ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEORGES VALIRON

Recherches sur le théorème de M. Picard

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 38 (1921), p. 389-429
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1921_3_38__389_0>

RECHERCHES

SUR

LE THÉORÈME DE M. PICARD

PAR M. G. VALIRON

(Université de Strasbourg).

Les présentes recherches apportent une contribution à l'étude des relations entre la croissance d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé et la distribution des points en lesquels cette fonction prend une valeur déterminée. Elles se rattachent donc aux célèbres propositions démontrées par M. Picard dès 1880 et en particulier à la suivante, que j'appellerai *théorème général* de M. Picard :

Si une fonction $F(z)$ est régulière à l'extérieur d'un cercle $|z| = C$ et admet le point à l'infini pour point essentiel, elle prend une infinité de fois toute valeur a à l'extérieur de ce cercle, sauf peut-être une seule.

M. Borel donna des démonstrations des théorèmes de M. Picard sans faire appel aux propriétés de la fonction modulaire (1), il montra que ces propositions étaient liées à l'existence de relations entre la croissance du module maximum $M(r)$ d'une fonction entière, du module maximum $M'(r)$ de la dérivée et du maximum $A(r)$ de la partie réelle de la fonction pour $|z| = r$, et aux propriétés générales des fonctions croissantes. Il compléta en outre le théorème en montrant que, *lorsque* $F(z)$ *est une fonction entière, le nombre des zéros de la fonction* $F(z) - a$ *dans un cercle* $|z| \leqq r$ *est de l'ordre de grandeur du logarithme du module*

(1) *Voir* le Mémoire *Sur les zéros des fonctions entières* (*Acta mathematica*, t. XX) et les *Leçons sur les fonctions entières*.

maximum $M(r)$, *sauf peut-être pour une valeur de a*. Les démonstrations relatives au cas où $F(z)$ est d'ordre infini, seulement esquissées par M. Borel, furent complétées par M. Blumenthal [1].

Dans un Mémoire précédent [2], j'ai montré, en utilisant une méthode de M. Wiman, que les théorèmes de M. Borel pouvaient être notablement complétés, ce qui me conduisait à une démonstration un peu différente du théorème général de M. Picard. Dans une Note ultérieure [3], j'ai indiqué un nouveau mode de démonstration qui consiste à étudier les fonctions qui sont exceptionnelles au point de vue du théorème de M. Picard, et à mettre en évidence directement des points en lesquels ces fonctions prennent une valeur donnée. Cette méthode nouvelle a l'avantage de s'appliquer sans modification aux fonctions holomorphes dans un cercle et à croissance suffisamment rapide, ce qui, par une simple inversion, conduit à des propriétés des fonctions holomorphes dans un angle. C'est cette méthode que je me propose de développer ici.

Le premier Chapitre de ce Mémoire est consacré à l'établissement d'une formule fondamentale et à la démonstration directe du théorème général de M. Picard. Je montre que, si $F(z)$ ne prend pas la valeur o, les équations $F(z) = a$ ont dans le cercle $|z| \leqq r$ un nombre $n(r, a)$ de zéros supérieur au logarithme de $M(r)$ maximum du module de $F(z)$, sauf peut-être pour certains r.

Dans le second Chapitre, j'étudie à un point de vue analogue le théorème de M. Borel, pour des raisons de brièveté j'utilise dans cette étude les résultats de M. Blumenthal, bien qu'ils ne cadrent pas parfaitement avec la méthode employée. Je signalerai le résultat suivant : si $F(z)$ est régulière relativement à l'ordre $\rho(r)$, et si le nombre des zéros est d'ordre inférieur, le nombre des zéros de $F(z) - a$, $n(r, a)$, est égal à $r^{\rho(r)^{1+\delta(r)}}$, et il existe des amas de zéros dont le nombre est de cet ordre dans le voisinage des valeurs de z pour lesquelles

$$|F(z)| = M(r).$$

(1) *Voir* le Livre de M. BLUMENTHAL : *Principes de la théorie des fonctions entières d'ordre infini*.

(2) *Les théorèmes généraux de M. Borel dans la théorie des fonctions entières* (*Annales de l'École Normale*, 1920).

(3) *Comptes rendus*, t. 170, p. 167.

La troisième Partie est relative au cas des fonctions $G(z)$ holomorphes dans un cercle $|z| \leqq 1$ et qui sont d'ordre infini *positif* dans ce cercle, en ce sens que

$$\frac{\log_3 |G(z)|}{-\log(1-r)}$$

ne tend pas vers zéro. Je montre que le nombre $n(r, a)$ des zéros de $G(z) - a$ est aussi tel que

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log n(r, a)}{-\log(1-r)} > 0,$$

sauf peut-être pour une valeur a. En outre, lorsque la limite inférieure du rapport précédent est supérieure à 1 et que $G(z)$ est à croissance régulière, le nombre des zéros est encore connu dans les mêmes conditions que ci-dessus. Dans le cas général, pour obtenir un résultat précis, il faut introduire une majorante convenable du module maximum; j'ai obtenu le résultat suivant, que j'énonce pour une fonction holomorphe dans un angle :

Si la fonction $F(z)$ est holomorphe dans l'angle A,

$$-\sigma < \varphi < \sigma \qquad (z = re^{i\varphi}),$$

et si, dans un angle A', $-\sigma' \leqq \varphi \leqq \sigma'$, $\sigma' < \sigma$, intérieur à A, elle est d'ordre infini positif, on peut construire une majorante croissante $e^{\mu(r)}$ du module maximum de $F(z)$ pour $|z| = r$, $-\sigma' \leqq \varphi \leqq \sigma'$; l'ordre $\rho(r)$ des zéros de $F(z) - a$ intérieurs à A ne peut vérifier l'inégalité

$$r^{\rho(r)^{1+\gamma}} < \mu(rK) \qquad (\gamma > 0;\ K > 0)$$

que pour une seule valeur a.

Ces résultats s'étendent-ils à toutes les fonctions d'ordre infini? Comment se modifient-ils dans le cas de l'ordre fini? La méthode exposée ici ne semble pas permettre de répondre à ces questions, mais elle a l'avantage de mettre en évidence, d'une façon très nette et très directe, la relation profonde entre la croissance du module et la position des zéros, c'est pourquoi j'ai cru utile de la développer avec quelques détails (1).

(1) J'ai donné des indications sur la méthode et les résultats dans une Communication

I. — Le théorème de M. Picard.

I. Les démonstrations du Mémoire précédent (*Annales de l'École Normale*, 1920; je désignerai dorénavant ce Mémoire par V) reposaient sur les inégalités (5) et (6) (V, p. 228) et (19) (V, p. 242), c'est-à-dire sur l'expression de la valeur approchée de la fonction entière $f(z)$ sur un arc de cercle $|z|=r$ entourant les points en lesquels le module de la fonction est voisin de son maximum $M(r)$. Je généraliserai d'abord ces égalités en donnant des expressions valables non plus seulement sur un arc, mais dans tout un domaine entourant le point z_0.

Les nombres z et z_0 étant quelconques et n un entier positif, on peut écrire

$$f(z)=\sum_{i=0}^{i=\infty} c_i z^i = \sum_{p=-n}^{p=\infty} c_{n+p} z_0^{n+p}\left(\frac{z}{z_0}\right)^{n+p} = \left(\frac{z}{z_0}\right)^n \sum_{-n}^{\infty} c_{n+p} z_0^{n+p}\left(\frac{z}{z_0}\right)^p,$$

nous poserons, q étant un entier positif fixe,

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^p = \left(1+\frac{z-z_0}{z_0}\right)^p = 1 + p\frac{z-z_0}{z_0} + \dots$$
$$+ \frac{p(p-1)\dots(p-q+1)}{q!}\left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)^q + \left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)^{q+1} R_p\left(\frac{z-z_0}{z_0}\right),$$

ce qui permet de mettre l'égalité précédente sous la forme

$$(1)\quad f(z)=\left(\frac{z}{z_0}\right)^n\left[f(z_0)+\frac{z-z_0}{z_0}g_1(z_0)+\dots + \left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)^q g_q(z) + \left(\frac{z-z_0}{z_0}\right)^{q+1}\psi(z, z_0)\right].$$

Les fonctions $g_1(z_0)$, ..., $g_q(z_0)$ peuvent s'exprimer en fonction de z_0, n et de $f(z_0)$ et de ses q premières dérivées, mais leur valeur

---

au Congrès de Strasbourg. La méthode de M. Borel montre que les propriétés relatives aux modules des zéros se conservent pour toutes les fonctions d'ordre infini.

ne sera pas utilisée dans la suite; on a, d'autre part,

$$\psi(z, z_0) = \sum_{-n}^{\infty} c_{n+p} z_0^{n+p} \mathrm{R}_p\left(\frac{z - z_0}{z_0}\right).$$

Nous allons chercher une limite supérieure du module de cette quantité. Si nous supposons que le nombre v a un module moindre que $\frac{1}{2}$, la formule du binome donne

$$\mathrm{R}_p(v) = \frac{p(p-1)\dots(p-q)}{(q+1)!} + \frac{p(p-1)\dots(p-q-1)}{(q+2)!} v + \dots;$$

si p est positif, le second membre, qui est limité, est majoré lorsqu'on y remplace v par son module et a un module moindre, en vertu de la formule de Taylor limitée, que

$$\frac{p(p-1)\dots(p-q)}{(q+1)!} (1 + |v|)^{p-q-1}.$$

Si p est négatif, on majore en remplaçant v par $-|v|$ et l'on obtient

$$|\mathrm{R}_p(v)| < \left|\frac{p(p-1)\dots(p-q)}{(q+1)!}\right| (1 - |v|)^{p-q-1}.$$

Nous avons donc

$$|\psi(z, z_0)| < (\mathrm{U}_1 + \mathrm{U}_2)\mathrm{A},$$

A étant un nombre fixe, ne dépendant que de q et moindre que $\frac{2^{q+1}}{(q+1)!}$, pourvu que le module de $v = \frac{z - z_0}{z_0}$ soit inférieur à $\frac{1}{2}$, et U_1 et U_2 étant définis par les égalités

$$\mathrm{U}_1 = \sum_{p=0}^{p=\infty} |c_{n+p}|z_0^{n+p} \quad p^{q+1}(1 + |v|)^p,$$

$$\mathrm{U}_2 = \sum_{p=-n}^{p=0} |c_{n+p}|z_0^{n+p}|p|^{q+1}(1 - |v|)^p.$$

Soit R une valeur ordinaire de $f(z)$ relativement à la fonction de comparaison d'indice α (V, p. 226),

$$\mathfrak{F}_\alpha(u) = \Sigma e^{n^\alpha} u^n,$$

et supposons que l'on ait

$$|z_0| < \mathrm{R}(1+\delta),$$

δ étant un nombre positif dont la valeur sera choisie ultérieurement.

Prenons pour n le rang $n(\mathrm{R})$ du terme maximum de $f(z)$ pour la valeur ordinaire R, nous aurons, $m(\mathrm{R})$ désignant le module du terme maximum (V, n° 1),

$$(2)\qquad \mathrm{U}_1 < (1+\delta)^n\, m(\mathrm{R}) \sum_{p=0}^{p=\infty} p^{q+1}(1+\delta)^p(1+|v|)^p e^{(n+p)^\alpha - n^\alpha}\left(\frac{\mathrm{R}}{l}\right)^p,$$

la relation entre $n = n(\mathrm{R})$ et $\frac{\mathrm{R}}{l}$ étant toujours que n est l'un des deux entiers encadrant la racine de l'équation en x,

$$\alpha x^{\alpha-1} = \log\left(\frac{l}{\mathrm{R}}\right).$$

La série qui figure au second membre de l'inégalité (2) se traite comme dans le premier Mémoire (V, n° 3), le rapport des termes de rang $\frac{n_1}{2} + i$ et $n_1 + i$ est ici un peu différent, on a

$$\log\rho_i = (q+1)\log 2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{4}(n_1-2)^2\left(n+\frac{n_1}{2}\right)^{\alpha-2} + \frac{n_1}{2}\log(1+\delta)(1+|v|),$$

n_1 étant la partie entière de $\mathrm{B}n^{1-\frac{\alpha}{2}}$, il suffit que l'on ait, en outre,

$$n_1\delta < \mathrm{B}_1, \qquad n_2|v| < \mathrm{B}_2,$$

B_1 et B_2 étant des nombres fixes, pour que, par un choix convenable de B, $\log\rho_i$ soit encore moindre que -1. On aura, alors (V, p. 227),

$$\mathrm{U}_1 < (1+\delta)^n\, m(\mathrm{R})\frac{e}{e-1} n_1^{q+1}(1+\delta)^{n_1}(1+|v|)^{n_1}$$
$$< \mathrm{C}m(\mathrm{R})(1+\delta)^n\, n^{(q+2)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)},$$

C étant un nombre fixe facile à calculer. On aura une inégalité analogue pour U_2, et en groupant ces deux résultats, on obtient, en particulier, la proposition suivante, que j'utiliserai seule dans la suite :

1. *Le module du reste* $\psi(z, z_0)$ *de la formule* (1) *est moindre que*

$$DM(R)n^{(q+2)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}, \tag{3}$$

pourvu que le module de z_0 *soit inférieur à* $\left(1+\frac{D'}{n}\right)R$ *et que*

$$|z-z_0| < |z_0| D'' n^{\frac{\alpha}{2}-1}, \tag{4}$$

D, D′, D″ sont des constantes absolues, indépendantes des diverses variables, R est une valeur ordinaire quelconque relative à la fonction de comparaison d'indice $\alpha (0 < \alpha < 1)$, $n = n(R)$, et $M(R)$ est le maximum du module de $f(z)$ qu'on sait être supérieur à $m(R)$.

2. Nous poserons, dorénavant,

$$\beta = \frac{q+2}{q+1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Le nombre α est un nombre quelconque compris entre 0 et 1, mais nous supposerons que l'entier q a été pris assez grand pour que β soit inférieur à 1 $\left[q > \frac{2(1-\alpha)}{\alpha}\right]$. Nous désignerons alors par β' un nombre fixe choisi une fois pour toutes entre β et 1.

En donnant à z des valeurs particulières et en utilisant la proposition I, nous obtiendrons des limites supérieures pour les fonctions $g_i(z)$. Prenons q valeurs de z de même module $|z| = |z_0| = r_0$, et telles que

$$|z-z_0| = |z_0| D'' \frac{\lambda}{q} n^{-\beta} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, q),$$

nous obtenons, en écrivant l'égalité (1) pour ces q valeurs et en résolvant par rapport aux g_i,

$$|g_i(z_0)| n^{-i\beta} < KM(R) + 2M(r_0), \tag{5}$$

K étant une constante et les inégalités ayant lieu à partir d'une valeur de R (1).

(1) Dans tout ce qui suit, je désignerai par K tout nombre positif fixe.

Nous allons déduire d'abord de ces inégalités (5) que, pour r_0 compris entre R et $R\left(1+\frac{D'}{n}\right)$, le rapport de $M(r_0)$ à $M(R)$ reste borné (inférieur à une constante K). Supposons, en effet, que z_0 soit le point de la circonférence $|z| = r_0$ pour lequel $|f(z_0)| = M(r_0)$, et appliquons la formule (1) en y prenant $z = z_0 \frac{R}{r_0}$, nous obtenons, eu égard aux inégalités (5) et à la proposition I,

$$\left|f\left(z_0 \frac{R}{r_0}\right)\right| > \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r_0}\right)^n M(r_0) > \frac{1}{K} M(r_0),$$

K étant inférieur à $3e$ pourvu que n, c'est-à-dire R, soit assez grand. La propriété à démontrer en résulte *a fortiori*.

Supposons, maintenant, que z_1 soit un nombre quelconque de module inférieur à $\left(1+\frac{D'}{n}\right)R$, les inégalités (5) donnent, en tenant compte de la remarque précédente,

$$|g_i(z_1)| < K M(R) n^{i\beta}.$$

Ces inégalités, jointes à la proposition I, conduisent immédiatement, par l'application de l'égalité (1), à la proposition suivante, qui servira de base à tout ce qui suit :

II. *Soit* R *une valeur ordinaire de* $f(z)$, z_0 *un nombre de module* R *tel que l'on ait*

$$(6) \qquad |f(z_0)| > M(R) n^{\frac{\beta-\beta'}{2}} \qquad (\beta < \beta' < 1),$$

et soit D_{z_0} *le domaine du plan* $z = re^{i\varphi}$ *défini par les inégalités*

$$R\left(1-\frac{D'}{n}\right) \leqq r \leqq R\left(1+\frac{D'}{n}\right), \qquad \varphi_0 - \frac{1}{n^{\beta'}} \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + \frac{1}{n^{\beta'}}.$$

Dans le domaine D_{z_0} *la fonction* $f(z)$ *jouit des propriétés suivantes :*

1° *Le module reste compris entre* $\frac{1}{K} f(z_0)$ *et* $K f(z_0)$;

2° *Si* z *et* z_1 *sont deux points quelconques intérieurs au domaine, on a*

$$(7) \qquad f(z) = \left(\frac{z}{z_1}\right)^n f(z_1)[1+\eta(z, z_1)]$$

avec

$$|\eta(z, z_1)| < K n^{\frac{\beta-\beta'}{2}};$$

3° *Si z et z_1 sont intérieurs au domaine et tels que*

$$(8) \qquad |z - z_1| < R\frac{\varepsilon(R)}{n^\beta M(R)},$$

$\varepsilon(R)$ *étant une fonction de* R *qui tend vers zéro lorsque* R *croît indéfiniment, on a*

$$(9) \qquad f(z) = \left(\frac{z}{z_1}\right)^n f(z_1) + \eta(z, z_1)$$

avec

$$|\eta(z, z_1)| < K\varepsilon(R).$$

3. Je ferai quelques remarques au sujet des valeurs ordinaires qui s'introduisent dans ces énoncés. On sait que R étant valeur ordinaire, il existe une autre valeur ordinaire dans l'intervalle R, $R(1 + n^{\alpha-1})$, α étant l'indice de la fonction de comparaison. En prenant pour α une valeur toujours fixe mais très petite, la longueur des intervalles exceptionnels est réduite; mais, comme β est supérieur à $1 - \frac{\alpha}{2}$, l'amplitude de variation de φ, c'est-à-dire la largeur du domaine D, diminue; or, il importe pour la suite que β' soit moindre que 1. On ne peut donc essayer de prendre pour fonction de comparaison une fonction

$$\mathfrak{F}(u) = e^{\mathcal{H}(n)} u^n$$

qui serait d'ordre nul, c'est-à-dire telle que

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log \mathcal{H}(n)}{\log n} = 0.$$

C'est pourquoi je me suis borné à considérer les fonctions $\mathfrak{F}_\alpha(u)$.

Je supposerai toujours dans la suite que les valeurs ordinaires sont celles d'indice α_0 très petit, mais certaines de ces valeurs pourront être encore ordinaires lorsqu'on augmente α; en vertu de la proposition suivante :

III. *Si* R *est valeur ordinaire d'indice α, elle l'est aussi d'indice $\alpha_0 < \alpha$.*

En se reportant au premier Mémoire (V, n° 2), on voit que, pour démontrer cette proposition, il suffit d'établir qu'étant donnée une fonction $\mathcal{J}_\alpha(u)$, toute valeur de u est ordinaire lorsqu'on prend pour fonction de comparaison une fonction de même forme mais d'indice $\alpha_0 < \alpha$. Tout revient donc à montrer qu'à toute valeur u on peut faire correspondre des nombres k et $l (l > 1)$ tels que

$$n^\alpha + n \log u \leqq n^{\alpha_0} + n \log(ul) + \log k,$$

l'égalité ayant lieu pour une valeur de n. Or, si l'on considère la fonction

$$\psi(x) = x^{\alpha_0} - x^\alpha + x \log l + \log k$$

et ses dérivées

$$\psi'(x) = \alpha_0 x^{\alpha_0 - 1} - \alpha x^{\alpha - 1} + \log l,$$
$$\psi''(x) = x^{-2}[(1-\alpha)\alpha x^\alpha - (1-\alpha_0)\alpha_0 x^{\alpha_0}],$$

on voit que $\psi''(x)$ est positif pour x supérieur à 1, $\psi'(1)$ est négatif si $\log l < \alpha - \alpha_0$, tandis que $\psi'(+\infty)$ est positif, donc $\psi(x)$ décroît d'abord lorsque x croît de 1 jusqu'à une valeur $x(l)$ puis croît; il suffit donc de prendre pour $\log k$ le plus grand des deux nombres

$$-\psi\{E[x(l)]\}, \quad -\psi\{E[x(l)] + 1\}$$

[$E(x)$ désignant la partie entière de x] pour que toutes les conditions soient réalisées.

Il résulte de cette proposition que, R étant valeur ordinaire pour une valeur $\alpha = \alpha_0$, il existe un nombre $\alpha(R)$ tel que R est ordinaire pour α compris entre α_0 et $\alpha(R)$, mais ne l'est plus pour α supérieur à $\alpha(R)$; ce nombre $\alpha(R)$ peut d'ailleurs être égal à 1. Il sera loisible, dans l'application de la propriété II, de supposer que α est aussi voisin que l'on veut de $\alpha(R)$.

4. Pour démontrer le théorème de M. Picard, je considérerai d'abord le cas le plus simple des fonctions entières et j'étudierai une équation de la forme

$$e^{f(z)} = a, \tag{10}$$

où $f(z)$ est une fonction entière (et non pas un polynome) et a une constante dont je supposerai le module compris entre $\frac{1}{A}$ et A, A étant un nombre fixe supérieur à 1 et d'ailleurs quelconque. Nous allons montrer que l'équation (10) possède, dans tout domaine D défini dans la proposition II, un nombre de solutions supérieur à M(R).

Supposons que z est dans un tel domaine; désignons par $2\pi\theta$ celui des arguments de a qui est compris entre 0 et 2π, et par q un entier quelconque, positif, négatif ou nul; l'équation (10) peut s'écrire

$$(11) \qquad f(z) = \log|a| + 2i\pi(\theta + q),$$

et, si q ayant une valeur bien déterminée, cette équation (11) possède un certain nombre de racines dans un domaine Δ, l'équation (10) aura au moins autant de racines dans ce domaine Δ.

L'égalité (7) montre que, sur tout arc de circonférence $|z| = \text{const.}$ intérieur au domaine D_{z_0} l'argument de $f(z)$, qui est continu, varie de plus de $n^{1-\beta'}$; il y a donc sur cet arc plus de $\frac{1}{3\pi}n^{1-\beta'}$ points z_1 en lesquels $f(z)$ est imaginaire pure. Désignons par $2i\pi Q$ une telle valeur $f(z_1)$; nous avons, d'après la proposition II,

$$|Q| > KM(R)n^{\frac{\beta-\beta'}{2}}.$$

Soit Q_1 le plus grand entier inférieur à $Q - \theta$; prenons $q = Q_1$ et écrivons l'équation (11) sous la forme

$$\varphi(z) + \psi(z) = 0$$

avec

$$\varphi(z) = 2i\pi Q\left(\frac{z}{z_1}\right)^n - \log|a| - 2i\pi(\theta + Q_1),$$

$$\psi(z) = f(z) - \left(\frac{z}{z_1}\right)^n f(z_1),$$

n étant toujours le nombre $n(R)$ introduit dans la proposition I. La fonction $\varphi(z)$ s'annule pour

$$z = z_1\left[1 + \frac{\log|a| + 2i\pi(\theta + Q_1 - Q)}{2i\pi Q}\right]^{\frac{1}{n}}$$

ou

$$z = z_1\left[1 + \frac{\log|a| + 2i\pi\theta_1}{2i\pi Qn} + \frac{h}{Q^2 n}\right] \qquad (|h| < K,\ |\theta_1| < 1).$$

L'équation $\varphi(z)=0$ a donc, pourvu que R soit supérieur à un nombre K, une racine au moins dans le cercle C_{z_1} d'équation

$$z=z_1\left[1+\frac{\log|a|+2i\pi\theta_1}{2i\pi Q n}\right]+z_1\gamma\frac{e^{ix}}{Qn},$$

γ étant un nombre positif et x prenant les valeurs entre 0 et 2π. Or, sur la circonférence de ce cercle, nous avons

$$\varphi(z)=2i\pi Q\left[1+\frac{\log|a|+2i\pi\theta_1}{2i\pi Q}+\frac{\gamma e^{ix}}{Q}+\frac{h}{Q^2}\right]-\log|a|-2i\pi(\theta_1+Q)$$
$$(|h|<K)$$

ou

$$\varphi(z)=2i\pi\gamma e^{ix}+2i\pi h\frac{1}{Q},$$

et, par suite, $|\varphi(z)|$ est supérieur à $\pi\gamma$ pourvu que R soit supérieur à K. Mais, d'autre part, nous avons sur cette circonférence

$$|z-z_1|<K|z_1|\frac{1}{Qn}<\frac{K}{M(R)n^{1-\frac{\beta-\beta'}{2}}}$$

et l'exposant de n, dans cette inégalité, étant supérieur à β, l'inégalité (8) est vérifiée, donc aussi (9), le module de $\psi(z)$ est inférieur à $\pi\gamma$, pourvu que R soit assez grand. On a ainsi

$$\left|\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}\right|<1$$

sur la circonférence C_{z_1}; d'après un théorème bien connu, les équations $\varphi(z)=0$ et (11) ont le même nombre de zéros dans le cercle, ce qui montre que l'équation (10) a au moins un zéro dans le cercle C_{z_1}.

La plus grande distance du point z_1 au cercle C_{z_1} est moindre que

$$R\frac{\log A+2\pi+3\gamma}{n|f(z_1)|}<R\frac{\log A+2\pi+3\gamma}{2ne|f(z_0)|}=\Lambda;$$

si nous traçons dans le domaine D_{z_0} les arcs de cercle

$$|z|=R+2\lambda\Lambda \qquad \left[\lambda=\pm 1,\ \pm 2,\ \ldots,\ \pm E\left(D'\frac{R}{2n\Lambda}-1\right)\right],$$

sur chacun de ces arcs se trouvent $\frac{1}{3\pi}n^{1-\beta'}$ points z_1 auxquels nous pouvons appliquer le raisonnement précédent; les cercles de rayon A ayant ces points pour centres ne se coupent pas, car la distance de deux points z_1 situés sur un même arc de cercle est supérieure à A, d'après l'égalité (7). Nous obtenons donc notamment le résultat suivant :

IV. *L'équation* (10) *possède certainement* $Kn^{1-\beta'}|f(z_0)|$ *zéros dans tout domaine* D_{z_0} *tel que* $R > K$; K *étant une constante indépendante de* R, *ces zéros, connus très exactement par leur module et leur argument, forment sensiblement un quadrillage curviligne.*

Le nombre des zéros ainsi mis en évidence est *a fortiori* supérieur à

$$Kn^{1-\frac{\beta+\beta'}{2}}M(R)$$

d'après l'hypothèse (6), et l'exposant de n dans cette expression est positif, ce qui justifie le résultat annoncé tout d'abord : *dans le domaine* D_{z_0}, *il y a plus de* $M(R)$ *zéros de l'équation* (10) *pourvu que* $R > R(a)$. En particulier, *dans le domaine* D_{z_0} *tel que* $|f(z_0)| = M(R)$, *l'équation* (10) *possède plus de* $KM(R)n^{1-\beta'}$ *zéros.*

On peut remarquer que l'équation $\varphi(z) = 0$ n'a effectivement qu'une seule racine dans le cercle C_{z_1} et en a une et une seule dans les cercles qui se déduisent de celui-là par des rotations de $\frac{2\pi}{n}$ autour de l'origine; on voit aussi la modification qu'entraînerait le remplacement de Q_1 par $Q_1 + 1$ dans cette équation, et l'on obtient sans peine *tous les zéros* de l'équation (10) situés dans le domaine D et correspondant à une valeur fixe de a. J'ai préféré énoncer une proposition moins précise, mais relative aux zéros de toutes les équations (10) pour lesquelles a prend des valeurs dont le module reste compris entre $\frac{1}{A}$ et A. Chaque cercle C_{z_1} contient un zéro de l'une quelconque de ces équations.

5. D'après ce qui a été rappelé au n° 3 relativement à la densité des valeurs ordinaires, on voit bien ce qu'apprend la proposition IV au sujet des zéros de l'équation (10); si l'on excepte les intervalles exceptionnels dans lesquels la variation totale de $\log r$ pour $r > R$ est

moindre que $n^{\alpha-1}$, pour toute valeur R il y a au moins un domaine D_{z_0} tel que $|f(z_0)| = M(R)$, et, dans le cercle $|z| \leqq R$, il y au moins $M(R)$ zéros de (10).

Ce résultat peut être présenté d'une façon mettant bien nettement en évidence la densité des zéros de l'équation (10) dont on a obtenu une valeur approchée. Désignons par $P(z)$ une fonction entière quelconque admettant ces zéros et ceux-là seulement et prenant la valeur 1 à l'origine; soit r_n le module du $n^{\text{ième}}$ de ces zéros supposés rangés par ordre de modules non décroissants, et soit $M_1(r)$ le maximum du module de $P(z)$ pour $|z| = r$. D'après le théorème de M. Jensen, nous avons, quels que soient N et r,

$$M_1(r) > \frac{r_N}{r_1 r_2 \ldots r_N} > \left(\frac{r}{r_N}\right)^N.$$

Prenons pour r une valeur ordinaire R et pour r_N le plus grand des r_n inférieurs à $R\left(1 - \frac{D'}{2n}\right)$, N sera supérieur à $KM(R)n^{1-\beta'}$ et, par suite,

$$\log M_1(R) > K\,M(R)\,n^{-\beta'}.$$

Mais, pour une valeur ordinaire R, $M(R)$ est supérieur à $m(R)$, qui est égal au terme maximum de la fonction majorante $k\mathcal{I}_\alpha\left(\frac{r}{l}\right)$ (V, p. 225), et, *a fortiori*, puisque k est supérieur à 1, est supérieur au terme maximum de $\mathcal{I}_\alpha\left(\frac{r}{l}\right)$ dont le logarithme (V, p. 240) est égal à Kn^α. Nous avons donc

$$n^\alpha < K \log M(R) \tag{12}$$

et, par suite,

$$\log M_1(R) > KM(R)[\log M(R)]^{-\gamma} \qquad \left(\gamma = \frac{\beta'}{\alpha}\right).$$

En particulier, si l'on forme avec les zéros décelés par la méthode un produit canonique $P(z)$ [1], on voit que l'ordre de grandeur de ce produit pour les valeurs ordinaires R est très voisin de celui de $|e^{(f)z}|$. Le résultat contenu dans l'inégalité précédente est d'ailleurs beaucoup

---

[1] Ce produit canonique est d'ordre infini, sa définition exacte importe peu ici.

plus précis que ceux que l'on obtient par l'application des méthodes ordinaires de la théorie des fonctions entières.

On peut donner à ce résultat concernant les *modules* des zéros une forme différente indépendante de toute théorie des produits canoniques; si l'on désigne par $N(r)$ le nombre exact des zéros de l'équation (10) contenus dans le cercle $|z| = r$, on a, pour toute valeur ordinaire R,

$$M(R)[\log M(R)]^{-\gamma} - K_1 < \int_0^R N(x)\frac{dx}{x} < M(R) + K_2.$$

Il est d'ailleurs clair que le principal intérêt de la méthode précédente est de donner des renseignements sur les *arguments* des zéros; mais il est important de constater dès le début que ceux des zéros pour lesquels on possède ces renseignements, bien qu'ils puissent être infiniment peu nombreux par rapport au nombre total des zéros, le sont cependant assez pour caractériser la fonction.

6. L'étude de l'équation générale

$$e^{f(z)+\chi(z)}z^{\tau} = a, \tag{13}$$

où τ est un entier positif ou négatif, $f(z)$ une vraie fonction entière, et $\chi(z)$ une fonction holomorphe à l'infini qu'il est loisible de supposer de la forme

$$\chi(z) = \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z_2} + \ldots,$$

ne présente pas de difficultés supplémentaires. Sur tout arc de cercle $|z| =$ const. intérieur à un domaine D_{z_0}, nous aurons encore $Kn^{1-\beta'}$ points en lesquels $f(z_1) + \tau\log z_1$ a une valeur imaginaire pure $2i\pi Q'$ (nous prenons par exemple, pour $\log z$, la détermination telle que la partie imaginaire de $\tau\log z_0$ soit comprise entre o et $2i\pi\tau$). Nous serons ramenés à résoudre l'équation

$$\varphi(z) + \psi(z) = 0 \tag{14}$$

avec

$$\varphi(z) = \left(\frac{z}{z_1}\right)^n 2i\pi Q' - \log|a| - 2i\pi(\theta + Q'_1) \qquad [Q'_1 = E(Q' - \theta)],$$

$$\psi(z) = \left[f(z) - \left(\frac{z}{z_1}\right)^n f(z_1)\right] + \chi(z) + \tau\left[\log z - \left(\frac{z}{z_1}\right)^n \log z_1\right].$$

L'équation $\varphi(z) = 0$ est la même qu'au n° 4. Q' vérifie en effet la même inégalité que Q puisque $\log z_1$ est infiniment petit par rapport à $|f(z_1)|$ $\left[|f(z_1)|\right.$ est supérieur à $KM(R)n^{\frac{\beta-\beta'}{2}}$, donc à $|M(R)|^{\frac{1}{2}}$, d'après l'inégalité $\left.(12)\right]$. Dans un cercle C_{z_1} analogue à celui considéré au n° 4, $\varphi(z)$ s'annule une fois et, sur la circonférence, son module est supérieur à $\pi\gamma$. Sur cette circonférence, les deux premiers termes de $\psi(z)$ sont infiniment petits avec $\frac{1}{R}$, et le troisième qui s'écrit

$$\tau\left\{\log\left(\frac{z}{z_1}\right) - \left[\left(1 - \frac{z - z_1}{z_1}\right)^n - 1\right]\log z_1\right\}$$

est moindre que

$$K\left(\frac{z - z_1}{z_1}\right) + K\frac{|\log z_1|}{Q'}$$

et tend aussi vers zéro avec $\frac{1}{R}$.

Rien n'est donc changé à la fin du raisonnement du n° 4, sauf les valeurs exactes des constantes, et *tout ce qui a été dit des zéros de l'équation* (10) *s'applique entièrement à ceux de l'équation* (13).

7. Pour achever de démontrer le théorème général de M. Picard, il reste à examiner le cas des équations (13) lorsque $f(z)$ y est remplacé par un polynome $Q(z)$. Cette étude est bien facile et n'est sans doute pas nouvelle; je me bornerai à indiquer rapidement comment on peut conduire la démonstration d'une façon tout analogue à celle du n° 6, car j'aurai à utiliser certains des résultats intermédiaires dans la suite. Je désignerai par q le degré de $Q(z)$ et par A_0 le module du coefficient de z^q. Quels que soient z et z_0, on a, pourvu que $|z - z_0| < \frac{1}{2}|z_0|$,

$$Q(z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^q Q(z_0) + \theta'\left|\frac{z - z_0}{z_0}\right| K |z_0|^{q-1} \qquad (|\theta'| < 1),$$

K étant une constante ne dépendant que des coefficients de $Q(z)$. Il n'y a plus ici de valeurs exceptionnelles, sur tout cercle $|z| = r$ existent q points z_1 qui sont sensiblement les sommets d'un polynome régulier, en lesquels

$$Q(z_1) + \tau \log z_1$$

est imaginaire pure et égale à $2i\pi Q'$, le module de Q' étant supérieur à $\frac{A_0 r^q}{3\pi}$ si $r > K$. On sera ramené, pour trouver des racines de l'équation (13), à résoudre l'équation (14) du n° 6, $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ ayant exactement les mêmes valeurs. Cette équation (14) possède un zéro dans chacun des q cercles ayant pour centres les q points associés aux z_1,

$$z'_1 = z_1\left[1 + \frac{\log|a| + 2i\pi(\theta + Q'_1 - Q')}{2i\pi Q' q}\right],$$

et pour rayon commun $\frac{r\gamma}{|Q'|}$. On peut donner, en particulier à r, les valeurs

$$R_m = \left(\frac{bm}{A_0}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (b > 2\pi),$$

m prenant la suite des valeurs entières à partir d'une valeur m_0, prendre sur chaque cercle $|z| = R_m$ les q points z_m^i en lesquels

$$Q(z) + \tau \log z$$

devient imaginaire pure, puis de chaque point $z_m'^i$ associé, décrire le cercle de rayon $\frac{\gamma}{R_m^{q-1}}$, γ étant suffisamment petit; chacun de ces cercles contiendra un zéro de l'équation (13).

On connaît donc encore ici, d'une façon très précise, les modules et arguments de certains zéros de l'équation (13); on pourrait préciser beaucoup ce résultat, mais il nous suffira d'avoir montré l'existence de q files de zéros, le nombre total des zéros décelés dans un cercle $|z| \leqq r$ étant égal, à un facteur fini près, au maximum du module de $Q(z)$.

8. En résumé, nous avons trouvé que, dans tous les cas, toute équation (13) possède des zéros dans des régions que l'on peut définir à l'aide des valeurs ordinaires R de la fonction entière $f(z)$ [si $f(z)$ est un polynome, toute valeur est ordinaire], ces régions entourent les points z_1 en lesquels $f(z)$ est imaginaire pure et a un module suffisamment voisin du module maximum. Le nombre des zéros mis en évidence pour $|z| \leqq r$ est supérieur à $KM(R)$. En d'autres termes,

si $F(z)$ est holomorphe à l'extérieur d'un cercle $|z| = K$, et admet, effectivement, le point à l'infini pour point essentiel, et, si l'on désigne par $e^{\mu(r)}$ le maximum du module de cette fonction pour $|z| = r$ [$\mu(r)$ est une fonction croissante à partir d'une certaine valeur de r], le théorème général de M. Picard peut s'énoncer de la façon suivante : *si parmi les fonctions* $F(z) - a$ *se trouve une fonction ne possédant pas de zéro* (par exemple celle correspondant à $a = 0$), *toutes les autres fonctions ont certainement une infinité de zéros dont on connaît des propriétés communes, notamment les suivantes :* le nombre $n(r, a)$ des zéros de module inférieur, ou égal à r, est tel que

$$\overline{\lim_{r=\infty}} \frac{n(r, a)}{\mu(r)} > 0$$

il y a des amas de zéros [en nombre supérieur à $\mu(r)$] dans une suite de régions dans lesquelles le module de $F(z)$ a à la fois des valeurs de l'ordre de $e^{\mu(r)}$ et de l'ordre de $e^{-\mu(r)}$.

Ces fonctions $F(z)$, qui ne prennent pas une valeur, o par exemple, sont *exceptionnelles* [car, d'après ce qui précède, parmi les fonctions $F(z) + bz$, où b est quelconque, il y en a au plus une ne prenant pas une infinité de fois toute valeur]; il y a donc lieu de chercher dans quelle mesure les propriétés communes des zéros des fonctions $F(z) - a$ se conservent lorsque, quel que soit a, ces fonctions ont une infinité de zéros. Nous allons d'abord considérer le cas où le nombre des zéros, bien qu'infini, est inférieur à la valeur normale trouvée dans le cas où $F(z)$ est exceptionnelle; c'est le cas, encore *exceptionnel*, étudié par M. Borel.

II. — Le théorème de M. Borel.

9. Nous supposerons, d'abord, que $F(z)$ est une fonction d'ordre fini de la forme

$$F(z) = e^{Q(z)+\chi(z)} z^{\tau} P(z),$$

$Q(z)$, $\chi(z)$ et τ ayant les mêmes significations qu'au n° 7 et $P(z)$ étant un produit canonique d'ordre fini au plus égal au degré q de $Q(z)$

et de genre moindre que q,

$$P(z) = \prod_1^\infty \mathcal{E}\left(\frac{z}{a_n}, p\right) \qquad \left[\mathcal{E}(u, p) = (1-u)e^{u+\ldots+\frac{u^p}{p}}, \ |a_n| = r_n\right],$$

l'entier p est inférieur ou égal à $q-1$, ce qui exige que la série $\sum \frac{1}{r_n^q}$ converge. J'établirai le résultat suivant :

VI. *Si l'on a, à partir d'une valeur n_0 de n,*

$$(15) \qquad r_n^q > n(\log n)^c \qquad (c > 1),$$

les équations $F(z) = a$, $a \neq 0$, admettent certainement q files de zéros voisins des valeurs de z rendant $Q(z)$ imaginaire pure, zéros connus d'une façon très précise par leur module et leur argument, et le nombre de ces zéros dans un cercle $|z| \leqq r$ est égal à Kr^q.

La démonstration est basée sur les mêmes principes que celle du n° 7, mais on doit prendre des précautions à cause de l'existence possible de zéros de $P(z)$ dans le voisinage des valeurs z_1 considérées au n° 7, la présence de tels zéros ayant une influence sur la valeur de $\log|P(z)|$. Il importe de ne considérer que les portions du plan des z extérieures à certaines aires entourant les zéros de $P(z)$, le but à atteindre étant que, dans les régions conservées, $\log P(z)$ soit infiniment petit par rapport à r^q et varie infiniment peu dans les cercles tels que C_{z_1}. On peut opérer de la façon suivante :

Considérons la suite des circonférences ayant pour centre commun l'origine et pour rayons

$$R'_s = [s(\log s)^{c'}]^{\frac{1}{q}} \qquad (1 < c' < c;\ s = s_0, s_0+1, \ldots)$$

et appliquons aux couronnes successives ainsi formées et prises dans l'ordre où on les rencontre, en partant de l'origine, le procédé d'exclusion de M. Boutroux : k étant un entier, soit Δ_k le domaine formé par les couronnes comprises entre les circonférences d'indices $s = 2^k$ et $s = 2^{k+3}$, dans ce domaine il y a moins de $n'_k = K2^{k+3}k^{c'-c}$ zéros de $P(z)$ alors qu'il y a 7×2^k couronnes. Nous marquons toute couronne du domaine Δ_k contenant j zéros de $P(z)$ ainsi que les j précédentes et les j suivantes, si dans ces $2j+1$ couronnes marquées se trouvent

j_1 nouveaux zéros de $P(z)$, nous marquons encore les j_1 couronnes précédentes et suivantes, et ainsi de suite [il est bien entendu que nous ne considérons que les zéros de $P(z)$ intérieurs à Δ_k]. Le nombre total des couronnes marquées est au plus égal à $3n'_k$; entre les circonférences de rang 2^{k+1} et 2^{k+2}, il y a donc $2^{k+1}[1+\delta(k)]$ couronnes non marquées, ce seront les couronnes *conservées* (¹). Si z est un point d'une couronne conservée, la distance d du point z au zéro a_n le plus proche est au moins égale à l'épaisseur minimum d'une couronne de Δ_k, donc est supérieure à $Kr^{1-q}(\log r)^{c'}$, r étant toujours le module de z.

Si nous prenons z dans une couronne conservée, nous avons (²)

$$-Kr^q(\log r)^{1-c} - n'_k \log\frac{r}{d} < \log|P(z)| < Kr^q(\log r)^{1-c},$$

d'où, en tenant compte des valeurs de n'_k et d,

$$(16) \qquad |\log|P(z)|| < Kr^q(\log r)^{1-c} < K\frac{|Q(z_1)|}{(\log r)^{c-1}},$$

inégalité valable si z et z_1 appartiennent à une même couronne conservée.

D'autre part, la somme

$$\sum{}'\left(\frac{z}{a_n}\right)^p \frac{1}{z-a_n}$$

étendue aux zéros de $P(z)$ situés dans Δ_k a un module inférieur à

$$Kr^{q-1}(\log r)^{-c'}\sum_1^{n'_k}\frac{1}{n} < Kr^{q-1}(\log r)^{-c'}\log s < Kr^{q-1}(\log r)^{1-c'},$$

nous avons donc, pour la dérivée logarithmique,

$$\left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right| < \sum\left(\frac{z}{a_n}\right)^p\frac{1}{z-a_n} < Kr^{q-1}(\log r)^{1-c'} + \frac{K}{r}\left[\sum_1^{N}\left(\frac{r}{r_n}\right)^p + \sum_{N'+1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p+1}\right],$$

(¹) Je désignerai par δ ou $\delta(x)$ toute quantité tendant vers zéro lorsque la variable principale x tend vers sa limite.

(²) Pour ces calculs et les précédents, *voir* la *Thèse* de M. Boutroux, p. 22 et 53.

N désignant le nombre des zéros de module moindre que R_{2^k} et N′ celui des zéros de module moindre que $R_{2^{k+3}}$. Si, dans la seconde somme, on remplace l'exposant $p+1$ de l'un des termes par p, c'est-à-dire si l'on fait passer un terme de la seconde somme dans la première, on augmente le second membre; il en est de même lorsqu'on remplace l'un des r_n par une quantité moindre; on majore donc le second membre en le calculant comme si l'inégalité (15) était remplacée par une égalité, ce qui donne

$$\left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right| < K r^{q-1}(\log r)^{1-c'},$$

d'où

$$(17) \qquad |\log P(z) - \log P(z_1)| < K \frac{|z-z_1|}{r} \frac{|Q(z_1)|}{(\log r)^{c'-1}} \qquad (c' > 1),$$

pourvu que z et z_1 appartiennent à une même couronne conservée.

Il résulte des inégalités (16) et (17) que la méthode du n° 7 s'applique, à partir de chaque circonférence R_m intérieure à une couronne conservée, d'une façon exacte, à toute circonférence telle que R_{m-1} et R_{m+1} soient aussi intérieurs à un intervalle conservé $R'_s R'_{s+1}$. Il y a

$$(1+\delta)\frac{A_0}{b}(\log R'_s)^c \qquad (b > 2\pi),$$

circonférences R_m dans une couronne conservée, donc un nombre de zéros égal au produit de ce nombre par q et ces zéros sont connus très exactement. Le nombre des zéros décelés dans un cercle de rayon r est donc

$$(1-\delta_q)\frac{A_0 q}{b} r^q,$$

puisque les couronnes exclues sont infiniment peu nombreuses par rapport à celles qui sont conservées.

Ainsi, lorsque $F(z)$ est d'ordre entier q et de genre q, l'inégalité (15) ne peut avoir lieu, à partir d'une valeur de n, que pour une seule valeur de a, par exemple $a=0$; et, si elle a lieu, pour toutes les autres valeurs de a le rapport du nombre $n(r, a)$ des zéros de module inférieur à r, à r^q a ses limites d'indétermination (pour $r=\infty$)

positives $\Big($nous avons trouvé que la limite inférieure est au moins $\frac{qA_0}{2\pi}$, d'après le théorème de Jensen la limite supérieure est moindre que $eqA_0\Big)$. On pourrait étendre ce résultat en remplaçant dans l'inégalité (15) $(\log n)^c$ par $\log n (\log n)^c$, $(c > 1)$, et ainsi de suite, mais on ne peut remplacer dans cette inégalité c par un nombre inférieur à 1, car le maximum du module du produit canonique pourrait alors être comparable à $|e^{Q(z)}|$. Au point de vue de l'étude de la suite des zéros, le résultat obtenu est moins étendu que celui de M. Lindelöf mais la connaissance des zéros est plus complète [1]. D'ailleurs, ici encore, les fonctions pour lesquelles existe une valeur exceptionnelle $(a = 0)$ donnant l'inégalité (15) sont *exceptionnelles;* on voit, en effet, que l'équation $F(z) = f_1(z)$, $f_1(z)$ étant une fonction entière de genre $q - 1$ dont les zéros vérifient la condition (15), a aussi tous ses zéros normaux, car la méthode précédente s'applique, sans modifications, à la fonction $\frac{F(z)}{f_1(z)}$.

10. Pour traiter les fonctions d'ordre infini, j'utiliserai les résultats de M. Blumenthal, moins précis que ceux de M. Denjoy, mais plus directement utilisables. Je rappellerai les suivants :

Une fonction type $\rho(x)$ adjointe à un infiniment petit ε ou $\varepsilon(x)$ est une fonction croissante satisfaisant à la condition de croissance typique

$$\rho(x') < \rho(x)^{1+\varepsilon}$$

si

$$\log x' = \left(1 + \frac{1}{\rho(x)^{\varepsilon}}\right)\log x.$$

Si r_n est le module du zéro de rang n d'une fonction entière, et si l'exposant de convergence de la suite r_n est infini, on peut trouver une fonction type (adjointe à un infiniment petit convenablement choisi)

---

(1) *Annales de l'École Normale*, 1905, p. 350. M. Lindelöf part aussi de l'hypothèse de l'existence d'une valeur exceptionnelle pour laquelle $n(r, a)$ est inférieur à sa valeur normale. Lorsqu'on ne fait pas une telle supposition, il peut y avoir un ensemble non dénombrable de valeurs exceptionnelles (*voir* ma Note des *Rendiconti di Palermo*, 1918).

telle que l'on ait, quel que soit n,

$$n \leqq r_n^{\rho(r_n)},$$

l'égalité ayant lieu pour une infinité de valeurs de n; le produit infini

$$P(z) = \prod_1^\infty \mathcal{E}\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right), \qquad p_n = E[\rho(r_n)^{1+2\varepsilon}]$$

est le produit canonique de M. Blumenthal, il est tel que

$$\log|P(z)| < r^{\rho(r)^{1+\delta(r)}} \quad (^1).$$

On a, d'autre part (Blumenthal, p. 63),

$$\log|P(z)| > -r^{\rho(r)^{1+\delta(r)}} - \log|P_N(z)|$$

avec

$$\log P_N(z) = \sum_1^{N-1}\left(\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{z^{p_n}}{p_n a_n^{p_n}}\right) + \sum_1^{N-1}\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) = S_1 + S_2,$$

r_N étant le plus petit des r_n supérieurs à $r\left[1 + \frac{1}{\rho(r)}\right]$.

En ne considérant que les valeurs r_n supérieures à 1, ce qui est légitime, car cela revient à négliger un nombre fini de termes au début de $P(z)$, on a

$$\left|\frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}\right| < \left(1 + \ldots + \frac{1}{p_n}\right) r^{p_n} < (1 + \log p_n) r^{p_n} < r^{p_n[1+\delta(r)]}$$

et, par suite,

$$|S_1| < (N-1) r^{\rho(r_{N-1})^{1+\delta(r)}} < (r r_{N-1})^{\rho(r_{N-1})^{1+\delta(r)}}.$$

Or, d'après la définition de r_N et la croissance typique de $\rho(x)$, $\rho(r_{N-1})$ est inférieur à $\rho(r)^{1+\varepsilon(r)}$, ce qui donne

$$|S_1| < r^{\rho(r)^{1+\delta(r)}}.$$

Par ailleurs, si l'on désigne par d la plus courte distance du point z

---

(1) ε ou $\varepsilon(x)$ désignera toujours l'infiniment petit déterminé qui s'introduit dans la définition de la fonction type.

aux zéros a_n, on a

$$|S_2| < 2(N-1)\log\frac{r}{d} < r^{\rho(r)^{1+\delta(r)}}\log\frac{r}{d},$$

d'où, finalement, en tenant compte de la limite supérieure de $P(z)$ donnée plus haut,

$$(18)\qquad |\log|P(z)|| < \left(1+\log\frac{1}{d}\right) r^{\rho(r)^{1+\delta(r)}}.$$

Considérons maintenant la dérivée logarithmique

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_1^{\infty}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}\frac{1}{z-a_n} = S'_1 + S'_2,$$

S'_1 désignant la somme des N premiers termes, et S'_2 le reste. D'après les résultats connus (Blumenthal, p. 60), nous avons

$$|S'_2| < \frac{\rho(r)}{r}\sum_N^{\infty}\left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n} < r^{\rho(r)^{1+\delta(r)}},$$

tandis que, d ayant la même signification que ci-dessus,

$$|S'_1| < N r^{\rho(r_N)}\frac{1}{d} + K < \frac{1}{d} r^{\rho(r)^{1+\delta(r)}},$$

ce qui donne

$$(19)\qquad \left|\frac{P'(z)}{P(z)}\right| < \left(1+\frac{1}{d}\right) r^{\rho(r)^{1+\delta(r)}}.$$

Les inégalités (18) et (19) sont d'ailleurs valables, même si l'ordre est fini [$\rho(r)$ constant].

Pour abréger, je dirai que $\rho(r)$ est *un ordre* du produit canonique et un *ordre réel* des zéros de ce produit.

11. Considérons une équation de la forme $F(z) = a$ avec

$$(20)\qquad F(z) = e^{f(z)+\chi(z)} z^{\tau} P(z),$$

$f(z)$ étant une fonction entière et $P(z)$ un produit canonique d'ordre fini ou infini. Soit toujours $M(r)$ le maximum du module de $f(z)$ et soit $\rho(r)$ un ordre de $P(z)$, nous allons montrer que :

VII. R *étant une valeur ordinaire de* $f(z)$ *et* γ *un nombre positif fixe*, *si l'inégalité*

(21) $$R^{\rho(R)^{1+\gamma}} < M(R)$$

a lieu pour une valeur de R *supérieure à* $R(\gamma)$, *l'équation* $F(z) = a$ *a* $Kn^{1-\beta'}M(R)$ *zéros au moins dans le domaine* D_{z_0} *correspondant à* $|z_0| = R$ *et à* $|f(z_0)| = M(R)$.

Nous supposerons $R(\gamma)$ assez grand pour que les inégalités (18) et (19) soient vérifiées à partir de cette valeur et pour que la proposition II s'applique, et nous considérons un domaine D_{z_0} correspondant à une valeur $R = |z_0| > R(\gamma)$. Le nombre N des zéros de $P(z)$ contenus dans ce domaine est moindre que

$$R'^{\rho(R')} \qquad \left[R' = R\left(1 + \frac{D'}{n}\right)\right];$$

or, R étant valeur ordinaire, M(R) est inférieur à R^{2n} (V., p. 243); donc, d'après l'hypothèse (21), $2n$ est supérieur à $\rho(R)^{1+\gamma}$; on a

$$R' < R\left[1 + \frac{D'}{\rho(R)^{1+\gamma}}\right]$$

et, en vertu de la croissance typique,

$$N < R^{\rho(R)^{1+\delta}}.$$

Si l'on trace dans le domaine D_{z_0} les arcs de cercle

$$|z| = R + \lambda\frac{N_1}{n|f(z_0)|} \quad \left\{\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm E\left[\frac{|f(z_0)|}{N_1}\right], N_1 = R^{\rho(R)^{1+\frac{\gamma}{2}}}\right\},$$

le nombre de celles des couronnes ainsi formées qui contiennent des zéros de $P(z)$ est infiniment petit $\left(\text{avec } \frac{1}{R}\right)$ par rapport au nombre total des couronnes, puisque, d'après les inégalités (6) et (12),

$$|f(z_0)| > M(R)\,[\log M(R)]^{-\gamma_1}.$$

Si l'on exclut toute couronne contenant des zéros de $P(z)$ ainsi que les deux couronnes adjacentes, et si l'on prend z dans une couronne conservée, le minimum de la distance de ce point aux zéros satisfait aux inégalités

$$d = \frac{N_1}{n\,|f(z_0)|} > \frac{N_1}{n\,M(R)} > \frac{N_1}{M(R)^2},$$

l'inégalité (18) montre que l'on a

$$\big|\log|P(z)|\big| < N_1 \log M(R) < |f(z_0)|^{\delta(R)},$$

et l'on déduit de l'inégalité (19) que, z et z_1 appartenant à une même couronne, on a

$$|\log P(z) - \log P(z_1)| < \left|\frac{z-z_1}{z_1}\right| n\,|f(z_1)|\,N_1^{-\frac{\gamma}{2}}.$$

La méthode du n° 6 s'applique dès lors sans modifications dans les couronnes conservées, et, eu égard à la densité de ces couronnes, on voit que le domaine D_{z_0} contient, à un facteur près tendant vers 1, le même nombre de zéros que dans le cas où $P(z)$ était remplacé par 1; en particulier, on a la proposition VII.

12. Nous allons déduire de la proposition VII un résultat tout analogue à celui obtenu par M. Lindelöf pour les fonctions d'ordre fini et que j'ai rappelé à la fin du n° 9.

Considérons une fonction $F(z)$ *d'ordre apparent infini* $\rho(r)$ *et régulière par rapport à cet ordre* en ce sens que l'on a, quel que soit r,

$$\log M_1(r) = r^{\rho(r)^{1+\eta(r)}} \qquad \left[\lim_{r=\infty} \eta(r) = 0\right],$$

$M_1(r)$ étant le maximum du module de $F(z)$ pour $|z| = r$. Supposons en outre que les zéros de cette fonction aient un *ordre réel* $\rho_1(r)$ vérifiant, à partir d'une valeur r, la condition

$$\rho_1(r)^{1+\gamma} < \rho(r),$$

γ étant un nombre positif fixe. $F(z)$ est donc de la forme (20), $f(z)$ étant une fonction entière de module maximum $M(r)$. Soit R une valeur ordinaire pour $f(z)$; dans le domaine D_{z_0} qui est tel que $f(z_0) = M(R)$, on a

$$f(z) = KM(R),$$

et dans les couronnes conservées de ce domaine lorsqu'on lui applique la méthode précédente, $\left|\log|P(z)|\right|$ est infiniment petit par rapport à $|f(z)|$; on a donc

$$M(R) = \log M_1(R)[1 + \delta(R)],$$

et par suite

$$\rho(R)^{1+\eta(R)} < 2n.$$

La longueur des intervalles exceptionnels à partir de R est donc moindre que

$$R n^{\alpha-1} < \frac{R}{\rho(R)^{2(1-\alpha)}}$$

et par suite, si R et R′ sont deux valeurs ordinaires extrémités gauche et droite d'un intervalle exceptionnel, nous avons, en vertu de la croissance typique,

$$M(R') = R^{\rho(R)^{1+\delta(R)}}, \qquad M(R) = R^{\rho(R)^{1+\delta(R)}};$$

le nombre des zéros décelés par la proposition VII dans le cercle de rayon r

$$R \leqq r \leqq R'$$

est donc au moins égal à

$$r^{\rho(r)^{1+\delta(r)}}.$$

On déduit de là, en tenant compte de la limite supérieure connue du nombre des zéros (Blum, p. 46), que :

VIII. *Si la fonction* $F(z)$ *est d'ordre apparent* $\rho(r)$, *régulière par rapport à* $\rho(r)$, *et si l'ordre réel* $\rho_1(r)$ *des zéros est inférieur à l'ordre apparent en ce sens que*

$$\rho_1(r) < \rho(r)^{1-\gamma} \qquad (\gamma > 0),$$

toute fonction $F(z) - a$, $a \neq 0$, *possède*

$$r^{\rho(r)^{1+\delta(r)}}$$

zéros dans un cercle de rayon r.

L'existence de telles fonctions $F(z)$ régulières par rapport à l'ordre résulte d'ailleurs des propositions relatives aux produits canoniques et de l'existence de fonctions entières $f(z)$ pour lesquelles $\log M(r)$ est de la forme

$$\log r\, r^{\rho(r)^{1+\eta(r)}} \quad [1].$$

Comme dans le cas de l'ordre fini, de telles fonctions sont exceptionnelles.

13. D'une façon générale, la proposition VII entraîne la conséquence suivante :

Si $F(z)$ *est donné par son développement de Laurent, si* $e^{\mu(r)}$ *est le maximum de son module pour* $|z| = r$, *et si l'on suppose r intérieur à l'un des intervalles*

$$R_p,\ kR_p \quad (k > 1,\ R_{p+1} > kR_p,\ p = 1,\ 2,\ \ldots),$$

l'ordre $\rho(r, a)$ *des zéros de* $F(z) - a$ *ne peut vérifier l'inégalité*

$$r^{\rho(r,a)^{1+\gamma}} < \mu(r) \qquad (\gamma > 0)$$

que pour une seule valeur de a.

Car, si cette inégalité a lieu pour la valeur $a = 0$ par exemple, $F(z)$ est de la forme (20); dans les intervalles considérés, $M(r)$, maximum de $f(z)$, est au moins égal à $\mu(r)$, et à partir d'une valeur de p chaque intervalle contient au moins une valeur ordinaire; la proposition VII s'applique donc.

La fonction $\mu(r)$ est, à des termes négligeables près, le logarithme du module maximum d'une fonction entière; son quotient par $\log r$ tend vers $+\infty$, mais $\dfrac{\log \mu(r)}{\log r}$ peut avoir une limite inférieure pour $r = +\infty$ finie et même nulle (notons que, dans ce cas, il n'y a pas de valeur exceptionnelle au sens de M. Picard). Pour appliquer ce qui précède, il sera loisible de prendre pour R_p les valeurs pour lesquelles $\dfrac{\log \mu(r)}{\log r}$ est rapidement croissant. Le résultat pourra être amélioré en tenant un compte plus exact de la longueur des intervalles

[1] *Voir* ma *Thèse*, p. 85.

exceptionnels, il suffira de prendre des intervalles $R_p R'_p$ tels que

$$R'_p = R_p \left[1 + \left(\frac{\log R_p}{\log \mu(k R_p)} \right)^{1-\alpha} \right],$$

k étant un nombre fixe inférieur à 1, pour que la conclusion reste exacte. L'intérêt de ce genre de résultat est d'être indépendant de toute théorie de la croissance des fonctions $\mu(r)$.

Pour éliminer systématiquement les intervalles dans lesquels $\mu(r)$ n'est pas suffisamment croissant, il faut majorer cette fonction d'une façon convenable de manière à respecter une infinité d'intervalles ordinaires. Nous allons voir d'abord comment on peut majorer, en se plaçant à ce point de vue, le module d'une fonction entière.

Si l'on se reporte au n° 1 du Mémoire précédent (V., p. 221), on voit que, quel que soit r, valeur ordinaire ou exceptionnelle, il existe toujours deux nombres k et l tels que $f(z)$ soit majoré par la fonction $k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)$, un coefficient au moins d'une même puissance de r ayant le même module dans les deux fonctions. Lorsque r parcourt un intervalle exceptionnel R, R′ (les extrémités R, R′ sont des valeurs ordinaires), les valeurs k et l restent les mêmes, $f(z)$ et $k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)$ ont deux coefficients au moins de mêmes modules, mais le terme maximum de la seconde fonction est supérieur à celui de la première. Si nous posons

$$\gamma_n = k\, e^{\mathcal{K}(n)}\, l^{-n} \qquad \text{pour} \qquad n(\mathrm{R}) \leqq n \leqq n'(\mathrm{R}'),$$

la fonction entière

$$\mathrm{U}(r) = \sum_1^\infty \gamma_n r^n$$

majore $f(z)$ ainsi que toutes les fonctions $k\mathfrak{F}\left(\frac{r}{l}\right)$ adjointes et a même terme maximum que $f(z)$ lorsque r est valeur ordinaire, et *cette fonction n'a pas d'intervalles exceptionnels relatifs à $\mathfrak{F}(r)$*. J'omets la démonstration de ces propositions qui apparaissent comme intuitives lorsqu'on figure les polygones π correspondants. En particulier, à partir de la fonction de comparaison d'indice α utilisée jusqu'ici, on définira une majorante $\mathrm{U}_\alpha(r)$ que j'appellerai *majorante d'indice α*. D'après la proposition III, la majorante d'indice α majore celle d'indices moindres; la croissance de la majorante d'indice α est d'autant plus régulière que α est plus grand [1].

La croissance de $U_\alpha(r)$ satisfait à une condition que l'on obtient facilement en considérant le terme maximum $m_\alpha(r)$ dont le logarithme $\varphi(r)$ est asymptotiquement égal à celui de $U_\alpha(r)$ (V., p. 240); $\varphi(r)$ est une fonction croissante et l'on a

$$\varphi(r) = k' + n^\alpha + n\log\left(\frac{r}{l}\right) \qquad (k' = \log k),$$

n étant la partie entière ou la partie entière augmentée de 1 de la racine de l'équation obtenue en écrivant que le second membre de l'égalité est maximum, d'où

$$\varphi(r) = k' + (1-\alpha)[1+\delta(r)]n^\alpha = k' + \frac{C[1+\delta(r)]}{\left(\log\frac{l}{r}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \qquad \left[C = (1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\right].$$

Pour $r < r' < \frac{r}{l}$, $\varphi(r')$ est encore inférieur au second membre de cette égalité; on peut prendre pour r' la valeur

$$r' = r\left(1+\frac{2}{\varphi(r)^c}\right) < r\left[1+3\left(\frac{\log\frac{l}{r}}{C}\right)^{\frac{c\alpha}{1-\alpha}}\right],$$

pourvu que $\frac{c\alpha}{1-\alpha}$ soit supérieur à 1, et l'on obtient ce résultat :

Si α' est inférieur à α, et si l'on pose

$$r' = r\left\{1+\left[\log U_\alpha(r)\right]^{1-\frac{1}{\alpha'}}\right\},$$

on a

$$\log U_\alpha(r') < [1+\delta(r)]\log U_\alpha(r).$$

C'est la condition de croissance introduite par M. Borel dans ses

(1) Bien que l'écart entre $\log M(r)$ et $\log U(r)$ soit très petit dans les intervalles ordinaires, ce n'est pas la fonction $U(r)$ qui majore le mieux $M(r)$ en général; la comparaison à une simple progression arithmétique (BOREL, *Fonctions entières*) conduit à des résultats meilleurs dans le cas de l'ordre fini (*voir* ma *Thèse*).

recherches (*Acta mathematica*, t. XX). Elle n'entraîne pas toujours la croissance typique. Remarquons cependant que, lorsque $M(r)$ satisfait à la condition

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log_2 M(r)}{(\log r)^{1+\gamma}} > 0 \qquad (\gamma > 0),$$

on déduit de l'application réitérée de l'inégalité précédente que l'on a

$$U_\alpha(r') < U_\alpha(r)^{2\frac{1-\alpha}{\alpha}} \qquad \text{si} \qquad r' = r\left[1 + \frac{\log r}{U_\alpha(r)^{2\frac{1-\alpha}{\alpha}}}\right].$$

On peut alors considérer une suite de nombres α_n croissants et tendant vers 1, les valeurs correspondantes ε_n de $2\frac{1-\alpha_n}{\alpha_n}$ tendent vers zéro; si R_n est valeur ordinaire pour α_n, on peut majorer $M(R)$ par $U_{\alpha_n}(r)$ entre R_n et R_{n+1}, et même construire une fonction entière dont les coefficients sont ceux de $U_{\alpha_n}(r)$ lorsque n est compris entre $n(R_n)$ et $n(R_{n+1})$; cette fonction sera à croissance typique, adjointe à l'infiniment petit ε_n, et égale à $M(r)^{1+\delta(r)}$, sauf dans une suite d'intervalles dépendant du mode de décroissance de ε_n.

14. La méthode de majoration précédente ne s'appliquerait qu'à une fonction entière, mais on peut la modifier pour la rendre générale. Soit encore $M(r)$ le maximum du module de la fonction entière $f(z)$, posons

$$\log M(r) = V(X), \qquad X = \log r, \qquad \log \mathfrak{F}_\alpha\left(\frac{r}{l}\right) = v(\mu - X) \qquad (\mu = \log l);$$

on sait que $V(X)$ est une fonction croissante lorsque X croît de $-\infty$ à $+\infty$. M. Blumenthal a en outre montré que cette fonction jouit des propriétés suivantes : il existe une suite de points isolés $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, ayant pour seul point limite $+\infty$, tels que, dans chaque intervalle x_n, x_{n+1}, $V(X)$ est analytique; de chaque côté de x_n, $V(X)$ admet un développement à la Puiseux [1].

Nous allons régulariser $V(x)$ en supprimant les régions où la crois-

---

[1] BLUMENTHAL, *Sur le mode de croissance des fonctions entières* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXV, p. 213).

sance moyenne est moins rapide que celle des fonctions $U_\alpha(r)$, nous chercherons les courbes de la famille Γ

$$y = \lambda + \varphi(\mu - X),$$

qui sont bitangentes à $y = V(X)$. Par chaque point x d'un intervalle x_n, x_{n+1} passe une courbe Γ tangente à $y = V(X)$,

$$y(x, X) = V(x) + \varphi(\mu_x - X) - \varphi(\mu_x - x) \qquad [V'(x) = -\varphi'(\mu_x - x)],$$

la seconde équation déterminant bien μ_x puisque $\varphi'' > 0$. La fonction $y(x, X)$ est analytique en x et X dans chaque intervalle $x_n x_{n+1}$ tel que $x_{n+1} < \mu_x$; d'autre part, $\varphi(X) = y(x, X) - V(X)$ est positif à l'extérieur d'un certain intervalle x_q, x_s; dans cet intervalle, le nombre des zéros de $\varphi(X)$ est fini et les trois cas suivants sont possibles :

1° Quel que soit $X \neq x$, $\varphi(X)$ est positif;
2° Il existe des X pour lesquels $\varphi(X) < 0$;
3° On a toujours $\varphi(X) \geqq 0$, l'égalité ayant lieu en un point au moins distinct de x.

On déduit de là que les points x correspondant à l'une des deux premières hypothèses forment des intervalles en nombre fini pour $x < K$ séparés par des points correspondant à la troisième hypothèse, et l'on arrive à cette conclusion : il existe une suite de points X_1, X'_1, X_2, X'_2, ..., X_n, X'_n, ... ayant pour seul point limite $+\infty$, tels que, pour $X_n < x < X'_n$, $y(x, X)$ est supérieur à $V(X)$, sauf pour $X = x$, et que $y(X'_n, X) = y(X_{n+1}, X) \geqq V(X)$. On peut d'ailleurs avoir $X_n = X'_n$. Si nous prenons

$$\begin{aligned} W(X) &= V(X) && \text{si} \quad X_n \leqq x \leqq X'_n, \\ W(X) &= y(X'_n, X) && \text{si} \quad X'_n \leqq x \leqq X_{n+1}, \end{aligned}$$

la fonction $e^{W(X)}$, qui est constamment supérieure ou égale à $M(R)$, possède les propriétés de croissance des fonctions $U_\alpha(r)$. Si x est valeur ordinaire d'indice α de $f(z)$, on voit de suite que, si $W(x) > V(x)$, on a

$$W(x) - [1 + \delta(x)]\, V(x) < \varphi(\mu - X) - \varphi(\mu - x) - \varphi(\mu_1 - X) + \varphi(\mu_1 - x)$$

pour $X = X'_n$ et $X = X_{n+1}$, et le second membre étant égal à $(\mu - \mu_1)(x - X)\varphi''(\xi)$, quantité négative pour l'un des deux nombres considérés, il faut que

$$V(x(> [1 - \delta(x)] W(x).$$

Pour toute valeur ordinaire, $V(X)$ est supérieur à $W(X)(1 - \delta)$, $W(X)$ est donc égale à $(1 - \delta)\log U_\alpha(r)$; je dirai encore que $e^{W(X)}$ est une majorante d'indice α, bien que ce ne soit pas en général la valeur d'une fonction entière à coefficients positifs.

D'une façon générale, si $e^{\mu(r)}$ est le module maximum d'une fonction $F(z)$ développable en série de Laurent autour du point à l'infini, on peut étendre à $\mu(r)$ les propriétés de $\log M(r)$ démontrées par M. Blumenthal, et si l'on pose

$$\log \mu(r) = V_1(X),$$

on peut, comme ci-dessus, construire une fonction $W_1(X)$ coïncidant avec $V_1(X)$ dans une infinité d'intervalles dont les extrémités ont pour seul point limite $+\infty$ (ces intervalles peuvent tous se réduire à des points), et supérieure à $V_1(X)$ dans les intervalles intermédiaires X''_n, X''_{n+1}, où elle est égale à

$$V_1(X''_n) + \varphi(\mu_p - X) - \varphi(\mu_p - x) \qquad [V'_1(X''_n) = -\varphi'(\mu_p - X''_n)].$$

Je dirai encore que $e_2[W_1(X)]$ est majorante d'indice α de $F(z)$.

En introduisant cette notion, nous déduisons de la proposition VII le résultat suivant :

Soit $F(z)$ *une fonction développable en série de Laurent pour* $r > K$, *soit* $e_2[W_1(X)]$ *la majorante d'indice* α *de cette fonction, si* $\rho(r, a)$ *est un ordre des zéros de* $F(z) - a$, *l'inégalité*

$$\rho(r, \alpha)^{1+\gamma} \log r < W_1(\log r) \qquad (\gamma > 0)$$

ne peut être vérifiée à partir d'une valeur de r *que pour une seule valeur* a.

Supposons qu'une telle valeur a existe, soit $a = 0$, $F(z)$ est de la forme (20). Soit X''_n, X'''_n un intervalle à l'intérieur duquel $W_1(X)$ est inférieur à $\log \mu(r)$; nous avons, en posant $\log M(r) = V(X)$,

$$V(X''_n) > W_1(X''_n) - \delta_n, \qquad V(X'''_n) > W_1(X'''_n) - \delta'_n,$$

et, dans l'intervalle, $W_1(X)$ est de la forme $\lambda + \nu(\mu - X)$; on en déduit comme plus haut que, si x est une valeur ordinaire de $f(z)$ comprise entre X''_n et X'''_n, $V(x)$ est supérieur à $W_1(x) - \delta(x)$, on retombe sur la proposition VII.

On voit, sans qu'il soit nécessaire d'insister, le défaut de ce genre de proposition provenant de ce que la croissance des fonctions $\rho(r)$ et $W_1(\log r)$ peut ne pas être comparable et l'intérêt qu'il y aurait à baser une théorie des produits canoniques sur la considération de fonctions croissant à la façon des fonctions $W(X)$.

III. — Les zéros des fonctions d'ordre infini dans un angle.

15. Nous venons de voir que lorsque les zéros d'une fonction $F(z)$ développable en série de Laurent pour $r > K$ n'ont pas une densité suffisante, ceux des fonctions $F(z) - a$ forment certains amas dans le voisinage des valeurs z_0 pour lesquelles le module atteint son maximum (dans le cas de l'ordre infini). On est conduit à étudier un nouveau cas exceptionnel (ou du moins qui peut sembler tel *a priori*), celui où, dans le voisinage de ces valeurs z_0, la fonction $F(z)$ ne posséderait pas de zéros, ou n'en posséderait pas assez, sans rien supposer sur les zéros situés dans le reste du plan. C'est cette étude que je vais amorcer ici, en commençant par le cas des fonctions d'ordre infini dans un cercle.

J'utiliserai les résultats de la troisième Partie du Mémoire précédent. Si l'on considère une série entière de rayon de convergence 1

$$g(z) = \sum_1^\infty c_n z^n,$$

et si l'on suppose que le maximum $M_1(r)$ du module n'est pas d'ordre nul, c'est-à-dire que

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log_2 M_1(r)}{-\log(1-r)} = \alpha' > 0, \tag{22}$$

on voit, par l'application de procédés bien connus, que

$$\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\log_2 c_n}{\log n} \geqq \frac{\alpha'}{1+\alpha'}.$$

On peut donc appliquer la méthode de comparaison (V., n° 15) en utilisant une fonction d'indice α inférieur à $\frac{\alpha'}{1+\alpha'}$; pour une infinité de valeurs r tendant vers 1, que j'appellerai *valeurs remarquables*, nous obtenons les mêmes résultats que pour les valeurs ordinaires des fonctions entières, et nous avons en particulier le résultat suivant :

IX. *Il existe une suite de valeurs remarquables r telles que, $z_0 = re^{i\varphi_0}$ étant une valeur de z pour laquelle $|g(z)| = M_1(r)$, dans tout le domaine Δ_{z_0} défini par les inégalités*

$$\left(1-\frac{D'}{n}\right)r \leqq |z| \leqq \left(1+\frac{D'}{n}\right)r, \qquad \varphi_0 - \frac{1}{n^{\beta'}} \leqq \varphi \leqq \varphi_0 + \frac{1}{n^{\beta'}},$$

on a

$$g(z) = \left(\frac{z}{z_1}\right) \; g(z_1)[1+\eta(z)] \qquad [\eta(z) < Kn^{-\beta''}]$$

et

$$g(z) = \left(\frac{z}{z_1}\right)^n g(z_1) + \eta(z)$$

si

$$|z - z_1| < Kn^{-\beta} M_1(r)^{-1},$$

β, β', β'' étant des constantes inférieures à 1 dépendant de α, et n le rang du terme maximum.

Pour ces valeurs remarquables, $\log M_1(r)$ est asymptotiquement égal au logarithme du terme maximum de la majorante $k\mathfrak{F}_\alpha(rl)$ (ici l est supérieur à 1); on a donc

$$\log M_1(r) > k' + (1-\delta)(1-\alpha)n^\alpha$$
$$= k' + (1-\delta)\,C\left(\log\frac{1}{rl}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} > K\left(\frac{1}{1-r}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}},$$

ce qui montre que $M_1(r)$ est nécessairement de forme exponentielle lorsque r est valeur remarquable. Il en résulte que la méthode du n° 6 s'appliquera aux équations de la forme

$$G(z) - a = e^{g(z)} P(z) - a = 0,$$

où $P(z)$ est un polynome dont les zéros sont intérieurs au cercle de rayon 1. La condition (22) relative à $g(z)$ se transforme en une condition pour le module maximum $e^{\mu(r)}$ de $G(z)$, car, en vertu de la proposition IX, l'égalité (22) est équivalente à celle obtenue en remplaçant $M_1(r)$ par le maximum de la partie réelle. Je dirai que les fonctions $G(z)$ dont le module maximum vérifie la condition

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log_2 \mu(r)}{-\log(1-r)} > 0 \tag{23}$$

sont *d'ordre infini positif*, et le résultat précédent s'énonce alors sous cette forme : *Si la fonction $G(z)$ holomorphe dans le cercle de rayon 1 est d'ordre infini positif, et si elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans ce cercle, elle prend plus de $\mu(r)$ fois toute valeur a dans chaque domaine Δ_{z_0}.*

C'est un premier complément aux conséquences du théorème de M. Schottky.

16. Considérons maintenant une fonction $G(z)$ d'ordre infini positif dans le cercle de rayon 1, et y prenant une infinité de fois toute valeur. Avec les zéros de $G(z)$ on peut former un produit canonique en suivant une méthode de M. Picard ([1]). Si les zéros sont rangés par ordre de modules croissants, si $a_n = r_n e^{i\varphi_n}$ est le $n^{\text{ième}}$ zéro, on lui associe le point $b_n = e^{i\varphi_n}$, on construit la fonction type $\rho(x)$ adjointe à un infiniment petit $\varepsilon(x)$ et à la suite des nombres $\frac{1}{1-r_n}$, le produit

$$P_1(z) = \prod_1^\infty \mathcal{E}\left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n}, p_n\right) \qquad \left\{ p_n = \mathrm{E}\left[\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+2\varepsilon}\right] \right\}$$

satisfait encore à l'inégalité

$$|\log|P_1(z)|| < \left(1 + \log\frac{1}{d}\right)(1-r)^{-\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\delta(r)}},$$

d étant la plus courte distance du point z aux zéros et à la circonfé-

---

([1]) *Voir* le *Traité d'Analyse* de M. Picard, t. II, 2e édition, p. 150.

rence de rayon 1. On a de même pour la dérivée logarithmique

$$\left|\frac{P_1'(z)}{P_1(z)}\right| = \left|\sum_1^\infty \left[\left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n}\right)^{p_n+1} \frac{1}{z - a_n}\right]\right| < \left(1 + \frac{1}{d}\right)(1-r)^{-\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\delta(r)}}$$

et ces inégalités, qui s'obtiennent exactement comme au n° 10, sont valables même pour $\rho(x)$ constant. A ces inégalités, il faut ajouter celle déduite du théorème de M. Jensen, qui montre le degré de l'approximation faite en donnant une limite inférieure du module maximum de $P_1(z)$; pour chaque r, ce module maximum est supérieur à $\int_0^r N(x)\,dx$, $N(x)$ étant le nombre des zéros de module moindre que x; donc, pour une infinité de r, il est supérieur à

$$(1-r)^{-\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\delta}+1}.$$

Dans le cas de l'ordre fini, cette expression ne coïncide pas avec la limite supérieure donnée ci-dessus, ce qui ne doit pas étonner; on sait, par exemple, qu'un produit canonique peut être borné dans le cercle de convergence et avoir cependant une suite de zéros dont l'exposant de convergence soit aussi voisin de 1 que l'on veut, car une fonction entière d'ordre $1-\gamma$ ayant ses zéros régulièrement placés sur l'axe réel négatif est bornée dans l'angle

$$\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{2\gamma}{1-\gamma}\right) < \varphi < \frac{\pi}{2}\left(3 - \frac{2\gamma}{1-\gamma}\right).$$

Je n'insiste pas sur cette difficulté réelle, qui ne se présente que pour l'ordre fini.

Je dirai encore que $\rho(x)$ est l'ordre du produit canonique $P_1(z)$; mais, avant d'utiliser complètement cette notion, ce qui exigera, comme dans le cas des fonctions entières, des considérations sur le mode de croissance de $\mu(r)$, je démontrerai la proposition suivante :

X. *Si* $G(z)$ *est holomorphe et d'ordre infini positif dans le cercle de* *rayon* 1, *le nombre* $n(r, a)$ *des zéros de* $G(z) - a$ *vérifie la condition*

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log_2 n(r, a)}{-\log(1-r)} > 0, \tag{24}$$

sauf peut-être pour une valeur a.

Car, si pour $a = 0$ par exemple, l'inégalité (24) n'a pas lieu, nous avons

$$\log[n(r, 0)] < -(1-r)^{\delta_r} \log(1-r),$$

δ_r tendant vers o avec $1 - r$; nous aurons donc $\rho(x) = x^{\delta(x)}$, le produit $P_1(z)$ formé avec les zéros de $G(z)$ sera d'ordre infini *nul* (ou d'ordre fini) et, si nous posons

$$G(z) = P_1(z) e^{g(z)},$$

$e^{g(z)}$ est nécessairement d'ordre infini positif, son maximum $M_1(r)$ satisfait à la condition (22). En se reportant aux inégalités données pour $P_1(z)$ et pour sa dérivée logarithmique, on voit que la méthode du n° 11 s'applique sans modification dans tout domaine Δ_{z_0} correspondant à une valeur remarquable de $g(z)$; dans un tel domaine, nous décelons plus de $M_1(r)$ zéros de toute équation $G(z) = a$, et ce nombre des zéros satisfait bien à l'inégalité (24).

On peut également démontrer une proposition analogue à celle du n° 12. Supposons que $G(z)$ soit régulière par rapport à l'ordre, c'est-à-dire que

$$\log \mu(r) = \rho\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\eta(r)} \qquad \left[\lim_{r=1} \eta(r) = 0\right], \tag{25}$$

$\rho(x)$ étant une fonction type satisfaisant à la condition

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log \rho(x)}{\log x} > 1. \tag{26}$$

Supposons que le nombre des zéros de $G(z)$ soit inférieur à sa valeur normale, donc d'ordre $\rho_1(x)$ tel que

$$\rho_1(x)^{1+\gamma} < \rho(x) \qquad (\gamma > 0).$$

Si $A(r)$ est le maximum de la partie réelle de $g(z)$, nous avons

$$\log A(r) = \rho\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\delta(r)},$$

car cette égalité a lieu lorsqu'on exclut des intervalles correspondant aux couronnes contenant les zéros, et en tenant compte de la croissance typique de $\rho(x)$ on voit qu'elle a lieu partout. Nous aurons donc pour les valeurs remarquables, eu égard à la valeur du terme maximum,

$$\log M_1(r) = \rho\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\delta} < 2n,$$

et par suite, si r et r' sont deux valeurs remarquables consécutives,

$$r' < r(1+n^{\alpha-1}) < r\left[1+\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)^{-\gamma'}\right],$$

γ' pouvant être aussi voisin de 1 que l'on veut. On déduit de là, étant donnée l'hypothèse faite sur $\rho(x)$, que

$$\frac{1}{1-r'} < \frac{1}{1-r}\left[1+\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)^{-\gamma''}\right] \qquad (\gamma'' > 0),$$

et on peut alors achever le raisonnement comme au n° 12, ce qui donne ce résultat :

XI. *Si* $G(z)$ *est régulière par rapport à l'ordre* $\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)$ *satisfaisant à la condition* (26) *et si le nombre des zéros vérifie l'inégalité*

$$\overline{\lim_{r=1}} \frac{\log_2 n(r, 0)}{\log \rho\left(\frac{1}{1-r}\right)} < 1,$$

le nombre des zéros de $G(z) - a$ *décelés dans les domaines* Δ_{z_0} *est supérieur à* $e\left[\rho\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\delta}\right]$, *le nombre total des zéros étant égal à cette même expression.*

17. Dans le cas général, on peut remplacer le logarithme $\mu(r)$ du module maximum de $G(z)$ par une fonction plus régulière, en procédant comme au n° 14. Grâce à la condition imposée à $G(z)$ d'être

d'ordre infini positif, on peut construire une majorante $e_2[W_1(r)]$ d'indice α suffisamment petit, telle que

$$\log\mu(r) = W_1(r)$$

dans une suite d'intervalles $R_n R'_n$ (qui peuvent tous se réduire à des points) tandis que, dans les intervalles intermédiaires,

$$\log\mu(r) < W_1(r) = \log k_n + \log \mathfrak{F}_\alpha(rl_n).$$

Pour une fonction $g(z)$ satisfaisant à la condition (22) on définit de même une majorante $e^{V_1(r)}$ d'indice α qui est telle que $\log M_1(r)$ est supérieur à $V_1(r) - \delta(r)$ pour les valeurs remarquables. On obtient ainsi la proposition analogue à celle du n° 14 :

XII. *Soit* $G(z)$ *une fonction d'ordre infini positif dans un cercle de rayon* 1, $e_2[W_1(r)]$ *sa majorante d'indice* α *et* $\rho_1(r)$ *un ordre des zéros Si l'on a, quel que soit* $r > r_0$,

$$\rho_1\left(\frac{1}{1-r}\right)^{1+\gamma} \log\frac{1}{1-r} < W_1(r) \qquad (\gamma > 0),$$

les équations $G(z) - a$ *possèdent plus de* $e[W_1(r)]$ *dans les domaines* Δ_{z_0}, *et par suite l'ordre de leurs zéros ne pourra vérifier l'inégalité précédente.*

18. J'ai indiqué, dans une Note du *Bulletin des Sciences mathématiques* (1920), comment ces propriétés des fonctions holomorphes dans un cercle conduisent à des propriétés des fonctions holomorphes dans une spirale et à croissance suffisamment rapide. Je me bornerai donc à indiquer ici l'un des résultats auxquels on sera conduit :

Soit $F(z)$ une fonction développable en série de Laurent à l'extérieur d'un cercle $|z| > K$ et d'ordre infini positif; il existe au moins un angle A' d'ouverture donnée $2\sigma'$ dans lequel $F(z)$ est holomorphe (pour $|z| > K$), soit par exemple $-\sigma' \leqq \varphi \leqq \sigma'$ cet angle A'. Le maximum du module de $F(z)$ dans le domaine $-\sigma' \leqq \varphi \leqq \sigma'$, $K \leqq |z| \leqq r$ est une fonction non décroissante continue $e^{\mu(r)}$ de r. On peut appliquer à $\mu(r)$ le procédé de majoration du n° 14 et l'on obtient une fonction $e[W_{A'}(r)]$ croissant à la façon de $U_\alpha(r)$, ce sera *la majorante d'indice* α *de* $F(z)$ *dans l'angle* A'. Considérons d'autre part l'ordre $\rho_A(r)$ des zéros de $F(z)$ situés dans l'angle d'ouverture $2\sigma > 2\sigma'$ et de bissectrice $\varphi = 0$; si l'on a

$$\rho_A(r)^{1+\gamma} < W_{A'}(kr) \qquad (\gamma > 0),$$

k étant un nombre fixe inférieur à 1 dépendant de σ et σ', *il existe une suite d'aires* Δ_{r_n} *s'éloignant indéfiniment, à l'intérieur desquelles chaque fonction* $F(z) - a$ *possède au moins* $W_{A'}(kr_n)$ *zéros.*

Ce résultat ne résout pas complètement la question posée au début de ce Chapitre; toutes les aires Δ_{r_n} peuvent ne renfermer aucun zéro de $F(z)$ et cependant $\rho_A(r)$ être supérieur à $W_{A'}(kr)$. C'est une étude approfondie des produits canoniques qui, semble-t-il, permettra de tirer de la proposition fondamentale II tout ce qu'elle renferme.