corps sur les trajectoires considérées tend à être homothétique dans le rapport t à la figure formée par les n points

$$x_i = \mathrm{A}_i, \qquad y_i = \mathrm{B}_i, \qquad z_i = \mathrm{C}_i \qquad (i = 1, 2 \ldots, n),$$

c'est-à-dire à une figure quelconque de n points distincts.

Les distances mutuelles admettent évidemment des développements de même forme que les coordonnées, à des termes en $\frac{\log^2 t}{t}$, $\frac{\log^3 t}{t^2}$, $\ldots$ près, en général, soit au total

$$r_{ik} = t\,\mathrm{P}\left(\frac{\log t}{t}, \frac{1}{t}\right),$$

où P désigne une série entière en $\frac{\log t}{t}$ et $\frac{1}{t}$, convergente si t est assez grand, et dont le terme constant est nécessairement différent de zéro. Un cas particulier du développement précédent est le développement (¹) du rayon vecteur dans le mouvement hyperbolique de deux corps

$$r = nat + a\log t + a\left(\log\frac{2n}{ae} + l_0 - \varpi - 1\right)$$
$$+ \frac{a}{n}\frac{\log t}{t} + \frac{a}{n}\left(\log\frac{2n}{ae} + l_0 - \varpi\right)\frac{1}{t} + \mathrm{P}_2\left(\frac{\log t}{t}, \frac{1}{t}\right),$$

(¹) Ce développement résulte facilement aussi de l'élimination de la variable u entre les équations classiques (*cf.* TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. I, p. 115-116)

$$e\frac{\mathrm{E}^u - \mathrm{E}^{-u}}{2} - u = nt + l_0 - \varpi,$$
$$r = a\left(e\frac{\mathrm{E}^u + \mathrm{E}^{-u}}{2} - 1\right).$$

Dans un passage *Des méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (t. III, p. 169), il semble que l'existence du terme en $\log t$ dans le développement du rayon vecteur du mouvement hyperbolique de deux corps échappe à Poincaré (cf. *infra*, n° 6).

avec les notations classiques, et si l'on désigne par P_2 une série entière en $\frac{\log t}{t}$ et $\frac{1}{t}$, convergente si t est assez grand, et sans terme constant ni termes du premier degré.

Sur les trajectoires considérées, *les* $\frac{n(n-1)}{2}$ *distances mutuelles sont des infiniment grands d'ordre* 1 *par rapport au temps* t; la condition est caractéristique. En effet, si les $\frac{n(n-1)}{2}$ distances mutuelles sont des infiniment grands d'ordre 1, le rapport de la plus petite à la plus grande d'entre elles tend vers une limite plus grande que zéro : d'autre part, dans l'équation des forces vives, la fonction U tend vers zéro et la demi-force vive T ne peut être négative ni tendre vers zéro; car si les $3n$ dérivées x'_i, y'_i, z'_i tendaient vers zéro, il en serait de même des $3n$ quotients $\frac{x_i}{t}$, $\frac{y_i}{t}$, $\frac{z_i}{t}$ et par suite des $\frac{n(n-1)}{2}$ quotients $\frac{r_{ik}}{t}$, ce qui est impossible si les distances r_{ik} sont des infiniment grands d'ordre 1. Donc la constante des forces vives h est nécessairement positive et c'est le cas actuel. Puisque dans le problème des deux corps les trajectoires ainsi caractérisées sont des branches d'hyperbole, par extension dans le problème des n corps on peut appeler encore *hyperboliques* [1] les trajectoires et mouvements correspondants.

Les trajectoires des n corps représentées par les équations (27) sont évidemment asymptotes aux courbes représentées par les mêmes équations où l'on annule les $3n$ termes P_1. Si l'on écarte le mouvement rectiligne, la trajectoire de chacun des n corps est asymptote à une

---

[1] Le mot a été employé, mais il importe de le préciser. Dans le problème des trois corps, parmi les mouvements où les trois distances mutuelles croissent indéfiniment avec le temps, il faut distinguer : 1° les mouvements *hyperboliques*, que nous définissons ici, et où les trois distances mutuelles sont des infiniment grands d'ordre 1 par rapport au temps; 2° les mouvements que j'ai appelés *paraboliques* (cf. *Bulletin astronomique*, t. XXXV, 1918, p. 343; et *infra*, n° 11, p. 88), et où les trois distances mutuelles sont des infiniment grands d'ordre $\frac{2}{3}$ comme le rayon vecteur du mouvement parabolique de deux corps; 3° les mouvements *hyperboliques-paraboliques* que nous considérons plus loin (n° 7, p. 65-72), où l'une des distances mutuelles est un infiniment grand d'ordre $\frac{2}{3}$, et les deux autres des infiniment grands d'ordre 1.

courbe plane, dont l'équation dans son plan peut être réduite en général à la forme $y = a^x$, a désignant une constante positive, en axes rectangulaires ou obliques. Comme pour les branches d'hyperbole du problème des deux corps, cette courbe plane peut se réduire à une droite. Pour que les trajectoires des n corps admettent toutes des asymptotes rectilignes, il suffit que les $3n$ coefficients α_i, β_i, γ_i soient proportionnels aux $3n$ coefficients A_i, B_i, C_i; d'après les équations (23), il suffit donc que les $3n$ coefficients A_i, B_i, C_i satisfassent aux $3n$ équations

$$\lambda A_i + \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial A_i} = 0, \qquad \lambda B_i + \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial B_i} = 0, \qquad \lambda C_i + \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial C_i} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

λ désignant une inconnue auxiliaire : c'est-à-dire que la configuration-limite des n corps quand le temps croît indéfiniment soit une *figure d'équilibre relatif*. Rappelons que les figures d'équilibre relatif, que forment les n corps quand ils se meuvent de façon que leurs distances mutuelles aient des rapports invariables, sont aussi les configurations limites possibles [1] quand les n corps se choquent en un même point de l'espace, ou quand ils s'éloignent indéfiniment sur les trajectoires paraboliques : le problème des trois corps admet deux figures d'équilibre relatif, une figure rectiligne obtenue par Euler, et le triangle équilatéral, obtenu par Lagrange.

Enfin il est clair que, comme la valeur limite du rapport $\frac{r}{R}$, les coefficients des séries (27) sont fonctions continues des conditions initiales.

6. Prolongement analytique du mouvement au delà de la valeur infinie du temps. — Puisque nous avons des expressions des coordonnées en fonctions du temps t, valables quand t tend par valeurs réelles vers $+\infty$, traitons la question du prolongement analytique du mouvement au delà de la valeur infinie du temps. Poincaré a considéré [2] un tel prolongement en vue d'étendre la notion de stabilité à la Poisson :

---

(1) *Cf.* Sundman, *Acta Soc. sc. Fennicæ*, t. XXXIV, 1906, n° 6, p. 28; Chazy, *Bulletin astronomique*, t. XXXV, 1918, p. 321-389, et *infra*, n° 11, p. 88.

(2) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, p. 168.

si une trajectoire ne possède pas la stabilité à la Poisson quand le temps t croît de la valeur $t = 0$ à la valeur $t = +\infty$, l'ensemble de cette trajectoire et de ses prolongements analytiques successifs peut posséder cette stabilité. Poincaré a pris comme exemples le mouvement des trois corps que nous appelons plus loin mouvement hyperbolique-elliptique, et d'abord le mouvement hyperbolique des deux corps. M. Picard a précisé (¹) dans ce dernier mouvement le prolongement analytique de la trajectoire. Il est curieux de constater que *dans le problème des trois corps les trajectoires non exceptionnelles ou bien possèdent la stabilité à la Poisson sans être prolongées analytiquement au delà de la valeur infinie du temps, ou bien ne sont pas susceptibles d'être prolongées par des trajectoires réelles*, de sorte que la conception de Poincaré ne s'applique pas au problème des trois corps au moins sous sa forme immédiate. D'autre part, dans le problème des deux corps, la trajectoire peut être prolongée par une trajectoire réelle, mais le temps acquiert nécessairement des valeurs imaginaires (²), et d'ailleurs après tous les prolongements possibles la trajectoire se compose seulement des deux branches d'une même hyperbole, parcourues, l'une au moins, une infinité de fois.

Considérons en premier lieu le mouvement parabolique des deux corps, ou plutôt le mouvement parabolique d'un point M attiré par un point fixe O en raison inverse du carré de la distance. Dans ce mouvement parabolique les coordonnées cartésienne du point M sont représentées, quand le temps est assez grand, par des séries entières convergentes ordonnées suivant les puissances décroissantes de $t^{\frac{1}{3}}$, et dont les premiers termes sont en $t^{\frac{2}{3}}$. Ces séries sont valables pour représenter un même mouvement où le point M est supposé décrire d'une branche infinie à l'autre toute la parabole trajectoire, sur les deux arcs où la valeur absolue du temps est assez grande, correspondant l'un à des valeurs négatives, l'autre à des valeurs positives du temps : il suffit de choisir sur ces deux arcs la détermination réelle

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. XXXVIII, 1914, p. 323.

(²) Si les coordonnées cartésiennes et leurs dérivées par rapport au temps sont réelles, la différentielle dt est réelle, et le temps t varie nécessairement dans le plan complexe sur une droite parallèle à l'axe réel, sinon sur l'axe réel.

de $t^{\frac{1}{3}}$. Pour suivre cette détermination de l'un à l'autre des deux arcs considérés, on peut, dans le plan de la variable complexe t, relier les deux segments positif et négatif de l'axe réel par un chemin restant assez voisin du point $t=\infty$ pour ne pas sortir du domaine de convergence [1] des séries entières considérées, et tournant autour du point $t=\infty$ d'un angle multiple impair de 3π. Le prolongement analytique du mouvement parabolique ainsi effectué au delà de la valeur infinie du temps est en tous points semblable au prolongement effectué par M. Sundman après l'instant, $t=0$, d'un choc de deux corps s'attirant en raison inverse du carré de la distance, au moyen des séries entières en $t^{\frac{1}{3}}$ qui représentent le mouvement avant l'instant du choc. Dans l'un et l'autre des prolongements, on passe de valeurs réelles à des valeurs réelles du temps par un chemin du plan de la variable complexe t qui a nécessairement des points imaginaires, et qu'on peut prendre aussi voisin du point singulier que l'on veut. Insistons sur ce que dans les deux cas la loi du mouvement prolongé est, comme la loi du mouvement primitif, une attraction en raison inverse du carré de la distance.

Considérons maintenant le mouvement hyperbolique de deux corps, c'est-à-dire le mouvement hyperbolique d'un point mobile M attiré par un point fixe O en raison inverse du carré de la distance, et faisons une remarque évidente au sujet des expressions obtenues dans ce mouvement pour représenter les coordonnées et le rayon vecteur pour les grandes valeurs du temps. Ces expressions contiennent à la fois t et $\log t$: d'après la forme du développement du rayon vecteur, on voit que, si l'on part d'une valeur de t positive et assez grande, et qu'on arrive à une valeur de t négative, par un circuit quelconque du plan de la variable t, mais assez voisin du point $t=\infty$, la détermination finale de $\log t$ sera imaginaire, et la nouvelle valeur du rayon vecteur pour des valeurs négatives du temps très grandes en valeur

(1) Dans le mouvement parabolique des deux corps, les coordonnées cartésiennes et le rayon vecteur n'ont dans tout le plan de la variable t que trois points singuliers : le point $t=\infty$, point critique algébrique d'ordre 2, et deux points imaginaires conjugués, où le rayon vecteur s'annule, points critiques algébriques d'ordre 1. En particulier, sauf au point $t=\infty$, les coordonnées cartésiennes et le rayon vecteur sont holomorphes tout le long de l'axe réel.

absolue sera aussi imaginaire [1]. Réciproquement, *si le mouvement considéré admet un prolongement où la trajectoire est réelle, le temps t a nécessairement dans ce prolongement des valeurs imaginaires.*

Sans approfondir davantage la forme de l'expression en fonction du temps du rayon vecteur dans le mouvement hyperbolique des deux corps, prenons, selon le procédé de Poincaré, une autre variable indépendante. La trajectoire primitive du point M est une branche d'hyperbole tournant sa concavité vers le foyer O : l'équation de l'hyperbole dont cette branche fait partie

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta},$$

subsiste nécessairement dans le mouvement prolongé. M. Picard prend pour nouvelle variable l'anomalie vraie θ, qui reste nécessairement réelle; quand θ croît et atteint, puis dépasse la valeur

$$\alpha = \arc\cos\left(-\frac{1}{e}\right) \qquad \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$$

correspondant à une asymptote et à la valeur infinie du temps, le point $M(r, \theta)$ passe de l'arc de la première branche d'hyperbole à l'arc de la seconde branche ayant même asymptote. La trajectoire prolongée est nécessairement cette seconde branche d'hyperbole. On remarque que la seconde branche d'hyperbole tourne sa convexité vers le foyer O, et que par conséquent la loi du mouvement prolongé sera, non plus une attraction, mais une répulsion, nécessairement en raison inverse du carré de la distance. Effectivement, les fonctions x et y définies par les équations $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, et le temps dont la différentielle est définie par l'équation des aires

$$\frac{r^2\,d\theta}{dt} = C,$$

---

(1) On pourrait être tenté de dire que $\log t$ ne s'introduit dans les développements des coordonnées que comme expression de l'intégrale $\int \frac{dt}{t}$, et de remplacer partout dans ces développements $\log t$ par $\log|t|$. Mais les sommes des séries ainsi formées ne sont pas des fonctions analytiques de la variable t.

La même remarque peut être présentée au sujet de l'équation différentielle $t\frac{dx}{dt} = x + t$, et de son intégrale générale $x = Ct + t\log t$: l'expression $t\log|t|$ est une fonction de variable réelle continue pour $t = 0$, mais non une fonction analytique.

ne cessent pas après le prolongement de satisfaire aux équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3},$$

où le coefficient μ est positif. Or on peut écrire ces équations

$$\frac{d^2(-x)}{dt^2} = \frac{\mu(-x)}{(-r)^3}, \qquad \frac{d^2(-y)}{dt^2} = \frac{\mu(-y)}{(-r)^3}:$$

$-r$ est maintenant la valeur absolue de la distance OM, et $-x$, $-y$ sont les projections de cette valeur absolue dirigée de O vers M : le coefficient μ étant resté le même, on voit bien que la loi du nouveau mouvement est une répulsion en raison inverse du carré de la distance.

Cherchons d'autre part comment est prolongé le temps. L'équation des aires donne la quadrature

$$(28) \qquad t = \frac{p^2}{C}\int \frac{d\theta}{(1 + e\cos\theta)^2} = \frac{1}{n}\int \left[\frac{\sqrt{e^2-1}}{(\theta-\alpha)^2} + \frac{1}{\theta-\alpha} + P'(\theta-\alpha)\right] d\theta,$$

où n désigne comme dans le mouvement elliptique la quantité $\sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$, et $P(\theta-\alpha)$ une série entière convergente en $\theta-\alpha$ à coefficients constants, de dérivée $P'(\theta-\alpha)$. D'où, dans le mouvement primitif, c'est-à-dire pour $\theta < \alpha$,

$$t = \frac{1}{n}\left[\frac{\sqrt{e^2-1}}{\alpha-\theta} + \log(\alpha-\theta) + P(\theta-\alpha)\right],$$

si le terme constant de la série $P(\theta-\alpha)$ est convenablement choisi. Considérée en fonction de θ, l'expression précédente du temps admet dans le plan de la variable complexe le point critique logarithmique $\theta = \alpha$: pour prolonger analytiquement le temps au delà de ce point, c'est-à-dire pour passer des valeurs réelles et inférieures à α aux valeurs réelles et supérieures à α, il faut quitter l'axe réel et tourner autour du point $\theta = \alpha$ d'un angle multiple impair de π, $(2N+1)\pi$. La valeur primitive du temps étant réelle, la valeur prolongée pour $\theta > \alpha$ sera nécessairement imaginaire :

$$t = \frac{1}{n}\left[\frac{\sqrt{e^2-1}}{\alpha-\theta} + \log(\theta-\alpha) + (2N+1)\pi i + P(\theta-\alpha)\right],$$

et aura pour partie imaginaire $\frac{(2N+1)\pi i}{n}$. Donc, dans le mouvement prolongé, au point $t=\infty$ *l'on continue le segment positif de l'axe réel, non pas par le segment négatif de cet axe, mais par une droite parallèle à ce segment négatif*, d'ordonnée $\frac{(2N+1)\pi}{n}$. On conçoit que de telles valeurs imaginaires du temps substituées dans l'expression primitive du rayon vecteur r et dans les expressions (27) des coordonnées x et y donnent à ces expressions des valeurs réelles.

Au lieu de l'anomalie vraie, prenons encore comme variable indépendante l'inverse du rayon vecteur $\frac{1}{r}$. Le temps peut être défini en fonction du rayon vecteur r par l'équation différentielle

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{C^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r} + 2h$$

avec les notations habituelles. D'où l'on tire

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2h + \frac{2\mu}{r} - \frac{C^2}{r^2}}} = \left[-\frac{r^2}{\sqrt{2h}} + \frac{\mu}{(2h)^{\frac{3}{2}}} r + P_1'\left(\frac{1}{r}\right)\right] d\frac{1}{r}$$

et

$$t = \frac{r}{\sqrt{2h}} - \frac{\mu}{(2h)^{\frac{3}{2}}} \log r + P_1\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{r}{\sqrt{2h}} + \frac{\mu}{(2h)^{\frac{3}{2}}} \log\frac{1}{r} + P_1\left(\frac{1}{r}\right),$$

$P_1\left(\frac{1}{r}\right)$ désignant une série entière convergente en $\frac{1}{r}$ à coefficients constants, de dérivée $P_1'\left(\frac{1}{r}\right)$. Quand le point θ dans son plan tourne autour du point α de l'angle $(2N+1)\pi$, le point $\frac{1}{r}$ tourne dans son plan du même angle autour de l'origine, d'après la relation

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{p}.$$

Dans le mouvement prolongé, r est négatif et l'ordonnée de la droite décrite par le point t est de même

$$\frac{\mu}{(2h)^{\frac{3}{2}}}(2N+1)\pi = \frac{(2N+1)\pi}{n}.$$

Remarquons en passant que le développement $t(r)$ contient un seul logarithme tandis que le développement inverse $r(t)$ en contient une infinité.

Ainsi *le mouvement attractif hyperbolique de deux corps admet comme prolongement analytique un mouvement répulsif où la trajectoire est réelle, mais où le temps a des valeurs imaginaires.* Dans n'importe quel mouvement, on peut ajouter au temps une constante quelconque réelle ou imaginaire sans changer autre chose que l'origine ou la notation du temps; mais ici, si l'on suit la variable t dans le prolongement analytique, et si les valeurs de cette variable dans le mouvement primitif sont réelles, elles sont nécessairement imaginaires dans le mouvement prolongé.

Quand l'angle θ croît à partir de la valeur α et tend vers la valeur $2\pi - \alpha$, le point M décrit la seconde branche d'hyperbole et s'éloigne indéfiniment le long de la seconde asymptote : le mouvement répulsif peut à nouveau être prolongé par un mouvement attractif ayant lieu sur la première branche d'hyperbole. Et ainsi de suite. Quand l'angle θ croît indéfiniment, le point M décrit successivement une infinité de fois les deux branches d'hyperbole : *la trajectoire est périodique, comme dans le mouvement elliptique.* La variable t parcourt successivement, et toujours dans le sens positif de l'axe réel, cet axe et une infinité de droites parallèles, d'ordonnées $\pm \frac{\pi}{n}$, $\pm \frac{3\pi}{n}$, $\pm \frac{5\pi}{n}$, ... : en particulier, le point t peut décrire aussi un circuit fermé, réduit, par exemple, à l'axe réel et à l'une des droites précédentes. Mais il n'est plus question ici de stabilité à la Poisson.

On peut considérer une autre manière de prolonger le mouvement attractif primitif. D'après l'expression (28), si à la suite du mouvement primitif la variable θ tourne dans son plan autour du point $\theta = \alpha$ d'un angle multiple pair de π, $2N\pi\,(N \neq 0)$, puis dans le mouvement prolongé reprend en décroissant les valeurs inférieures à α, le mobile M parcourt à nouveau en sens inverse la branche d'hyperbole primitive, et le mouvement reste attractif. Les instants correspondant dans le mouvement primitif et dans le mouvement prolongé à une même position du mobile diffèrent [1] de $\frac{2N\pi i}{n}$. Si, le long de la

---

[1] Dans le cas extrême où l'on ferait $N = 0$, on serait conduit à admettre que le temps restant réel change de sens.

seconde asymptote, on effectue un prolongement analogue, et ainsi de suite, *la trajectoire totale constituée par la même branche d'hyperbole décrite alternativement dans des sens différents, est encore périodique.* La variable t dans son plan parcourt dans des sens alternés l'axe réel et une infinité de parallèles à cet axe, d'ordonnées $\pm \frac{2\pi}{n}, \pm \frac{4\pi}{n}, \ldots$; en particulier, le point t peut décrire un circuit périodique.

Enfin l'on peut combiner les deux sortes de prolongements analytiques obtenus, et se donner arbitrairement une suite, périodique ou non périodique, de nombres entiers positifs, pour représenter les nombres de fois que, successivement et alternativement, l'une puis l'autre branche d'hyperbole sont parcourues par le point M : dans ce cas encore *il n'y a pas lieu de considérer la stabilité à la Poisson.*

Arrivons enfin au mouvement hyperbolique des n corps représenté par les équations (27) : comme le mouvement hyperbolique de deux corps, ce mouvement *ne peut être prolongé par un mouvement où les trajectoires soient réelles, sans que le temps acquière des valeurs imaginaires.*

De plus, pour qu'il y ait compensation entre les parties imaginaires des termes $A_i t$, $B_i t$, $C_i t$ et celles des termes $\alpha_i \log t$, $\beta_i \log t$, $\gamma_i \log t$, il est nécessaire que les $3n$ coefficients α_i, β_i, γ_i soient proportionnels aux $3n$ coefficients A_i, B_i, C_i. D'après une remarque prédédente [1], les trajectoires des n corps ont alors toutes des asymptotes rectilignes, et *la configuration limite des n corps est une figure d'équilibre relatif*, la figure rectiligne d'Euler ou le triangle équilatéral dans le problème des trois corps. En dehors des mouvements où les distances mutuelles ont des rapports constants, et qui se ramènent au problème des deux corps, il existe effectivement dans le problème rectiligne des trois corps, des mouvements où les trois inverses des distances mutuelles sont fonctions holomorphes l'un de l'autre quand le temps croît indéfiniment, et où par suite le prolongement analytique des trajectoires est immédiat et réel. Donc, sauf dans le problème des deux corps, *les trajectoires hyperboliques susceptibles d'être prolongées par des trajectoires réelles dépendent d'un nombre de paramètres inférieur* [2] *à* $6n-6$.

---

[1] *Cf.* page 52.

[2] En définitive, cette circonstance est due à la nature du point singulier $t=\infty$ des

7. Considérons maintenant le cas où *la constante des forces vives h est toujours positive*, mais où *la limite du rapport $\frac{r}{R}$* de la plus petite à la plus grande des distances mutuelles *est nulle*, et restreignons-nous dans ce cas au problème des trois corps.

Pour une valeur donnée et assez grande du temps, l'une des trois distances mutuelles est petite par rapport à la plus grande des deux autres. D'après les inégalités entre côtés d'un triangle, il faut que le rapport de ces deux autres distances soit voisin de 1. Donc, quand le temps croît indéfiniment, *il ne peut y avoir échange*, c'est toujours la même distance mutuelle qui est la plus petite.

Dès lors, employons les notations du n° 3. Il est clair que les rapports de la distance ρ et des deux distances r_{13} et r_{23} tendent vers 1 quand le temps croît indéfiniment. Et l'on peut écrire par exemple

$$r_{13} = \rho(1+\varepsilon), \qquad r_{23} = \rho(1+\varepsilon),$$

$$\frac{1}{r_{13}^3} = \frac{1+\varepsilon}{\rho^3}, \qquad \frac{1}{r_{23}^3} = \frac{1+\varepsilon}{\rho^3},$$

et encore

$$\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3} = \left(\frac{1}{r_{23}^3} + \frac{1}{r_{23}\,r_{13}} + \frac{1}{r_{13}^2}\right)\frac{r_{13}-r_{23}}{r_{23}\,r_{13}} = \frac{3(r_{13}-r_{23})(1+\varepsilon)}{\rho^4};$$

d'où

$$\left|\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right| \leqq \frac{3r(1+\varepsilon)}{\rho^4}. \tag{29}$$

De l'inégalité (15) on déduit l'équation

$$\frac{1}{\rho} = \frac{b}{t}, \tag{30}$$

qui montre que *la distance ρ tend vers l'infini avec t*, et nous emploie-

---

coordonnées cartésiennes dans le problème des n corps, c'est-à-dire à l'exposant 2 de la loi de Newton. Au contraire, avec la loi du cube des distances, sur les trajectoires où les n points matériels s'éloignent indéfiniment, et non exceptionnelles, les coordonnées cartésiennes admettent le point $t=\infty$ comme pôle simple : le prolongement analytique du mouvement au delà de la valeur infinie du temps est immédiat, et réel sur le segment négatif de l'axe réel.

rons enfin l'équation, équivalente ici à l'équation (19),

$$\frac{r}{\rho} = \frac{b}{t^{\frac{1}{3}}}. \tag{31}$$

Puisqu'on a $|\xi| \overline{\underset{<}{=}} \rho$, $|x| \overline{\underset{<}{=}} r$, l'équation (3) en $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ est de la forme

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{b}{\rho^2} + \frac{br^2}{\rho^4}$$

ou encore, d'après les équations (30) et (31), de la forme

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{b}{t^2} + \frac{b}{t^{\frac{8}{3}}} = \frac{b}{t^2}; \tag{32}$$

par intégration l'on voit que la dérivée ξ', et de même les dérivées η' et ζ', tendent vers des limites finies quand le temps croît indéfiniment. En outre, soient A, B, C les limites respectives des dérivées ξ', η', ζ' : en intégrant l'équation (32) de l'instant $t = +\infty$ à l'instant t, on a la première des trois équations

$$\xi' = A + \frac{b}{t}, \qquad \eta' = B + \frac{b}{t}, \qquad \zeta' = C + \frac{b}{t}. \tag{33}$$

Les quotients $\frac{\xi}{t}$, $\frac{\eta}{t}$, $\frac{\zeta}{t}$ tendent respectivement vers les limites A, B, C des dérivées ξ', η', ζ', et le quotient $\frac{\rho}{t} = \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}{t}$ tend vers la limite $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, qui ne peut être nulle d'après l'équation (30). Donc *les distances ρ, r_{13}, r_{23} sont des infiniment grands d'ordre* 1. Enfin l'équation (31) devient

$$r = b\,t^{\frac{2}{3}}: \tag{34}$$

si la distance r a un ordre d'infinitude déterminé, cet ordre est au plus $\frac{2}{3}$, comme celui du rayon vecteur dans le mouvement parabolique de deux corps.

Proposons-nous de développer de proche en proche, comme nous l'avons fait dans le mouvement hyperbolique, les coordonnées ξ, η, ζ en fonction du temps. En intégrant la première des équations (33) à partir d'un instant fixe t_0, on obtient

$$\xi = \xi_0 + A(t - t_0) + b(\log t - \log t_0).$$

Les expressions cherchées des coordonnées ξ, η, ζ sont donc de la forme

$$(35) \qquad \xi = \mathrm{A}t + b\log t, \qquad \eta = \mathrm{B}t + b\log t, \qquad \zeta = \mathrm{C}t + b\log t.$$

Je dis que, dans ces trois expressions, les trois coefficients b tendent vers des limites. En effet, comme dans le mouvement hyperbolique, posons

$$(36) \quad \alpha = \frac{\mathrm{MA}}{(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \beta = \frac{\mathrm{MB}}{(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \gamma = \frac{\mathrm{MC}}{(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Par substitution des expressions (35), l'équation (3) en $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ prend la forme

$$\xi'' = -\frac{\alpha}{t^2} + \frac{b\log t}{t^3} + \frac{br^2}{\rho^4} = -\frac{\alpha}{t^2} + \frac{b\log t}{t^3} + \frac{b}{t^{\frac{8}{3}}} = -\frac{\alpha}{t^2} + \frac{b}{t^{\frac{8}{3}}},$$

d'après les équations (30) et (31), et puisque le quotient $\frac{\log t}{t^{\frac{1}{3}}}$ tend vers zéro.

En intégrant de l'instant $t = +\infty$ à l'instant t, on déduit l'équation

$$(37) \qquad \xi' = \mathrm{A} + \frac{\alpha}{t} + \frac{b}{t^{\frac{5}{3}}}.$$

Intégrons une seconde fois à partir d'un instant quelconque; il résulte que la différence $\xi - \mathrm{A}t - \alpha\log t$, et par conséquent les deux différences analogues $\eta - \mathrm{B}t - \beta\log t$, $\zeta - \mathrm{C}t - \gamma\log t$, tendent vers des limites finies. Soient A_1, B_1, C_1 ces limites respectives; nous obtenons les trois expressions

$$(38) \qquad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \mathrm{A}t + \alpha\log t + \mathrm{A}_1 + \frac{b}{t^{\frac{2}{3}}}, \\ \eta &= \mathrm{B}t + \beta\log t + \mathrm{B}_1 + \frac{b}{t^{\frac{2}{3}}}, \\ \zeta &= \mathrm{C}t + \gamma\log t + \mathrm{C}_1 + \frac{b}{t^{\frac{2}{3}}}, \end{aligned} \right.$$

dont nous continuerons le développement ultérieurement.

Par combinaison des équations (3) en $\frac{d^2\eta}{dt^2}$ et $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$, on obtient

$$\eta\zeta'' - \zeta\eta'' = a_1 a_2 \mathrm{M}(\eta z - \zeta y)\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right);$$

d'où

$$(39)\qquad \eta\zeta'' - \zeta\eta'' = \frac{br^2}{\rho^3} = \frac{b}{t^{\frac{5}{3}}},$$

d'après les équations (30) et (31). Donc les trois quantités $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$, et par suite d'après les intégrales des aires, les trois quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ tendent vers des limites. Désignons respectivement par λ_1, μ_1, ν_1, λ_2, μ_2, ν_2 les limites des six quantités précédentes, de sorte qu'on aura l'équation

$$\frac{(m_1+m_2)m_3}{m_1+m_2+m_3}\lambda_1 + \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\lambda_2 = \lambda$$

et les deux équations analogues. En outre, en intégrant l'équation (39) de l'instant $t = +\infty$ à l'instant t, on voit qu'on a six équations de la forme

$$(40)\qquad yz' - zy' = \lambda_2 + \frac{b}{t^{\frac{2}{3}}}.$$

Considérons encore l'équation des forces vives sous la seconde forme (8) : puisque ξ', η', ζ' tendent vers des limites finies et les distances r_{13}, r_{23} vers l'infini, la quantité $\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{2} - \frac{m_1+m_2}{r}$ tend aussi vers une limite finie, soit h_2. Cherchons l'ordre de grandeur de la différence entre la limite h_2 et la quantité considérée. D'après l'équation (37) les deux équations analogues, et la première des formules (11), on peut écrire

$$\frac{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}{2} - \mathrm{M}\left(\frac{a_1}{r_{23}} + \frac{a_2}{r_{13}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{S}\left(\mathrm{A} + \frac{\alpha}{t} + \frac{b}{t^{\frac{5}{3}}}\right)^2 - \frac{\mathrm{M}}{\rho} + \frac{br^2}{\rho^3};$$

d'où, d'après les valeurs (36) des coefficients α, β, γ, et puisqu'on tire des expressions (38) l'expression

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}} \times \frac{1}{t} + \frac{b\log t}{t^2},$$

$$\frac{\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2}{2} - \mathrm{M}\left(\frac{a_1}{r_{23}} + \frac{a_1}{r_{13}}\right) = \frac{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}{2} + \frac{b}{t^{\frac{5}{3}}};$$

car $\frac{\log t}{\frac{1}{t}}$ tend vers zéro et d'après les équations (30) et (31).

On a par suite

$$\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{2}-\frac{m_1+m_2}{r}=h_2+\frac{b}{t^{\frac{5}{3}}}. \tag{41}$$

Je dis que la limite h_2 ne peut être positive. En effet l'équation (4) en $\frac{d^2x}{dt^2}$ est de la forme

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-(m_1+m_2)\frac{x}{r^3}+\frac{br}{\rho^3};$$

par suite, des trois équations (4) on déduit la combinaison

$$\mathrm{S}xx''=-\frac{m_1+m_2}{r}+\frac{br^2}{\rho^3}=-\frac{m_1+m_2}{r}+\frac{b}{t^{\frac{5}{3}}}, \tag{42}$$

d'après les équations (30) et (31). Des deux équations (41) et (42) on déduit la combinaison

$$\mathrm{S}(xx''+x'^2)=\frac{m_1+m_2}{r}+2h_2+\frac{b}{t^{\frac{5}{3}}},$$

d'où

$$rr''+r'^2=\frac{m_1+m_2}{r}+2h_2+\frac{b}{t^{\frac{5}{3}}}; \tag{43}$$

t_0 désignant une valeur fixe, mais assez grande pour que la dernière quantité b soit bornée pour $t>t_0$, intégrons l'équation (43) de l'instant t_0 à l'instant $t(t_0<t)$: il vient

$$rr'=(m_1+m_2)\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{r}+2h_2t+b,$$

car l'intégrale de l'expression $\frac{b}{t^{\frac{5}{3}}}$ est évidemment une quantité bornée Intégrons à nouveau l'équation obtenue :

$$\frac{r^2}{2}=(m_1+m_2)\int_{t_0}^{t}dt\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{r}\;h_2t^2+bt+b. \tag{44}$$

Dans l'équation (44), laissant à t_0 la valeur fixée, faisons croître t indéfiniment : on voit que le quotient $\frac{r^2}{t^2}$ finit par être supérieur à n'importe quelle quantité inférieure à $2h_2$: c'est une contradiction avec l'équation (34) si h_2 est positif. Donc *la limite h_2 est négative ou nulle.*

8. MOUVEMENT HYPERBOLIQUE-PARABOLIQUE. — Admettons en premier lieu que *la limite h_2 est nulle*. Nous allons montrer que dans ce cas la distance r est effectivement un infiniment grand d'ordre $\frac{2}{3}$ par rapport au temps.

En effet l'on tire de l'équation (43), quand h_2 est nul,

$$(45) \qquad rr'' + r'^2 = \frac{m_1 + m_2}{r} + \frac{b}{t^{\frac{5}{3}}} = \frac{m_1 + m_2}{r}(1 + \varepsilon),$$

puisque le quotient $\frac{r}{t^{\frac{5}{3}}}$ tend vers zéro. Donc le produit rr' finit par croître avec t, et en particulier par conserver un signe constant : alors la dérivée r' a un signe constant. r varie dans un sens constant, et, étant positif, tend vers une limite finie ou vers $+\infty$. Si r tendait vers une limite finie, nulle ou positive, $rr'' + r'^2$ d'après l'équation (45) tendrait vers $+\infty$ ou vers une limite finie plus grande que zéro; dans les deux cas, rr' et par suite r^2 devraient tendre vers $+\infty$: ce qui implique contradiction. Donc *la distance r tend vers l'infini avec le temps*, et le signe constant de la dérivée r' est nécessairement le signe plus.

D'autre part, de l'identité de Lagrange et des deux équations

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad rr' = xx' + yy' + zz',$$

on tire

$$rr'^2 = r(x'^2 + y'^2 + z'^2) - \frac{S(yz' - zy')^2}{r},$$

d'où [1]

$$rr'^2 = r\left(\frac{2(m_1 + m_2)}{r} + \frac{b}{t^{\frac{5}{3}}}\right) - \frac{S(yz' - zy')^2}{r} = 2(m_1 + m_2) + \varepsilon,$$

---

(1) Pour montrer que la dérivée r' tend vers zéro, et que la distance r est un infiniment grand d'ordre $\frac{2}{3}$, on pourrait utiliser aussi l'équation (6) qui est (*cf.* p. 39) de la forme

$$r'' = -\frac{m_1 + m_2}{r^2} + \frac{br}{\rho^3} + \frac{S(yz' - zy')^2}{r^3} = -\frac{(m_1 + m_2)}{r^2}(1 + \varepsilon),$$

puisque $\frac{r}{\rho}$ tend vers zéro, r vers l'infini et les quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ vers des limites finies. Il résulte d'abord que la dérivée r' finit par décroître, et tend d'après l'équation (41) où h_2 est nul, et puisque $\frac{r}{t^{\frac{2}{3}}}$ tend vers zéro, r vers l'infini et les trois quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ vers des limites finies, il résulte que la dérivée r' tend vers zéro, et, d'après l'équation

$$\sqrt{r}r' = \sqrt{2(m_1 + m_2)}(1 + \varepsilon), \tag{46}$$

que la dérivée $\frac{3}{2}\sqrt{r}r'$ de la fonction $r^{\frac{3}{2}}$ tend vers la limite $\frac{3}{2}\sqrt{2(m_1 + m_2)}$: le quotient $\frac{r^{\frac{3}{2}}}{t}$ tend vers la même limite. Donc, quand le temps croît indéfiniment, *le quotient* $\frac{r}{t^{\frac{2}{3}}}$ *tend vers la limite finie et différente de zéro* $\left[\frac{9}{2}(m_1 + m_2)\right]^{\frac{1}{3}}$. Donc *la distance r des deux masses m_1 et m_2 est un infiniment grand d'ordre* $\frac{2}{3}$ comme le rayon vecteur dans le mouvement parabolique de deux corps.

D'ailleurs le mouvement hyperbolique-parabolique que nous étudions dans ce n° 8 et que nous avons défini par cette double condition que la constante des forces vives h est positive, et que la limite h_2 de l'expression $\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{r}$ est nulle, peut être caractérisé par ces deux autres conditions que *la distance r_{12} d'une part, et les distances r_{13}, r_{23} ou ρ d'autre part, sont des infiniment grands d'ordres respectifs* $\frac{2}{3}$ *et* 1 *par rapport au temps.* En effet, si ces deux conditions sont remplies, dans l'équation des forces vives, la fonction U tend vers zéro, et la force vive T ne peut tendre vers zéro, sans quoi les quotients $\frac{r_{12}}{t}$, $\frac{r_{13}}{t}$, $\frac{r_{23}}{t}$ tendraient tous trois vers zéro ; donc la constante

---

vers zéro ou vers une limite positive finie, puisque r tend vers $+\infty$. Si r' tendait vers une limite positive finie, $\frac{r}{t}$ tendrait vers la même limite, contrairement à l'équation (34) : donc r' tend vers zéro. En multipliant l'équation obtenue par $2r'$, et intégrant de l'instant $t = +\infty$ à l'instant t, on obtient de même

$$r'^2 = \frac{2(m_1 + m_2)}{r}(1 + \varepsilon).$$

h est positive. h étant positif et les équations (30) et (31) vérifiées, les calculs du n° 7 sont valables; en particulier, l'expression $\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{2} - \frac{m_1+m_2}{r}$ tend vers une limite qui ne peut être positive; si cette limite était négative, la distance r serait manifestement bornée. Donc la limite considérée est nulle, c'est le mouvement hyperbolique-parabolique.

Considérons maintenant la direction du vecteur x, y, z, joignant les masses m_1 et m_2. Le cosinus de l'angle de ce vecteur avec l'axe Ox est $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$ et a pour dérivée par rapport au temps

$$\begin{aligned}\frac{rx'-xr'}{r^2} &= \frac{r^2x'-xrr'}{r^3}\\ &= \frac{(x^2+y^2+z^2)x'-x(xx'+yy'+zz')}{r^3}\\ &= \frac{z(zx'-xz')-y(xy'-yx')}{r^3}.\end{aligned}$$

Or les deux quantités $zx'-xz'$ et $xy'-yx'$ tendent vers des limites, et les deux quotients $\frac{y}{r}, \frac{z}{r}$ sont en valeur absolue inférieurs ou égaux à 1 : la dérivée précédente est donc de la forme $\frac{b}{r^2} = \frac{b}{t^{\frac{4}{3}}}$. Par suite, l'angle avec Ox du vecteur x, y, z tend vers une limite finie, et de même les angles de ce vecteur avec Oy et Oz : donc la direction du vecteur elle-même tend vers une limite.

Il résulte que *les trois quotients* $\frac{x}{t^{\frac{2}{3}}} = \frac{x}{r} \times \frac{r}{t^{\frac{2}{3}}}, \frac{y}{t^{\frac{2}{3}}}, \frac{z}{t^{\frac{2}{3}}}$ *tendent aussi vers des limites*, dont la somme des carrés est nécessairement la limite du quotient $\frac{r^2}{t^{\frac{4}{3}}}$, c'est-à-dire $\left[\frac{9}{2}(m_1+m_2)\right]^{\frac{2}{3}}$.

De même que dans le mouvement hyperbolique, nous démontrerons l'existence et la convergence de développements illimités des six coordonnées $\xi, \eta, \zeta, x, y, z$, en séries de fonctions du temps par un nouveau recours aux théorèmes d'existence des solutions des systèmes différentiels. Les coefficients $A, B, C, \alpha, \beta, \gamma, A_1, B_1, C_1$ désignant les constantes qui figurent dans les expressions (38), posons

$$\begin{aligned}\xi &= \mathrm{A}\,t + \alpha \log t + \mathrm{A}_1 + \mathrm{X},\\ \eta &= \mathrm{B}\,t + \beta \log t + \mathrm{B}_1 + \mathrm{Y},\\ \zeta &= \mathrm{C}\,t + \gamma \log t + \mathrm{C}_1 + \mathrm{Z}:\end{aligned}$$

les trois fonctions X, Y, Z tendent vers zéro. Posons encore

$$t\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \mathrm{X}_1, \qquad t\frac{d\mathrm{Y}}{dt} = \mathrm{Y}_1, \qquad t\frac{d\mathrm{Z}}{dt} = \mathrm{Z}_1;$$

d'après l'équation (37) et les deux équations analogues, les trois fonctions X_1, Y_1, Z_1 tendent vers zéro.

Puisque les trois quotients $\frac{x}{t^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{y}{t^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{z}{t^{\frac{2}{3}}}$ tendent vers des limites finies, désignons ces limites respectivement par A_2, B_2, C_2, et posons

$$x = (\mathrm{A}_2 + \mathrm{X}_2)\,t^{\frac{2}{3}}, \qquad y = (\mathrm{B}_2 + \mathrm{Y}_2)\,t^{\frac{2}{3}}, \qquad z = (\mathrm{C}_2 + \mathrm{Z}_2)\,t^{\frac{2}{3}},$$

de sorte que les trois nouvelles fonctions X_2, Y_2, Z_2 tendent vers zéro. Posons enfin

$$t\frac{d\mathrm{X}_2}{dt} = \mathrm{X}_3, \qquad t\frac{d\mathrm{Y}_2}{dt} = \mathrm{Y}_3, \qquad t\frac{d\mathrm{Z}_2}{dt} = \mathrm{Z}_3;$$

je dis que les trois fonctions X_3, Y_3, Z_3 tendent encore vers zéro. On a en effet

$$\mathrm{X}_3 = t\frac{d}{dt}\left(\frac{x}{t^{\frac{2}{3}}}\right) = t^{\frac{1}{3}}\,x' - \frac{2}{3}\frac{x}{t^{\frac{2}{3}}}$$

et

$$\mathrm{X}_3^2 + \mathrm{Y}_3^2 + \mathrm{Z}_3^2 = t^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{S}x'^2 - \frac{4}{3}\frac{\mathrm{S}xx'}{t^{\frac{1}{3}}} + \frac{4}{9}\frac{\mathrm{S}x^2}{t^{\frac{4}{3}}},$$

ou, d'après les égalités

$$\mathrm{S}x^2 = r^2, \qquad \mathrm{S}xx' = rr', \qquad \mathrm{S}x'^2 = r'^2 + \frac{\mathrm{S}(yz' - zy')^2}{r^2},$$

et, puisque les trois quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ tendent vers des limites et le quotient $\frac{t^{\frac{1}{3}}}{r}$ vers zéro,

$$\mathrm{X}_3^2 + \mathrm{Y}_3^2 + \mathrm{Z}_3^2 = \left(t^{\frac{1}{3}}\,r' - \frac{2}{3}\frac{r}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^2 + \varepsilon. \tag{47}$$

Or de l'équation (46), et de ce que le quotient $\frac{r}{t^{\frac{2}{3}}}$ tend vers la quantité $\left[\frac{9}{2}(m_1+m_2)\right]^{\frac{1}{3}}$, résulte immédiatement que l'expression $t^{\frac{1}{3}}r' - \frac{2}{3}\frac{r}{t^{\frac{2}{3}}}$ tend vers zéro. Donc le second membre de l'équation (47), et par conséquent les trois fonctions X_3, Y_3, Z_3, tendent vers zéro.

Cela établi, nous pouvons remplacer les six équations du second ordre (3) et (4) en $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, par douze équations du premier ordre par rapport aux douze fonctions X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3. Les premiers membres de ces douze équations sont de la forme $t\frac{dX}{dt}$, $t\frac{dY}{dt}$, $\ldots$, $t\frac{dZ_3}{dt}$, et les seconds membres sont des séries entières convergentes par rapport aux douze fonctions précédentes et aux deux quantités $\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}$ et $\frac{\log t}{t}$. Pour donner à ce système la forme requise dans les énoncés classiques, il suffit de prendre $T = \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}$ comme variable indépendante, et d'introduire la nouvelle fonction $u = T^3 \log T$ avec l'équation supplémentaire

$$T\frac{du}{dT} = 3u + T^3. \tag{48}$$

Nous aurons ainsi un système différentiel composé de treize équations, dont les premiers membres sont $T\frac{dX}{dT}$, $T\frac{dY}{dT}$, $\ldots$, $T\frac{dZ_3}{dT}$, $T\frac{du}{dT}$, et dont les seconds membres sont holomorphes et nuls pour les valeurs nulles des treize fonctions X, Y, .., Z_3, u et de la variable indépendante T. Et nous cherchons les solutions de ce système où les treize fonctions tendent vers zéro avec la variable positive T.

L'équation caractéristique se met facilement sous la forme [1]

$$(S+3)^3 S^3 \times S^3 (S-1)^3 \times (S-1)(S-3) = 0.$$

Seules sont à considérer parmi les racines de cette équation, la racine simple $S = 3$, et la racine quadruple $S = 1$ à laquelle corres-

---

(1) Cf. *Bulletin astronomique*, t. XXXV, 1918, p. 343-344; *et supra*, p. 48.

pondent quatre diviseurs élémentaires simples. Il résulte que les solutions cherchées du système différentiel transformé sont développables en séries entières des deux variables T et $T^3 \log T$.

Donc, sur les trajectoires hyperboliques-paraboliques du problème des trois corps, *les coordonnées relatives* ξ, η, ζ, x, y, z *sont développables sous la forme*

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned}
\xi &= \mathrm{A}t + \alpha \log t + \mathrm{A}_1 + \mathrm{P}_2\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}, \frac{\log t}{t}\right),\\
\eta &= \mathrm{B}t + \beta \log t + \mathrm{B}_1 + \mathrm{P}_2\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}, \frac{\log t}{t}\right),\\
\zeta &= \mathrm{C}t + \gamma \log t + \mathrm{C}_1 + \mathrm{P}_2\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}, \frac{\log t}{t}\right),\\
x &= \mathrm{A}_2 t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{2}{3}} \mathrm{P}_1\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}, \frac{\log t}{t}\right),\\
y &= \mathrm{B}_2 t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{2}{3}} \mathrm{P}_1\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}, \frac{\log t}{t}\right),\\
z &= \mathrm{C}_2 t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{2}{3}} \mathrm{P}_1\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}, \frac{\log t}{t}\right),
\end{aligned}\right.$$

où les trois fonctions P_2 et les trois fonctions P_1 désignent des séries entières des deux variables $\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}$ et $\frac{\log t}{t}$, sans termes constants, et convergentes si t est assez grand.

Outre les huit paramètres contenus dans les coefficients du système transformé, savoir : A, B, C, non nuls tous les trois; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2, liés par la relation

$$\mathrm{A}_2^2 + \mathrm{B}_2^2 + \mathrm{C}_2^2 = \left[\frac{9}{2}(m_1 + m_2)\right]^{\frac{2}{3}},$$

les développements obtenus contiennent quatre constantes arbitraires. L'une de ces constantes K est telle que l'on ait selon l'équation (48)

$$u = \mathrm{KT}^3 + \mathrm{T}^3 \log \mathrm{T}$$

et, d'après l'équation qui a introduit la fonction u : $u = \mathrm{T}^3 \log \mathrm{T}$, doit être annulée dans les solutions convenant au système primitif. Les trois autres constantes arbitraires équivalent aux trois valeurs limites λ_2, μ_2, ν_2 des quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$, ou encore aux trois constantes des aires λ, μ, ν. Au total, *les mouvements hyperboliques-paraboliques dépendent de onze paramètres, au lieu de douze, dont dépend le mouvement le plus général du problème des trois corps.*

Si dans les expressions (49) on remplace t par $t - t_0$, on obtient des développements de même forme, mais où les coefficients A_1, B_1, C_1 sont modifiés : les nouvelles expressions ne contiennent pas douze paramètres arbitraires, mais le paramètre t_0 se confond avec l'un des onze autres. Donc si l'on élimine ces onze paramètres entre les six développements (49) et les six développements dérivés, ξ', η', ζ', x', y', z', le temps t se trouvera éliminé par là même, et il restera une relation analytique de la forme

$$F(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, \xi', \eta', \zeta', x', y', z') = 0.$$

Si l'on représente dans l'espace à douze dimensions les six coordonnées relatives ξ, η, ζ, x, y, z et leurs dérivées ξ', η', ζ', x', y', z', les trajectoires hyperboliques-paraboliques, sur lesquelles la distance mutuelle infiniment grande d'ordre $\frac{2}{3}$ est la distance des masses m_1 et m_2, sont situées sur la variété analytique à onze dimensions ayant pour équation la relation précédente. Sur cette variété et sur les deux variétés analogues, les trajectoires doivent être considérées comme *dirigées*, car rien ne prouve que le mouvement étudié serait de même hyperbolique-parabolique quand le temps t tend vers $-\infty$. Or l'expression $\frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{2} - \frac{m_1 + m_2}{r}$ tend évidemment vers une limite positive sur les trajectoires hyperboliques, elle tend vers zéro sur les trajectoires hyperboliques-paraboliques, et vers une limite négative sur les trajectoires qu'il nous reste à étudier pour h positif. D'autre part, la valeur limite de l'expression précédente, comme celle du rapport $\frac{r}{R}$ et comme les coefficients des développements (27) et (49), est fonction continue des conditions initiales du mouvement : il résulte que dans la région de l'espace à douze dimensions où la constante des forces vives est positive, chacune des trois variétés considérées sépare un domaine où les trajectoires dirigées dans un certain sens sont toutes hyperboliques, et un domaine où elles sont toutes du type hyperbolique-elliptique que nous étudions au n° 9.

Remarquons enfin que, d'après les valeurs (36) des trois constantes α, β, γ, la trajectoire de la masse m_3 par rapport au centre de gravité des deux masses m_1 et m_2, ou encore par rapport au centre de gravité commun, admet une asymptote rectiligne comme les branches d'hyperbole du problème des deux corps. Mais il y a plus. D'après les équations différentielles (3), il est clair que les développements des trois dérivées secondes $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ en séries entières des deux variables $\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}$ et $\frac{\log t}{t}$ sont les mêmes que si les trois coordonnées x, y, z étaient identiquement nulles, à des termes de l'ordre du quotient $\frac{r^2}{\rho^4}$, c'est-à-dire de $\frac{1}{t^{\frac{8}{3}}}$ près, selon l'inégalité (29) et la seconde des équations (11). Donc les développements obtenus des coordonnées ξ, η, ζ sont les mêmes que dans un certain mouvement hyperbolique de deux corps, à des infiniment petits d'ordre $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{t}$ au moins. En particulier, les trois séries $P_2\left(\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}, \frac{\log t}{t}\right)$ n'ont pas de termes du premier degré en $\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}$.

De même le mouvement de la masse m_2 par rapport à la masse m_1 admet un mouvement parabolique asymptote. En effet, d'après les équations différentielles (4), dans les développements des trois dérivées secondes $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ les coefficients de la masse m_3 sont des infiniment petits de l'ordre du quotient $\frac{r}{\rho^3}$, c'est-à-dire de $\frac{1}{t^{\frac{7}{3}}}$ au moins : par suite dans les développements des coordonnées x, y, z, ordonnés suivant les puissances décroissantes de $t^{\frac{1}{3}}$, la masse m_3 n'apparaît pas avant le terme en $\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}$. Donc les différences des coordonnées x, y, z dans le mouvement hyperbolique-parabolique considéré, et dans le mouvement parabolique de deux corps représenté par les mêmes expressions où l'on annule la masse m_3, sont des infiniment petits d'ordre $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{t}$ au moins.

9. Mouvement hyperbolique-elliptique. — Admettons en second lieu qu'à la fin du n° 7, *la limite* h_2 de la quantité $\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{2} - \frac{m_1+m_2}{r}$ *est négative*. L'équation

$$\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{2} - \frac{m_1+m_2}{r} = h_2 + \frac{b}{t^{\frac{5}{3}}} \tag{41}$$

montre immédiatement que *la distance* r *est bornée* quand le temps croît indéfiniment.

Réciproquement, si dans un mouvement du problème des trois corps *deux distances mutuelles sont des infiniment grands d'ordre* 1 *et la troisième est bornée*, ce mouvement rentre nécessairement dans le cas actuel si h est positif, puisque dans les deux cas précédents les trois distances mutuelles croissent indéfiniment. Mais nous rencontrerons aussi la même double circonstance dans des mouvements où la constante de forces vives h est nulle ou négative; et nous appellerons tous ces mouvements (¹) *hyperboliques-elliptiques* quelle que soit la valeur de la constante h. Comme les résultats obtenus au n° 7, ceux que nous allons obtenir dans le n° 9 sont valables quelle que soit la valeur de la constante h, sauf l'exception que nous spécifierons (²).

En appliquant à nouveau le procédé d'approximation employé aux nos 5 et 7, on met la dérivée ξ' et la coordonnée ξ sous les formes

$$\xi' = A + \frac{\alpha}{t} - A_2\frac{\log t}{t^2} + \frac{b}{t^2}, \tag{50}$$

$$\xi = At + \alpha\log t + A_1 + A_2\frac{\log t}{t} + \frac{A_3}{t} + A_4\frac{\log^2 t}{t^2} + A_5\frac{\log t}{t^2} + \frac{b}{t^2},$$

et les dérivées η', ζ' et les coordonnées η et ζ sous deux formes analogues : les coefficients A, α, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et les coefficients B, β, ...; C, γ, ..., correspondant dans les expressions de η et ζ, sont des constantes, la somme $A^2+B^2+C^2$ est différente de zéro, et les

---

(¹) M. Bohlin les a appelés mouvements *hyperboliques-mixtes* (*Astronomiska Jakttagelser och undersökningar*, Band IX, 1908, n° 2, p. 127).

Mieux vaut préciser, et distinguer ces mouvements des mouvements hyperboliques-paraboliques, où la constante h est nécessairement positive, et des mouvements paraboliques-elliptiques, où h est nécessairement négatif.

(²) *Cf.* page 84.

constantes α, β, γ s'expriment en A, B, C par les équations (36). Il résulte pour la distance ρ une expression de la forme

$$(51)\quad \rho = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,t + \frac{M}{A^2+B^2+C^2}\log t + \frac{AA_1+BB_1+CC_1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + D_2\frac{\log t}{t} + \frac{D_3}{t} + D_4\frac{\log^2 t}{t^2} + D_5\frac{\log t}{t^2} + \frac{b}{t^2},$$

où les coefficients D_2, D_3, D_4, D_5 sont encore des constantes.

Si l'on substitue les expressions précédentes dans les seconds membres des équations différentielles (3), on voit que ces seconds membres sont les mêmes que si les trois coordonnées x, y, z étaient identiquement nulles, à des termes en $\frac{br^2}{\rho^4} = \frac{b}{t^4}$ près, d'après la seconde des formules (11). Donc, puisqu'on doit retrouver les mêmes expressions des coordonnées ξ, η, ζ aux premiers membres après deux intégrations successives, il faut que ces trois expressions et celle de la distance ρ soient les mêmes que dans un certain mouvement hyperbolique de deux corps, à des termes de la forme $\frac{b}{t^2}$ près. Nous allons développer cette remarque.

Afin de représenter à la fois les six coordonnées $\xi, \eta, \zeta, x, y, z$, il est naturel de considérer les deux mouvements osculateurs classiques que nous allons rappeler. Nous montrerons qu'en général les douze éléments osculateurs sont déterminés à chaque instant et tendent vers des limites finies quand le temps croît indéfiniment.

Le premier mouvement osculateur est le mouvement qu'aurait un point matériel, abandonné à l'instant t au point de coordonnées ξ, η, ζ avec la vitesse de projections ξ', η', ζ', et soumis seulement à l'attraction en raison inverse du carré de la distance d'une masse de valeur $m_1+m_2+m_3 = M$ placée à l'origine des coordonnées. Ce premier mouvement est hyperbolique si t est assez grand, puisque la différence $\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2 - \frac{2M}{\rho}$ tend vers la somme des carrés des limites des trois dérivées ξ', η', ζ', $A^2+B^2+C^2$, somme qui est plus grande que zéro.

Le second mouvement osculateur est le mouvement qu'aurait un point matériel abandonné à l'instant t au point de coordonnées x, y, z avec la vitesse de projections x', y', z', et soumis seulement à l'attraction en raison inverse du carré de la distance d'une masse de valeur

$m_1 + m_2$ placée à l'origine des coordonnées. Ce second mouvement est elliptique puisque dans l'équation (41) la valeur limite h_2 et par conséquent la quantité $h_2 + \frac{b}{t^{\frac{2}{3}}}$ si t est assez grand, sont négatives.

Voyons comment sont déterminés ([1]), à chaque instant t, les douze éléments osculateurs. Désignons par $a, e, i, l_0, \varpi, \theta$ les six éléments hyperboliques du premier mouvement, et par $a', e', i', l'_0, \varpi', \theta'$ les six éléments elliptiques du second mouvement, et considérons d'abord les six éléments hyperboliques.

Le demi-axe transverse a est défini par l'équation

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - \frac{2M}{\rho} = \frac{M}{a},$$

qui dans notre hypothèse, et si t est assez grand, a une solution finie. En outre, cette solution tend vers une limite finie et plus grande que zéro quand le temps croît indéfiniment.

Les éléments e, i, θ sont déterminés par les trois équations

$$\begin{aligned}
\eta\zeta' - \zeta\eta' &= \sqrt{Ma(e^2-1)}\sin i \sin\theta,\\
\zeta\xi' - \xi\zeta' &= -\sqrt{Ma(e^2-1)}\sin i \cos\theta,\\
\xi\eta' - \eta\xi' &= \sqrt{Ma(e^2-1)}\cos i.
\end{aligned}$$

Si l'on ne distingue pas entre des solutions différant par l'addition de multiples de 2π aux angles i et θ, ces trois équations aux trois inconnues $e(>1)$, i, θ admettent une solution unique, pourvu que les trois quantités $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ ne soient pas nulles à la fois ([2]).

Puisque ces trois quantités tendent vers les limites λ_1, μ_1, ν_1, nous supposerons que λ_1, μ_1, ν_1 ne sont pas nuls à la fois : alors les valeurs e, i, θ constituant à chaque instant la solution unique, et suivies par continuité quand le temps varie, tendent encore vers des limites : la limite de l'excentricité e est différente de l'unité, et celle de l'inclinaison i n'est pas un multiple de π.

(1) *Cf.* TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, p. 116.

(2) Si l'on avait $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta' = 0$, l'angle i serait un multiple de π, et l'angle θ serait indéterminé. Par une rotation des axes de coordonnées sans changement d'origine, on peut toujours faire en sorte que, si la position limite du point $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ n'est pas l'origine des coordonnées, cette position limite ne soit pas non plus un point de l'axe Oz.

La longitude du périhélie π est déterminée par les trois équations

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} & M\frac{\xi}{\rho} + (\zeta\xi' - \xi\zeta')\zeta' - (\xi\eta' - \eta\xi')\eta' \\ & \quad = -Me[\cos\theta\cos(\varpi-\theta) - \sin\theta\sin(\varpi-\theta)\cos i], \\ & M\frac{\eta}{\rho} + (\xi\eta' - \eta\xi')\xi' - (\eta\zeta' - \zeta\eta')\zeta' \\ & \quad = -Me[\sin\theta\cos(\varpi-\theta) + \cos\theta\sin(\varpi-\theta)\cos i], \\ & M\frac{\zeta}{\rho} + (\eta\zeta' - \zeta\eta')\eta' - (\zeta\xi' - \xi\zeta')\xi' = -Me\sin(\varpi-\theta)\sin i. \end{aligned}\right.$$

Les trois expressions figurant aux premiers membres ne peuvent être nulles à la fois, puisque la somme de leurs carrés est M^2e^2. En outre, d'après des calculs précédents, les quantités ξ', η', ζ', $\frac{\xi}{\rho}$, $\frac{\eta}{\rho}$, $\frac{\xi}{\rho}$, $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ figurant dans ces expressions tendent toutes vers des limites; donc les trois expressions considérées, et par conséquent l'angle ϖ suivi par continuité, tendent encore vers des limites.

Reste enfin à déterminer le sixième élément hyperbolique, l_0, défini à l'instant t par les deux équations

$$(53)\qquad e\frac{E^u - E^{-u}}{2} - u = \frac{\sqrt{M}}{a^{\frac{3}{2}}}t + l_0 - \varpi,$$

$$(54)\qquad \rho = a\left(e\frac{E^u + E^u}{2} - 1\right),$$

où E désigne la base des logarithmes népériens, dont la première est la transformée de l'équation de Kepler dans le mouvement elliptique de deux corps, et entre lesquelles doit être éliminée la variable auxiliaire et positive [1] u. Puisque les quantités a et e ont des limites

---

[1] Pour démontrer que le sixième élément, l_0, tend vers une limite finie, on pourrait utiliser aussi le calcul précédemment effectué (*cf.* p. 50) des premiers termes du développement du rayon vecteur du mouvement hyperbolique de deux corps en fonction du temps, et comparer ces termes à l'expression (51) : au fond, la démonstration réside en ceci que, dans l'expression (51), le troisième terme est constant et les suivants tendent vers zéro. En réalité, la forme des développements donnés précédemment des coordonnées ξ, η, ζ et de la distance ρ dans le mouvement hyperbolique-elliptique constitue un résultat plus précis que ce fait que les six éléments du premier mouvement osculateur tendent vers des limites finies, et d'ailleurs ces développements sont valables même si les trois valeurs limites λ_1, μ_1, ν_1 sont nulles.

finies et que la distance ρ tend vers l'infini avec t, l'équation (54) montre que la valeur u correspondant à l'instant t au point ξ, η, ζ tend aussi vers $+\infty$ avec t. Et l'on tire de cette équation

$$E^u = \frac{2\rho}{ae} + \frac{2}{e} - E^{-u}, \qquad u = \log\rho + \log\frac{2}{ae} + \varepsilon,$$

ε désignant comme d'ordinaire une fonction de t infiniment petite avec $\frac{1}{t}$. En substituant ces deux expressions dans l'équation (53), on obtient

$$l_0 = \frac{\rho}{a} + 1 - e\,E^{-u} - \log\rho - \log\frac{2}{ae} - \varepsilon - \frac{\sqrt{M}}{a^{\frac{3}{2}}}t + \varpi;$$

donc l_0 tendra vers une limite si l'expression

$$\frac{\rho}{a} - \frac{\sqrt{M}}{a^{\frac{3}{2}}}t - \log\rho = \frac{1}{M}\left[\frac{M}{a}\rho - \left(\frac{M}{a}\right)^{\frac{3}{2}} t - M\log\rho\right]$$

tend elle-même vers une limite. Or, des expressions (50) et (51) des quantités ξ' et ρ, on déduit

$$\frac{M}{a} = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - \frac{2M}{\rho} = A^2 + B^2 + C^2 + b\frac{\log t}{t^2}$$

et

$$\begin{aligned}
&\frac{M}{a}\rho - \left(\frac{M}{a}\right)^{\frac{3}{2}} t - M\log\rho \\
&\quad = \frac{M}{a}\left[\rho - \left(\frac{M}{a}\right)^{\frac{1}{2}} t\right] - M\log\rho = \left(A^2 + B^2 + C^2 + b\frac{\log t}{t^2}\right) \\
&\quad \times\left(\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\times t + \frac{M}{A^2 + B^2 + C^2}\log t\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \varepsilon - \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\times t + b\frac{\log t}{t}\right) \\
&\qquad - M\log t - \frac{M}{2}\log(A^2 + B^2 + C^2) + \varepsilon \\
&\quad = (AA_1 + BB_1 + CC_1)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} - \frac{M}{2}\log(A^2 + B^2 + C^2) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Donc, sous cette restriction que les limites λ_1, μ_1, ν_1 des trois quantités $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ ne soient pas nulles à la fois, *les six éléments hyperboliques a, e, i, l_0, ϖ, θ tendent vers des limites finies quand le temps croît indéfiniment.*

Passons à la détermination des six éléments elliptiques a', e', i', l'_0, ϖ', θ' du second mouvement osculateur. L'élément a' est déterminé à chaque instant par l'équation

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2\frac{m_1 + m_2}{r} = -\frac{m_1 + m_2}{a'},$$

et par suite a une limite finie et plus grande que zéro. Les trois éléments e', i', θ' sont déterminés par les trois équations (¹)

$$(55)\quad \begin{cases} yz' - zy' = \sqrt{(m_1 + m_2)\, a'(1 - e'^2)}\,\sin i' \sin\theta', \\ zx' - xz' = -\sqrt{(m_1 + m_2)\, a'(1 - e'^2)}\,\sin i' \cos\theta', \\ xy' - yx' = \sqrt{(m_1 + m_2)\, a'(1 - e'^2)}\,\cos i', \end{cases}$$

et par conséquent suivis par continuité, tendent aussi vers des limites si l'on suppose que les limites λ_2, μ_2, ν_2 des trois quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ ne sont pas nulles à la fois. La limite de l'excentricité e' est différente de l'unité, et celle de l'inclinaison i' n'est pas un multiple de π. Remarquons encore qu'en élevant au carré les deux membres des équations (55) et ajoutant, on obtient

$$(yz' - zy')^2 + (zx' - xz')^2 + (xy' - yx')^2 = (m_1 + m_2)\, a'(1 - e'^2);$$

de sorte que la distance $r \gtreqless a'(1 - e')$ finit par être supérieure à une longueur fixe plus grande que zéro, pourvu que les trois limites λ_2, μ_2, ν_2 ne soient pas nulles à la fois.

L'élément ϖ' est déterminé à l'instant t par les équations (²)

$$(56)\quad \begin{cases} (m_1 + m_2)\dfrac{x}{r} + (zx' - xz')z' - (xy' - yx')y' \\ \qquad = -(m_1 + m_2)\, e'[\cos\theta' \cos(\varpi' - \theta') - \sin\theta' \sin(\varpi' - \theta')\cos i'], \\ (m_1 + m_2)\dfrac{y}{r} + (xy' - yx')x' - (yz' - zy')z' \\ \qquad = -(m_1 + m_2)\, e'[\sin\theta' \cos(\varpi' - \theta') + \cos\theta' \sin(\varpi' - \theta')\cos i'], \\ (m_1 + m_2)\dfrac{z}{r} + (yz' - zy')y' - (zx' - xz')x' \\ \qquad = -(m_1 + m_2)\, e' \sin(\varpi' - \theta')\sin i', \end{cases}$$

(¹) Si la position limite du point de coordonnées $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ n'est pas l'origine, on peut faire en sorte que cette position limite ne soit pas non plus un point de l'axe Oz (cf. *supra*, p. 75, note 2).

(²) Si l'excentricité e' est nulle à l'instant t, les trois équations considérées laissent si l'on suppose la limite de l'excentricité e' différente aussi de zéro. Enfin l'élément l'_0 est déterminé par les deux équations

$$u' - e' \sin u' = n' t + l'_0 - \varpi', \qquad n' = \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{a'^{\frac{3}{2}}},$$
$$r = a'(1 - e' \cos u'),$$

après élimination de la variable auxiliaire u'. Mais de ces deux derniers systèmes d'équations ne résulte pas immédiatement [1] que les deux éléments ϖ' et l'_0 tendent vers des limites.

Pour parvenir à ce dernier résultat, nous considérerons le système classique des équations différentielles auxquelles satisfont les six éléments osculateurs a', e', i', l'_0, ϖ', θ', et en particulier les deux

---

comme il convient la longitude du périhélie ϖ' complètement indéterminée. Dans le cas où la limite de l'excentricité e' est nulle, pour avoir encore six éléments déterminés à chaque instant et tendant vers des limites, il suffit de substituer aux deux éléments e' et ϖ' les deux variables $e' \cos \varpi'$ et $e' \sin \varpi'$ qui tendront vers zéro (*cf.* TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. I, p. 170; et POINCARÉ, *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, p. 75).

(1) Cependant, pour démontrer que la longitude du périhélie ϖ' tend vers une limite finie, il suffit de démontrer que les expressions figurant aux premiers membres des trois équations (56) tendent elles-mêmes vers des limites finies. Or la dérivée par rapport au temps de la première de ces trois expressions est

$$(m_1 + m_2)\frac{rx' - xr'}{r^2} + (zx' - xz')z'' + (zx'' - xz'')z' - (xy' - yx')y'' - (xy'' - yx'')y'$$

ou, compte tenu des équations (4) et après réductions,

$$m_3[-(zx' - xz')z + (xy' - yx')y]\left(\frac{a_1}{r_{13}^3} + \frac{a_2}{r_{23}^3}\right)$$
$$+ m_3[(zx' - xz')\zeta + (z\xi - x\zeta)z' - (xy' - yx')\eta - (x\eta - y\xi)y']\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right).$$

Les quantités $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ tendent vers des limites finies, x, y, z sont bornés; d'après l'inégalité (29), les produits de la différence $\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}$ par ξ, η, ζ sont en valeur absolue inférieurs à $\frac{3r(1+\varepsilon)}{\rho^3}$. D'autre part, le second membre de l'équation des forces vives est de la forme $\frac{b}{r}$, puisque r est borné (*cf.* p. 38); y'^2, z'^2 sont de la même forme, et $|y'|$, $|z'|$ de la forme $\frac{b}{\sqrt{r}}$; donc les produits xr', yy', xz', zz' sont bornés en valeur absolue.

Au total, la dérivée considérée est de la forme $\frac{b}{\rho^3} = \frac{b}{t^3}$. Par intégration, on voit que l'expression correspondante, et par conséquent la longitude du périhélie ϖ', tendent vers des limites finies.

équations différentielles renfermant les deux dérivées (¹) $\frac{d\varpi'}{dt}$, $\frac{dl'_0}{dt}$:

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varpi'}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e'^2}}{n'a'^2e'}\frac{\partial R}{\partial e'} + \frac{\operatorname{tang}\frac{i'}{2}}{n'a'^2\sqrt{1-e'^2}}\frac{\partial R}{\partial i'}, \\ \frac{dl'_0}{dt} &= -\frac{2}{n'a'}\frac{\partial R}{\partial a'} + \sqrt{1-e'^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e'^2}}{n'a'^2e'}\frac{\partial R}{\partial e'} + \frac{\operatorname{tang}\frac{i'}{2}}{n'a'^2\sqrt{1-e'^2}}\frac{\partial R}{\partial i'}; \end{aligned}\right.$$

dans ces équations, la fonction perturbatrice R admet l'expression

$$R = \frac{m_3}{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{\alpha_1}{r_{23}} + \frac{\alpha_2}{r_{13}} - \frac{1}{\rho}\right),$$

et sous la condition $r < \rho$ le développement

$$\begin{aligned} \frac{R}{m_3} = \frac{r^2}{\rho^3}&\left[\frac{3}{2}\frac{(Sx\xi)^2}{r^2\rho^2} - \frac{1}{2}\right] \\ &+ (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)\frac{r^3}{\rho^4}P_3\left(\frac{Sx\xi}{r\rho}\right) + \ldots \\ + [\alpha_2^{n-1} + (-1)^n\alpha_1^{n-1}]&\frac{r^n}{\rho^{n+1}}P_n\left(\frac{Sx\xi}{r\rho}\right) + \ldots, \end{aligned}$$

où P_n désigne le polynome de Legendre de degré n.

D'après les résultats que nous avons acquis, le quotient $\frac{r}{\rho}$ tend vers zéro quand le temps croît indéfiniment, et le développement précédent est certainement valable si t est assez grand.

Pour montrer que les deux fonctions ϖ' et l'_0 tendent vers des limites finies, nous allons former des limites supérieures des seconds membres des équations différentielles (57). Dans ces seconds membres, les coefficients des trois dérivées partielles $\frac{\partial R}{\partial a'}$, $\frac{\partial R}{\partial e'}$, $\frac{\partial R}{\partial i'}$ sont bornés puisque a' tend vers une limite finie et plus grande que zéro, e' vers une limite différente de 0 et de 1, et i' vers une limite qui n'est pas un multiple de π. Pour calculer les dérivées partielles $\frac{\partial R}{\partial a'}$, $\frac{\partial R}{\partial e'}$, $\frac{\partial R}{\partial i'}$,

(¹) *Cf.* TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. I, p. 169.

il faut considérer dans la fonction perturbatrice R, ξ, η, ζ, ρ comme constants, et imaginer qu'on substitue aux trois coordonnées x, y, z et à la distance $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ leurs expressions en fonction des six éléments a', e', i', l'_0, ϖ', θ' et du temps.

La première de ces expressions est par exemple

$$(58)\quad \begin{aligned} x = {} & a'(\cos u' - e')[\cos\theta' \cos(\varpi' - \theta') - \sin\theta' \sin(\varpi' - \theta') \cos i'] \\ & + a'\sqrt{1 - e'^2} \sin u' [\sin\theta' \cos(\varpi' - \theta') + \cos\theta' \sin(\varpi' - \theta') \cos i'], \end{aligned}$$

la fonction u' désignant la fonction implicite définie par l'équation de Kepler

$$u' - e' \sin u' = n' t + l'_0 - \varpi';$$

d'où les formules telles que

$$\frac{\partial R}{\partial a'} = S \frac{\partial R}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial a'} + \frac{\partial x}{\partial u'} \times \frac{\partial u'}{\partial a'}\right).$$

Or il est clair, d'après l'expression (58), que les quatre dérivées partielles $\frac{\partial x}{\partial a'}$, $\frac{\partial x}{\partial e'}$, $\frac{\partial x}{\partial i'}$, $\frac{\partial x}{\partial u'}$ sont bornées. D'autre part, en dérivant l'équation de Kepler, on voit que la dérivée partielle $\frac{\partial u'}{\partial e'}$ est bornée, et que la dérivée partielle $\frac{\partial u'}{\partial a'}$ est égale au produit de t par une fonction bornée : puisque le diviseur $1 - e' \cos u'$ est supérieur ou égal à $1 - e'$. On aura donc

$$\frac{\partial R}{\partial a'} = t \times S\, b \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial R}{\partial e'} = S\, b \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \frac{\partial R}{\partial i'} = S\, b \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Enfin la dérivée partielle $\frac{\partial R}{\partial x}$ est visiblement la somme d'une série de fractions de la forme

$$\frac{b}{t^3} + \frac{b}{t^4} + \ldots + \frac{b}{t^{n+1}} + \ldots,$$

dont les numérateurs sont bornés dans leur ensemble, puisque r est borné, et que ρ est un infiniment grand d'ordre 1 par rapport au temps. On obtient au total

$$\frac{\partial R}{\partial a'} = \frac{b}{t^2}, \qquad \frac{\partial R}{\partial e'} = \frac{b}{t^3}, \qquad \frac{\partial R}{\partial i'} = \frac{b}{t^3},$$

et par conséquent

$$\frac{d\varpi'}{dt} = \frac{b}{t^3}, \qquad \frac{dl'_0}{dt} = \frac{b}{t^2};$$

d'où résulte que *les deux éléments* ϖ' et l'_0 *tendent vers des limites finies comme les dix autres éléments osculateurs.*

Remarquons que les dix autres éléments osculateurs satisfont à dix équations différentielles analogues aux deux équations (57), où la fonction perturbatrice relative aux six éléments hyperboliques

$$\mathrm{M}\left(\frac{a_1}{r_{23}} + \frac{a_2}{r_{13}} - \frac{1}{\rho}\right).$$

ne diffère de la fonction R que par un facteur constant. Les dérivées partielles de cette fonction par rapport aux trois coordonnées ξ, η, ζ peuvent être développées de même en séries de fractions dont les numérateurs sont bornés et dont les dénominateurs sont des puissances croissantes du temps. Par suite, la démonstration que nous appliquons aux deux éléments ϖ' et l'_0 est valable pour les dix autres, et d'ailleurs le système différentiel considéré peut être simplifié par l'introduction d'éléments canoniques; mais la démonstration ainsi constituée est moins intuitive que celle que nous avons développée. Ajoutons que l'une ou l'autre démonstration donne facilement l'ordre de grandeur de chacune des différences entre les douze éléments osculateurs et leurs douze valeurs limites : pour l'élément a, cette différence est de la forme $\frac{b}{t^3}$; pour l'élément l'_0, de la forme $\frac{b}{t}$; et pour les dix autres éléments, de la forme $\frac{b}{t^2}$.

Traitons enfin la question du prolongement analytique du mouvement hyperbolique-elliptique au delà de la valeur infinie du temps. Poincaré a précisément choisi ce mouvement comme exemple [1] et a proposé de prendre comme prolongement analytique le mouvement hyperbolique-elliptique tel que les douze mêmes éléments osculateurs tendent vers les douze mêmes valeurs limites quand le temps t tend par valeurs négatives vers $-\infty$. Mais il est clair que l'expression (51) subsiste dans tout prolongement analytique autour du point $t = \infty$, et

---

[1] *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, p. 169.

par suite, sur le segment négatif de l'axe réel, la distance ρ a des valeurs imaginaires à cause du terme $\frac{M}{A^2+B^2+C^2}\log t$.

Cherchons donc un prolongement analytique du mouvement hyperbolique-elliptique où les coordonnées cartésiennes et leurs dérivées par rapport au temps aient des valeurs réelles. Les équations

$$\begin{aligned} e\,\mathrm{sh}\,u - u &= nt + l_0 - \varpi, \qquad & \rho &= a(e\,\mathrm{ch}\,u - 1), \\ u' - e'\sin u' &= n't + l'_0 - \varpi', \qquad & r &= a'(1 - e'\cos u') \end{aligned}$$

subsistent dans ce prolongement analytique entre les prolongements des diverses fonctions qui y figurent. Puisque la trajectoire prolongée est réelle, les quantités e, n, l_0, ϖ, ρ, a et e', n', l'_0, ϖ', r, a' sont réelles, et par suite aussi les deux quantités $\mathrm{ch}\,u$ et $\cos u'$. Quand $\cos u'$ est réel, u' est réel ou a pour partie réelle un multiple de π. Si l'on avait $u' = N\pi + iv$, v étant réel et N désignant un nombre entier nécessairement fixe, puisque le prolongement de la fonction u est en particulier une fonction continue, le point $t = \frac{u' - e'\sin u' - l'_0 + \varpi'}{n'}$ devrait varier dans son plan sur une parallèle à l'axe des quantités purement imaginaires. Si u' est réel, t l'est aussi : t étant réel ne peut être positif, car il y aurait non plus prolongement du mouvement primitif, mais rebroussement de ce mouvement sur lui-même. Il faudrait donc que, dans le mouvement prolongé, t soit réel et négatif : nous avons vu qu'il est impossible alors que la trajectoire soit réelle. Donc *le mouvement hyperbolique-elliptique n'admet aucun prolongement analytique où les trajectoires soient réelles, et cela que le temps reçoive des valeurs réelles ou imaginaires.*

Il importe d'insister sur ce que, dans ce n° 9, nous n'avons tenu jusqu'ici aucun compte du signe de la constante des forces vives h. Tous les résultats obtenus seront encore valables si h est nul ou négatif, pourvu que soient remplies les deux conditions qui caractérisent le mouvement hyperbolique-elliptique : deux distances mutuelles sont des infiniment grands d'ordre 1 par rapport au temps et la troisième est bornée. Dans cette double hypothèse, nous avons représenté le mouvement des trois corps par deux mouvements osculateurs et démontré que les douze éléments de ces deux mouvements tendent vers des limites, excepté si les limites λ_1, μ_1, ν_1 des trois quantités

$\eta\xi' - \xi\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$, ou les limites λ_2, μ_2, ν_2 des trois quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ sont nulles à la fois. Les mouvements hyperboliques-elliptiques dépendent évidemment de douze paramètres comme les mouvements les plus généraux du problème des trois corps, savoir les valeurs limites des douze éléments osculateurs.

Enfin, tant que la constante des forces vives h est supérieure à un nombre positif fixe, les douze éléments osculateurs tendent uniformément vers leurs valeurs limites; et *ces valeurs limites*, comme celle du rapport $\frac{r}{R}$ et comme les coefficients des développements (27) et (49), *sont fonctions continues et holomorphes des conditions initiales du mouvement*. Indiquons de suite que nous ne retrouverons ni cette convergence uniforme ni cette continuité quand la constante h est nulle ou négative (¹).

10. Que pouvons-nous dire des mouvements hyperboliques-elliptiques qui échappent à notre représentation ?

Considérons d'abord les mouvements où les trois quantités $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$, ou bien les trois quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ n'ont pas seulement des limites nulles, mais sont constamment nulles. Dans les deux cas les six quantités considérées sont constantes pendant le mouvement, d'après les intégrales des aires : donc la dérivée de la quantité $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, égale à

$$\eta\zeta'' - \zeta\eta'' = a_1 a_2 \mathrm{M}(\eta z - \zeta y)\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right), \tag{59}$$

et les deux dérivées analogues, sont identiquement nulles. Par suite, de tels mouvements doivent satisfaire :

1° Ou bien aux équations

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta}{z},$$

c'est-à-dire que les trois corps sont constamment en ligne droite;

(¹) D'après la proposition énoncée dans la note 1 de la page 31, il est impossible qu'il existe dans la région de l'espace à douze dimensions où la constante des forces vives est négative, une hypersphère d'où ne partent même dans un sens que des trajectoires hyperboliques-elliptiques, du moins si les trois masses sont différentes de zéro. *Cf.* page 71.

2° Ou bien à la condition

$$r_{13} = r_{23},$$

c'est-à-dire que les trois corps forment constamment un triangle isoscèle de sommet m_3.

Si, dans un mouvement, les trois corps sont constamment en ligne droite (¹), ou bien ils sont sur une droite fixe, c'est le *mouvement rectiligne*, ou bien le mouvement considéré est le mouvement d'Euler, où les rapports des distances mutuelles restent constants, et qui ne saurait être hyperbolique-elliptique. Le mouvement rectiligne hyperbolique-elliptique peut évidemment être représenté par une dégénérescence du mode de représentation général, savoir, par les équations

$$\operatorname{sh} u - u = \frac{\sqrt{M}}{a^{\frac{3}{2}}}(t-\tau), \qquad \rho = a(\operatorname{ch} u - 1),$$

$$u' - \sin u' = \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{a'^{\frac{3}{2}}}(t-\tau'), \qquad r = a'(1 - \cos u');$$

les douze éléments osculateurs se réduisent aux quatre éléments a, τ, a', τ', qui tendent vers des limites finies quand le temps croît indéfiniment.

Les solutions isoscèles du problème des trois corps comprennent d'abord le mouvement de Lagrange, où les trois corps forment constamment un triangle équilatéral, et le mouvement d'Euler quand les deux masses extrêmes y sont égales : ces deux premiers mouvements ne sauraient être hyperboliques-elliptiques. Les solutions isoscèles comprennent en outre les mouvements suivants, où les deux masses m_1 et m_2 doivent avoir des valeurs égales, si le triangle isoscèle a pour sommet la masse m_3 ; le *mouvement avec axe de symétrie*, où les trois quantités $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ sont nulles, et les trois quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ sont constantes, mais non nulles

(¹) La proposition a été démontrée par M. Wilczynski (*Annali di Matematico*, 3e série, t. XXI, 1913, p. 8), qui a appelé aussi « solutions isoscèles du problème des trois corps » les solutions où les trois corps forment constamment un triangle isoscèle.

toutes les trois; le *mouvement avec plan de symétrie*, où les trois quantités $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ sont constantes, mais non nulles toutes les trois, et où les trois quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx$ sont nulles; et enfin le *mouvement plan avec axe de symétrie dans son plan*, où les six quantités considérées sont nulles ([1]).

Quand ils sont hyperboliques-elliptiques, les trois derniers mouvements admettent évidemment comme représentations des dégénérescences du mode de représentation général, analogues à la représentation que nous venons d'indiquer du mouvement rectiligne hyperbolique-elliptique.

Je n'ai pas réalisé d'exemples de mouvements où les trois quantités $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ ou bien les trois quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ tendent vers zéro quand le temps croît indéfiniment sans être constamment nulles. S'il existe des mouvements hyperboliques-elliptiques où les trois quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ tendent vers zéro sans être constamment nulles, à chaque instant où les deux quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$ ne sont pas nulles, les six éléments elliptiques a', e', i', l'_0, ϖ', θ' sont déterminés. En particulier on obtient, en ajoutant la somme des carrés des trois équations (55),

$$\mathrm{S}(yz' - zy')^2 = (m_1 + m_2)a'(1 - e'^2).$$

Or, d'après l'équation (59) et la première intégrale des aires, la quantité $yz'' - zy''$ est de la forme $\frac{br^2}{\rho^3} = \frac{b}{t^3}$; donc les quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ sont de la forme $\frac{b}{t^2}$. Donc, dans de tels mouvements, la distance périhélie $a'(1 - e')$ est de la forme $\frac{b}{t^4}$.

Remarquons enfin que, si les limites λ_1, μ_1, ν_1, λ_2, μ_2, ν_2 sont nulles

---

([1]) Le mouvement avec axe de symétrie, le mouvement avec plan de symétrie et le mouvement plan avec axe de symétrie dans son plan ont été signalés pour la première fois par M. Fransen (*Œfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Färhandlingar*, arg 52, 1895, n° 10, pp. 783-805). *Voir* aussi Wilczynski, *loc. cit.*; et Chazy, *Bulletin astronomique*, 2e série : *Mém.*, t. I, fasc. III, 1921, pp. 171-188.

à la fois, les trois constantes des aires λ, μ, ν sont nécessairement nulles, et, d'après le théorème (1) de Dziobek, le mouvement est plan.

---

(1) Ce théorème a été démontré de façons diverses au moyen des coordonnées cartésiennes (*cf.* DZIOBEK, *Die mathematischen Theorien der Planeten-Bewegungen*, Leipzig, 1888, p. 68; SUNDMAN, *Acta Soc. Sc. Fennicæ*, t. XXXIV, 1907, n° 6, p. 17; CHAZY, *Bulletin astronomique*, t. XXXV, 1918. p. 335).

On peut encore le démontrer comme suit au moyen des variables canoniques. Employons les mêmes notations que Poincaré dans *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 39. Les intégrales des aires, nulles toutes les trois, donnent les trois équations

$$\beta\Theta + \beta'\Theta' = 0, \qquad \theta = \theta', \qquad \beta G = \beta' G'$$

(puisque β, G, β', G' sont essentiellement positifs et ne peuvent annuler l'expression $\beta G + \beta' G'$). On déduit, par dérivation des deux premières équations,

$$\beta \frac{d\Theta}{dt} + \beta' \frac{d\Theta'}{dt} = 0, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta'}{dt},$$

et, par combinaison avec les équations canoniques,

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial \theta'} = 0, \qquad \frac{1}{\beta}\frac{\partial F}{\partial \Theta} = \frac{1}{\beta'}\frac{\partial F}{\partial \Theta'};$$

de sorte que la fonction F ne dépend des variables θ et θ' que par la différence $\theta - \theta'$, et des variables Θ et Θ' que par l'expression $\beta\Theta + \beta'\Theta'$. Comme les quantités $\theta - \theta'$, $\beta\Theta + \beta'\Theta'$ sont identiquement nulles d'après les deux mêmes équations des aires, les dérivées de F par rapport aux huit autres variables sont indépendantes des quatre variables θ, θ', Θ, Θ'. Dès lors, parmi les douze équations canoniques écrites par Poincaré, les huit équations des deux premières colonnes se séparent, et se ramènent évidemment aux huit équations du problème plan écrites à la page précédente.

Au point de vue géométrique, en considérant les deux vecteurs représentant les moments par rapport à l'origine des quantités de mouvement dans les deux mouvements osculateurs, on voit de suite qu'à un instant quelconque dans ces deux mouvements les longitudes du nœud diffèrent de π et les inclinaisons sont supplémentaires; donc, à l'instant considéré, les deux points de coordonnées ξ, η, ζ et x, y, z et leurs vitesses sont dans un même plan. Par suite, dans le mouvement par rapport au centre de gravité, les trois corps et leurs vitesses sont aussi dans un même plan, qui reste nécessairement fixe pendant le mouvement.

Ajoutons une dernière remarque en nous reportant à la page 37 du même volume de Poincaré. Puisque le crochet de Jacobi de deux intégrales des aires est précisément égal à la troisième intégrale des aires, il résulte déjà que, quand les trois constantes des aires sont nulles, le nombre des degrés de liberté s'abaisse à 3 comme dans le mouvement plan.

CHAPITRE III.

LA CONSTANTE DES FORCES VIVES EST NULLE.

11. Dans un travail précédent [1], j'ai étudié certains mouvements du problème des n corps correspondant à la valeur nulle de la constante des forces vives. J'ai appelé ces mouvements *paraboliques* parce que dans ces mouvements comme sur les trajectoires paraboliques du problème des deux corps, les distances mutuelles et, excepté pour des directions particulières des axes, les différences des coordonnées des n corps sont des infiniment grands d'ordre $\frac{2}{3}$ par rapport au temps. Réciproquement, j'ai caractérisé les mouvements paraboliques par la double condition [2] que *la constante des forces vives est nulle, et* que *les* $3n$ *quotients* $\frac{x_i}{t^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{y_i}{t^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{z_i}{t^{\frac{2}{3}}}$ *sont tous bornés* quand le temps croît indéfiniment.

La configuration des n corps quand ils s'éloignent indéfiniment sur des trajectoires paraboliques n'est pas quelconque : cette configuration tend nécessairement vers l'une de ces configurations, recherchées d'abord par Euler et Lagrange dans le problème des trois corps, et qui peuvent rester semblables à elles-mêmes au cours d'un mouvement. Les trajectoires paraboliques partagent d'ailleurs la propriété précédente avec les trajectoires sur lesquelles les n corps se choquent tous en un même point de l'espace au bout d'un intervalle de temps fini. Dans le problème des trois corps existent ainsi deux sortes de mouvements paraboliques correspondant aux deux configurations d'Euler et de Lagrange. A la configuration rectiligne correspondent des mouvements paraboliques dépendant de dix paramètres, au lieu de douze, dont dépendent les mouvements les plus généraux. Au triangle équilatéral correspondent des mouvements paraboliques dépendant de neuf paramètres.

---

(1) *Bulletin astronomique*, t. XXXV, 1918, pp. 321-389.

(2) *Loc. cit.*, p. 364.

Dans le problème des trois corps et *pour la valeur nulle de la constante des forces vives*, nous nous proposons ici d'étudier quand le temps croît indéfiniment *les mouvements autres que les mouvements paraboliques.* Nous devons donc supposer que l'un au moins des neuf quotients $\frac{x_i}{t^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{y_i}{t^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{z_i}{t^{\frac{2}{3}}}$ $(i = 1, 2, 3)$ n'est pas borné quand le temps croît indéfiniment.

Nous emploierons les notations [1] du travail cité. Nous poserons

$$x_i = X_i t^{\frac{2}{3}}, \qquad y_i = Y_i t^{\frac{2}{3}}, \qquad z_i = Z_i t^{\frac{2}{3}} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

de sorte que l'équation (1) en $\frac{d^2 x_i}{dt^2}$ devient

$$t^2 \frac{d^2 X_i}{dt^2} + \frac{4}{3} t \frac{dX_i}{dt} - \frac{2}{9} X_i = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial X_i}, \tag{60}$$

où l'on a substitué dans la fonction U les neuf variables X_i, Y_i, Z_i aux neuf variables x_i, y_i, z_i. Nous ferons ensuite le changement de variable

$$t = e^u, \qquad u = \log t,$$

de sorte que la variable u croît et tend vers $+\infty$ en même temps que t. L'équation (60) devient

$$\frac{d^2 X_i}{du^2} = \frac{1}{3} \frac{dX_i}{du} + \frac{2}{9} X_i + \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial X_i}. \tag{61}$$

Par les mêmes changements de variables, et si l'on pose en outre

$$I = J t^{\frac{4}{3}} \qquad \text{ou} \qquad J = \Sigma m_i S X_i^2,$$

l'équation des forces vives et l'équation de Lagrange deviennent

$$\Sigma m_i S \left(\frac{dX_i}{du}\right)^2 + \frac{2}{3} \frac{dJ}{du} + \frac{4}{9} J = 2 U(X_i, Y_i, Z_i), \tag{62}$$

$$\frac{d^2 J}{du^2} + \frac{5}{3} \frac{dJ}{du} + \frac{4}{9} J = 2 U(X_i, Y_i, Z_i), \tag{63}$$

---

[1] *Loc. cit.*, p. 336 et 364.

où l'on a substitué comme dans l'équation (60) les variables X_i, Y_i, Z_i aux variables x_i, y_i, z_i dans la fonction U.

Éliminons la fonction U entre les deux équations (62) et (63) :

$$\frac{d^2 J}{du^2} + \frac{dJ}{du} = \Sigma m_i S \left(\frac{dX_i}{du}\right)^2, \tag{64}$$

et discutons l'équation obtenue.

La fonction J est positive ou nulle, et ne saurait être bornée quand la variable u tend vers $+\infty$, sans quoi tous les X_i, Y_i, Z_i seraient bornés, et nous retomberions sur une trajectoire parabolique. Mais J est fini pour toute valeur finie de u, puisque I est fini pour toute valeur finie de t. De même la dérivée $\frac{dJ}{du}$ est finie pour toute valeur finie de u, car on a

$$\frac{dJ}{du} = t\frac{d}{dt}\left(\frac{I}{t^{\frac{4}{3}}}\right) = \frac{I'}{t^{\frac{1}{3}}} - \frac{4}{3}\frac{I}{t^{\frac{4}{3}}},$$

et pour toute valeur finie de t la quantité I et la dérivée I' sont finies.

La fonction $J(u)$ ne peut avoir de maximum. En effet, à une valeur de u qui annule la dérivée première $\frac{dJ}{du}$, ne peut correspondre un maximum de la fonction $J(u)$ que si la dérivée seconde $\frac{d^2 J}{du^2}$, et par conséquent d'après l'équation (64) la somme $\Sigma m_i S \left(\frac{dX_i}{du}\right)^2$, qui ne peut être négative, finie ou infinie, sont nulles : les neuf dérivées $\frac{dX_i}{du}$, $\frac{dY_i}{du}$, $\frac{dZ_i}{du}$ sont nulles. D'après l'équation (63), $\frac{dJ}{du}$ et $\frac{d^2 J}{du^2}$ étant nuls, et J fini, la fonction $U(X_i, Y_i, Z_i)$ est finie, et par suite il en est de même de toutes ses dérivées partielles par rapport aux neuf variables X_i, Y_i, Z_i, du premier ordre et d'ordre quelconque. D'après l'équation (61), $\frac{dX_i}{du}$ étant nul et X_i et $\frac{\partial U}{\partial X_i}$ finis, $\frac{d^2 X_i}{du^2}$ et de même les huit quantités analogues sont encore finis. En dérivant l'équation (64)

$$\frac{d^3 J}{du^3} + \frac{d^2 J}{du^2} = 2\Sigma m_i S \frac{dX_i}{du}\frac{d^2 X_i}{du^2}, \tag{65}$$

on voit que $\frac{d^3 J}{du^3}$ est nul. En dérivant l'équation (61), on voit de même que $\frac{d^3X_i}{du^3}$ et les huit quantités analogues sont finis. En dérivant à nouveau l'équation (65)

$$\frac{d^4J}{du^4} + \frac{d^3J}{du^3} = 2\Sigma m_i S \frac{dX_i}{du}\frac{d^3X_i}{du^3} + 2\Sigma m_i S\left(\frac{d^2X_i}{du^2}\right)^2,$$

on voit enfin que la dérivée quatrième $\frac{d^4J}{du^4}$ est finie : la valeur u considérée ne peut correspondre à un maximum de la fonction $J(u)$ que si $\frac{d^4J}{du^4}$, et par conséquent $\frac{d^2X_i}{du^2}$ et les huit quantités analogues sont nuls. Dès lors la solution considérée du système différentiel formé de l'équation (61) et des huit équations analogues, se réduit nécessairement d'après le théorème de Cauchy à la forme

$$X_i = \text{const.}, \qquad Y_i = \text{const.}, \qquad Z_i = \text{const.} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et correspond à une fonction $J(u)$ constante et à une trajectoire parabolique particulière.

Donc, quand u varie de $-\infty$ à $+\infty$ et t de 0 à $+\infty$, la fonction $J(u)$ n'a pas de maximum. Étant positive et finie, mais ne pouvant être bornée quand u tend vers $+\infty$, *cette fonction tend nécessairement vers* $+\infty$, *et la dérivée* $\frac{dJ}{du}$ *finit par être positive.*

Il résulte alors de l'équation (62), où les quantités $\frac{dJ}{du}$ et $\Sigma m_i S\left(\frac{dX_i}{du}\right)^2$ sont positives ou nulles, que la fonction

$$U(X_i, Y_i, Z_i) = \frac{m_2 m_3}{\sqrt{S(X_2 - X_3)^2}} + \frac{m_3 m_1}{\sqrt{S(X_3 - X_1)^2}} + \frac{m_1 m_2}{\sqrt{S(X_1 - X_2)^2}}$$

tend vers $+\infty$, comme la fonction

$$J = m_2 m_3 S(X_2 - X_3)^2 + m_3 m_1 S(X_3 - X_1)^2 + m_1 m_2 S(X_1 - X_2)^2.$$

Quand J tend vers $+\infty$ avec u et t, à chaque instant l'un, et par suite deux au moins des trois dénominateurs figurant dans l'expression de $U(X_i, Y_i, Z_i)$ sont arbitrairement grands : puisque cette expression tend vers l'infini, il faut qu'en même temps le troisième dénominateur soit arbitrairement petit. Par suite, *il ne peut y avoir échange*. L'un des dénominateurs, soit $\sqrt{S(X_1 - X_2)^2}$, tend vers zéro, et les deux autres tendent vers l'infini. Les rapports de ces dénominateurs sont les mêmes que ceux des distances r_{23}, r_{31}, r_{12} : donc, si l'on revient aux notations du n° 3, le *quotient* $\frac{r}{\rho}$ *tend vers zéro quand* t *croît indéfiniment.*

Puisque l'expression

$$J = \frac{I}{t^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{t^{\frac{4}{3}}}\left(\frac{(m_1+m_2)m_3}{M}\rho^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}r^2\right) = \frac{\rho^2}{t^{\frac{4}{3}}}\left[\frac{(m_1+m_2)m_3}{M} + \varepsilon\right]$$

tend vers l'infini, il faut que *le quotient* $\frac{\rho}{t^{\frac{2}{3}}}$, *et a fortiori la distance* ρ, *tendent vers l'infini.*

Dès lors l'équation (3) en $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ est de la forme

$$\xi'' = \frac{b}{\rho^2} + \frac{br^2}{\rho^4} = \frac{b}{\rho^2} + \frac{\varepsilon}{\rho^2} = \frac{b}{\rho^2} = \frac{\varepsilon}{t^{\frac{4}{3}}},$$

puisque le quotient $\frac{r}{\rho}$ tend vers zéro et le quotient $\frac{\rho}{t^{\frac{2}{3}}}$ vers l'infini. Donc la dérivée ξ', et de même les dérivées η' et ζ', tendent vers des limites finies. Les quotients $\frac{\xi}{t}$, $\frac{\eta}{t}$, $\frac{\zeta}{t}$ tendent respectivement vers les trois mêmes valeurs limites, et *le quotient* $\frac{\rho}{t}$ *tend vers une limite finie* dont le carré est la somme des carrés des trois valeurs précédentes.

Je dis que la limite du quotient $\frac{\rho}{t}$ n'est pas nulle. En effet, démontrons d'abord que la dérivée ρ' tend vers une limite, qui sera nécessairement la même que celle du quotient $\frac{\rho}{t}$. L'équation (5) est de la forme

$$(66) \qquad \rho'' = -M\frac{1+\varepsilon}{\rho^2} + \frac{br^2}{\rho^4} + \frac{S(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2}{\rho^3} = -M\frac{1+\varepsilon}{\rho^2} + \frac{S(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2}{\rho^3},$$

d'après la seconde des formules (11), l'inégalité (29) et puisque le quotient $\frac{r}{\rho}$ tend vers zéro. Pour avoir une limite supérieure de la quantité $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, formons avec les deux équations (3) en $\frac{d^2\eta}{dt^2}$ et $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ la combinaison

$$\eta\zeta'' - \zeta\eta'' = a_1 a_2 \mathrm{M}(\eta z - \zeta y)\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right),$$

d'où

$$\eta\zeta'' - \zeta\eta'' = \frac{br^2}{\rho^3} = \frac{\varepsilon}{t^{\frac{2}{3}}},$$

d'après l'inégalité (29) et puisque $\frac{r}{\rho}$ tend vers zéro et $\frac{\rho}{t^{\frac{2}{3}}}$ vers l'infini. En intégrant à partir d'un instant assez éloigné mais fixe, on voit que la quantité $\eta\zeta' - \zeta\eta'$ est égale au produit de $t^{\frac{1}{3}}$ par une fonction bornée quand le temps croît indéfiniment, et l'on déduit

$$\frac{\mathrm{S}(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2}{\rho^3} = \frac{bt^{\frac{2}{3}}}{\rho^3} = \frac{\varepsilon}{\rho^2},$$

puisque $\frac{t^{\frac{2}{3}}}{\rho}$ tend vers zéro. L'équation (66) est donc de la forme

$$(67) \qquad \rho'' = -\mathrm{M}\frac{1+\varepsilon}{\rho^2}.$$

Il résulte que la dérivée première ρ' finit par décroître, et en particulier tend vers une limite quand le temps croît indéfiniment. Donc *la dérivée ρ' tend vers la limite positive ou nulle du quotient $\frac{\rho}{t}$* (1).

Admettons que cette limite commune soit nulle. Multiplions l'équation (67) par $2\rho'$, et intégrons l'équation obtenue de l'instant $t = +\infty$

---

(1) L'existence de cette limite de la dérivée ρ' peut se déduire aussi de l'équation suivante, qui résulte de l'identité de Lagrange

$$\rho'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - \frac{\mathrm{S}(\eta\zeta' - \zeta\eta)^2}{\rho^2},$$

et dont le dernier terme est de la forme $\frac{bt^{\frac{2}{3}}}{\rho^2}$ et par conséquent tend vers zéro : donc ρ' a une limite dont le carré est la somme des carrés des limites des dérivées ξ', η', ζ'. Mais l'équation (67) est utile pour démontrer que la limite commune de ρ' et $\frac{\rho}{t}$ n'est pas nulle.

à l'instant t : il vient, puisque ρ tend vers l'infini et ρ' vers zéro,

$$\rho'^2 = \frac{2M(1+\varepsilon)}{\rho}, \qquad \sqrt{\rho}\,\rho' = \sqrt{2M}(1+\varepsilon).$$

La dérivée $\frac{3}{2}\sqrt{\rho}\,\rho'$ de la fonction $\rho^{\frac{3}{2}}$ tend vers la limite finie $\frac{3}{2}\sqrt{2M}$ quand t croît indéfiniment, donc le quotient $\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{t}$ tend vers la même limite : circonstance incompatible avec ce fait que le quotient $\frac{\rho}{t^{\frac{2}{3}}}$ tend vers l'infini. Donc *la limite* commune de la dérivée ρ' et *du quotient* $\frac{\rho}{t}$ *est plus grande que zéro.*

Considérons l'équation des forces vives sous la forme (8) : la constante h est nulle, r_{13}, r_{23} tendent vers l'infini et ξ', η', ζ' vers des limites dont la somme des carrés est plus grande que zéro. Donc l'expression $\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{2} - \frac{m_1+m_2}{r}$ tend vers une limite négative : il résulte que *la distance r est bornée.*

Dès lors nous retrouvons les deux conditions du n° 9 : *la distance r est bornée et la distance ρ correspondante est un infiniment grand d'ordre* 1 *par rapport au temps*. Par suite le mouvement des trois corps est un *mouvement hyperbolique-elliptique*, représentable en général selon les résultats obtenus au n° 9, et avec les circonstances d'exception considérées au n° 10, par les deux mouvements osculateurs classiques, dont les douze éléments tendent vers des limites ; d'ailleurs les valeurs limites des deux éléments a et a' satisfont à la relation

$$m_1 m_2 \lim a = (m_1+m_2)m_3 \lim a'.$$

Donc, *dans le problème des trois corps, quand la constante des forces vives est nulle, le mouvement est exceptionnellement parabolique, mais en général hyperbolique-elliptique*, et dans ce cas peut être de trois sortes différentes suivant celle des trois masses qui s'éloigne indéfiniment des deux autres. Dans l'espace à douze dimensions, toutes les trajectoires correspondant à la valeur nulle de la constante des forces vives, sont situées sur la variété algébrique à onze dimensions, dont l'équation est l'équation (8) où l'on annule h; toutes ces trajectoires *dirigées* sont des trajectoires hyperboliques-elliptiques, de trois sortes différentes, à l'exception des trajectoires paraboliques qui forment sur la variété algébrique à onze dimensions quatre variétés analytiques, l'une à neuf dimensions, et trois à dix dimensions.

CHAPITRE IV.

LA CONSTANTE DES FORCES VIVES EST NÉGATIVE.

12. Nous nous bornerons encore au problème des trois corps, et nous remarquerons que *a priori* le cas où la constante des forces vives h est négative se subdivise en trois, selon que la quantité positive $\mathrm{I} = \frac{\Sigma m_i m_k r_{ik}^2}{\mathrm{M}}$ tend vers $+\infty$, est finie, ou est tantôt bornée, tantôt infiniment grande.

Premier cas : I tend vers $+\infty$.

Quand le temps croît indéfiniment, à chaque instant l'une, et par suite deux au moins des trois distances mutuelles sont de l'ordre de grandeur de la racine carrée de I. Mais les trois distances mutuelles ne peuvent être simultanément de cet ordre de grandeur, car dans l'équation des forces vives (7), le premier membre est positif ou nul, et le second serait voisin de la quantité négative h : donc à chaque instant l'une des distances mutuelles est nécessairement bornée. Dès lors *il ne peut y avoir échange. La même distance mutuelle*, soit r_{12}, *restera bornée, et les deux autres*, r_{13} et r_{23}, *tendront vers l'infini* de même que la quantité I.

Revenons aux notations du n° 3; r est borné et ρ tend vers $+\infty$; le rapport $\frac{r}{\rho}$ tend vers zéro comme dans des calculs précédents. Je dis que le quotient $\frac{\rho}{t}$ tend vers une limite. En effet l'équation (5) est de la forme

$$(68)\quad \rho'' = -\mathrm{M}\frac{1+\varepsilon}{\rho^2} + \frac{br^2}{\rho^4} + \frac{\mathrm{S}(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2}{\rho^3} = -\mathrm{M}\frac{1+\varepsilon}{\rho^2} + \frac{\mathrm{S}(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2}{\rho^3},$$

d'après la seconde des formules (11), l'inégalité (29) et puisque r est borné et ρ tend vers l'infini.

Pour avoir une limite supérieure de la quantité $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, et des deux quantités analogues, remarquons que les trois quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ sont bornées d'après les formules (10), et par suite aussi les trois quantités $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ d'après les intégrales des aires. Alors l'équation (68) devient

$$\rho'' = -M\frac{1+\varepsilon}{\rho^2}, \tag{69}$$

puisque ρ tend vers l'infini. Comme précédemment, on déduit que ρ' finit par décroître, et par avoir un signe constant; ce signe constant est nécessairement le signe plus puisque ρ tend vers $+\infty$. Donc la dérivée ρ' tend vers une limite finie positive ou nulle. Par conséquent *le quotient* $\frac{\rho}{t}$ *tend* de même *vers une limite finie positive ou nulle.*

Si la limite du quotient $\frac{\rho}{t}$ est positive, nous retrouvons les deux conditions du n° 9 : *la distance r est bornée et la distance* ρ *est un infiniment grand d'ordre* 1 *par rapport au temps.* Le mouvement des trois corps est un *mouvement hyperbolique-elliptique*, représentable en général par les deux mouvements osculateurs classiques, l'un hyperbolique, l'autre elliptique, dont les douze éléments tendent vers des limites.

13. Mouvement parabolique-elliptique. — Supposons en second lieu que *la limite commune de la dérivée* ρ' *et du quotient* $\frac{\rho}{t}$ *soit nulle.* Multiplions l'équation (69) par $2\rho'$, et intégrons l'équation obtenue de l'instant $t = +\infty$ à l'instant t : si ρ' tend vers zéro et puisque ρ tend vers l'infini, on obtient

$$\rho'^2 = 2M\frac{1+\varepsilon}{\rho},$$

d'où

$$\sqrt{\rho}\rho' = \sqrt{2M}(1+\varepsilon).$$

La dérivée $\frac{3}{2}\sqrt{\rho}\rho'$ de la fonction $\rho^{\frac{3}{2}}$ tendant vers la limite $\frac{3}{2}\sqrt{2M}$, le quotient $\frac{\rho^{\frac{3}{2}}}{t}$ tend vers la même limite; donc *le quotient* $\frac{\rho}{t^{\frac{2}{3}}}$ *tend vers la* *limite* $\left(\frac{9\mathrm{M}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ quand le temps croît indéfiniment. Donc, dans le mouvement considéré, *la distance ρ est un infiniment grand d'ordre $\frac{2}{3}$ par rapport au temps, et la distance r est bornée*, et comme les conditions obtenues dans les différents cas sont différentes, ces deux dernières conditions sont caractéristiques du mouvement parabolique-elliptique.

Il résulte que tendent vers des limites finies l'intégrale $\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\rho^2}$, puis les dérivées ξ', η', ζ' d'après les équations (3), dont la première se réduit à

$$\xi'' = \frac{b}{\rho^2} + \frac{br^2}{\rho^4} = \frac{b}{\rho^2} + \frac{b}{\rho^4} = \frac{b}{\rho^2} = \frac{b}{t^{\frac{4}{3}}},$$

enfin les six quantités $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$, $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ d'après l'équation

$$\eta\zeta'' - \zeta\eta'' = a_1 a_2 \mathrm{M}(\eta z - \zeta y)\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right) = \frac{br^2}{\rho^3} = \frac{b}{t^2}$$

et les équations analogues. Notons, ce qui nous sera utile bientôt, que, si l'on désigne par λ_1 la limite de la quantité $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, on peut écrire

$$\eta\zeta' - \zeta\eta' = \lambda_1 + \frac{b}{t}. \tag{70}$$

Les quotients $\frac{\xi}{t}$, $\frac{\eta}{t}$, $\frac{\zeta}{t}$ tendent respectivement vers les mêmes limites que les trois dérivées ξ', η', ζ'; et ces trois limites sont nécessairement nulles puisque le quotient $\frac{\rho}{t} = \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}{t}$ tend vers zéro.

Enfin les quotients $\frac{\xi}{\rho}$, $\frac{\eta}{\rho}$, $\frac{\zeta}{\rho}$ tendent vers des limites finies, car le premier a pour dérivée par rapport au temps

$$\frac{\rho\xi' - \xi\rho'}{\rho^2} = \frac{\rho^2\xi' - \xi\rho\rho'}{\rho^3} = \frac{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\xi' - (\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta')\xi}{\rho^3},$$

ou

$$\frac{\rho\xi' - \xi\rho'}{\rho^2} = \frac{\zeta(\zeta\xi' - \xi\zeta') - \eta(\xi\eta' - \eta\xi')}{\rho^3};$$

or les deux quantités $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ tendent vers des limites finies, et les deux quotients $\frac{\zeta}{\rho}$, $\frac{\eta}{\rho}$ sont en valeur absolue inférieurs ou égaux à 1; on a donc

$$\left(\frac{\xi}{\rho}\right)' = \frac{b}{\rho^2} = \frac{b}{t^{\frac{4}{3}}}.$$

Il résulte que *les quotients* $\frac{\xi}{t^{\frac{2}{3}}} = \frac{\xi}{\rho} \times \frac{\rho}{t^{\frac{2}{3}}}, \frac{\eta}{t^{\frac{2}{3}}}, \frac{\zeta}{t^{\frac{2}{3}}}$ *tendent vers des limites* dont la somme des carrés est nécessairement $\left(\frac{9\mathrm{M}}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Les coordonnées ξ, η, ζ et la distance ρ n'ont pas seulement un ordre d'infinitude déterminé quand le temps croît indéfiniment : elles peuvent être mises sous la forme de développements limités suivant les puissances décroissantes de t, $t^{\frac{2}{3}}$, $t^{\frac{1}{3}}$, t^0, $t^{-\frac{1}{3}}$, $t^{-\frac{2}{3}}$, dont les quatre premiers coefficients sont constants, et dont le cinquième est borné.

En effet, revenons d'abord à l'équation (68), c'est-à-dire à l'équation (5) qui, selon la seconde des formules (11), est de la forme

$$\rho'' = -\frac{\mathrm{M}}{\rho^2} + \frac{br^2}{\rho^4} + \frac{\mathrm{S}(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2}{\rho^3},$$

et par suite de la forme

$$(71) \qquad \rho'' = -\frac{\mathrm{M}}{\rho^2} + \frac{b}{\rho^4} + \frac{\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2}{\rho^3} + \frac{b}{\rho^3 t} = -\frac{\mathrm{M}}{\rho^2} + \frac{\mathrm{S}\lambda_1^2}{\rho^3} + \frac{b}{\rho^4},$$

d'après l'équation (70) et les deux équations analogues, et puisque r est borné et que le quotient $\frac{\rho}{t}$ tend vers zéro. Or nous savons que ρ' finit par être positif et tend vers zéro; multiplions à nouveau l'équation (71) par $2\rho'$ et intégrons l'équation obtenue de l'instant $t = +\infty$ à l'instant t : il vient

$$\rho'^2 = \frac{2\mathrm{M}}{\rho} - \frac{\mathrm{S}\lambda_1^2}{\rho^2} + \frac{b}{\rho^3};$$

d'où

$$\rho\rho'^2 = 2\mathrm{M} - \frac{\mathrm{S}\lambda_1^2}{\rho} + \frac{b}{\rho^2}$$

et

$$(72) \qquad \sqrt{\rho}\rho' = \sqrt{2\mathrm{M}} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{S}\lambda_1^2}{\sqrt{2\mathrm{M}}} \times \frac{1}{\rho} + \frac{b}{\rho^2},$$

puisque $\frac{1}{\rho}$ tend vers zéro. On tire encore de l'équation (72)

$$\sqrt{\rho}\rho' = \sqrt{2M} - \frac{1}{2}\,\frac{S\lambda_1^2 + \varepsilon}{\sqrt{2M}\left(\frac{9M}{2}\right)^{\frac{1}{3}}} \times \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}$$

puisque le quotient $\frac{\rho}{t^{\frac{2}{3}}}$ tend vers la limite $\left(\frac{9M}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, et, en intégrant la dernière équation à partir d'un instant assez éloigné, mais fixe, on obtient

$$\rho^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2M}\,t + bt^{\frac{1}{3}},$$

puis

$$\rho = \left(\frac{9M}{2}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} + b.$$

Par substitution de cette dernière expression de ρ, l'équation (72) devient

$$\sqrt{\rho}\rho' = \sqrt{2M} - \frac{1}{2}\,\frac{S\lambda_1^2}{\sqrt{2M}\left(\frac{9M}{2}\right)^{\frac{1}{3}}} \times \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}} + \frac{b}{t^{\frac{4}{3}}};$$

d'où

$$\rho^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2M}\,t - \frac{9}{4}\,\frac{S\lambda_1^2}{\sqrt{2M}\left(\frac{9M}{2}\right)^{\frac{1}{3}}} \times t^{\frac{1}{3}} + K + \frac{b}{t^{\frac{1}{3}}}$$

et

$$\rho = \left(\frac{9M}{2}\right)^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} - \frac{S\lambda_1^2}{2M} + \frac{K}{t^{\frac{1}{3}}} + \frac{b}{t^{\frac{2}{3}}}, \tag{73}$$

les deux lettres K désignant des constantes d'ailleurs différentes. *Telle est l'expression* cherchée *de la distance* ρ.

Revenons de même à l'équation

$$\frac{\rho\xi' - \xi\rho'}{\rho^2} = \frac{\zeta(\zeta\xi' - \xi\zeta') - \eta(\xi\eta' - \eta\xi')}{\rho^3}. \tag{74}$$

Puisque les deux quotients $\frac{\zeta}{\rho}$, $\frac{\eta}{\rho}$ et les deux expressions $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ tendent vers des limites finies, le second membre est de la forme [1]

$$\frac{K+\varepsilon}{\rho^2}=\frac{K+\varepsilon}{t^{\frac{4}{3}}},$$

et l'on a, en intégrant de l'instant $t=+\infty$ à l'instant t,

$$\frac{\xi}{\rho}=K+\frac{K+\varepsilon}{t^{\frac{1}{3}}}.$$

Substituons dans le second membre de l'équation (74) les deux expressions de $\frac{\eta}{\rho}$, $\frac{\zeta}{\rho}$ analogues à la précédente, les deux expressions des quantités $\zeta\xi'-\xi\zeta'$, $\xi\eta'-\eta\xi'$ analogues à l'expression (70) et enfin l'expression (73) de la distance ρ; il vient

$$\frac{\rho\xi'-\xi\rho'}{\rho^2}=\frac{\sum\left(K+\frac{K+\varepsilon}{t^{\frac{1}{3}}}\right)\left(K+\frac{b}{t}\right)}{K\,t^{\frac{4}{3}}+K\,t^{\frac{2}{3}}+K\,t^{\frac{1}{3}}+b}=\frac{K}{t^{\frac{4}{3}}}+\frac{K+\varepsilon}{t^{\frac{5}{3}}};$$

d'où

$$\frac{\xi}{\rho}=K+\frac{K}{t^{\frac{1}{3}}}+\frac{K+\varepsilon}{t^{\frac{2}{3}}}.$$

Deux nouvelles applications du même procédé donnent successivement

$$\frac{\xi}{\rho}=K+\frac{K}{t^{\frac{1}{3}}}+\frac{K}{t^{\frac{2}{3}}}+\frac{K+\varepsilon}{t},$$

$$\frac{\xi}{\rho}=K+\frac{K}{t^{\frac{1}{3}}}+\frac{K}{t^{\frac{2}{3}}}+\frac{K}{t}+\frac{b}{t^{\frac{4}{3}}}. \tag{75}$$

Des expressions (73) et (75) on tire la première des trois expressions

$$\left\{\begin{aligned}\xi&=A\,t^{\frac{2}{3}}+A_1\,t^{\frac{1}{3}}+A_2+\frac{A_3}{t^{\frac{1}{3}}}+\frac{b}{t^{\frac{2}{3}}},\\ \eta&=B\,t^{\frac{2}{3}}+B_1\,t^{\frac{1}{3}}+B_2+\frac{B_3}{t^{\frac{1}{3}}}+\frac{b}{t^{\frac{2}{3}}},\\ \zeta&=C\,t^{\frac{2}{3}}+C_1\,t^{\frac{1}{3}}+C_2+\frac{C_3}{t^{\frac{1}{3}}}+\frac{b}{t^{\frac{2}{3}}},\end{aligned}\right. \tag{76}$$

(1) Dans les équations qui suivent, la lettre K désigne des quantités constantes, égales ou différentes.

où les coefficients A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 désignent des constantes.

On sait que dans le mouvement parabolique de deux corps le rayon vecteur et les différences des coordonnées sont représentables au voisinage des deux valeurs $t = \pm\infty$ par des séries convergentes ordonnées suivant les puissances décroissantes de $t^{\frac{1}{3}}$, dont les premiers termes ont la même forme

$$K t^{\frac{2}{3}} + K t^{\frac{1}{3}} + K + \frac{K}{t^{\frac{1}{3}}} + \ldots$$

que les développements limités qui viennent d'être obtenus. Effectivement, si l'on substitue ces développements limités dans les seconds membres des équations différentielles (3), ces seconds membres ont les mêmes valeurs que si les trois coordonnées x, y, z étaient identiquement nulles, à des termes en $\frac{br^2}{\rho^4} = \frac{b}{t^{\frac{8}{3}}}$ près, selon la séconde des formules (11). Puisqu'on doit retrouver aux premiers membres les mêmes expressions de ξ, η, ζ après deux intégrations successives, il résulte que les expressions (73) et (76) de la distance ρ et des coordonnées ξ, η, ζ sont les mêmes que dans un certain mouvement parabolique de deux corps, à des termes de la forme $\frac{b}{t^{\frac{2}{3}}}$ près.

Pour représenter à la fois les six coordonnées ξ, η, ζ, x, y, z, considérons les deux mouvements osculateurs définis précédemment : le premier, déduit du mouvement du point ξ, η, ζ, pourra être elliptique, parabolique ou hyperbolique, ou présenter tantôt l'un, tantôt l'autre de ces trois caractères [1]. Le second mouvement osculateur, déduit du mouvement du point de coordonnées x, y, z, sera elliptique.

Dans la définition du premier mouvement osculateur, prenons comme éléments, au lieu du demi-axe focal a et de la longitude moyenne de l'époque l_0, le paramètre p et l'instant du passage au périhélie τ : ces deux nouveaux éléments sont liés aux anciens par les formules

$$p = a(e^2 - 1), \qquad \tau = \frac{\varpi - l_0}{n} = \frac{\varpi - l_0}{\sqrt{M}} a^{\frac{3}{2}};$$

---

(1) Selon le signe de l'expression $3(x\xi + y\eta + z\zeta)^2 - r^2\rho^2$.

et conservons les quatre autres éléments e, i, ϖ, θ. Les quatre équations

$$\begin{aligned} \eta\zeta' - \zeta\eta' &= \sqrt{\mathrm{M}p}\sin i \sin\theta, \\ \zeta\xi' - \xi\zeta' &= -\sqrt{\mathrm{M}p}\sin i \cos\theta, \\ \xi\eta' - \eta\xi' &= \sqrt{\mathrm{M}p}\cos i, \end{aligned}$$

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 - \frac{2\mathrm{M}}{\rho} = \frac{\mathrm{M}}{a} = \mathrm{M}\frac{e^2-1}{p} \tag{77}$$

définissent à chaque instant les quatre éléments p, i, θ, e, et montrent qu'ils tendent vers des limites finies, la limite du paramètre p étant selon l'équation

$$\mathrm{S}(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2 = \mathrm{M}p \tag{78}$$

égale à $\dfrac{\lambda_1^2 + \mu_1^2 + \nu_1^2}{\mathrm{M}}$ et plus grande que zéro, et la limite de l'excentricité e étant l'unité : pourvu que les valeurs limites λ_1, μ_1, ν_1 des trois quantités $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ ne soient pas nulles à la fois, et qu'on ait au besoin changé l'orientation des axes. La longitude du périhélie ϖ est déterminée ensuite par les mêmes équations (52) que dans le mouvement hyperbolique-elliptique, et tend vers une limite finie comme dans ce mouvement.

Enfin le sixième élément, τ, est défini à l'instant t par les deux équations

$$e \operatorname{sh} u - u = \sqrt{\mathrm{M}}\,\frac{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{3}{2}}}(t-\tau), \tag{79}$$

$$\rho = \frac{p}{e^2-1}(e \operatorname{ch} u - 1), \tag{80}$$

entre lesquelles doit être éliminée la variable auxiliaire u, qui est réelle et positive, si à l'instant considéré le mouvement osculateur est hyperbolique. Si l'on dérive le premier membre de l'équation (77) par rapport au temps, et qu'on tienne compte des équations (3), on obtient une expression de la forme $b\dfrac{|\xi'|+|\eta'|+|\zeta'|}{\rho^4} = \dfrac{b}{t^3}$; donc la quantité $\dfrac{e^2-1}{p}$, qui tend vers zéro, est de la forme $\dfrac{b}{t^2}$; par suite, d'après l'équation (80), la variable auxiliaire u tend vers zéro quand le temps croît indéfiniment. Rendons les équations (79) et (80) régulières pour $e = 1$, de façon que ces équations s'appliquent immédiatement à un mouvement osculateur parabolique, et de façon aussi qu'elles s'appliquent à un mouvement osculateur elliptique sans introduction de valeurs imaginaires de la variable auxiliaire : faisons le changement de variable

$$u = \sqrt{e^2 - 1}\, U,$$

qui, en passant à la limite, déduit de l'équation de Kepler l'équation déterminant le temps dans le mouvement parabolique de deux corps. Les équations (79) et (80) peuvent s'écrire

$$e(\operatorname{sh} u - u) + u(e - 1) = \sqrt{M}\, \frac{(e^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}{p^{\frac{3}{2}}} (t - \tau),$$

$$e(\operatorname{ch} u - 1) = \frac{\rho(e^2 - 1)}{p} + 1 - e,$$

et deviennent

$$e\left[\frac{U^3}{6} + \frac{(e^2 - 1)U^5}{120} + \ldots\right] + \frac{U}{e + 1} = \frac{\sqrt{M}}{p^{\frac{3}{2}}} (t - \tau),$$

$$e\left[\frac{U^2}{2} + \frac{(e^2 - 1)U^4}{24} + \ldots\right] = \frac{\rho}{p} - \frac{1}{e + 1}.$$

La dernière équation montre que la quantité U est un infiniment grand d'ordre $\frac{1}{3}$ par rapport au temps ; et, si l'on modifie U de quantités de la forme $\frac{b}{t}$ ou τ de quantités infiniment petites, on peut réduire les deux équations précédentes à

$$\frac{U^3}{6} + \frac{U}{2} = \frac{\sqrt{M}}{p^{\frac{3}{2}}} (t - \tau),$$

$$\frac{U^2}{2} = \frac{\rho}{p} - \frac{1}{2}.$$

Par élimination de U entre ces deux équations, et en tenant compte de l'expression (73) de la distance ρ, de l'équation (78) qui définit le paramètre p, enfin de l'équation (70) et des deux équations analogues, on conclut que la quantité τ tend vers une limite finie (¹). Donc les *six éléments du premier mouvement osculateur tendent vers des limites finies.*

Considérons les six éléments elliptiques du second mouvement osculateur, a', e', i', l'_0, ϖ', θ' : à ces six éléments est applicable un calcul semblable à celui du n° 9, à cela près que la distance ρ est un infiniment grand d'ordre $\frac{2}{3}$ au lieu de 1, et que les deux équations finales sont de la forme

$$\frac{d\varpi'}{dt} = \frac{b}{t^2}, \qquad \frac{dl'_0}{dt} = \frac{b}{t}.$$

Donc, aux restrictions près énoncées au n° 9, les six éléments considérés sont déterminés à chaque instant, et, sauf peut-être la longitude moyenne de l'époque l'_0, tendent vers des limites finies, qui sont positives pour le demi-grand axe a' et comprises entre 0 et 1 pour l'excentricité e'.

Pour démontrer que l'élément l'_0 a aussi une limite finie, remarquons qu'au second membre de l'équation (57) en $\frac{dl'_0}{dt}$, les seuls termes qui ne soient pas de la forme $\frac{b}{t^{\frac{5}{3}}}$ proviennent de l'expression

$$-\frac{2}{n'a'}\frac{\partial u'}{\partial a'} \times \mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u'} = \frac{3t}{a'^2(1-e'\cos u')} \times \mathrm{S}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u'},$$

et dans cette expression du premier terme du développement de la fonction perturbatrice R

$$\frac{m_3}{2}\left[\frac{3(\mathrm{S}x\xi)^2}{\rho^5} - \frac{r^2}{\rho^3}\right];$$

(¹) Au fond, la démonstration consiste en ceci, que d'une part les développements des coordonnées ξ, η, ζ et la distance ρ sont les mêmes que dans un certain mouvement parabolique de deux corps à des termes correctifs de la forme $\frac{b}{t^{\frac{2}{3}}}$ près (*cf.* p. 101), et que d'autre part le paramètre p a, d'après les équations (78) et (70), même valeur que dans ce mouvement parabolique à des termes correctifs de la forme $\frac{b}{t}$ près : les uns et les autres termes correctifs ajoutent des quantités infiniment petites à la valeur de τ dans le même mouvement parabolique de deux corps.

les quantités x, y, z, r sont des expressions linéaires en $\cos u'$ et $\sin u'$, et l'équation différentielle considérée peut être mise sous la forme

$$\frac{dl'_0}{dt} = \frac{\alpha\cos 2u' + \beta\sin 2u' + \gamma\cos u' + \delta\sin u'}{(1 - e'\cos u')t} + \frac{b}{t^{\frac{4}{3}}}, \tag{81}$$

où les quatre coefficients α, β, γ, δ sont constants, d'après les développements (73) et (76) de la distance ρ et des coordonnées ξ, η, ζ, et parce que la différence de chacun des cinq éléments a', e', i', θ', ϖ' avec sa limite est de la forme $\frac{b}{t}$ (¹). De l'équation (81), ou de l'équation précédente, résulte d'abord que la quantité l'_0 est de la forme $b\log t$.

Si l'on considère l'équation de Kepler

$$u' - e'\sin u' = n't + l'_0 - \varpi',$$

où e', n' et ϖ' tendent vers des limites finies, on déduit que le quotient $\frac{u'}{t}$ tend vers la même limite que la quantité n'. D'ailleurs la dérivée $\frac{du'}{dt}$ ne tend pas vers cette même limite, mais finit par être positive : en effet, en dérivant l'équation de Kepler par rapport au temps, on obtient l'équation

$$(1 - e'\cos u')\frac{du'}{dt} = \sin u'\cdot\frac{de'}{dt} + n' + t\frac{dn'}{dt} + \frac{dl'_0}{dt} - \frac{d\varpi'}{dt}, \tag{82}$$

dont le second membre tend vers la limite de la quantité n' : la limite de l'excentricité e' étant inférieure à 1, la dérivée $\frac{du'}{dt}$ finit par être positive. Par suite, au lieu du temps, on peut prendre la quantité u' comme variable indépendante, et former, en divisant les équations (81) et (82), l'équation

$$\frac{dl'_0}{du'} = \frac{\alpha\cos 2u' + \beta\sin 2u' + \gamma\cos u' + \delta\sin u'}{n't} + \frac{b}{u'^{\frac{4}{3}}},$$

(¹) Car on vérifie facilement que la dérivée $\frac{da'}{dt}$ est de la forme $\frac{b}{t^3}$, et chacune des dérivées $\frac{de'}{dt}$, $\frac{di'}{dt}$, $\frac{d\varpi'}{dt}$, $\frac{d\theta'}{dt}$ de la forme $\frac{b}{t^2}$.

puis l'équation

$$(83) \qquad \frac{dl'_0}{du'} = \frac{\alpha \cos 2u' + \beta \sin 2u' + \gamma \cos u' + \delta \sin u'}{u'} + \frac{b}{u'^{\frac{4}{3}}},$$

où les quatre coefficients α, β, γ, δ sont les mêmes constantes que dans l'équation (81), et où la fonction b est bornée quand la variable u' croît indéfiniment.

Intégrons l'équation (83) à partir d'une valeur positive de u', assez grande et fixe : on sait que les intégrales

$$\int \frac{\cos 2u'}{u'} du', \quad \int \frac{\sin 2u'}{u'} du',$$
$$\int \frac{\cos u'}{u'} du', \quad \int \frac{\sin u'}{u'} du', \quad \int \frac{du'}{u'^{\frac{4}{3}}}$$

tendent chacune vers une limite finie, quand la limite inférieure est positive et fixe et que la limite supérieure croît indéfiniment. Donc, quand u', ou t, croissent indéfiniment, le second membre de l'équation obtenue tend vers une limite finie, et par conséquent la quantité l_0, et ainsi *les six éléments du second mouvement osculateur.*

Le mouvement parabolique-elliptique dépend évidemment d'onze paramètres, qui sont les valeurs limites des onze éléments osculateurs p, i, τ, ϖ, θ, a', e', i', l'_0, ϖ', θ'.

Ajoutons ici une remarque au sujet du mouvement hyperbolique-parabolique. Au n° 8 nous avons dans ce mouvement représenté les six coordonnées ξ, η, ζ, x, y, z, sous forme de produits de t ou de $t^{\frac{2}{3}}$ par des séries entières en $\frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}$ et $\frac{\log t}{t}$, convergentes si t est assez grand. Une telle représentation est un résultat plus précis que cette proposition que les douze éléments osculateurs tendent vers des limites finies. Mais cette dernière proposition est encore valable en général. En ce qui concerne le mouvement osculateur hyperbolique défini à partir des coordonnées ξ, η, ζ, on démontre que les six éléments en sont déterminés à chaque instant, et tendent vers des limites finies, par les mêmes raisonnements et avec les mêmes restrictions que dans le mouvement hyperbolique-elliptique.

Pour définir le second mouvement osculateur, à partir des coordonnées x, y, z, remplaçons le demi-grand axe a' et la longitude moyenne de l'époque l'_0 par le paramètre p' et l'instant du passage au périhélie τ', de façon que l'on a

$$p' = a'(1 - e'^2), \qquad \tau' = \frac{\varpi' - l'_0}{n'} = \frac{\varpi' - l'_0}{\sqrt{m_1 + m_2}} a'^{\frac{3}{2}},$$

et considérons les six éléments p', e', i', ϖ', θ', τ'. Pour déterminer à chaque instant les cinq premiers et démontrer qu'ils tendent vers des limites finies, on peut appliquer les mêmes raisonnements que nous venons d'appliquer au premier mouvement osculateur du mouvement parabolique-elliptique : à cela près qu'on devra dériver les équations (56) pour démontrer que leurs premiers membres tendent vers des limites finies (¹). L'élément τ' sera défini de même par l'élimination de la variable auxiliaire u' entre les deux équations

$$u' - e' \sin u' = \frac{\sqrt{m_1 + m_2}}{p'^{\frac{3}{2}}} (1 - e'^2)^{\frac{3}{2}} (t - \tau'),$$

$$r = \frac{p'}{1 - e'^2} (1 - e' \cos u'),$$

où le paramètre p' est déterminé par l'équation

$$S(yz' - zy')^2 = (m_1 + m_2) p',$$

et où la distance r est déterminée par le développement résultant des développements (49) :

$$r = \left[\frac{9(m_1 + m_2)}{2}\right]^{\frac{1}{3}} t^{\frac{2}{3}} - \frac{\lambda_2^2 + \mu_2^2 + \nu_2^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{K + \varepsilon}{t^{\frac{1}{3}}},$$

λ_2, μ_2, ν_2 désignant comme précédemment les valeurs limites des trois quantités $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ et K une constante.

14. Considérons maintenant les deux autres cas logiquement possibles quand la constante des forces vives h est négative, savoir le

---

(¹) *Cf.* page 79, note 1.

deuxième cas où la quantité I reste finie, et le troisième cas où la quantité I est tantôt bornée, tantôt infiniment grande. Dans les deux cas, nous ferons seulement quelques remarques au sujet de la question de la stabilité dans le problème des trois corps.

Le cas où la quantité I reste finie quand le temps croît indéfiniment est évidemment possible : les solutions périodiques et les solutions asymptotiques aux solutions périodiques nous en offrent des exemples. La question de savoir si la quantité I peut être tantôt bornée, tantôt infiniment grande est une partie de la question de la stabilité dans le problème des trois corps.

Pour qu'il y ait stabilité dans une solution du problème des trois corps, Poincaré pose trois conditions [1] :

1° Les distances mutuelles doivent être bornées supérieurement;

2° Les corps doivent ne pas se choquer, et même les distances mutuelles doivent être bornées inférieurement;

3° Le système des trois corps doit repasser une infinité de fois aussi près qu'on veut de la situation initiale.

Étudions la première de ces trois conditions en supposant que le mouvement ne comporte aucun choc et dure jusqu'à $t = +\infty$. Il est évident, d'après l'équation de Lagrange, que la quantité I tend vers l'infini et que cette première condition ne peut être remplie, quand la constante des forces vives h est positive. Selon les résultats obtenus plus haut, dans les deux mouvements parabolique et hyperbolique-elliptique, la quantité I tend de même vers l'infini quand la constante h est nulle. Quand la constante h est négative, cette première condition n'est pas remplie non plus dans le premier des trois cas que nous avons définis, où la quantité I tend vers l'infini, et où le mouvement est hyperbolique-elliptique ou parabolique-elliptique, ni dans le troisième cas, si ce troisième cas est possible, où la quantité I est tantôt bornée, tantôt infiniment grande. Cette première condition est remplie seulement si la constante des forces vives h est négative, et si en outre, selon le deuxième des trois cas que nous avons distingués, la quantité I est finie : c'est seulement alors que les trois distances

(1) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, p. 141.

mutuelles sont inférieures à une longueur fixe. Ainsi la question de la stabilité au point de vue des maxima des distances mutuelles se ramène en premier lieu à la question de *savoir* si notre troisième cas est possible, *si la quantité* I *peut être tantôt bornée, tantôt infiniment grande, et* en second lieu à *décider pour des conditions initiales données et rendant négative la constante des forces vives lequel des deux ou trois cas possibles engendrent ces conditions*.

CHAPITRE V.

LIMITE INFÉRIEURE DE DEUX DISTANCES MUTUELLES ET LIMITE SUPÉRIEURE DE LA VITESSE D'UN CORPS DONT LES DISTANCES AUX DEUX AUTRES SONT LIMITÉES INFÉRIEUREMENT.

15. Rappelons que le résultat le plus saillant obtenu par M. Sundman est l'intégration quantitative du problème des trois corps quand les constantes des aires ([1]) ne sont pas nulles toutes les trois, savoir la représentation des neuf coordonnées et du temps, de $-\infty$ à $+\infty$, par des fonctions d'une variable auxiliaire, holomorphes dans un certain cercle du plan complexe de cette variable; de même que dans le mouvement elliptique de deux corps, les six coordonnées et le temps s'expriment en fonctions entières de l'anomalie excentrique.

Pour parvenir à ce résultat, M. Sundman a démontré entre autres deux propositions auxiliaires. En premier lieu, en supposant que les trois constantes des aires ne sont pas nulles, M. Sundman a déterminé une longueur l au-dessous de laquelle deux distances mutuelles ne peuvent descendre à la fois; cette longueur l est une fonction algébrique des masses, des constantes des forces vives et des aires, et enfin des valeurs initiales des deux quantités ([2]) I et $\frac{dI}{dt}$. En second lieu, en

([1]) Comme nous le faisons d'ailleurs dans le présent travail, M. Sundman rapporte toujours le mouvement des trois corps au centre de gravité commun.

([2]) En fait, M. Sundman considère, non la quantité I, moment d'inertie du système des trois corps par rapport à leur centre de gravité, mais la quantité $\frac{(m_1+m_2+m_3)}{m_1 m_2 m_3}$ I : c'est cette seconde quantité qu'il désigne par R^2.

supposant encore que les trois constantes des aires ne sont pas nulles, et s'appuyant sur la première proposition, M. Sundman a déterminé, quand les distances de l'un des corps aux deux autres sont supérieures ou égales à la longueur l, une limite supérieure V de la vitesse de ce corps; cette limite supérieure V est aussi une fonction algébrique des masses, des constantes des forces vives et des aires et des valeurs initiales des deux quantités I et $\frac{dI}{dt}$.

Rappelons encore que M. Hadamard a simplifié les démonstrations des deux propositions précédentes en supposant aussi que les trois constantes des aires ne sont pas nulles, et en modifiant l'enchaînement des idées (1).

En raison de l'importance des deux propositions précédentes au point de vue de la stabilité et de la théorie générale du problème des trois corps, il n'est peut-être pas inutile de présenter les faits à un point de vue plus intuitif, et notamment de limiter la vitesse d'un corps dont les distances aux deux autres sont limitées inférieurement, même dans certains cas où les trois constantes des aires sont nulles.

Nous utiliserons une transformation de l'expression de la force vive et une équation employées (2) par M. Sundman. Soient comme précédemment x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3$) les coordonnées des trois corps par rapport au centre de gravité commun, et soient r_i leurs distances à ce centre de gravité : on tire de l'identité de Lagrange

$$\mathrm{S}\,x_i'^2 = r_i'^2 + \mathrm{S}\,\frac{(y_i z_i' - z_i y_i')^2}{r_i^2} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

d'où l'expression

$$2\mathrm{T} = \Sigma m_i \mathrm{S}\,x_i'^2 = \Sigma m_i r_i'^2 + \mathrm{S} \sum \frac{m_i (y_i z_i' - z_i y_i')^2}{r_i^2}.$$

Dans l'expression précédente de $2\mathrm{T}$, multiplions chacun des quatre termes par $\mathrm{I} = \Sigma m_i r_i^2$ et appliquons de nouveau l'identité de Lagrange aux quatre produits ainsi obtenus : avec des combinaisons de signes

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XXXIX, 1915, pp. 249-264.

(2) *Cf.* SUNDMAN, *Acta Soc. sc. Fennicæ*, t. XXXIV, 1907, n° 6, p. 32, et *Acta mathematica*, t. 36, 1912, p. 149; CHAZY, *Bulletin astronomique*, t. XXXV, 1918, p. 333. L'équation considérée s'étend au problème des n corps.

convenables, ces produits deviennent

$$\Sigma m_i r_i^2 \times \Sigma m_i r_i'^2 = (\Sigma m_i r_i r_i')^2 + \Sigma m_i m_k (r_i r_k' - r_k r_i')^2,$$

$$\Sigma m_i r_i^2 \times \sum \frac{m_i(y_i z_i' - z_i y_i')^2}{r_i^2}$$
$$= [\Sigma m_i(y_i z_i' - z_i y_i')]^2 + \Sigma m_i m_k \left[(y_i z_i' - z_i y_i')\frac{r_k}{r_i} - (y_k z_k' - z_k y_k')\frac{r_i}{r_k}\right]^2.$$

D'après l'équation

$$I' = 2\,\Sigma\, m_i r_i r_i'$$

et les trois intégrales des aires

$$\begin{aligned} \Sigma\, m_i(y_i z_i' - z_i y_i') &= \lambda, \\ \Sigma\, m_i(z_i x_i' - x_i z_i') &= \mu, \\ \Sigma\, m_i(x_i y_i' - y_i x_i') &= \nu, \end{aligned}$$

on déduit la nouvelle expression

$$2\mathrm{T} = \frac{\mathrm{I}'^2}{4\mathrm{I}} + \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + \mathrm{Q}^2}{\mathrm{I}},$$

Q^2 désignant une somme de douze carrés.

D'autre part, en éliminant la fonction de forces U entre l'équation des forces vives et l'équation de Lagrange, on obtient

$$\mathrm{I}'' = 2\mathrm{T} + 2h,$$

d'où, par substitution de l'expression obtenue de $2\mathrm{T}$,

$$\mathrm{I}'' - \frac{\mathrm{I}'^2}{4\mathrm{I}} = \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{\mathrm{I}} + \frac{\mathrm{Q}^2}{\mathrm{I}} + 2h.$$

Multiplions les deux membres de l'équation précédente par $\frac{\mathrm{I}'}{\sqrt{\mathrm{I}}}$ et intégrons l'équation obtenue par rapport à la variable t : il vient

$$(84)\qquad \frac{\mathrm{I}'^2}{2\sqrt{\mathrm{I}}} + 2\frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{\sqrt{\mathrm{I}}} - 4h\sqrt{\mathrm{I}} = \int \frac{\mathrm{Q}^2\mathrm{I}'}{\mathrm{I}^{\frac{3}{2}}}\,dt + \text{const.}$$

Telle est l'équation cherchée [1].

---

[1] Il résulte facilement de cette équation que, si la première des deux propositions

16. *Durée du mouvement.* — Soit un mouvement quelconque du problème des trois corps, donnant des valeurs arbitraires à la constante des forces vives et aux constantes des aires. Prolongeons analytiquement et réellement ce mouvement sur l'axe réel du plan de la variable complexe t en faisant croître, puis en faisant décroître t autant qu'il est possible, et par conséquent jusqu'à $t = +\infty$ et jusqu'à $t = -\infty$: à moins d'être arrêtés par un choc des trois corps au delà duquel le mouvement consi-

---

de M. Sundman rappelées précédemment s'était trouvée fausse, si, les trois constantes des aires n'étant pas nulles, la fonction I avait eu des minima arbitrairement petits, cette fonction aurait eu nécessairement aussi des maxima arbitrairement grands, de sorte que dans un tel mouvement ni la seconde, ni la première des trois conditions de Poincaré n'auraient été vérifiées.

En effet, supposons que dans un mouvement du problème des trois corps, les trois constantes des aires ne soient pas nulles, et que les trois distances mutuelles puissent devenir simultanément arbitrairement petites. Puisque la fonction I ne peut s'annuler pour une valeur finie du temps, ni tendre vers zéro quand le temps croît indéfiniment (*cf.* page 113, Propriétés de la fonction I), il faut admettre que cette fonction oscille quand le temps varie, et, étant positive et finie, présente indéfiniment des minima arbitrairement petits, non nuls, et des maxima non arbitrairement petits, finis, mais peut-être non bornés. D'ailleurs la dérivée I' est finie, et par suite nulle en tous ces minima et maxima. Enfin h est nécessairement négatif. Soient I_1 et I_2 les valeurs d'un minimum et d'un maximum consécutifs : appliquons l'équation (84) à l'intervalle de temps compris entre les instants correspondants t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$). Donc cet intervalle I' est nécessairement positif ou nul, et l'intégrale figurant au second membre est positive ou nulle ; la fonction $\frac{I'^2}{2\sqrt{I}}$ est nulle aux deux limites. D'où l'on déduit

$$\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{\sqrt{I_2}} - 2h\sqrt{I_2} - \frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{\sqrt{I_1}} + 2h\sqrt{I_1} \geqq 0,$$

ou

$$\left(-\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{\sqrt{I_1 I_2}} - 2h\right)(\sqrt{I_2}-\sqrt{I_1}) \geqq 0,$$

ou, puisque I_1 est inférieur à I_2 et h négatif,

$$\sqrt{I_1 I_2} \geqq \frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{-2h}.$$

Donc, ayant des minima arbitrairement petits, la fonction I a nécessairement aussi des maxima arbitrairement grands.

On peut dire encore que les mouvements où les trois constantes des aires ne sont pas nulles, et qui vérifient la première condition de stabilité, ne peuvent échapper à la seconde que parce que deux corps seulement, mais non les trois corps à la fois, se choquent ou se rapprochent indéfiniment.

déré n'admette pas de prolongement réel. Étudions les variations de la fonction $I(t)$ pendant toute la *durée du mouvement* ainsi obtenue.

Propriétés de la fonction $I(t)$. — Nous savons de la fonction $I(t)$ les propriétés suivantes. Cette fonction et sa dérivée $\frac{dI}{dt}$ sont finies pour toute valeur finie du temps. M. Sundman a démontré que, si les trois constantes des aires λ, μ, ν ne sont pas nulles, les trois corps ne peuvent se choquer pour une valeur finie du temps : alors de $t = -\infty$ à $t = +\infty$ la fonction I est positive. D'après les résultats obtenus plus haut [1], quand t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la fonction I est nécessairement un infiniment grand d'ordre 2 par rapport au temps, si la constante des forces vives h est positive, dans les trois mouvements hyperbolique (n° 5), hyperbolique-parabolique (n° 8) et hyperbolique-elliptique (n° 9). Si la constante h est nulle, la fonction I est un infiniment grand d'ordre 2 dans le mouvement hyperbolique-elliptique et d'ordre $\frac{4}{3}$ dans le mouvement parabolique (n° 11). Si la constante h est négative, la fonction I est un infiniment grand d'ordre 2 ou $\frac{4}{3}$ dans les mouvements hyperbolique-elliptique (n° 12) et parabolique-elliptique (n° 13), correspondant au premier des trois cas que nous avons distingués; elle est finie dans le second cas, et tantôt bornée, tantôt infiniment grande dans le troisième. Enfin j'ai démontré [2] que dans aucun mouvement la fonction I ne peut tendre vers zéro quand le temps croît indéfiniment.

Intervalles de première sorte, de deuxième sorte et de troisième sorte. — Divisons la *durée du mouvement* en intervalles par les instants où la fonction I passe par des minima, différents de zéro ou nuls, et distinguons trois sortes d'intervalles.

Les *intervalles de première sorte* sont les intervalles pendant lesquels la fonction I ne possède pas de maximum et ne tend pas non plus vers

---

(1) Nous avons supposé précédemment que t tendait vers $+\infty$, mais il est clair qu'à tous les résultats obtenus correspondent avec les changements convenables des résultats valables quand t tend vers $-\infty$.

(2) *Bulletin astronomique*, t. XXXV, 1918, p. 331, note 2; et *infra*, pp. 123-124.

une limite finie pour une valeur infinie du temps. Les intervalles de première sorte ont nécessairement une durée infinie, et, quand le temps croît indéfiniment, le mouvement y devient nécessairement hyperbolique, ou hyperbolique-parabolique, ou parabolique, ou hyperbolique-elliptique, ou parabolique-elliptique.

Les *intervalles de deuxième sorte* sont les intervalles pendant lesquels la fonction I possède un maximum. Les *intervalles de troisième sorte* sont les intervalles infinis où la fonction I ne possède pas de maximum et tend vers une limite finie pour une valeur infinie du temps. Les intervalles de seconde et de troisième sorte ne peuvent exister que si la constante des forces vives h est négative, puisque pour $h \geqq 0$ la dérivée seconde I'' est positive d'après l'équation de Lagrange, et la fonction I est un infiniment grand d'ordre 2 ou $\frac{4}{3}$ quand le temps croît indéfiniment.

On peut présenter les choses autrement. Si h est positif ou nul, la durée du mouvement se compose d'un ou de deux intervalles de première sorte. Si h est négatif, la durée du mouvement se compose d'un nombre infini d'intervalles de deuxième sorte (2^e ou 3^e cas), ou d'un nombre fini, qui peut être nul, d'intervalles de deuxième sorte, précédés et suivis de deux intervalles qui peuvent être séparément de première sorte (1^{er} cas) ou de troisième sorte (2^e cas); de part et d'autre de l'instant initial, la suite finie ou infinie des intervalles de deuxième sorte peut enfin être limitée par un choc des trois corps.

17. Intervalles de première sorte : $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 > 0$. — *Limite inférieure de* I. — Considérons d'abord un intervalle de temps de première sorte : les limitations de M. Sundman et de M. Hadamard sont valables quand les trois constantes des aires ne sont pas nulles. Rappelons le raisonnement par lequel M. Sundman obtient une limite inférieure de la valeur I_1 du minimum de la fonction I. En appliquant l'équation (84) entre l'instant t_1 du minimum I_1 et un instant quelconque de l'intervalle, soit t_0, on obtient l'inégalité

$$\frac{I_0'^2}{2\sqrt{I_0}} + 2\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{\sqrt{I_0}} - 4h\sqrt{I_0} \geqq 2\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{\sqrt{I_1}} - 4h\sqrt{I_1}.$$

Si l'on égale les deux membres de cette inégalité, on obtient une équation du second degré en $\sqrt{I_1}$; désignons par α la racine positive de cette équation pour $h > 0$, la racine finie pour $h = 0$, et la plus petite des deux racines positives pour $h < 0$: la valeur I_1 du minimum est supérieure ou égale au carré α^2.

Il résulte que les trois distances mutuelles ne peuvent être simultanément arbitrairement petites. D'une façon précise, si à un instant de l'intervalle considéré deux des trois distances mutuelles sont inférieures à la longueur L, la troisième est inférieure à 2L, et l'on a

$$I < 6 M^2 L^2 \qquad \text{et par suite} \qquad \alpha^2 < 6 M^2 L^2.$$

Donc, *dans tout l'intervalle de première sorte considéré et dans tout l'intervalle consécutif, deux au moins des trois distances mutuelles sont supérieures ou égales à la longueur* (¹)

$$l_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{6}M}.$$

Si h est positif ou nul, ou si h est négatif et que la durée du mouvement se compose seulement de deux intervalles de première sorte, on pourra toujours choisir pour t_0 l'instant initial du mouvement, et obtenir ainsi *une longueur à laquelle deux distances mutuelles sont à chaque instant supérieures, de $t = -\infty$ à $t = +\infty$, quand les trois constantes des aires ne sont pas nulles.*

Limite supérieure de la vitesse d'un corps dont les distances aux deux autres sont supérieures ou égales à l_1. — Dans la même hypothèse $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 > 0$, M. Sundman limite en fonction algébrique des constantes des forces vives et des aires et des valeurs initiales des quantités I et $\frac{dI}{dt}$, la vitesse de l'un des corps dont les distances aux deux autres sont supérieures ou égales à l : M. Sundman raisonne par l'absurde pour obtenir cette limitation, le raisonnement qui suit est plus voisin de celui de M. Hadamard.

D'après le résultat précédent, à chaque instant d'un intervalle de première sorte, deux distances mutuelles au moins sont supérieures

(¹) On peut évidemment dans cette formule remplacer la somme $m_1 + m_2 + m_3 = M$ par la plus grande des trois masses m_1, m_2, m_3. En fait, la longueur l_1 ne coïncide pas tout à fait avec la longueur l donnée par M. Sundman.

ou égales à la longueur $l_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{6M}}$; nous allons limiter la vitesse du corps où elles aboutissent. Si à l'instant considéré la troisième distance mutuelle est aussi supérieure ou égale à l_1, il est clair que toutes les vitesses relatives sont bornées par l'équation des forces vives.

Admettons donc que la troisième distance mutuelle est inférieure à la longueur l_1, donc inférieure aux deux autres, et introduisons les notations du n° 3. Considérons l'équation

$$(5) \quad \rho'' = -M\rho\left(\frac{a_1}{r_{23}^3} + \frac{a_2}{r_{13}^3}\right) + a_1 a_2 M \frac{Sx\xi}{\rho}\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right) + \frac{S(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2}{\rho^3},$$

et proposons-nous de déterminer une limite supérieure de la distance r, fixe comme la longueur l_1, mais plus petite, et telle que le second membre de l'équation (5) soit de la forme $\frac{b}{\rho^2}$, b désignant une fonction bornée quand la distance r est inférieure à cette limite supérieure. D'après des développements en série classiques, les premier et deuxième termes de l'équation (5) seront de la forme requise si le quotient $\frac{r}{\rho}$ est inférieur à un nombre fixe inférieur à 1, c'est-à-dire, selon des considérations de géométrie élémentaire, si la distance r est inférieure à une longueur fixe l_2 inférieure à $\frac{2l_1}{\sqrt{5}}$: la distance ρ sera nécessairement alors supérieure à $\frac{2l_1}{\sqrt{5}}$, *a fortiori* à l_2. D'autre part, d'après les formules (10) et les intégrales des aires, on peut écrire à l'instant considéré l'équation

$$(85) \qquad \eta\zeta' - \zeta\eta' = \frac{M}{(m_1 + m_2)m_3}\lambda + b\sqrt{r}$$

et les deux équations analogues. Par suite, le second membre de l'équation (5) est de la forme

$$\frac{b}{\rho^2} + \frac{M^2}{(m_1 + m_2)^2 m_3^2} \frac{S(\lambda + b\sqrt{r})^2}{\rho^3} = \frac{b}{\rho^2},$$

si r est inférieur à ρ, et puisque ρ est supérieur à l_2. Au total l'équation (5) est à un instant de l'intervalle considéré de la forme

$$\rho'' = \frac{b}{\rho^2},$$

pourvu que la distance r soit inférieure à la longueur fixe l_2.

En multipliant l'équation précédente par $2\rho'$, et en intégrant l'équation obtenue, on voit que dans tout intervalle de temps compris dans l'intervalle de première sorte considéré, et où l'une des distances mutuelles, r, reste inférieure à l_2, le carré de la dérivée ρ' ne peut varier que d'une quantité bornée, au moins si cette dérivée ne s'annule pas. D'ailleurs, si à un instant la dérivée ρ' s'annule, en prenant cet instant comme nouveau point de départ de l'intégration, on voit que la dérivée ρ' reste bornée jusqu'à un autre zéro, ou jusqu'à ce que la distance r devienne égale à l_2, ou jusqu'à l'extrémité de l'intervalle.

Par conséquent, si pendant tout l'intervalle de première sorte considéré les trois distances mutuelles sont supérieures à la longueur l_2, toutes les vitesses sont bornées par l'équation des forces vives. Si l'intervalle de première sorte considéré se compose d'intervalles où les trois distances mutuelles sont supérieures à la longueur l_2, et d'intervalles où l'une de ces trois distances est inférieure à la longueur l_2, les vitesses sont bornées dans les premiers intervalles partiels par l'équation des forces vives, et dans les seconds la dérivée ρ' correspondante est bornée par comparaison avec les instants les séparant des premiers, ou parce qu'elle s'y annule. Si enfin pendant tout l'intervalle de première sorte l'une des distances mutuelles, toujours la même, est inférieure à l_2, la dérivée ρ' est bornée à l'instant du minimum de la fonction I, puisque la dérivée

$$\mathrm{I}' = 2\frac{(m_1+m_2)\,m_3}{\mathrm{M}}\rho\rho' + 2\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}rr'$$

est nulle à cet instant, que ρ est supérieur à l_2, r inférieur à l_2, et puisque le produit rr'^2 est borné par l'équation des forces vives : donc la dérivée ρ' est encore bornée dans tout l'intervalle de première sorte.

D'ailleurs, d'après l'équation (85) et les deux équations analogues, les trois quantités $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ sont bornées quand la distance r est inférieure à l_2 ; et d'après l'équation

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \rho'^2 + \frac{\mathrm{S}(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2}{\rho^2}$$

la quantité $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$ est elle-même bornée, quand de plus ρ est supérieur à l_2 et ρ' borné. Donc *la vitesse d'un corps dont les distances* *aux deux autres sont supérieures ou égales à la longueur l_1 est bornée dans tous les cas pendant tout l'intervalle de première sorte considéré.*

18. Intervalles de première sorte : $\lambda = \mu = \nu = 0$. — Considérons encore un intervalle de temps de première sorte, et supposons maintenant nulles les trois constantes des aires. C'est là une condition nécessaire pour que les trois corps puissent se choquer, et que le minimum de la fonction I limitant l'intervalle considéré soit nul, mais ce n'est pas une condition suffisante. D'après le théorème de Dziobek, le mouvement est plan ou rectiligne : deux autres conditions dans le mouvement plan, une dans le mouvement rectiligne sont encore nécessaires. Ces nouvelles conditions [1] sont analytiques, mais non plus algébriques par rapport aux coordonnées et projections des vitesses initiales : il semble qu'il doive résulter *a priori* de ce caractère que la fonction I, et par conséquent deux distances mutuelles, ne puissent être limitées inférieurement en fonction algébrique des conditions initiales.

Limitation des vitesses. — En ce qui concerne les vitesses, il est clair que, quand le temps croît indéfiniment, les trois vitesses sont bornées par l'équation des forces vives quand la constante h est positive, et que le mouvement est hyperbolique ou hyperbolique-parabolique. D'autre part, quand la constante h est nulle, les trois vitesses tendent vers zéro dans le mouvement parabolique; et, quand la constante h est négative, dans le mouvement parabolique-elliptique, la vitesse du corps qui s'éloigne indéfiniment des deux autres tend aussi vers zéro. Mais, dans le mouvement hyperbolique-elliptique, quel que soit le signe de la constante des forces vives, la vitesse du corps qui s'éloigne indéfiniment des deux autres tend vers une valeur limite finie : il est possible que de même cette valeur limite ne puisse être limitée supérieurement en fonction algébrique des conditions initiales.

Nous pouvons remarquer toutefois que la limitation que nous avons établie quand une au moins des constantes λ, μ, ν est différente de zéro, de la vitesse d'un corps situé à des distances des deux autres supérieures ou égales à la longueur l_1, est encore valable quand les

---

[1] *Cf. Bulletin astronomique*, t. XXXV, 1918, p. 376, 378, 380.

trois constantes λ, μ, ν sont nulles, pour la vitesse d'un corps dont les distances aux deux autres sont supérieures à une longueur fixe quelconque. Or, quand la fonction I est supérieure à la quantité $6M^2L^2$, deux distances mutuelles au moins sont supérieures à la longueur L. Si donc *le minimum de la fonction* I *est plus grand que zéro, et si l'on considère la valeur* I_1 *comme connue, on déduit encore une limite supérieure de la vitesse d'un corps dont les distances aux deux autres sont supérieures à* $\frac{\sqrt{I_1}}{\sqrt{6}M}$.

Si au contraire le minimum de la fonction I est nul, on peut limiter la vitesse d'un corps dont les distances aux deux autres sont supérieures à une longueur donnée par comparaison avec l'instant initial (qui ne saurait être l'instant du minimum) pendant tout l'intervalle de première sorte qui serait la durée du mouvement réel, au sens physique du mot. Si ce mouvement est prolongeable analytiquement au delà de l'instant du choc des trois corps pendant un nouvel intervalle de première sorte, nous ne savons rien dans ce nouvel intervalle de la vitesse de l'un des corps supposé à distance des deux autres supérieure à une longueur donnée, mais un tel prolongement ne correspond à aucune réalité physique.

19. Intervalles de deuxième et de troisième sorte. — *Limite supérieure de la vitesse d'un corps dont les distances aux deux autres sont supérieures à une longueur fixe, quand la fonction* I *est bornée.* — Considérons maintenant un intervalle de deuxième ou de troisième sorte : en supposant à un instant de cet intervalle les distances d'un corps aux deux autres, soit r_{23}, r_{13}, supérieures à une longueur fixe quelconque et la fonction I bornée, nous allons limiter la vitesse du corps de masse m_3 : *la limitation obtenue sera valable, que les constantes des aires soient nulles ou différentes de zéro.*

En premier lieu, si dans un intervalle de deuxième sorte la valeur du maximum de la fonction I est I_2, à l'instant t_2, et si l'on applique l'équation (84) entre l'instant t_2 et un instant quelconque t de l'intervalle, on obtient l'inégalité

$$\frac{I'^2}{2\sqrt{I}} + 2\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{\sqrt{I}} - 4h\sqrt{I} \leqq 2\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{\sqrt{I_2}} - 4h\sqrt{I_2},$$

où les trois termes du premier membre sont positifs, et qui limite [1] en valeur absolue la dérivée I'. Donc, si la fonction I présente un nombre fini ou infini de maxima successifs, *tous bornés*, à tout instant de l'un des intervalles de deuxième sorte correspondants, la dérivée I' est de même bornée.

Considérons en second lieu un intervalle de troisième sorte où la fonction I, quand le temps croît indéfiniment, tend vers une limite finie par valeurs nécessairement inférieures à cette limite, puisque la fonction I ne peut posséder de maximum. La dérivée seconde I'', qui, d'après l'équation de Lagrange, est égale à $2U + 4h$, est supérieure à $4h$, donc bornée inférieurement en valeur algébrique : il résulte d'un théorème [2] de M. Hadamard que la dérivée première I' tend vers zéro. En appliquant de même l'équation (84) entre la valeur infinie du temps et un instant quelconque de l'intervalle de troisième sorte, on limite encore la dérivée I' en fonction de la valeur limite de la fonction I.

D'autre part, si I' est borné, et si les distances aux deux autres de la masse m_3, sont supérieures à une longueur fixe, la vitesse de cette masse est de même bornée. En effet, si la distance r_{12} est aussi supérieure à une longueur fixe, toutes les vitesses sont bornées immédiatement par l'équation des forces vives. Supposons donc la distance $r_{12} = r$ arbitrairement petite. Dans l'expression de la dérivée I'

$$I' = 2\frac{(m_1+m_2)m_3}{M}\rho\rho' + 2\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}rr',$$

ρ est supérieur à une longueur fixe, r est arbitrairement petit et rr'^2 est borné par l'équation des forces vives : donc ρ' est lui-même borné.

---

(1) A l'instant du maximum dans l'intervalle de deuxième sorte, ou quand le temps croît indéfiniment dans l'intervalle de troisième sorte considéré, la quantité $2U + 4h$ est négative ou nulle, les trois distances mutuelles sont bornées inférieurement en valeur absolue, et par suite ni la valeur I_2 ni la valeur limite de la fonction I ne peuvent être arbitrairement petites.

(2) Dans le cas général ce théorème s'énonce comme il suit : *Si une fonction y d'une variable x tend vers une limite finie quand x croît indéfiniment, et si la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dx^2}$ est bornée, la dérivée première $\frac{dy}{dx}$ tend vers zéro.* La démonstration est bien connue, et, en s'y reportant, on voit qu'*il suffit* pour que le théorème soit exact *que la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dx^2}$ soit bornée inférieurement ou bornée supérieurement.*

Comme précédemment, r et ρ' étant bornés, et ρ supérieur à une longueur fixe, la quantité $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$ est bornée par l'équation

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \rho'^2 + \frac{S(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2}{\rho^2}.$$

D'où le résultat suivant : *Si la fonction* I *possède une infinité de maxima successifs, tous bornés, ou si la fonction* I *tend quand le temps croît indéfiniment vers une limite inférieure à une quantité donnée, à tout instant de l'un des intervalles de deuxième ou de troisième sorte correspondants où les distances r_{23}, r_{13} sont supérieures à une longueur fixe quelconque, la vitesse de la masse m_3 est bornée.*

Limite supérieure de la vitesse d'un corps dont les distances aux deux autres sont supérieures à une longueur fixe, mais assez grande, quand la fonction I *est supposée tantôt bornée, tantôt infiniment grande.* — Mais le résultat précédent subsiste si dans une infinité d'intervalles de deuxième sorte successifs les maxima de la fonction I ne sont pas bornés dans leur ensemble, comme on doit l'admettre s'il existe des mouvements rentrant dans le troisième cas que nous avons distingué pour $h < 0$ (n° 14). Et le même résultat subsiste encore si l'on considère une infinité de mouvements aboutissant chacun à un intervalle de troisième sorte, si les valeurs limites de la fonction dans ces intervalles ne sont pas bornées dans leur ensemble. Toutefois la longueur fixe à laquelle devront être supérieures deux des distances mutuelles ne pourra plus être quelconque, mais devra être choisie assez grande.

En effet, dans l'intervalle de deuxième ou de troisième sorte considéré, envisageons l'*intervalle partiel*, qui pourrait être l'intervalle tout entier, où la fonction I est supérieure à la quantité $2m^2L^2$, m désignant la plus petite des trois masses et L une longueur donnée. Tous les instants de l'intervalle total où deux des trois distances mutuelles sont supérieures à la longueur L sont nécessairement compris dans l'intervalle partiel ainsi défini. Réciproquement, à chaque instant de cet intervalle partiel, on peut affirmer que deux distances mutuelles sont supérieures, non pas à la longueur L, mais seulement à la longueur $\frac{mL}{\sqrt{3}M}$. Or, le second membre de l'équation des forces vives

$$\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + h$$

doit être positif ou nul; par suite, si L est assez grand, il faut que l'une des trois distances mutuelles, la plus petite et toujours la même, r suivant les notations du n° 3, soit telle que l'on ait

$$\frac{M^2}{r} + \frac{M^3\sqrt{3}}{mL} + h > 0 \qquad \text{et} \qquad r < \frac{M^2}{-h - \frac{M^3\sqrt{3}}{mL}}.$$

Il résulte que dans tout l'intervalle partiel considéré les quantités rr', $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ sont bornées par l'équation des forces vives, et que l'équation (5) est de la forme

$$(86) \qquad \rho'' = -M\frac{1+\eta}{\rho^2},$$

η désignant une quantité inférieure à 1 en valeur absolue si la longueur L a été choisie assez grande : alors ρ' varie constamment dans le même sens.

A l'instant du maximum de la fonction I, si l'intervalle total est de deuxième sorte, la dérivée I' est nulle, et par suite ρ' est borné. Dès lors, en multipliant l'équation (86) par $2\rho'$, et en intégrant l'équation obtenue à partir de l'instant du maximum de la fonction I, ou à partir de l'instant où ρ' s'annule, on voit que la dérivée ρ' est bornée dans tout l'intervalle partiel considéré. Si l'intervalle total est de troisième sorte, on démontre comme précédemment que la dérivée I' tend vers zéro quand le temps croît indéfiniment; il résulte que la dérivée ρ' finit par être bornée, et par suite qu'elle est encore bornée dans tout l'intervalle partiel considéré.

Comme précédemment encore, on déduit que *la quantité* $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$ *est bornée dans tout l'intervalle partiel où la fonction* I *est supérieure à la quantité* $2m^2L^2$.

Limite inférieure de I *pour* $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 > 0$. — Quand les trois constantes des aires ne sont pas nulles, on déduit des limitations de la vitesse obtenues dans les deux cas précédents une limite inférieure de la fonction I. En effet, considérons un intervalle de deuxième ou de troisième sorte limité par un minimum de la fonction I borné ([1]), soit inférieur à $2m^2L^2$, L désignant la longueur précédemment déterminée. Si dans cet intervalle la fonction I n'est pas bornée, dans l'intervalle partiel où cette fonction est supérieure à $2m^2L^2$, r, rr' et ρ' sont bornés, et à l'instant extrême où I est égal à $2m^2L^2$, ρ aussi est borné, et par suite la fonction I et la dérivée I'. En appliquant l'équation (84) entre cet instant extrême et l'instant t_1 du minimum I_1 de I, on obtient l'inégalité

$$\frac{I'^2}{2\sqrt{I}} + 2\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{\sqrt{I}} - 4h\sqrt{I} \gtrless 2\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{\sqrt{I_1}} - 4h\sqrt{I_1};$$

d'où résulte comme précédemment une limite inférieure de I_1 dans l'intervalle de deuxième ou de troisième sorte considéré. Si, au contraire, pendant cet intervalle la fonction I est bornée, il suffit d'appliquer la même inégalité entre l'instant du maximum ou l'instant $t = \pm\infty$, et l'instant du minimum de la fonction I, pour obtenir de même une limite inférieure du minimum I_1.

Donc, *dans tout mouvement où les trois constantes des aires ne sont pas nulles*, que ce mouvement comporte ou non des intervalles de deuxième ou de troisième sorte, *on peut calculer une longueur à laquelle deux distances mutuelles sont à chaque instant supérieures, de $t = -\infty$ à $t = +\infty$*. Ajoutons enfin que toutes les limites obtenues sont des fonctions algébriques des constantes des forces vives et des aires, et des valeurs à un instant des deux quantités I et I'.

CHAPITRE VI.

DEUX THÉORÈMES RELATIFS AU PROBLÈME DES TROIS CORPS.

20. Nous allons démontrer maintenant deux théorèmes que j'ai énoncés dans deux Notes aux *Comptes rendus*.

([1]) Remarquons que les minima de la fonction I ne peuvent finir par être tous arbitrairement grands, car alors cette fonction tendrait vers l'infini avec le temps, et d'après l'étude des nos 12 et 13 devrait au contraire finir par croître constamment.

Il résulte [1] immédiatement de l'équation de Lagrange et Jacobi (2) que, dans le problème des n corps *quand le temps croît indéfiniment, les n corps ne peuvent tendre tous l'un vers l'autre*. En effet dans cette hypothèse la fonction U tendrait vers $+\infty$ avec t, et d'après l'équation de Lagrange et Jacobi la dérivée seconde $\frac{d^2}{dt^2}\Sigma m_i m_k r_{ik}^2$, et par suite la dérivée première $\frac{d}{dt}\Sigma m_i m_k r_{ik}^2$ et la fonction $\Sigma m_i m_k r_{ik}^2$ devraient tendre de même vers $+\infty$: ce qui est incompatible avec cette condition que les $\frac{n(n-1)}{2}$ distances r_{ik} tendent vers zéro.

Le premier théorème est une extension de la remarque précédente.

THÉORÈME A. — *Dans le problème des trois corps, quand le temps croît indéfiniment, il est impossible que deux corps tendent l'un vers l'autre, le troisième corps restant à distance des deux premiers supérieure à une longueur fixe* [2].

En effet employons les notations du n° 3 : la distance $r_{12}=r$ tend vers zéro quand le temps croît indéfiniment, et les distances r_{13}, r_{23} et ρ restent supérieures à une longueur fixe.

Calculons la dérivée seconde $\frac{d^2 r^2}{dt^2}$. D'après l'expression (9), l'équation de Lagrange (2) peut s'écrire

$$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{d^2 r^2}{dt^2} = 2\mathrm{U} + 4h - \frac{(m_1+m_2)m_3}{\mathrm{M}}\frac{d^2\rho^2}{dt^2},$$

ou, puisqu'on a

$$\frac{d^2\rho^2}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\mathrm{S}\xi^2 = 2\mathrm{S}\xi\xi'' + 2\mathrm{S}\xi'^2,$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\frac{d^2 r^2}{dt^2} = 2\mathrm{U} + 4h - 2\frac{(m_1+m_2)m_3}{\mathrm{M}}(\mathrm{S}\xi\xi'' + \mathrm{S}\xi'^2). \tag{87}$$

Dans notre hypothèse la fonction U tend vers $+\infty$, et l'expression

$$\mathrm{S}\xi\xi'' = -\mathrm{M}\rho^2\left(\frac{a_1}{r_{23}^3} + \frac{a_2}{r_{13}^3}\right) + a_1 a_2 \mathrm{M}\,\mathrm{S}x\xi\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right)$$

---

[1] *Cf. Bulletin astronomique*, t. XXXV, 1918, p. 331, note 2.

[2] *Comptes rendus*, t. 157, 1913, p. 1400. L'hypothèse qui fait l'objet de ce théorème est voisine d'une hypothèse émise par M. Painlevé (*cf. Leçons de Stockholm*, p. 585).

est bornée : la quantité $x\xi + y\eta + z\zeta$ est en effet inférieure ou égale en valeur absolue à $r\rho$, r tend vers zéro, et d'autre part les quotients $\frac{\rho}{r_{23}}, \frac{\rho}{r_{13}}$ tendent vers 1, et les quotients $\frac{1}{r_{23}}, \frac{1}{r_{13}}$ sont bornés.

Je dis que la quantité $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$ est bornée aussi (1). En effet, d'après les formules (10), les trois expressions $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ sont de la forme $b\sqrt{r}$; donc ces trois expressions tendent vers zéro, et, d'après les intégrales des aires, les trois expressions $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ tendent, au facteur $\frac{(m_1 + m_2)m_3}{M}$ près, vers les trois constantes des aires λ, μ, ν. Dès lors, l'équation (5) est de la forme

$$\rho'' = \frac{b}{\rho^2}, \tag{88}$$

b désignant une quantité bornée quand le temps croît indéfiniment, puisque le quotient $\frac{1}{\rho}$ est borné. Si l'on multiplie l'équation (88) par $2\rho'$ et qu'on intègre l'équation obtenue par rapport à la variable t, de l'instant arbitraire t_0 à l'instant t $(t_0 < t)$, on obtient

$$\rho'^2 - \rho_0'^2 = b\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0}\right),$$

b désignant de même une quantité bornée : de sorte que la dérivée ρ' est bornée, du moins tant qu'elle ne s'annule pas. Si la dérivée ρ' s'annule à un instant, il suffit de prendre cet instant comme nouveau point de départ de l'intégration pour limiter la dérivée ρ' dans un second intervalle, jusqu'à son prochain zéro. Et ainsi de suite : la

(1) Cette proposition peut être considérée comme un cas particulier de la proposition de M. Sundman que nous rappelons plus haut : dans un mouvement dont les conditions initiales sont données, et où les trois constantes des aires ne sont pas nulles à la fois, à tout instant où les distances d'un corps aux deux autres sont supérieures à une certaine longueur calculable en fonction algébrique des conditions initiales, la vitesse de ce corps est inférieure à une certaine vitesse calculable de même en fonction des conditions initiales. Dans l'hypothèse où les trois constantes des aires sont nulles, et dont nous avons examiné les différents cas dans la discussion des nos 18 et 19, la vitesse d'un corps situé à des distances des deux autres limitées inférieurement, est de même inférieure à une vitesse calculable en fonction algébrique des conditions initiales, ou bien tend vers une limite finie. On peut en conclure que dans l'hypothèse figurant dans l'énoncé du théorème A, la quantité $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$ est bornée ou finie, et la démonstration est terminée par là. En fait, nous reprenons ici une partie des raisonnements de notre discussion précédente.

dérivée ρ' est bornée par une même quantité fixe dans tous les intervalles successifs. Donc, dans tous les cas, la dérivée ρ' est bornée quand le temps croît indéfiniment. De l'identité de Lagrange on tire d'ailleurs l'équation

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \rho'^2 + \frac{S(\eta\zeta' - \zeta\eta')^2}{\rho^2},$$

d'où résulte que la somme $\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$ est bornée.

Dès lors, dans l'hypothèse de l'énoncé, le second membre de l'équation (87) tend vers $+\infty$; donc la dérivée seconde $\frac{d^2 r^2}{dt^2}$, et par suite la dérivée première $\frac{dr^2}{dt}$ et la fonction r^2 tendent de même vers $+\infty$; condition incompatible avec cette condition que la distance r tend vers zéro. Ce qui démontre [1] le théorème A.

La démonstration précédente et le théorème A sont également valables, soit que dans l'hypothèse les deux masses m_1 et m_2 tendent vers l'autre sans se choquer, soit que ces deux masses se choquent une infinité de fois.

---

[1] On peut démontrer facilement aussi le théorème A avec les notations que M. Levi-Civita a employées d'abord dans le problème restreint (*Acta mathematica*, t. 36, 1906, p. 305), qu'il a étendues ensuite au problème plan général (*Rendiconti dei Lincei*, vol. XXIV, 1915, *passim*), puis au problème des trois corps dans l'espace (*Acta mathematica*, t. 42, 1918, p. 99). C'est dans l'équation

$$\frac{\partial W}{\partial C} = t + \text{const.}$$

figurant à la page 325 du premier Mémoire cité que l'hypothèse, dont le théorème A énonce l'impossibilité, fait apparaître une contradiction. En effet la fonction $W(\xi, \eta, \alpha, C)$ contenue dans cette équation est définie comme solution de l'équation aux dérivées partielles figurant à la page 314 du même Mémoire, et, d'après les théorèmes généraux, la constante C étant fixée, est holomorphe au voisinage des valeurs $\xi = \eta = 0$. Dans l'hypothèse de l'énoncé, où la distance r et par suite les variables ξ, η tendent vers zéro quand le temps croît indéfiniment, cette solution ne cesse pas d'être valable pour représenter le mouvement. Il est visible d'ailleurs sur l'équation aux dérivées partielles que dans le développement de la fonction W suivant les puissances de ξ et η, la constante C n'apparaît pas avant les termes du troisième degré : donc au premier membre de l'équation proposée $\frac{\partial W}{\partial C}$ devrait tendre vers zéro, tandis que le second membre croîtrait indéfiniment.

Comme l'indique discrètement M. Levi-Civita, de ce que les premiers termes du développement de $\frac{\partial W}{\partial C}$ suivant les puissances de ξ et η sont précisément du troisième degré, résulte qu'au voisinage d'un choc les coordonnées x et y sont par rapport au temps des infiniment petits d'ordre $\frac{2}{3}$.

Notre second théorème est le suivant :

THÉORÈME B. — *Dans le problème des trois corps, tout choc de deux corps a lieu dans le plan du maximum des aires* (¹).

En effet, employons les notations du n° 3, m_1 et m_2 étant les deux masses qui se choquent à l'instant $t = 0$. Nous supposons que les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois, c'est-à-dire que le plan du maximum des aires existe, et nous prenons ce plan pour plan xOy : les deux premières constantes des aires sont nulles, et la troisième, ν, est différente de zéro.

Or, quand le temps t tend vers l'instant du choc, $t = 0$, il résulte des formules (10) que les trois expressions $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ tendent vers zéro (²). Dès lors, en substituant à toutes les quantités figurant dans les intégrales des aires leurs valeurs limites à l'instant du choc, on obtient

$$\eta_0\zeta'_0 - \zeta_0\eta'_0 = 0, \qquad \zeta_0\xi'_0 - \xi_0\zeta'_0 = 0,$$
$$\frac{(m_1 + m_2)m_3}{M}(\xi_0\eta'_0 - \eta_0\xi'_0) = \nu.$$

Dans les deux premières équations, le déterminant $\xi_0\eta'_0 - \eta_0\xi'_0$ ne peut être nul, puisque dans la troisième ν est différent de zéro; il est nécessaire que ζ_0 et ζ'_0 soient nuls.

Donc, à l'instant du choc, le troisième corps et par conséquent *les trois corps sont situés dans le plan du maximum des aires.*

D'autre part, au voisinage du choc, les trois coordonnées ξ, η, ζ sont développables suivant les puissances de $t^{\frac{1}{3}}$, et les premiers termes du développement de ξ par exemple sont en général

$$\xi = \xi_0 + \xi'_0 t + K t^2 + K_1 t^3 + K_2 t^{\frac{10}{3}}, \ \ldots,$$

K, K_1, K_2, ... désignant des constantes; donc *la trajectoire du troisième corps, ou du centre de gravité des deux premiers, est tangente à l'instant du choc au plan du maximum des aires.* D'ailleurs il est visible dans la

(¹) J'ai énoncé ce théorème dans une Note des *Comptes rendus* (t. 168, 1919, p. 81). Comme dans tout ce qui précède, nous plaçons l'origine des coordonnées au centre de gravité commun.

(²) M. Sundman a donné au voisinage du choc une limite supérieure des trois expressions considérées plus précise que la quantité $b\sqrt{r}$, mais qui nous est inutile ici (*cf. Acta mathematica*, t. 36, 1912, p. 124).

troisième des équations (3), que la dérivée seconde $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$, qui ne peut être par rapport à l'infiniment petit principal t du même ordre que la fonction ζ, est de l'ordre de $\frac{r^2}{\rho^4}$, soit $\frac{4}{3}$ au moins; donc la coordonnée ζ est un infiniment petit d'ordre $\frac{10}{3}$ au moins.

Enfin, si le mouvement comporte plusieurs chocs de deux corps, aux instants de ces chocs successifs, le moment par rapport au centre de gravité commun de la quantité de mouvement du troisième corps est proportionnel à la somme des masses des deux corps qui se choquent.

Ajoutons quelques corollaires au théorème précédent.

Si dans un mouvement les trois constantes des aires sont nulles, ce mouvement est plan d'après le théorème de Dziobek. Si l'on prend le plan du mouvement comme plan xOy, à l'instant d'un choc des deux masses m_1 et m_2, l'intégrale des aires se réduit à

$$\xi\eta' - \eta\xi' = 0.$$

Donc *la tangente à la trajectoire du troisième corps passe au centre de gravité commun et par suite au point où a lieu le choc.*

En particulier, les deux dérivées ξ' et η' peuvent être nulles à l'instant du choc. Alors dans le système différentiel holomorphe formé (1) par M. Sundman au voisinage de l'instant du choc, $t = 0$, ni les équations, ni les conditions initiales à cet instant ne changent si l'on change (2) t en $-t$. Donc, de même que les instants où les six projections des vitesses x', y', z', ξ', η', ζ' s'annulent, l'instant d'un tel choc possède cette propriété que les trois corps ont avant et après, à deux instants équidistants, la même position relative. La trajectoire du troisième corps présente un point d'arrêt à l'instant du choc, puis revient sur elle-même, mais la tangente au point d'arrêt passe encore au point où se choquent les deux autres corps, car l'expression $\xi\eta'' - \eta\xi''$ s'annule avec t. Réciproquement, si un mouvement présente un instant où les vitesses s'annulent, ou un choc de deux corps à l'instant duquel la vitesse du troisième corps par rapport au centre de gravité

(1) *Acta mathematica*, t. 36, 1912, p. 128 et 140.

(2) Et par conséquent, si l'on change aussi les quantités x', y', z', r', ξ', η', ζ', u en $-x'$, $-y'$, $-z'$, $-r'$, $-\xi'$, $-\eta'$, $-\zeta'$, $-u$.

des deux premiers est nulle, les trois constantes des aires sont nulles, et le mouvement est plan.

On peut être amené à considérer enfin une suite d'instants où la distance de deux corps tend vers zéro : voici comment. Soit d'une façon générale à étudier quand le temps croît indéfiniment un mouvement où les trois constantes des aires ne sont pas nulles. D'après une proposition de M. Sundman que nous avons étudiée précédemment (Chap. V), à chaque instant deux distances mutuelles sont supérieures à une longueur fixe ; à chaque instant une seule des distances mutuelles, qui n'est pas nécessairement toujours la même, peut être arbitrairement petite.

Par suite, et compte tenu du théorème A, les différentes circonstances possibles au point de vue des minima des distances mutuelles, quand le temps croît indéfiniment, sont les suivantes :

1° Les distances mutuelles restent toutes trois supérieures à une longueur fixe : tel est le cas des solutions périodiques et sans chocs, et des solutions asymptotiques à ces solutions périodiques;

2° Le mouvement présente une infinité de chocs de deux corps : les mouvements des trois corps présentant un plan de symétrie (et non plans pour que les trois constantes des aires ne soient pas nulles) offrent un exemple de cette seconde circonstance [1] : si la constante des forces vives est négative, les deux corps symétriques se choquent une infinité de fois, leur distance a une infinité de minima nuls. Le mouvement rectiligne de trois corps offre un exemple analogue, mais les trois constantes des aires y sont nulles;

3° Deux des trois corps deviennent une infinité de fois arbitrairement voisins sans se choquer. M. Andrade a obtenu [2] cette troisième circonstance dans le mouvement plan d'un point matériel attiré en raison inverse du carré de la distance par deux points fixes. Ce dernier problème est une dégénérescence du problème restreint, qui est lui-même une dégénérescence du problème général des trois corps; il existe par suite des solutions de ce problème général qui présentent cette troisième circonstance;

---

(1) *Cf. supra*, p. 86; et *Bulletin astronomique*, 2e série, *Mémoires*, t. I, p. 188.
(2) *Cf. Journal de l'École Polytechnique*, 60e cahier, p. 55.

4° Ou enfin *a priori* les deux circonstances précédentes peuvent se présenter simultanément, ou encore les deux corps qui se choquent ou deviennent voisins ne sont pas toujours les mêmes.

C'est la troisième circonstance que nous avons considérée déjà au n° 10, et que nous voulons de nouveau considérer ici.

Aux instants des minima successifs et arbitrairement petits de la distance mutuelle $r_{12} = r$, les trois expressions $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ sont arbitrairement petites, et d'une façon précise, selon les formules (10), sont en valeur absolue inférieures au produit de la fonction $\sqrt{r}$ par une même quantité fixe pour tous les minima. Par suite, si l'on prend comme plan xOy le plan du maximum des aires, à l'instant d'un minimum, les équations des aires sont de la forme

$$\frac{(m_1+m_2)m_3}{\mathrm{M}}(\eta\zeta' - \zeta\eta') = b_1\sqrt{r}, \qquad \frac{(m_1+m_2)m_3}{\mathrm{M}}(\zeta\xi' - \xi\zeta') = b_2\sqrt{r},$$
$$\frac{(m_1+m_2)m_3}{\mathrm{M}}(\xi\eta' - \eta\xi') = \nu + b_3\sqrt{r},$$

b_1, b_2, b_3 désignant trois quantités ayant en valeur absolue une même limite supérieure pour tous les minima successifs. On tire de ces trois équations les deux combinaisons

$$\nu\zeta + (b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta)\sqrt{r} = 0,$$
$$\nu\zeta' + (b_1\xi' + b_2\eta' + b_3\zeta')\sqrt{r} = 0,$$

qui expriment qu'*à l'instant du minimum la droite joignant le troisième corps et le centre de gravité des deux premiers, et d'autre part la direction de leurs vitesses font avec le plan du maximum des aires des angles inférieurs à $k\sqrt{r}$, k désignant une quantité positive fixe.*

Quand les trois constantes des aires sont nulles, et que l'on considère une suite de minima de l'une des distances mutuelles aux instants desquels les deux autres distances soient supérieures à une longueur fixe, l'équation des aires a aux mêmes instants la forme

$$\xi\eta' - \eta\xi' = b\sqrt{r},$$

si l'on prend le plan du mouvement pour plan xOy; cette équation limite supérieurement le moment de la vitesse du troisième corps par rapport au centre de gravité commun.