GASTON JULIA

Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes (troisième mémoire)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 38 (1921), p. 165-181

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1921_3_38__165_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS NOUVELLES

DES

FONCTIONS ENTIÈRES OU MÉROMORPHES

(TROISIÈME MÉMOIRE)

PAR M. GASTON JULIA.

1. Dans deux Mémoires précédents j'ai étudié les valeurs que prend, au voisinage d'un point singulier essentiel isolé à l'infini, une fonction uniforme autour de ce point lorsqu'on s'approche du point étudié sur des courbes continues d'une *forme donnée a priori*, ou par sauts réguliers à l'aide des points $z\sigma^n$, $|\sigma| > 1$ ($n = 1, 2, \ldots, \infty$).

Étant donnée une suite quelconque de nombres complexes σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ dont les modules croissent à l'infini :

$$\Sigma_1 < \Sigma_2 < \ldots < \Sigma_n < \ldots < \Sigma_n \to \infty,$$

on va étudier ici les valeurs que prend la fonction $f(z)$, dont l'infini est point singulier essentiel isolé, aux points successifs $z\sigma_n$.

2. La méthode employée est celle des deux Mémoires précédents. On forme la famille des $f_n(z) = f(z\sigma_n)$ et l'on cherche si la famille des $f_n(z)$ peut être normale dans tout le plan (hors l'origine). Si elle ne peut l'être partout, on appellera E l'ensemble de points où elle cesse d'être normale. Les points de E, distincts de o et ∞, jouiront de la propriété remarquable développée, avec ses conséquences, dans mes deux précédents Mémoires. Si l'on entoure un de ces points d'une aire arbitrairement petite $\mathcal{D}_0$, et si l'on considère les aires $\mathcal{D}_0\sigma_n$ ($n = 1, 2, \ldots, \infty$), *la fonction $f(z)$ prendra toute valeur finie ou infinie (sauf deux au plus) dans l'ensemble de ces aires.*

3. On se bornera, dans le bref exposé qui va suivre, à chercher dans quelle mesure les propriétés établies dans mon *deuxième Mémoire* sont encore valables lorsque, à la suite des nombres σ^n, on substitue une suite croissante quelconque σ_n.

On sera amené à reconnaître que, pour une fonction méromorphe ayant au moins *deux valeurs asymptotiques* (en particulier pour une fonction entière ayant une valeur asymptotique finie), *l'ensemble* E *existera toujours quelle que soit la suite des* σ_n.

On étudiera plus particulièrement le cas où $f(z)$ est une fonction entière, et l'on reconnaîtra le rôle fondamental joué dans cette question par les points limites [1] de l'ensemble $\mathcal{E}$ formé des points $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ $(p, n = 1, 2, \ldots, \infty)$, où les $z_p(a)$ sont les racines de l'équation $f(z) - a = 0$ lorsque a n'est pas valeur exceptionnelle de $f(z)$. On verra notamment que, *lorsqu'il existe un point limite de* $\mathcal{E}$ *distinct de* 0 *et* ∞, *l'ensemble* E *existe certainement* (hors 0 et ∞) pour la suite des σ_n envisagée.

4. On pourra ainsi se rendre compte des deux faits suivants :

1° E *existe toujours* (*hors* 0 *et* ∞) *lorsque la suite des* σ_n *ne croît pas trop vite.*

Par exemple, lorsque $1 \leqq \left|\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}\right| < Q$, Q étant un nombre positif fixe indépendant de l'indice n, E existe toujours, quelle que soit la fonction entière $f(z)$. En particulier, pour les suites régulières, où $\sigma_n = \sigma^n$, on a $\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = \sigma$ fixe et l'on a vu dans le deuxième Mémoire que E existe bien toujours (hors 0 et ∞).

2° E existe toujours (hors 0 et ∞), quelle que soit la suite σ_n, lorsque la fonction entière $f(z)$ *n'a pas des zéros trop rares* [aux zéros on peut substituer les racines de toute équation $f(z) - a = 0$, où a est une valeur finie quelconque. Si a était valeur exceptionnelle, elle serait valeur asymptotique finie, et E existerait sûrement].

---

[1] Lorsqu'une infinité de points $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ seront confondus en un point z_0, ce point z_0 devra être considéré comme point limite de points de $\mathcal{E}$.

Notamment, lorsque l'on a

$$1 \leqq \left| \frac{z_{p+1}}{z_p} \right| < Q,$$

les z_p étant les zéros de $f(z)$, Q un nombre positif fixe, l'ensemble E existera (hors o et ∞) quelle que soit la suite σ_n.

5. Des considérations précédentes il résulte que l'on ne pourra réduire l'ensemble E aux seuls points o et ∞ qu'en choisissant des suites σ_n assez rapidement croissantes et des fonctions $f(z)$ à zéros assez rares pour que, quelle que soit a finie, si l'on désigne par $z_p(a)$ les racines de $f(z) - a = 0$, les $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ $(p = 1, 2, \ldots, \infty; n = 1, 2, \ldots, \infty)$ n'aient d'autre limite que o et ∞.

On formera effectivement l'exemple d'une fonction entière d'ordre nul

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{q^{n^2}}\right) \qquad (q > 1)$$

et d'une suite de nombres σ_n

$$|\sigma_n| = \sqrt{q^{n^2} q^{(n+1)^2}},$$

pour lesquelles l'ensemble E ne compte aucun point distinct de o et ∞. Pour une telle fonction, z étant un point quelconque du plan qui parcourt une région ne contenant ni o ni ∞, les valeurs de $f(z)$ aux points $z\sigma_n$ tendent uniformément vers l'infini avec n.

6. Mais on fera remarquer que pour toute fonction entière, et quelle que soit la suite donnée σ_n, il est possible de déterminer une suite $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ plus rapidement croissante que la suite des σ_n et pour laquelle cependant l'ensemble E existe (hors o et ∞).

Il resterait encore à étudier, au point de vue qui nous occupe, le rôle que peut jouer la *régularité de la croissance* de $f(z)$ ou de la suite σ_n, et à voir dans quelle mesure les résultats obtenus s'étendent aux fonctions méromorphes.

I. — Deux théorèmes généraux.

7. Une suite de nombres complexes à modules indéfiniment croissants $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ étant donnée, ainsi qu'une fonction méromorphe $f(z)$, la famille des $f_n(z) = f(z\sigma_n)$ n'est pas normale à l'origine. J'appelle E l'ensemble composé de tous les points où cette famille n'est pas normale. Le problème est de voir dans quels cas E comprend des points distincts de l'origine et de l'infini.

Théorème I. — *Si $f(z)$ possède deux valeurs asymptotiques a et b distinctes, il existe un point de* E, *au moins, sur toute courbe fermée* C *entourant l'origine.*

La démonstration est identique à celle du n° 40 de mon deuxième Mémoire (*Annales de l'École Normale*, juillet 1920). Car si, sur C, la famille des f_n était normale, elle le serait dans un anneau suffisamment mince contenant C et une suite convenable $f_{n_1}(z), f_{n_2}(z), \ldots, f_{n_p}(z), \ldots$ $(n_p \to \infty)$ convergerait dans cet anneau vers une fonction méromorphe F(z). A cause de la valeur asymptotique a, F(z) devrait être identique à a; F(z) devrait être identique à b à cause de la deuxième valeur asymptotique. L'impossibilité démontre que sur C il existe au moins un point où les $f_n(z)$ ne sont pas normales.

On peut conclure de là que E contient un continu unissant o au point à l'infini du plan z.

8. Le théorème précédent s'applique immédiatement dans deux cas intéressants :

1° *Celui des fonctions entières ayant une valeur exceptionnelle finie a.* Car il existe alors deux chemins allant à l'infini tels que, sur l'un, $f(z)$ tende vers l'infini et, sur l'autre, $f(z)$ tende vers a; a et ∞ sont deux valeurs asymptotiques. *L'ensemble* E *existe (hors* o *et* ∞*) quelle que soit la suite choisie* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$. La fonction entière, en ce cas, ne peut être d'ordre < 1, ainsi qu'en témoignent les résultats connus sur les fonctions entières d'ordre < 1. Mais elle peut être d'ordre 1 comme e^z.

2° *Celui des fonctions méromorphes qui admettent deux valeurs exceptionnelles distinctes.* Car ces deux valeurs sont valeurs asymptotiques. Ces fonctions sont d'ailleurs des transformées homographiques (à coefficients constants) de fonctions entières ayant une valeur exceptionnelle finie. Ce deuxième cas n'est pas distinct essentiellement du premier.

9. Le deuxième théorème qu'on va énoncer met en évidence le rôle fondamental que jouent les points limites de l'ensemble $\mathcal{E}$ composé de tous les points $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ ($p = 1, 2, \ldots, \infty$; $n = 1, 2, \ldots, \infty$); les $z_p(a)$ étant toutes les racines de l'équation

$$f(z) - a = 0$$

[a, valeur non exceptionnelle de $f(z)$, d'ailleurs quelconque]. On ne considérera ici que les fonctions *entières* $f(z)$.

THÉORÈME II. — *Si, pour une valeur finie de a, les $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ admettent un point limite z_0* (1) *qui n'est ni l'origine, ni l'infini, il y a un point au moins de* E *sur toute courbe fermée* C *passant par z_0, et entourant l'origine.*

Soit $\frac{z_{p_1}(a)}{\sigma_{n_1}}, \frac{z_{p_2}(a)}{\sigma_{n_2}}, \ldots, \frac{z_{p_k}(a)}{\sigma_{n_k}}, \cdots$ une suite infinie de points $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ qui tend vers z_0. On considère la famille des $f_{n_k}(z)$ ($k = 1, 2, \ldots, \infty$). Si aucun point de la courbe C n'était point de E, la famille des f_n, normale sur C, serait normale dans une bande Γ, assez fine, contenant la courbe C. De la famille des f_{n_k} on pourrait extraire une nouvelle famille, convergeant uniformément dans Γ vers une limite holomorphe, constante, ou infinie. Or, au point $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$, la fonction $f_n(z) = f(z\sigma_n)$ prend la valeur a. Les f_{n_k} prennent toutes la valeur a respectivement aux points $\frac{z_{p_k}(a)}{\sigma_{n_k}}$ qui, tendant vers z_0, sont à partir

(1) *Voir* la note (1) du n° 3.

d'un certain rang intérieurs à la bande Γ. La limite de la famille extraite des f_{n_k} prend donc la valeur a au point z_0. L'hypothèse d'une limite infinie est donc *exclue*. La limite est holomorphe ou constante dans Γ. Elle est sûrement bornée dans Γ. Cela revient à dire, en considérant non plus les $f_{n_k}(z)$ dans Γ, mais la fonction $f(z)$ dans les bandes successives $\Gamma\sigma_{n_k}$ (qui entourent l'origine et grandissent indéfiniment), que l'on peut trouver parmi ces bandes une suite infinie de bandes dans lesquelles $f(z)$ tend vers une limite holomorphe ou constante, et, en tout cas, dans lesquelles $f(z)$ reste bornée. Ceci est impossible. Donc, sur C, il y a bien au moins un point de E. *Ce peut être z_0 lui-même*, et alors z_0 n'est pas seulement limite pour les $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ correspondant à une valeur finie de a, il est aussi limite pour les $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ quelle que soit la valeur finie a choisie, sauf peut-être pour une valeur exceptionnelle au plus. Car dans tout cercle $\mathfrak{D}_0$ entourant z_0 de E les $f_n(z)$ prennent une infinité de fois toute valeur finie, sauf peut-être une.

10. Le rôle joué par ces points limites des $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ est parfaitement clair lorsqu'on se rappelle la circonstance suivante déjà mise en lumière dans mon *deuxième Mémoire* sur ces questions (précédemment cité).

Il est immédiat que la famille des $f_n(z)$ n'est pas normale en o. Et, pour que le point o puisse être isolé dans E (ce qui arrive si E se réduit à o et à ∞), on a vu par une application facile d'un lemme de Weierstrass (*voir* deuxième Mémoire, n° 11), que toute famille extraite des f_n devait converger vers l'infini autour de o, tout en restant finie en o, ce qui *implique que f_n grandit indéfiniment avec n sur un petit cercle entourant* o. La conclusion reste valable dans toute aire entourant o, où ne se rencontre pas de point de **E** : f_n grandit indéfiniment avec n sauf en o.

Puisque autour de z_0, f_n ne peut grandir indéfiniment avec n à cause de la présence des racines des $f_{\sigma_k}(z) = a$, il y a nécessairement un point de E distinct de o dans toute aire entourant l'origine et contenant z_0.

II. — La rôle de la croissance de $f(z)$ et de la suite σ_n.

11. La croissance de $f(z)$ et de la suite σ_n intervient alors naturellement pour indiquer des cas où il est certain que les $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ ont des points limites distincts de o et de ∞.

12. A. Quelle que soit la fonction entière $f(z)$, l'ensemble E a toujours des points distincts de $(0, \infty)$ lorsque la suite des σ_n n'est pas trop rapidement croissante. En particulier, il en est ainsi lorsque, quel que soit n,

$$1 < \left|\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}\right| < Q,$$

Q étant un nombre positif fixe. Et ceci explique l'existence de l'ensemble E_σ relatif au cas $\sigma_n = \sigma^n$, dont l'étude a été faite dans le deuxième Mémoire.

Soit a une valeur finie non exceptionnelle. Les $z_p(a)$, racines de $f(z) = a$, ont des modules successifs

$$r_1 \leqq r_2 \leqq \ldots \leqq r_p \leqq \ldots \to \infty.$$

Les σ_n ont des modules

$$\Sigma_1 < \Sigma_2 < \Sigma_3 < \ldots < \Sigma_n \to \infty.$$

La suite σ_i étant donnée, quelle que soit la fonction $f(z)$, on pourra intercaler les r_i dans la suite Σ_n

$$\Sigma_{n_p} \leqq r_p \leqq \Sigma_{n_p+1};$$

d'où il suit évidemment

$$1 \leqq \frac{r_p}{\Sigma_{n_p}} \leqq \frac{\Sigma_{n_p+1}}{\Sigma_{n_p}} < Q.$$

A chaque indice p correspond un indice n_p tel que

$$1 < \frac{r_p}{\Sigma_{n_p}} < Q.$$

Il y a donc une infinité de points $\frac{z_p(a)}{\sigma_{n_p}}$ entre les deux cercles de centre O, de rayon 1 et Q. Ces points ont au moins un point limite z_0 entre ces deux cercles. D'où résulte la propriété annoncée.

13. B. Si, pour une valeur finie non exceptionnelle de a, les zéros de la fonction entière $f(z) - a$ ne sont pas trop rares, il existera toujours, quelle que soit la suite σ_n, des points de E distincts de o et de ∞.

Il en sera ainsi, en particulier, si, pour ces zéros $z_p(a)$, on a, quel que soit p,

$$1 \leqq \left| \frac{z_{p+1}(a)}{z_p(a)} \right| < Q.$$

Car, dans la suite des modules $r_p = |z_p(a)|$, s'intercalent les modules Σ_n d'une suite quelconque σ_n de façon que

$$r_{n_p - 1} \leqq \Sigma_p \leqq r_{n_p}.$$

Alors

$$1 \leqq \frac{r_{n_p}}{\Sigma_p} \leqq \frac{r_{n_p}}{r_{n_p - 1}} < Q.$$

D'où l'on conclut aisément que, les points $\frac{z_{n_p}}{\sigma_p}$ ayant au moins un point limite z_0 entre les cercles $|z| = 1$ et $|z| = Q$, il y a entre ces cercles un point au moins de E.

14. Il n'est donc possible d'obtenir un ensemble E réduit à o et ∞, qu'en choisissant :

1° Une suite σ_n très rapidement croissante, plus croissante que toute suite σ^n;

2° Une fonction entière sans valeur asymptotique finie, sans valeur exceptionnelle, ayant des *zéros assez rares*.

Les fonctions d'ordre nul ont toutes ces propriétés.

On va effectivement former de telles fonctions, auxquelles correspondent des suites σ_n croissantes et *telles que l'ensemble* E *se réduise à* o *et* ∞; z_0 étant alors un point quelconque du plan, aux points $z_0\sigma_1$, $z_0\sigma_2$, ..., $z_0\sigma_n$, ... tendant vers l'infini, la fonction $f(z)$ prendra des valeurs qui tendront toujours vers l'infini. Δ étant une *aire quelconque* *du plan z,* ne contenant pas zéro, et $\Delta\sigma_n$ les aires obtenues en multipliant les affixes de Δ par σ_n, *$f(z)$ tendra uniformément vers l'infini dans $\Delta\sigma_n$, quand n grandit indéfiniment.*

15. Il est nécessaire pour cela que quelle que soit la valeur finie a, les $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ n'aient d'autre point limite que o et ∞. Mais pour cela il suffit que le fait se produise pour deux valeurs finies de a. Car, autour de tout point du plan distinct de o, ces deux valeurs seront des valeurs que les $f_n(z) = f(z\sigma_n)$ ne prendront pas, et, par conséquent, les $f_n(z)$ formeront une famille normale en tout point du plan.

1° Choisissons d'abord une fonction entière $f(z)$ dont les zéros z_1, z_2, ..., z_n, ... soient tels que $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \frac{r_{n+1}}{r_n}$ *grandisse indéfiniment avec n.* Par exemple,

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{q^{n^2}}\right) \qquad (q \text{ réel} > 1),$$

où $z_n = q^{n^2}$; $\frac{z_{n+1}}{z_n} = q^{2n+1}$ grandit indéfiniment.

Choisissons maintenant une suite σ_1, σ_2, ..., σ_n, ... dont les modules

$$\Sigma_1 < \Sigma_2 < \ldots < \Sigma_n < \rightarrow \infty$$

soient tels que

$$r_1 < \Sigma_1 < r_2 < \Sigma_2 < \ldots, \qquad < r_n < \Sigma_n < r_{n+1} < \ldots$$

et tels en outre que $\frac{\Sigma_n}{r_n}$ et $\frac{r_{n+1}}{\Sigma_n}$ *tendent vers l'infini* quand n grandit indéfiniment.

On pourra prendre ici

$$\Sigma_n = \sqrt{r_n r_{n+1}} = \sqrt{q^{n^2} q^{(n+1)^2}}.$$

Il est visible, dans ces conditions, que :

a. Si $n \geqq p$,

$$\frac{r_p}{\Sigma_n} \leqq \frac{r_p}{\Sigma_p};$$

par conséquent, p et n grandissant indéfiniment de façon que $n \geqq p$, $\frac{z_p}{\sigma_n}$ tendra vers zéro;

b. Si $n < p$,

$$\frac{r_p}{\Sigma_n} \geqq \frac{r_p}{\Sigma_{p-1}}$$

et, par conséquent, p et n grandissant indéfiniment de façon que $n < p$, $\frac{z_p}{\sigma_n}$ tendra vers l'infini.

Les $\frac{z_p(0)}{\sigma_n}$ n'ont pas d'autre point limite que 0 et ∞.

2° Utilisons maintenant le théorème suivant qui figure dans la Thèse de M. Valiron : *Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini* (p. 30).

« Pour toute fonction $f(z)$ dont les zéros vérifient la condition

$$n[\log r_{n+1} - \log r_n] \geqq \frac{1}{\omega_1} \qquad (\omega_1 < \omega) \text{ pour } n > n_0,$$

ω étant un nombre compris entre 0 et 1, racine de l'équation

$$\frac{\pi^2}{6} x^3 - \frac{\pi^2}{3} x^2 - x + 1 = 0,$$

si l'on désigne par $z_n(a)$ le $n^{\text{ième}}$ zéro de la fonction

$$f(z) - a[z_n(0) = z_n],$$

on aura, quel que soit a, pourvu que $|a| < A$,

$$|z_n(a) - z_n| < \frac{1}{|z_n|^k} \qquad \text{pour } n > n_0(A),$$

k étant un nombre positif fixe. »

La fonction entière considérée ici est telle que $\log r_{n+1} - \log r_n$ grandit indéfiniment avec n; donc, à partir d'un certain rang, on a bien

$$n[\log r_{n+1} - \log r_n] > \frac{1}{\omega_1}.$$

Il en résulte donc que l'on aura, quel que soit a pour $|a| < A$,

$$|z_p(a) - z_p| < \frac{1}{|z_p|^k} \qquad \text{pour } p > p_0(A),$$
$$\left|\frac{z_p(a)}{\sigma_n} - \frac{z_p}{\sigma_n}\right| < \frac{1}{\Sigma_n r_p^k},$$

quel que soit n pour $p > p_0(A)$.

L'un au moins des deux nombres p ou n grandissant indéfiniment, $\frac{1}{\Sigma_n r_p^k}$ tend vers zéro et $\frac{z_p}{\sigma_n}$ tend vers zéro ou vers l'infini. Les points $\frac{z_p(a)}{\sigma_n}$ ne peuvent donc avoir, comme les $\frac{z_p}{\sigma_n}$, d'autre point limite que zéro ou l'infini.

Cela suffit pour affirmer que, en tout point distinct de $(0, \infty)$, la famille des $f_n(z) = f(z\sigma_n)$ est normale. E ne compte que les deux points o et ∞.

Si donc on entoure o d'une couronne Γ limitée par deux courbes fermées quelconques, et si l'on considère les couronnes successives $\Gamma_n = \Gamma\sigma_n$ qui s'éloignent indéfiniment, $f(z)$ prend dans Γ_n des valeurs qui tendent vers l'infini avec n, et cela, uniformément.

16. Mais il ne faut pas croire que la croissance très rapide de la suite des zéros de $f(z)$ d'une part et de la suite σ_n d'autre part suffisent à réduire l'ensemble E aux seuls points o et ∞. On va voir, en effet, que, étant donnée une fonction entière *quelconque* et une suite σ_n *quelconque*, on peut déterminer une nouvelle suite $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, plus rapidement croissante que la suite σ_n, et d'ailleurs aussi croissante qu'on voudra, telle cependant que, pour cette suite s_n, il existe des points de E distincts de o et ∞.

Il suffit pour le montrer de prouver que pour une certaine valeur a, finie, l'ensemble des $\frac{z_p(a)}{s_n}$ admet un point limite au moins, distinct de o et ∞.

Prenons par exemple $a = 0$ et soient $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_p, \ldots$ les zéros successifs de $f(z)$. Envisageons la suite des nombres $S_n = \frac{z_n}{z_0}$. C'est une suite croissante et l'on peut d'ailleurs en extraire une suite s_n aussi rapidement croissante qu'on voudra, en particulier plus rapidement croissante que la suite σ_n. Cette suite s_n satisfait aux conditions requises, car, au point z_0, les $f_n(z) = f(zs_n)$ sont toutes égales à *zéro* puisque tous les points $z_0 s_n$ sont des zéros de $f(z)$. Ce z_0 est point limite des $\frac{s_p}{s_n}$ et il est distinct de o. Sur toute courbe fermée passant par z_0, et entourant l'origine, il y a donc au moins un point de E. Si l'on entoure ce point de E d'une aire D_0 aussi petite qu'on veut, et si l'on considère toutes les aires $D_0 s_n$, qui tendent aussi rapidement vers l'infini qu'on le voudra, la fonction $f(z)$ prendra, dans ces aires, toute valeur finie, sauf peut-être une seule.

III. — Application aux fonctions méromorphes générales.

17. La considération des suites s_i qu'on obtient par le rapport des racines $z_i(a)$ $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$ d'une équation $\varphi(z) - a = 0$, à la première racine $z_0(a)$ de cette équation, permet encore de tirer des conclusions intéressantes lorsque $\varphi(z)$ est une fonction méromorphe quelconque.

Si une fonction méromorphe $\varphi(z)$ admet une valeur exceptionnelle, c'est une transformée homographique, à coefficients entiers, d'une fonction entière, et ce qu'on a dit des fonctions entières s'applique. Prenons donc $\varphi(z)$ sans valeur exceptionnelle et considérant les racines $z_0(a)$ [1], $z_1(a), \ldots, z_p(a), \ldots$ de l'équation

$$\varphi(z) - a = 0 \qquad (a \text{ quelconque } \textit{fini}),$$

formons la suite

$$s_i = \frac{z_i(a)}{z_0(a)}$$

et la famille des

$$\varphi_n(z) = \varphi(zs_n).$$

Au point z_0, la famille des φ_n peut être normale ou ne pas l'être. Envisageons successivement ces deux hypothèses.

---

[1] Si l'origine est racine de $\varphi(z) - a = 0$, on la laissera de côté dans l'énumération $z_0, z_1, \ldots$.

18. 1° *Supposons la famille des φ_n normale en z_0*. En ce point, toutes les $\varphi_n(z_0)$ sont égales à a :

$$\varphi_n(z_0) = \varphi(z_0 s_n) = \varphi(z_n) = a.$$

Les φ_n, méromorphes dans tout le plan, égales à a en z_0, sont telles que toute fonction limite $\Phi(z)$ extraite de la suite des φ_n, et méromorphe dans un certain cercle de centre z_0, prend, en z_0, la valeur a,

$$\Phi(z_0) = a.$$

Il est par là même impossible que les racines des équations

$$\varphi_n(z) - b = 0$$

$\left[\text{qui ne sont autres que les points } \dfrac{z_p(b)}{s_n} (p = 1, 2, \ldots, \infty;\ n = 1, 2, \ldots, \infty)\right]$ admettent le point z_0 pour point limite, b étant une valeur quelconque distincte de a. Car l'existence d'une suite de $\dfrac{z_p(b)}{s_n}$ tendant vers z_0 entraînerait l'existence d'une fonction $\Phi(z)$, limite pour une suite extraite des $\varphi_n(z)$, méromorphe en z_0 et prenant en z_0 la valeur b, ce qui est contradictoire avec le fait que toute fonction limite $\Phi(z)$ est égale à a en z_0.

On peut même dire que dans tout domaine D, contenant z_0, dans lequel et sur la frontière duquel la famille des $\varphi_n(z)$ reste normale, le nombre des racines de $\varphi_n(z) - b = 0$, chacune étant comptée avec son ordre de multiplicité, ne peut dépasser un nombre fixe. Dans le cas où $b = \infty$ qu'on peut toujours supposer réalisé par un changement homographique de $\varphi(z)$, cela veut dire que les $\varphi_n(z)$ bornées en z_0 ne peuvent avoir dans D qu'un nombre limite de pôles dès l'instant qu'elles forment une famille normale dans D et sur sa frontière : ceci est un théorème connu que j'ai eu l'occasion d'appliquer déjà aux fonctions méromorphes dans mes deux précédents Mémoires.

Retenons simplement que les $\dfrac{z_p(b)}{s_n}$ ne peuvent admettre z_0 pour point limite. Il en résulte immédiatement que, *quel que soit b différent de a, en comparant les racines $z_p(a)$ et $z_q(b)$ des équations*

$$\varphi(z) - a = 0,$$
$$\varphi(z) - b = 0,$$

on peut affirmer ici que, quels que soient p et q, on a

$$\left|\frac{z_p(a)}{z_q(b)} - 1\right| > \varepsilon,$$

ε étant un certain nombre positif fixe.

Car l'hypothèse contraire permettrait de trouver une suite $q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots$ croissant indéfiniment, à laquelle correspondrait une suite $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ telle que $\frac{z_{p_k}(a)}{z_{q_k}(b)}$ tendrait vers 1 quand k augmente indéfiniment. Alors les points

$$\frac{z_{q_k}(b)}{s_{p_k}} = \frac{z_{q_k}(b)}{z_{p_k}(a)} z_0(a)$$

auraient pour point limite $z_0(a)$, ce qui contredit le résultat précédent.

19. 2° Si a et b étant deux nombres distincts quelconques, on peut choisir *parmi les racines* de l'équation

$$\varphi(z) - a = 0$$

une suite infinie $Z_1(a), Z_2(a), \ldots, Z_p(a), \ldots$ et parmi les racines de

$$\varphi(z) - b = 0$$

une suite $Z_1(b), Z_2(b), \ldots, Z_p(b), \ldots$ telle que $\frac{Z_p(a)}{Z_p(b)}$ *tende vers l'unité quand p devient infini;* alors il est impossible que la famille des

$$\Phi_n(z) = \varphi(z S_n) \quad (^1)$$

formée avec les nombres S_n qui sont les quotients des racines $Z_n(a)$ de $\varphi(z) - a = 0$ par la plus petite z_0 $\left[S_n = \frac{Z_n(a)}{z_0(a)}\right]$ soit normale au point z_0; on est alors dans le deuxième cas signalé plus haut. Dans toute aire D_0 entourant z_0, les fonctions Φ_n prendront une infinité de fois toute valeur finie ou infinie, sauf peut-être deux au plus, ce qui veut dire que,

---

(1) La famille des Φ_n fait partie de la famille des φ_n.

parmi les racines de toute équation

$$\varphi(z) - c = 0$$

(quel que soit c, sauf peut-être pour deux valeurs au plus), *on peut choisir une suite infinie* $Z_1(c), Z_2(c), \ldots, Z_p(c), \ldots$ à laquelle correspondra une suite infinie [1] de racines de $\varphi(z) - a = 0$, $\zeta_1(a)$, $\zeta_2(a), \ldots, \zeta_p, \ldots$ *telle que* $\frac{Z_p(c)}{\zeta_p(a)}$ *tende vers l'unité quand p devient infini.*

Les points $z_0 s_n$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ qui sont toutes les racines de $\varphi(z) - a = 0$ s'approchent *asymptotiquement* aussi près qu'on veut d'une infinité de racines de toute équation $\varphi(z) - c = 0$, sauf peut-être pour deux valeurs de c. C'est un fait remarquable de distribution que deux équations

$$\varphi(z) - a = 0,$$
$$\varphi(z) - b = 0$$

ne puissent avoir une infinité de racines *asymptotiquement équivalentes* $\left[\frac{Z_p(a)}{Z_p(b)} \to 1 \text{ pour } p \to \infty\right]$ sans que toute équation $\varphi(z) - c = 0$, hormis peut-être deux d'entre elles, ait aussi une infinité de racines asymptotiquement équivalentes à une infinité de racines de $\varphi(z) - a = 0$.

20. Comme a et b jouent des rôles comparables, l'hypothèse étant simplement que *les deux équations*

$$\varphi(z) - a = 0, \qquad \varphi(z) - b = 0$$

ont une infinité de racines asymptotiquement équivalentes, on verra que toute équation $\varphi(z) - c = 0$ (sauf deux valeurs peut-être) aura une infinité de racines équivalentes à une infinité de racines de

$$\varphi(z) - b = 0;$$

ces racines peuvent n'être pas les mêmes que celles qui équivalent asymptotiquement à une infinité de racines de $\varphi(z) - a = 0$.

D'une façon générale, si α n'est pas une des deux valeurs exceptionnelles possibles qui correspondent à a, $\varphi(z) - a = 0$ et $\varphi(z) - \alpha = 0$

---

[1] Les $\zeta_i(a)$ pourront faire partie des $Z_i(a)$.

ont une infinité de racines équivalentes, alors *si* β *n'est pas une des deux valeurs exceptionnelles possibles qui correspondent à* α, $\varphi(z) - \alpha = 0$ *et* $\varphi(z) - \beta = 0$ *auront toujours une infinité de racines équivalentes.*

IV. — Indications sur le rôle que peut jouer la régularité de la croissance de $f(z)$ ou de la suite σ_n.

21. Si la fonction $f(z)$, entière, est à croissance régulière et d'ordre fini ρ non entier, la suite des zéros de $f(z)$ ou celle des zéros de $f(z) - a$ quel que soit a est à croissance régulière, ce qui veut dire que le module r_n du $n^{\text{ième}}$ zéro possède un ordre d'infinitude ρ bien déterminé (Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, Note II). On pourra poser

$$r_n = n^{\frac{1}{\rho} + \varepsilon(n)},$$

$\varepsilon(n)$ tendant vers zéro lorsque n grandit indéfiniment.

Alors le rapport

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = e^{\left[\frac{1}{\rho} + \varepsilon(n+1)\right] \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \times e^{\mathrm{L}n[\varepsilon(n+1) - \varepsilon(n)]}$$

est asymptotiquement équivalent à $e^{\mathrm{L}n[\varepsilon(n+1) - \varepsilon(n)]}$ puisque

$$\left[\frac{1}{\rho} + \varepsilon(n+1)\right] \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Toutes les fois qu'on pourra affirmer que $\mathrm{L}n[\varepsilon(n+1) - \varepsilon(n)]$ *reste borné*, on pourra conclure qu'il existe un nombre Q pour lequel

$$1 \leqq \frac{r_{n+1}}{r_n} < \mathrm{Q}$$

et par conséquent quelle que soit la suite σ_n choisie, l'ensemble E qu'elle détermine pour $f(z)$ aura des points distincts de 0 et ∞.

Chacun de ces points z_0 est tel que dans l'ensemble des aires $\omega_0 \sigma_n$ ($n = 1, 2, \ldots, \infty$) (ω_0, aire arbitrairement petite autour de z_0) $f(z)$ acquiert toutes les valeurs finies, sauf peut-être une. Ce sera le cas si $\varepsilon(n)$ est borné par une puissance positive quelconque de $\frac{1}{n}$, et aussi si l'on a simplement

$$|\varepsilon(n)| < \frac{A}{Ln} \qquad (\text{A fixe positif}),$$

ce qui donne un infiniment petit $\varepsilon(n)$ décroissant beaucoup moins vite qu'une puissance positive de $\frac{1}{n}$. Il s'introduit ainsi pour l'évaluation de la décroissance de $\varepsilon(n)$ des considérations délicates et d'ailleurs habituelles dans ce genre de questions.

22. La même remarque peut être faite en ce qui concerne la suite σ_n. Si elle a un ordre d'infinitude déterminé ρ, on peut écrire

$$|\sigma_n| = n^{\frac{1}{\rho}+\varepsilon(n)},$$

et lorsque $Ln[\varepsilon(n+1) - \varepsilon(n)]$ restera borné, il existera un nombre Q tel que

$$1 < \left|\frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n}\right| < Q.$$

Par conséquent, pour toute fonction $f(z)$ entière, la suite σ_n fournira un ensemble E, avec des points distincts de o et ∞, jouissant de la propriété que nous avons reconnue antérieurement et qui approfondit le théorème classique de M. Picard.