ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEORGES GIRAUD

Sur certaines fonctions automorphes de deux variables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 38 (1921), p. 43-164
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1921_3_38__43_0>

SUR

CERTAINES FONCTIONS AUTOMORPHES

DE DEUX VARIABLES

PAR M. GEORGES GIRAUD.

INTRODUCTION.

Ayant dans un Ouvrage récent (¹) étudié les propriétés communes à un grand nombre de fonctions automorphes de n variables, je me propose d'approfondir ici ce qui concerne les fonctions de deux variables introduites dans la Science par M. Picard, dont le groupe reproductif est linéaire ou hyperabélien.

Dans cette étude, je m'attache principalement à celles de ces fonctions dont le prolongement analytique ne sort pas du domaine principal (intérieur de l'hypersphère principale pour les groupes linéaires, intérieurs des deux cercles associés pour les groupes hyperabéliens). J'arrive, pour les deux sortes de fonctions, à cette conclusion que, pourvu que l'hyperpolyèdre fondamental rayonné correspondant n'ait qu'un nombre fini de faces, trois fonctions correspondant à un même groupe sont toujours liées par une relation algébrique; et toutes les fonctions correspondant à un même groupe s'expriment rationnellement au moyen de trois d'entre elles. Ce résultat découle tout naturellement (Chap. IV et VII) de l'étude des parties de l'hyperpolyèdre fondamental qui se trouvent sur la frontière du domaine principal (Chap. III et VI).

(¹) G. GIRAUD, *Leçons sur les fonctions automorphes* (Paris, 1920); les principaux résultats se trouvent également dans un Mémoire *Sur les fonctions automorphes* (*Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. XXXVI, 1919).

Cette étude est préparée (Chap. I et V) par la classification des substitutions linéaires ou hyperabéliennes et par l'application de la méthode du rayonnement à certains groupes particuliers. Il est bon de noter tout de suite qu'elle est beaucoup plus complexe dans le cas hyperabélien que dans le cas linéaire.

En ce qui concerne le cas linéaire seul, j'ai ajouté (Chap. II) une étude détaillée de l'hyperpolyèdre fondamental rayonné. Cette étude n'est pas indispensable pour obtenir les résultats du Chapitre suivant, mais elle a l'avantage de rapprocher la théorie des fonctions automorphes de M. Picard à groupe linéaire de celle des fonctions de Poincaré, telle que l'édifia l'illustre analyste. On y verra ce que deviennent les conditions de discontinuité; les arêtes à deux dimensions de l'hyperpolyèdre fondamental se partagent à ce point de vue en deux catégories bien distinctes : les arêtes *planes* offrent une analogie complète avec les sommets du polygone fondamental des groupes de Poincaré; pour les arêtes gauches, au contraire, les conditions de discontinuité prennent une forme entièrement différente.

Enfin, j'ai indiqué (Chap. IV et VII), à la suite de M. Picard, les systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles qu'on peut faire correspondre à des groupes linéaires ou hyperabéliens donnés; les lignes singulières de ces systèmes sont également étudiées.

Les résultats de ce travail ont été annoncés dans plusieurs Notes (¹). Ceux qui concernent les groupes linéaires ont aussi en grande partie été exposés au Collège de France, en 1919; mais, pour ces mêmes groupes, les démonstrations ont été modifiées dans le travail actuel : plus courtes, elles se rapprochent de celles qui conviennent aux fonctions de n variables et qui feront l'objet d'un autre travail (²).

(¹) G. GIRAUD, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 164, 1917, p. 386 et 487; t. 166, 1918, p. 24.

(²) G. GIRAUD, *Comptes rendus*, t. 169, 1919.

PREMIÈRE PARTIE.

GROUPES LINÉAIRES DE M. PICARD.

CHAPITRE PREMIER.

CLASSIFICATION DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES.

1. Nous nous proposons d'établir une classification complète des substitutions linéaires de M. Picard, analogue à la classification des substitutions de Poincaré en elliptiques, hyperboliques, paraboliques. Les lignes principales de cette classification ont été trouvées indépendamment par Poincaré [1] et par M. Picard [2].

Dans ce but, nous chercherons une transformée $T^{-1}ST$ d'une substitution S donnée qui puisse être regardée comme forme canonique correspondant à S.

2. Mettons, comme nous le ferons le plus souvent ici, l'hermitien ternaire qui, égalé à zéro, représente en coordonnées homogènes la frontière du domaine principal, sous la forme

$$xx_0 + yy_0 - zz_0; \tag{1}$$

les indices *zéro*, ici et dans la suite de ce travail, servent à distinguer les imaginaires conjuguées.

Soit

$$\left\{\begin{aligned} X &= a\,x + b\,y + c\,z,\\ Y &= a'x + b'y + c'z,\\ Z &= a''x + b''y + c''z,\end{aligned}\right. \tag{2}$$

ou simplement

$$\left\{\begin{matrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{matrix}\right\},$$

(1) Poincaré, *Œuvres*, t. II, p. 62.

(2) Picard, *Comptes rendus*, t. 98, 1884, p. 416.

une substitution changeant cette forme en elle-même. Des relations

$$\begin{aligned} aa_0+a'a'_0-a''a''_0&=1,\\ bb_0+b'b'_0-b''b''_0&=1,\\ cc_0+c'c'_0-c''c''_0&=-1,\\ ab_0+a'b'_0-a''b''_0&=0,\\ ac_0+a'c'_0-a''c''_0&=0,\\ bc_0+b'c'_0-b''c''_0&=0,\end{aligned}$$

nous tirons d'abord la conclusion que la valeur absolue de

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix}$$

est égale à *un*.

Or dans la substitution linéaire correspondante interviennent seulement les rapports mutuels de $a, b, c, \ldots, c''$. Nous pouvons donc multiplier tous ces coefficients par une même détermination de $\Delta^{-\frac{1}{3}}$. Mais les produits sont encore les coefficients d'une transformation de la forme (1) en elle-même, dont le déterminant est maintenant égal à *un*. Nous supposerons donc que

$$\Delta=1.$$

Le tableau des mineurs du déterminant de la substitution est alors

$$\left\{\begin{matrix} a_0 & b_0 & -c_0\\ a'_0 & b'_0 & -c'_0\\ -a''_0 & -b''_0 & c''_0\end{matrix}\right\}.$$

Considérons maintenant l'équation en s

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} a-s & b & c\\ a' & b'-s & c'\\ a'' & b'' & c''-s\end{vmatrix}=0,$$

dont les racines se nomment les *multiplicateurs* de la substitution. Nous tirerons de ce qui précède, avec M. Picard, la conclusion que *l'imaginaire conjuguée de l'inverse d'un multiplicateur est un multiplicateur*.

3. *Cas où les valeurs absolues des trois multiplicateurs sont distinctes.* — Dans ce cas, l'un des trois multiplicateurs a sa valeur absolue différente de *un*; il est donc distinct du conjugué de son inverse, qui est un second multiplicateur. Le troisième multiplicateur est égal, par suite, au conjugué de son propre inverse, c'est-à-dire que sa valeur absolue égale *un*. Soient $re^{i\theta}$ et $\frac{e^{i\theta}}{r}$ les deux premiers multiplicateurs; comme le produit des trois multiplicateurs égale *un*, le troisième est $e^{-2i\theta}$.

Transformons la substitution (2) par une substitution linéaire telle que la substitution transformée soit

$$X = re^{i\theta}x, \qquad Y = e^{-2i\theta}y, \qquad Z = \frac{e^{i\theta}}{r}z. \tag{4}$$

La substitution de transformation change (1) en un hermitien inaltéré par (4), c'est-à-dire en un hermitien tel que

$$\alpha' yy_0 + \beta' zx_0 + \beta'_0 z_0 x,$$

α' et β' étant certaines constantes. Ni α' ni β' ne sont nuls, puisque cet hermitien équivaut algébriquement à (1); nous pouvons même assurer que α' est *positif*. Faisons une nouvelle transformation, consistant à multiplier x, y, z par des constantes; la substitution transformée reste (4), mais nous pouvons faire en sorte que α' et β' deviennent égaux à *un*, et que le déterminant du produit de nos deux substitutions de transformation devienne égal à *un*. L'hermitien (1) est donc devenu

$$yy_0 + zx_0 + z_0 x.$$

Faisons une dernière transformation consistant à remplacer $x + z$ par $x\sqrt{2}$ et $-x + z$ par $z\sqrt{2}$. Comme

$$yy_0 + zx_0 + z_0 x = yy_0 + \frac{1}{2}(x+z)(x_0+z_0) - \frac{1}{2}(x-z)(x_0-z_0),$$

notre hermitien redevient (1). Le déterminant du produit de nos trois substitutions transformatrices est égal à *un* : donc ce produit est une substitution du groupe considéré. La substitution donnée est devenue

$$\begin{Vmatrix} e^{i\theta}\dfrac{r^2+1}{2r} & 0 & e^{i\theta}\dfrac{r^2-1}{2r} \\ 0 & e^{-2i\theta} & 0 \\ e^{i\theta}\dfrac{r^2-1}{2r} & 0 & e^{i\theta}\dfrac{r^2+1}{2r} \end{Vmatrix},$$

Or r est positif. Posons donc

$$r = e^u,$$

u étant réel. La substitution s'écrit

$$(5)\qquad \begin{Vmatrix} e^{i\theta}\operatorname{ch} u & 0 & e^{i\theta}\operatorname{sh} u \\ 0 & e^{-2i\theta} & 0 \\ e^{i\theta}\operatorname{sh} u & 0 & e^{i\theta}\operatorname{ch} u \end{Vmatrix}.$$

C'est la forme canonique des substitutions correspondant à ce cas, et que nous nommerons substitutions *hyperboliques*.

Nous trouvons, sur la forme canonique, que ces substitutions ont trois points doubles, dont l'un ($x = z = 0$, $y = 1$) est extérieur à l'hypersphère

$$(6)\qquad xx_0 + yy_0 - zz_0 = 0,$$

c'est-à-dire extérieur au domaine principal; les deux autres

$$(x = z = 1,\ y = 0, \text{ et } x = -z = 1,\ y = 0)$$

sont sur la frontière de ce domaine; nous pouvons remarquer, avec Poincaré, qu'ils sont sur la *polaire* du premier point double, en nommant *polaire* du point de coordonnées homogènes α, β, γ la droite

$$\alpha_0 x + \beta_0 y - \gamma_0 z = 0.$$

La puissance m de la transformation (5) s'obtient, que m soit positif ou négatif, en changeant θ en $m\theta$ et u en mu. Si u est par exemple positif, quand m tend vers $+\infty$, les transformés d'un point A donné tendent vers le point double $(1, 0, 1)$, sur l'hypersphère, sauf si A appartient à la multiplicité

$$x + z = 0.$$

Dans ce dernier cas, A tend vers le point double (0, 1, 0), à moins cependant qu'il ne soit confondu avec le dernier point double (1, 0, -1). Si m tend vers $-\infty$, les rôles des deux points doubles sur l'hypersphère sont échangés, et $x+z=0$ est remplacé par $x-z=0$. Le groupe des puissances d'une substitution hyperbolique est donc discontinu, sauf pour les trois points doubles.

4. *Cas où les multiplicateurs sont distincts sans que leurs valeurs absolues le soient.* — On voit comme au début du dernier paragraphe que si l'un des trois multiplicateurs a une valeur absolue autre que *un*, les valeurs absolues des trois multiplicateurs sont distinctes. Donc, dans le cas actuel, tous les multiplicateurs sont égaux à *un* en valeur absolue. Soient $e^{i\theta'}$, $e^{i\theta''}$, $e^{i\theta'''}$ ces multiplicateurs. On a

$$\theta' + \theta'' + \theta''' = 2k\pi,$$

k étant entier; aucune des différences $\theta' - \theta''$, $\theta' - \theta'''$, $\theta'' - \theta'''$ n'est un multiple de 2π.

Transformons linéairement la substitution (2), de façon qu'elle devienne

$$X = xe^{i\theta'}, \qquad Y = ye^{i\theta''}, \qquad Z = ze^{i\theta'''}.$$

L'hermitien (1) devient

$$\alpha x x_0 + \alpha' y y_0 + \alpha'' z z_0,$$

deux des trois coefficients α, α', α'' étant positifs, le troisième négatif. Une nouvelle substitution de transformation, consistant à multiplier x, y, z par des constantes et éventuellement à les disposer dans un autre ordre, remet l'hermitien sous la forme (1), le déterminant de la substitution de transformation totale étant égal à *un*. La substitution donnée prend sa *forme canonique*

$$(6) \qquad \begin{Bmatrix} e^{i\theta'} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta''} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta'''} \end{Bmatrix},$$

où θ', θ'' et θ''' sont peut-être rangés dans un autre ordre qu'il y a un instant.

Les substitutions correspondant à ce cas se nomment *substitutions elliptiques à trois points doubles*. Il y a en effet trois points doubles, dont deux [(1, 0, 0) et (0, 1, 0)] sont extérieurs au domaine principal, et le troisième (0, 0, 1) est intérieur à ce domaine; la polaire de chacun d'eux contient les deux autres.

Le groupe des puissances d'une telle transformation n'est discontinu que si θ', θ'', θ''' sont commensurables avec π [1]; ce groupe ne comprend alors qu'un nombre fini de substitutions.

5. *Cas où deux des multiplicateurs sont égaux, le troisième différent.* — Dans ce cas encore, tous les multiplicateurs sont égaux à *un* en valeur absolue.

Ce cas se divise en deux autres, selon que, par une transformation convenable, la substitution peut prendre l'une ou l'autre des formes

$$(7) \qquad X = s'x, \qquad Y = s''y, \qquad Z = s'z$$

ou

$$(8) \qquad X = s'x, \qquad Y = s''y, \qquad Z = s'(x+z).$$

Prenons d'abord le premier cas, bien que ce soit le plus particulier. Les multiplicateurs peuvent s'écrire

$$s' = e^{i\theta}, \qquad s'' = e^{-2i\theta}$$

et

$$e^{3i\theta} \neq 1.$$

En raisonnant comme au paragraphe précédent, on trouve que ces substitutions se ramènent à l'une ou l'autre des formes canoniques

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} \end{vmatrix},$$

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} e^{i\theta} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2i\theta} \end{vmatrix}.$$

---

[1] G. Giraud, *Leçons sur les fonctions automorphes*, Chap. I, § 18; on voit d'abord que $\theta' - \theta'''$ et $\theta'' - \theta'''$ sont commensurables avec π.

Le raisonnement est un peu allongé par le fait que, par la première substitution de transformation, mettant la substitution donnée sous la forme (7), l'hermitien (1) devient

$$\alpha x x_0 + \alpha' y y_0 + \alpha'' z z_0 + \beta' z x_0 + \beta'_0 z_0 x;$$

mais une transformation linéaire ultérieure sur x et z permet d'annuler β', et l'on peut continuer comme au paragraphe précédent.

Ces substitutions se nomment *substitutions elliptiques à plan double*. La première forme canonique a un point double (0, 1, 0) extérieur au domaine principal, et un plan double $y = 0$ pénétrant dans ce domaine. La seconde forme canonique a un point double (0, 0, 1) intérieur au domaine principal, et un plan double $z = 0$ extérieur à ce domaine.

Le groupe des puissances de ces substitutions n'est discontinu que si $\theta : 2\pi$ est rationnel; il est alors fini.

6. Passons au cas où la substitution donnée peut se ramener à (8). Les multiplicateurs sont encore

$$s' = e^{i\theta}, \qquad s'' = e^{-2i\theta} \qquad (e^{3i\theta} \neq 1).$$

La substitution donnée étant ramenée à la forme (8), l'hermitien (1) devient

$$\alpha x x_0 + \alpha' y y_0 + \beta'(z x_0 - z_0 x);$$

α' est positif, et β' purement imaginaire. En faisant la transformation qui ajoute à z un multiple convenable de x, on ne change pas la substitution (8), mais on annule α. En faisant la transformation qui multiplie x et z par un même facteur et y par un autre facteur, on ne change pas (8), mais (1) devient

$$y y_0 + \varepsilon i(z x_0 - z_0 x) \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

et l'on peut en outre faire en sorte que le déterminant de la substitution transformatrice égale *un*. Cet hermitien s'écrit encore

$$\frac{1}{2}(x + \varepsilon i z)(x_0 - \varepsilon i z_0) - \frac{1}{2}(x - \varepsilon i z)(x_0 + \varepsilon i z_0) + y y_0.$$

Changeons $x + \varepsilon i z$ en $x\sqrt{2}$ et $-x + \varepsilon i z$ en $z\sqrt{2}$: l'hermitien redevient (1), et la substitution prend sa forme canonique

$$
(11)\qquad \begin{vmatrix} \frac{2+\varepsilon i}{2}e^{i\theta} & 0 & \frac{\varepsilon i}{2}e^{i\theta} \\ 0 & e^{-2i\theta} & 0 \\ \frac{-\varepsilon i}{2}e^{i\theta} & 0 & \frac{2-\varepsilon i}{2}e^{i\theta} \end{vmatrix}.
$$

Ce sont les substitutions *paraboliques à deux points doubles*. Les deux points doubles sont, pour la forme canonique, (1, 0, — 1) sur l'hypersphère principale, (0, 1, 0) à l'extérieur.

Nous étudierons les puissances de ces substitutions un peu plus loin.

7. *Cas où les trois multiplicateurs sont confondus.* — La valeur commune des trois multiplicateurs est alors une racine cubique de l'unité. En multipliant tous les coefficients de la substitution par une même racine cubique de l'unité, on se ramène au cas où tous les multiplicateurs sont égaux à *un*.

Ce cas se divise en trois autres, selon que, par une transformation convenable, la substitution donnée se ramène à l'une ou l'autre des trois formes

$$(12)\qquad X = x,\qquad Y = y,\qquad Z = z,$$
$$(13)\qquad X = x,\qquad Y = y,\qquad Z = x + z,$$
$$(14)\qquad X = x,\qquad Y = x + y,\qquad Z = y + z.$$

La substitution (12) est la substitution *identique*.

Dans le cas où la substitution donnée est ramenée à la forme (13), l'hermitien (1) est devenu

$$\alpha x x_0 + \alpha' y y_0 + \beta'(z x_0 - z_0 x) + \beta'' x y_0 + \beta''_0 x_0 y.$$

Une transformation nouvelle sur x et y n'altère pas la substitution (13), mais permet d'annuler β''. On arrive alors à la même forme canonique que pour les substitutions paraboliques à deux points doubles, sauf que maintenant $\theta = 0$, ou plus généralement

Ce sont les substitutions *paraboliques à plan double*. Les points doubles sont ici ceux du plan $x + z = 0$, extérieur à l'hypersphère principale, sauf le point $(1, 0, -1)$ qui est sur cette hypersphère.

8. Passons à la substitution (14). L'hermitien (1) est devenu alors

$$\alpha x x_0 + \alpha' y y_0 - \alpha'(z x_0 + z_0 x) - \left(\frac{\alpha'}{2} + ki\right) x y_0 - \left(\frac{\alpha'}{2} - ki\right) x_0 y,$$

k étant réel. Nous transformerons ceci en posant

$$x' = x, \qquad y' = \lambda x + y, \qquad z' = \lambda y + z;$$

en supprimant les accents des variables, la substitution reste (14); mais si

$$\alpha'(\lambda - \lambda_0) - ki = 0,$$

k est remplacé par zéro ; or cette équation est satisfaite pour une valeur convenable de la partie imaginaire de λ, car, l'hermitien devant contenir z, α' n'est pas nul. Faisons maintenant la transformation

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad z' = \mu x + z;$$

(14) ne change pas, et k reste nul ; mais si μ est tel que

$$\alpha - (\mu + \mu_0)\alpha' = 0,$$

ce qui est encore possible, α est aussi remplacé par zéro. En multipliant x, y, z par un même facteur, on peut donner à α', nécessairement positif, la valeur *un*, et au déterminant de la transformation la valeur *deux* ; l'hermitien est alors

$$\left(-\frac{x}{2} + y\right)\left(-\frac{x_0}{2} + y_0\right) + 4 z z_0 - \left(\frac{x}{2} + 2z\right)\left(\frac{x_0}{2} + 2z_0\right).$$

On fera donc la nouvelle transformation

$$x' = 2z, \qquad y' = -\frac{x}{2} + y, \qquad z' = \frac{x}{2} + 2z;$$

l'hermitien redevient (1), et la substitution donnée prend sa forme canonique

$$(15)\qquad \begin{Bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{Bmatrix}.$$

Ce sont les substitutions *paraboliques à point double unique*. Le point double est (1, 0, 1), sur l'hypersphère principale.

9. Les transformés d'un point quelconque, en dehors de certains points exceptionnels, par les puissances d'une substitution parabolique, tendent vers le point double situé sur l'hypersphère.

En effet, pour les substitutions à plus d'un point double, la puissance m est, si $\varepsilon = 1$,

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{2+mi}{2}e^{mi\theta} & 0 & \dfrac{mi}{2}e^{mi\theta} \\ 0 & e^{-2mi\theta} & 0 \\ \dfrac{-mi}{2}e^{mi\theta} & 0 & \dfrac{2-mi}{2}e^{mi\theta} \end{Bmatrix},$$

ce qui nous dispense évidemment d'étudier le cas où $\varepsilon = -1$. Les seuls points qui ne tendent pas vers (1, 0, -1) sont ceux du plan $x+z=0$ autres que (1, 0, -1); si $e^{3i\theta}=1$, $x+z=0$ est le plan double; dans le cas contraire, les transformés d'un de ses points occupent un nombre fini ou infini de positions suivant que $\theta : \pi$ est rationnel ou non. Le groupe est discontinu, sauf pour le plan $x+z=0$.

La puissance m de la forme canonique des substitutions paraboliques à point double unique est

$$\begin{Bmatrix} 1-2m^2 & 2m & 2m^2 \\ -2m & 1 & 2m \\ -2m^2 & 2m & 1+2m^2 \end{Bmatrix};$$

les transformés d'un point quelconque, sans aucune exception, tendent vers le point double.

10. Voici donc le tableau d'ensemble de notre classification des substitutions linéaires :

Substitutions hyperboliques ;

Substitutions elliptiques
- à trois points doubles ;
- à plan double
  - pénétrant dans l'hypersphère principale ;
  - extérieur à cette hypersphère ;

Substitutions paraboliques
- à deux points doubles ;
- à plan double ;
- à point double unique ;

Substitution identique.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DU POLYÈDRE FONDAMENTAL RAYONNÉ.

Dans tout ce Chapitre, nous écrirons l'hypersphère principale

$$xx_0 + yy_0 - zz_0 = 0.$$

1. *Nature des faces.* — Soient (ξ, η, ζ) et (ξ', η', ζ') les centres du polyèdre fondamental et d'un polyèdre transformé ayant une face commune avec lui. On suppose

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 - \zeta\zeta_0 = \xi'\xi'_0 + \eta'\eta'_0 - \zeta'\zeta'_0. \tag{1}$$

Quelle est la surface séparatrice des deux polyèdres ? C'est

$$|x\xi_0 + y\eta_0 - z\zeta_0|^2 - |x\xi'_0 + y\eta'_0 - z\zeta'_0|^2 = 0. \tag{2}$$

Le premier membre est un hermitien

$$f(x, y, z;\, x_0, y_0, z_0) = axx_0 + a'yy_0 + a''zz_0 \\ + byz_0 + b_0y_0z + b'zx_0 + b'_0z_0x + b''xy_0 + b''_0x_0y,$$

dont le discriminant est nul, et où

$$a + a' = a''. \tag{3}$$

Réciproquement, si, en égalant à zéro un hermitien de discriminant nul satisfaisant à la condition (3), *on obtient une multiplicité à trois dimensions, c'est une multiplicité telle que* (2).

En effet, le discriminant étant nul, l'hermitien ou son opposé est la somme ou la différence de deux normes de formes linéaires, ou c'est la norme d'une seule forme.

Mais si c'était la somme de deux normes, l'équation représenterait un point isolé; si c'était la norme d'une seule forme, l'équation représenterait une multiplicité à seulement deux dimensions. Donc c'est la différence de deux normes de formes linéaires, $x\xi_0 + y\eta_0 - z\zeta_0$ et $x\xi'_0 + y\eta'_0 - z\zeta'_0$; celles-ci satisfont à la condition (1), puisque la condition (3) est satisfaite.

On n'est pas certain cependant que $\xi\xi_0 + \eta\eta_0 - \zeta\zeta_0$ soit négatif, condition toujours remplie dans la méthode du rayonnement telle que nous la connaissons.

Définition. — Les multiplicités à trois dimensions obtenues en égalant à zéro un hermitien de discriminant nul satisfaisant à la condition (3) seront nommées ici *surfaces* (ou *multiplicités*) *d'équidistance* [1].

2. *Propriétés des surfaces d'équidistance :*

I. *La surface d'équidistance a un point double unique.*

On trouve en effet immédiatement qu'il est nécessaire et suffisant, pour que (α, β, γ) soit point double, que les six dérivées de f par rapport à x, y, z, x_0, y_0, z_0 s'annulent simultanément en ce point. Mais, (ξ, η, ζ) et (ξ', η', ζ') étant distincts, ceci entraîne

$$\alpha\xi_0 + \beta\eta_0 - \gamma\zeta_0 = \alpha\xi'_0 + \beta\eta'_0 - \gamma\zeta'_0 = 0.$$

Or ces équations ont une solution commune et une seule.

---

[1] Dans une Note (*Comptes rendus*, t. 166, 1917, p. 487), j'avais employé le terme de *faux-plan*.

II. *Si* (α, β, γ) *est le point double, la multiplicité*

$$\alpha_0 x + \beta_0 y - \gamma_0 z = 0 \tag{4}$$

contient les deux points (ξ, η, ζ) *et* (ξ', η', ζ').

Cela résulte immédiatement de la démonstration précédente.

Définitions. — Un point (α, β, γ) étant donné, nous avons déjà, avec Poincaré, nommé *polaire* de ce point la multiplicité (4). Quand (α, β, γ) est le point double d'une surface d'équidistance, nous dirons, pour abréger, que (4) est la *polaire de cette multiplicité d'équidistance*.

Enfin, les multiplicités linéaires à deux dimensions que nous aurons à considérer seront surtout celles qui peuvent être définies par une équation

$$ux + vy + wz = 0.$$

Dès lors, à moins d'avis contraire, le terme de *plan* désignera ici des multiplicités de cette sorte.

III. *Si* (ξ, η, ζ) *et* (ξ', η', ζ') *sont tous deux intérieurs à l'hypersphère principale, le point double lui est extérieur.*

Si en effet le point double était intérieur à l'hypersphère, une transformation linéaire de M. Picard permettrait de l'amener à l'origine; alors la polaire deviendrait

$$z = 0;$$

elle serait tout entière extérieure à l'hypersphère, ce qui ne se peut, puisque (ξ, η, ζ) lui est intérieur.

Si le point double était sur l'hypersphère, on pourrait l'amener en $(1, 0, 1)$; sa polaire deviendrait

$$x - z = 0,$$

tout entière extérieure à l'hypersphère, sauf le point $(1, 0, 1)$, situé sur l'hypersphère : nous nous heurtons à la même contradiction.

Donc le point double est extérieur à l'hypersphère.

IV. *On peut prendre pour* (ξ, η, ζ) *un point quelconque de la polaire* *non situé sur la surface d'équidistance ;* (ξ', η', ζ') *a une position déterminée par celle de l'autre point.*

En effet, soit (ξ_1, η_1, ζ_1) un point quelconque de la polaire ; nous allons voir qu'il peut remplacer (ξ, η, ζ), sauf dans le cas exceptionnel où il serait sur la surface d'équidistance. On peut trouver deux nombres λ et μ tels que

$$\begin{aligned} \lambda\xi + \mu\xi' &= \xi_1, \\ \lambda\eta + \mu\eta' &= \eta_1, \\ \lambda\zeta + \mu\zeta' &= \zeta_1 ; \end{aligned}$$

soient alors

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= \mu_0\xi + \lambda_0\xi', \\ \eta'_1 &= \mu_0\eta + \lambda_0\eta', \\ \zeta'_1 &= \mu_0\zeta + \lambda_0\zeta' ; \end{aligned}$$

on constate que

$$\begin{aligned} &|x_0\xi_1 + y_0\eta_1 - z_0\zeta_1|^2 - |x_0\xi'_1 + y_0\eta'_1 - z_0\zeta'_1|^2 \\ &\qquad = (\lambda\lambda_0 - \mu\mu_0)\left[|x_0\xi + y_0\eta - z_0\zeta|^2 - |x_0\xi' + y_0\eta' - z_0\zeta'|^2\right]. \end{aligned}$$

Donc, si $\lambda\lambda_0 - \mu\mu_0 \neq 0$, la surface d'équidistance déterminée par (ξ_1, η_1, ζ_1) et $(\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1)$ est la surface donnée. (Il faut remarquer que

$$\xi_1\xi_{1,0} + \eta_1\eta_{1,0} - \zeta_1\zeta_{1,0} = \xi'_1\xi'_{1,0} + \eta'_1\eta'_{1,0} - \zeta'_1\zeta'_{1,0}.)$$

Or $\lambda\lambda_0 - \mu\mu_0 = 0$ est justement la condition pour que (ξ_1, η_1, ζ_1) soit sur la surface d'équidistance : il est alors confondu avec $(\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1)$. Notre proposition est démontrée.

V. *La surface d'équidistance peut être engendrée par des plans passant par le point double.*

En effet, cette surface est le lieu des plans

$$\lambda(x\xi_0 + y\eta_0 - z\zeta_0) = \mu(x\xi'_0 + y\eta'_0 - z\zeta'_0),$$

où λ et μ sont deux paramètres liés par la relation

$$\lambda\lambda_0 - \mu\mu_0 = 0.$$

Ces plans passant tous par le point double, notre proposition est démontrée.

3. Lemme. — *Soient* $ux + vy + wz$, $u'x + v'y + w'z$, $u''x + v''y + w''z$ *trois formes linéaires indépendantes. Considérons le lieu des points où leurs valeurs absolues sont les mêmes :*

$$|ux + vy + wz| = |u'x + v'y + w'z| = |u''x + v''y + w''z|.$$

Soient $u'''x + v'''y + w'''z$, $u^{\text{IV}}x + v^{\text{IV}}y + w^{\text{IV}}z$ *deux autres formes linéaires indépendantes. Supposons que, pour tous les points du lieu précédent, on ait*

$$|u'''x + v'''y + w'''z| = |u^{\text{IV}}x + v^{\text{IV}}y + w^{\text{IV}}z|.$$

Alors l'expression

$$|u'''x + v'''y + w'''z|^2 - |u^{\text{IV}}x + v^{\text{IV}}y + w^{\text{IV}}z|^2 \tag{5}$$

coïncide, à un facteur près différent de zéro, avec

$$|ux + vy + wz|^2 - |u'x + v'y + w'z|^2,$$

ou avec une des deux autres expressions analogues formées à l'aide des trois premières formes données.

Les trois premières formes données étant indépendantes, nous pouvons, par un changement de variables, les remplacer par x, y, z. Le lieu considéré se compose des points

$$x = ze^{i\varphi}, \qquad y = ze^{i\psi},$$

φ et ψ étant deux paramètres réels. Nous avons à démontrer que l'identité en φ et ψ

$$|u'''e^{i\varphi} + v'''e^{i\psi} + w'''| = |u^{\text{IV}}e^{i\varphi} + v^{\text{IV}}e^{i\psi} + w^{\text{IV}}| \tag{6}$$

entraîne que l'expression (5) coïncide, à un facteur près différent de zéro, avec l'une des trois expressions

$$xx_0 - yy_0, \quad xx_0 - zz_0, \quad yy_0 - zz_0.$$

Posons

$$u''' = a + ia', \qquad v''' = b + ib', \qquad w''' = c + ic',$$
$$u^{\text{IV}} = \alpha + i\alpha', \qquad v^{\text{IV}} = \beta + i\beta', \qquad w^{\text{IV}} = \gamma + i\gamma',$$

$a, a', \ldots, \gamma'$ étant réels. L'identité (6) devient

$$\begin{aligned}
&(a\cos\varphi - a'\sin\varphi + b\cos\psi - b'\sin\psi + c)^2\\
&\qquad\qquad + (a\sin\varphi + a'\cos\varphi + b\sin\psi + b'\cos\psi + c')^2\\
&= (\alpha\cos\varphi - \alpha\ \sin\varphi + \beta\cos\psi - \beta'\sin\psi + \gamma)^2\\
&\qquad\qquad + (\alpha\sin\varphi + \alpha'\cos\varphi + \beta\sin\psi + \beta'\cos\psi + \gamma')^2.
\end{aligned}$$

Développons les deux membres en série double limitée de Fourier; l'identité ayant lieu quel que soit φ, nous trouvons que

$$\begin{aligned}
&(ab + a'b')\cos\psi - (ab' - a'b)\sin\psi + ac + a'c'\\
&= (\alpha\beta + \alpha'\beta')\cos\psi - (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\sin\psi + \alpha\gamma + \alpha'\gamma',\\
&(ab + a'b')\sin\psi + (ab' - a'b)\cos\psi - (ac' - a'c)\\
&= (\alpha\beta + \alpha'\beta')\sin\psi + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)\cos\psi - (\alpha\gamma' - \alpha'\gamma),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2(bc + b'c')\cos\psi - 2(bc' - b'c)\sin\psi + a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2\\
&= 2(\beta\gamma + \beta'\gamma')\cos\psi - 2(\beta\gamma' - \beta'\gamma)\sin\psi + \alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2 + \gamma^2 + \gamma'^2.
\end{aligned}$$

De ces identités en ψ, nous tirons

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
ab + a'b' = \alpha\beta + \alpha'\beta', & ab' - a'b = \alpha\beta' - \alpha'\beta,\\
ac + a'c' = \alpha\gamma + \alpha'\gamma', & ac' - a'c = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma,\\
bc + b'c' = \beta\gamma + \beta'\gamma', & bc' - b'c = \beta\gamma' - \beta'\gamma,\\
\multicolumn{2}{l}{a^2 + a'^2 + b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \beta^2 + \beta'^2 + \gamma^2 + \gamma'^2.}
\end{array}\right.$$

En tenant compte des identités telles que

$$(ab + a'b')^2 + (ab' - a'b)^2 = (a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2),$$

nous obtenons

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{l}
(a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2) = (\alpha^2 + \alpha'^2)(\beta^2 + \beta'^2),\\
(a^2 + a'^2)(c^2 + c'^2) = (\alpha^2 + \alpha'^2)(\gamma^2 + \gamma'^2),\\
(b^2 + b'^2)(c^2 + c'^2) = (\beta^2 + \beta'^2)(\gamma^2 + \gamma'^2);
\end{array}\right.$$

d'où, en multipliant membre à membre et extrayant les racines carrées,

$$(9)\qquad (a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2)(c^2 + c'^2) = (\alpha^2 + \alpha'^2)(\beta^2 + \beta'^2)(\gamma^2 + \gamma'^2).$$

Distinguons maintenant plusieurs cas.

Premier cas. — *Aucun des trois nombres* u''', v''', w''' *n'est nul.* Alors

(9) nous montre que u^{IV}, v^{IV}, w^{IV} sont également tous non nuls. Or la nature de l'énoncé nous autorise à multiplier u''', v''', w''' par un même facteur de valeur absolue égale à 1, et u^{IV}, v^{IV}, w^{IV} par un autre facteur de même valeur absolue. Profitons-en pour rendre u''' et u^{IV} réels et positifs. Comme de (9) et (8) on déduit

$$\begin{aligned} a^2 + a'^2 &= \alpha^2 + \alpha'^2, \\ b^2 + b'^2 &= \beta^2 + \beta'^2, \\ c^2 + c'^2 &= \gamma^2 + \gamma'^2, \end{aligned}$$

on aura alors

$$a = \alpha \neq 0\,;$$

puis, à cause de (7),

$$b = \beta, \qquad b' = \beta', \qquad c = \gamma, \qquad c' = \gamma'.$$

Les deux formes $u'''x + v'''y + w'''z$ et $u^{\text{IV}}x + v^{\text{IV}}y + w^{\text{IV}}z$ ne sont alors pas indépendantes, contrairement à l'hypothèse ; donc ce cas ne peut pas se présenter.

Deuxième cas. — *Un seul des trois nombres u''', v''', w''', par exemple w''', est nul.* Alors, d'après (8), $w^{\text{IV}} = 0$, u^{IV} et v^{IV} n'étant pas nuls. Amenons encore u''' et u^{IV} à être réels et positifs. Les égalités (7) donnent

$$b = \frac{\alpha}{a}\beta, \qquad b' = \frac{\alpha}{a}\beta',$$

puis

$$a^2 + b^2 + b'^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \beta'^2\,;$$

d'où

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right)(a^2 - \beta^2 - \beta'^2) = 0.$$

Mais $\alpha \neq a$, sinon les formes ne seraient pas distinctes. Donc

$$\beta^2 + \beta'^2 = a^2.$$

L'expression (5) devient alors

$$(a^2 - \alpha^2)(xx_0 - yy_0),$$

ce qui, dans ce cas particulier, vérifie le lemme.

Troisième cas. — *Deux des trois nombres u''', v''', w''' s'annulent.* Alors

(8) montre que deux des trois nombres u^{IV}, v^{IV}, w^{IV} s'annulent aussi. Si, par exemple, c'est u''' qui n'est pas nul, ce sera, dans l'autre forme, v^{IV} ou w^{IV} qui ne le sera pas, les formes devant être distinctes. La dernière égalité (7) montre qu'alors u''' et v^{IV} ou w^{IV} ont même valeur absolue, ce qui vérifie le lemme dans ce nouveau cas.

Comme il n'est pas possible d'admettre que u''', v''', w''' soient tous nuls, le lemme est démontré.

4. Théorème. — *Considérons deux surfaces d'équidistance dont les polaires ne soient pas confondues et ne se coupent sur aucune des deux surfaces; par le lieu de leurs points d'intersection on peut faire passer une troisième surface d'équidistance, et l'on ne peut pas en faire passer d'autre.*

Soit (ξ, η, ζ) le point d'intersection des polaires des deux surfaces données; ce point est unique, puisque les polaires ne sont pas confondues. Comme il n'est sur aucune des deux surfaces d'équidistance données, on peut trouver deux points (ξ', η', ζ') et (ξ'', η'', ζ'') tels que ces surfaces aient pour équations respectives

$$|x\xi_0 + y\eta_0 - z\zeta_0|^2 = |x\xi'_0 + y\eta'_0 - z\zeta'_0|^2,$$
$$|x\xi_0 + y\eta_0 - z\zeta_0|^2 = |x\xi''_0 + y\eta''_0 - z\zeta''_0|^2.$$

Par le lieu de leurs points d'intersection passe aussi la surface d'équidistance

$$|x\xi'_0 + y\eta'_0 - z\zeta'_0|^2 = |x\xi''_0 + y\eta''_0 - z\zeta''_0|^2.$$

Il s'agit maintenant de démontrer qu'il n'en passe pas d'autre. Soit

$$|x_0\xi_1 + y_0\eta_1 - z_0\zeta_1|^2 = |x_0\xi'_1 + y_0\eta'_1 - z_0\zeta'_1|^2$$

une surface d'équidistance quelconque passant par ce lieu. Comme (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ'), (ξ'', η'', ζ'') ne sont pas dans un même plan (les polaires étant *distinctes*), cette dernière surface coïncide, d'après le lemme, avec une des trois premières. C. Q. F. D.

5. Théorème. — *Considérons deux surfaces d'équidistance ayant au moins un point commun intérieur à l'hypersphère principale, et dont les polaires soient confondues et pénètrent à l'intérieur de cette hypersphère.*

L'intersection de ces deux surfaces se compose de deux plans, dont un seul pénètre à l'intérieur de l'hypersphère.

Les deux surfaces ayant même polaire ont même point double; celui-ci est extérieur à l'hypersphère, parce que la polaire pénètre à l'intérieur de l'hypersphère. Une transformation linéaire de M. Picard préalable de l'espace nous ramène au cas où ce point double est $(0, 1, 0)$, et où, par suite, la polaire est $y = 0$.

Les deux surfaces considérées ont alors des équations telles que

$$a(xx_0 + zz_0) + b' z x_0 + b'_0 z_0 x = 0,$$
$$\alpha(xx_0 + zz_0) + \beta' z x_0 + \beta'_0 z_0 x = 0.$$

Leurs traces sur la polaire $y = 0$ sont des cercles orthogonaux à l'intersection $xx_0 - zz_0 = 0$ de cette polaire avec l'hypersphère.

Si ces cercles se coupent en deux points distincts, l'intersection des deux surfaces se compose de deux plans

$$x = \lambda z, \qquad x = \mu z,$$

où λ et μ sont chacun l'inverse du conjugué de l'autre. Un seul de ces plans pénètre dans l'hypersphère. (Si l'un des plans est $x = 0$, l'autre est $z = 0$.)

Si ces cercles sont tangents, les deux surfaces se rencontrent suivant un seul plan, ayant un point et un seul commun avec l'hypersphère, et tous ses autres points extérieurs à celle-ci : ce cas est écarté par l'hypothèse.

Si ces cercles ne se rencontrent pas, les deux surfaces n'ont en commun que leur point double, cas encore écarté par l'hypothèse.

Le théorème est donc démontré.

6. Théorème. — *Par un plan pénétrant dans l'hypersphère principale, on peut faire passer une infinité de surfaces d'équidistance, parmi lesquelles une infinité ont même polaire.*

Soit

$$x = 0$$

le plan donné; nous pouvons toujours nous ramener à ce cas. Si

$$\begin{aligned}&axx_0+a'yy_0+(a+a')zz_0\\&\quad+byz_0+b_0y_0z+b'zx_0+b'_0z_0x+b''xy_0+b''_0x_0y=0\end{aligned}$$

est une surface d'équidistance le contenant, nous voyons que

$$a'=a=b=0.$$

La surface se réduit à

$$b'zx_0+b'_0z_0x+b''xy_0+b''_0x_0y=0.$$

Le discriminant du premier membre est nul, de sorte qu'on a bien là une surface d'équidistance; on voit qu'il y en a une infinité.

Cherchons le point double; il est donné par les équations

$$\begin{aligned}b''_0y+b'z&=0,\\b''x&=0,\\b'_0x&=0.\end{aligned}$$

Comme b' et b'' ne sont pas nuls ensemble, $x=0$. La première équation détermine $y:z$; on voit que ce rapport ne dépend que de $b':b''_0$; par suite, il y a une infinité de surfaces qui ont même point double, donc même polaire. Le théorème est démontré.

7. Deux faces du polyèdre fondamental rayonné *à centre unique* ou bien ont même polaire, ou bien ont des polaires se rencontrant au centre du polyèdre, donc en dehors des deux faces. Donc les arêtes à deux dimensions de ce polyèdre sont ou bien *planes*, ou bien de l'espèce considérée au paragraphe 4. Nous nommerons ces dernières arêtes *gauches*.

Par une arête gauche peuvent passer seulement trois surfaces d'équidistance, dont les deux faces du polyèdre donné; cette arête appartient donc à trois polyèdres, en y comprenant le polyèdre donné; elle détermine donc un cycle de trois arêtes.

Les arêtes planes peuvent appartenir à des cycles d'un nombre quelconque d'arêtes.

Nous savons qu'il peut y avoir des *arêtes non apparentes*, appartenant seulement à deux polyèdres. Ces arêtes sont-elles planes ou gauches?

La surface d'équidistance qui contient l'arête est changée en elle-même par une transformation du groupe; cette transformation échange les centres des deux polyèdres. Donc c'est une transformation elliptique S, telle que $S^2 = 1$.

Mettons S sous la forme canonique

$$X = xe^{i\theta}, \qquad Y = ye^{i\theta'}, \qquad Z = ze^{i\theta''}$$

qui convient à toutes les substitutions elliptiques, même à plan double (en n'imposant aucune restriction d'inégalité à θ, θ', θ''). Comme $S^2 = 1$, θ, θ', θ'' ne diffèrent que par des multiples de π. Donc S est une substitution elliptique à plan double, pénétrant ou non dans l'hypersphère.

Si le plan double pénètre dans l'hypersphère, soit par exemple $\theta = \theta'' = \theta' - \pi$, le plan double est alors $y = 0$; la face qui supporte l'arête non apparente passe par $y = 0$. Pour déterminer l'arête non apparente, nous choisissons un centre auxiliaire, et nous déterminons les points *de cette face* dont les invariants fondamentaux avec ce centre et avec son transformé par S sont égaux : or ces points sont ceux de $y = 0$, et d'autres extérieurs à l'hypersphère. En effet, la face du polyèdre fondamental est

$$|\xi_0 x + \eta_0 y - \zeta_0 z|^2 - |\xi_0 x - \eta_0 y - \zeta_0 z|^2 = 0$$

ou

$$\xi_0 \eta x y_0 + \xi \eta_0 x_0 y - \eta_0 \zeta_0 y z_0 - \eta \zeta_0 y_0 z = 0;$$

nous avons à prendre son intersection avec

$$\xi'_0 \eta' x y_0 + \xi' \eta'_0 x_0 y - \eta'_0 \zeta' y z_0 - \eta' \zeta'_0 y_0 z = 0,$$

(ξ', η', ζ') étant le centre auxiliaire. Cette intersection comprend $y = 0$. Nous voulons voir qu'elle ne comprend pas d'autre point intérieur à l'hypersphère. En effet, comme $\theta = \theta''$, nous pouvons, par une transformation portant sur x et z, faire en sorte que $\xi = 0$. Puis, nous pouvons évidemment trouver deux nombres a et b, réels ou imaginaires, tels que

$$b\xi'_0 \eta' \quad \text{et} \quad a\eta\zeta_0 + b\eta'\zeta'_0$$

soient réels ; et deux autres nombres c et d, tels que

$$ad - bc \neq 0$$

et que

$$d\xi'_0\eta' \quad \text{et} \quad c\eta\zeta_0 + d\xi'_0\eta'$$

soient purement imaginaires. On constate alors, en combinant linéairement les équations, d'abord avec les facteurs a, b, puis avec les facteurs c et d, que les deux équations ci-dessus peuvent se remplacer par une seule de la forme

$$(ux + vz)y_0 = 0.$$

L'intersection se compose donc de

$$y = 0$$

et de

$$ux + vz = 0.$$

Comme elle se trouve sur

$$\eta\zeta_0 y z_0 + \eta\zeta_0 y_0 z = 0,$$

il est nécessaire que $u = 0$. Donc la seconde partie de l'intersection se réduit à $z = 0$: elle ne pénètre pas dans l'hypersphère. Ainsi, l'arête non apparente est $y = 0$: elle est plane (c'est le plan double).

Si le plan double était extérieur à l'hypersphère, on verrait de même que l'arête non apparente est plane : mais, cette fois, ce n'est plus le plan double, en ce qui concerne l'intérieur de l'hypersphère.

Ainsi, les cycles d'arêtes gauches ne peuvent comprendre moins de trois arêtes : ils en comprennent exactement trois.

Pour voir sous quelle forme peuvent se mettre les conditions de discontinuité du groupe correspondant à un polyèdre donné, nous allons entrer dans quelques considérations analogues à l'interprétation de la géométrie de Lobatchefski qu'a utilisée Poincaré.

8. Nous avons déjà nommé *plan* l'ensemble des points de l'espace à quatre dimensions satisfaisant à l'équation

$$ux + vy + wz = 0.$$

Les substitutions de M. Picard changent les plans en plans, ainsi que nous l'avons déjà admis implicitement : u, v, w subissent les mêmes transformations que x_0, y_0, $-z_0$.

Par deux points distincts donnés passe un plan et un seul.

Nous savons déjà ce que l'on doit entendre par pôle d'un plan, polaire d'un point, et nous avons déjà rencontré (n° 2) les diverses dispositions du pôle et de la polaire par rapport à l'hypersphère.

9. Un plan P quelconque coupe l'hypersphère suivant un cercle C, réel ou imaginaire. Les cercles de ce plan P qui sont orthogonaux à C se nommeront *pseudo-droites*.

Les substitutions de M. Picard changent les pseudo-droites en pseudo-droites.

Par deux points distincts passent une pseudo-droite et une seule. On le voit en considérant d'abord le plan, unique également, qui contient les deux points.

10. Considérons deux points A et B, ainsi que le plan P et la pseudo-droite D qui les contiennent. Soit C le cercle réel ou imaginaire d'intersection de P avec l'hypersphère. Soient encore E et F les points où D coupe C. La *pseudo-distance* de A à B sera, par définition,

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{AE}{AF} : \frac{BE}{BF}\right) = l;$$

on prendra la détermination réelle, s'il y en a une, ce qui est le cas si A et B sont tous deux intérieurs à l'hypersphère [1]. On voit que, si l'on échange E et F, l change de signe : l'ordre de E et F détermine donc un sens positif sur la pseudo-droite AB. La pseudo-distance donne lieu à un théorème analogue à celui de Chasles. Elle est conservée par les substitutions de M. Picard.

Si A et B sont l'un intérieur, l'autre extérieur à l'hypersphère, leur pseudo-distance est imaginaire, le coefficient de i étant un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$. Si A et B sont tous deux extérieurs à l'hypersphère, leur

---

[1] En mettant A à l'origine, on constate aisément que dl^2 est l'invariant différentiel de Poincaré.

distance est réelle si C est réel, nulle si C est de rayon nul, purement imaginaire si C est imaginaire.

Soient (x, y, z) et (ξ, η, ζ) les coordonnées de A et de B. Considérons l'invariant fondamental

$$\lambda = \frac{|x\xi_0 + y\eta_0 - z\zeta_0|^2}{(xx_0 + yy_0 - zz_0)(\xi\xi_0 + \eta\eta_0 - \zeta\zeta_0)}.$$

Je dis que $\lambda = \operatorname{ch}^2 l$. En effet, A étant intérieur à l'hypersphère, nous pouvons, par une substitution préalable, l'amener en $(0, 0, 1)$, B allant en $(x, 0, 1)$, x étant réel et positif. Alors

$$\lambda = \frac{1}{1 - x^2}$$

et

$$l = \pm \frac{1}{2} \log \frac{1 + x}{1 - x},$$

d'où

$$x = \pm \operatorname{th} l, \qquad \lambda = \operatorname{ch}^2 l,$$

ce qu'il fallait démontrer.

11. Considérons deux plans

$$u\,x + v\,y + w\,z = 0,$$
$$u'x + v'y + w'z = 0.$$

Par définition, leur *pseudo-angle* sera l'un quelconque des angles V tels que

$$\cos^2 V = \frac{|uu'_0 + vv'_0 - ww'_0|^2}{(uu_0 + vv_0 - ww_0)(u'u'_0 + v'v'_0 - w'w'_0)}.$$

V est invariant par toute transformation de M. Picard.

Je dis que V *est réel si les deux plans se coupent à l'intérieur de l'hypersphère*. En effet,

$$\cos^2 V = \operatorname{ch}^2 l,$$

l étant la pseudo-distance des pôles des deux plans. Or ici, ces pôles sont extérieurs à l'hypersphère, et leur plan ne rencontre pas celle-ci : donc l est purement imaginaire, et par suite V est réel.

Ce fait résulte aussi de l'identité

$$(uu_0 + vv_0 - ww_0)(u'u'_0 + v'v'_0 - w'w'_0) - |uu'_0 + vv'_0 - ww'_0|^2$$
$$= |uv' - u'v|^2 - |uw' - u'w|^2 - |vw' - v'w|^2;$$

au second membre figure $zz_0 - xx_0 - yy_0$, (x, y, z) étant le point d'intersection des deux plans : ce second membre est donc positif, ce qui entraîne la réalité de V; on voit même que $V \neq 0$, pourvu que les plans soient distincts.

12. Considérons deux pseudo-droites AB, AC, se coupant en un point A intérieur à l'hypersphère. Leur *premier pseudo-angle* sera, par définition, le pseudo-angle des plans qui les contiennent. Nous allons définir le *deuxième pseudo-angle*.

Nous pouvons trouver une infinité de substitutions de M. Picard amenant A à l'origine. Quand on a l'une d'elles, les autres s'en déduisent en la multipliant par

$$\begin{Bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta} \end{Bmatrix}$$

où

$$aa_0 + cc_0 = 1, \qquad bb_0 + dd_0 = 1, \qquad ab_0 + cd_0 = 0, \qquad ad - bc = e^{-i\theta}.$$

Nous profitons de cette indétermination pour amener en même temps B en $(\xi, 0, \zeta)$, ξ et ζ étant réels et positifs.

Nous pouvons encore multiplier la substitution obtenue par

$$(x, y, z;\ xe^{i\theta},\ ye^{-2i\theta},\ ze^{i\theta}).$$

Cette indétermination nous sert à amener en même temps C en (ξ', η', ζ'), η' et ζ' étant réels et positifs : la substitution est alors entièrement déterminée.

Le *deuxième pseudo-angle* de AB et AC est alors, par définition, l'une quelconque des déterminations de l'argument de ξ'.

13. Considérons trois points A, B, C, intérieurs à l'hypersphère. L'ensemble de ces trois points, des trois plans et des trois pseudo-

droites qui les contiennent deux à deux peut se nommer un *triangle*.

Les *premiers pseudo-angles* du triangle sont, par définition, les déterminations comprises entre o et $\frac{\pi}{2}$ du pseudo-angle des plans AB et AC, de celui des plans BC et BA, et de celui des plans CA et CB. On les désignera respectivement par A, B, C.

Les *deuxièmes pseudo-angles* du triangle sont les mêmes que ceux des pseudo-droites AB et AC et analogues, si ceux-ci sont (après addition d'un multiple de 2π) compris entre o et π; si ceux-ci sont compris entre o et $-\pi$: on les ramène entre o et π par changement de signe. On désignera ces deuxièmes pseudo-angles par α, β, γ.

Comme dans notre définition du deuxième pseudo-angle de deux pseudo-droites, l'ordre de celles-ci jouait un rôle, on pourrait craindre que α, β, γ ne soient pas déterminés ; la suite prouvera qu'il n'en est rien, ce qui montrera que l'échange de deux pseudo-droites change le signe de leur deuxième pseudo-angle.

Les *côtés* du triangle, enfin, seront, par définition, les pseudo-distances $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, prises positivement.

14. Amenons le triangle ABC dans la même position particulière qu'au paragraphe 12, et déterminons complètement ξ, ζ, ξ', η', ζ' liés par les relations

$$\xi^2 - \zeta^2 = -1,$$
$$\xi'\xi'_0 + \eta'^2 - \zeta'^2 = -1.$$

Nous avons tout d'abord les relations

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \text{ch}^2 a &= \xi^2\xi'\xi'_0 - \xi\zeta\zeta'(\xi' + \xi'_0) + \zeta^2\zeta'^2,\\ \text{ch}^2 b &= \zeta'^2,\\ \text{ch}^2 c &= \zeta^2.\end{aligned}\right.$$

Comme $\zeta^2 - \xi^2 = 1$, et que ξ et ζ sont positifs,

$$(11)\qquad \zeta = \text{ch}\, c, \qquad \xi = \text{sh}\, c;$$

de même

$$(12)\qquad \zeta' = \text{ch}\, b, \qquad \xi'\xi'_0 + \eta'^2 = \text{sh}^2 b.$$

Les équations des plans des côtés sont

$$\text{(BC)} \qquad -\eta'\zeta x + (\xi'\zeta - \xi\zeta')y + \xi\eta' z = 0,$$
$$\text{(CA)} \qquad \eta' x - \xi' y = 0,$$
$$\text{(AB)} \qquad y = 0.$$

Donc,

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \cos^2 A &= \frac{\xi'\xi'_0}{\xi'\xi'_0 + \eta'^2}, \\ \cos^2 B &= \frac{\xi'\xi'_0\zeta^2 - \xi\zeta\zeta'(\xi' + \xi'_0) + \xi^2\zeta'^2}{\eta'^2 + \xi'\xi'_0\zeta^2 - \xi\zeta\zeta'(\xi' + \xi'_0) + \xi^2\zeta'^2}. \end{aligned}\right.$$

Comparons avec (12) :

$$(14)\qquad \xi'\xi'_0 = \operatorname{sh}^2 b . \cos^2 A, \qquad \eta' = \operatorname{sh} b . \sin A.$$

D'autre part, à cause de (14) et de la définition de α,

$$(15)\qquad \xi' + \xi'_0 = 2 \operatorname{sh} b . \cos A . \cos\alpha.$$

Portons ces valeurs de ξ, ζ, $\xi'\xi'_0$, $\xi' + \xi'_0$, η', ζ' dans la première relation (10) et la deuxième relation (13) :

$$(16)\quad \operatorname{ch}^2 a = \operatorname{ch}^2 b . \operatorname{ch}^2 c + \operatorname{sh}^2 b . \operatorname{sh}^2 c . \cos^2 A - 2 \operatorname{sh} b . \operatorname{ch} b . \operatorname{sh} c . \operatorname{ch} c . \cos A . \cos\alpha,$$

$$(17)\qquad \cos^2 B = \frac{\left\{\begin{aligned} &\operatorname{sh}^2 b . \operatorname{ch}^2 c . \cos^2 A + \operatorname{ch}^2 b . \operatorname{sh}^2 c \\ &\quad - 2 \operatorname{sh} b . \operatorname{ch} b . \operatorname{sh} c . \operatorname{ch} c . \cos A . \cos\alpha \end{aligned}\right\}}{\left\{\begin{aligned} &\operatorname{sh}^2 b . \sin^2 A + \operatorname{sh}^2 b . \operatorname{ch}^2 c . \cos^2 A + \operatorname{ch}^2 b . \operatorname{sh}^2 c \\ &\quad - 2 \operatorname{sh} b . \operatorname{ch} b . \operatorname{sh} c . \operatorname{ch} c . \cos A . \cos\alpha \end{aligned}\right\}}.$$

En permutant circulairement les sommets du triangle, on déduit de (16) deux relations analogues.

Nous allons remplacer (17) par une relation plus commode, en y remplaçant $\cos\alpha$ par sa valeur tirée de (16), ce qui donne

$$\cos^2 B = \frac{\operatorname{sh}^2 b . \cos^2 A + \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{ch}^2 b}{\operatorname{sh}^2 a},$$

d'où, en ayant égard à la symétrie des rôles des trois sommets,

$$(18)\qquad \frac{\operatorname{sh} a}{\sin A} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin B} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin C}.$$

Les trois relations analogues à (16) et les relations (18) constituent un système fondamental de relations entre les éléments du triangle : si des éléments satisfaisant aux inégalités

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{lll} a > 0, & b > 0, & c > 0, \\ 0 \leqq A \leqq \frac{\pi}{2}, & 0 \leqq B \leqq \frac{\pi}{2}, & 0 \leqq C \leqq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leqq \alpha \leqq \pi, & 0 \leqq \beta \leqq \pi, & 0 \leqq \gamma \leqq \pi \end{array}\right.$$

y satisfont, *ce sont les éléments d'un triangle*. Car, de b, c, A, α, on déduit, par les formules (11), (12), (14), (15), les valeurs de ξ, ζ, η', ζ' et de ξ' ou de son conjugué. Les relations analogues à (16) et les relations (18) permettent de déduire que les éléments restants du triangle ainsi trouvé coïncident avec ceux qui ont été donnés, ce qui démontre notre assertion.

On voit que α, comme nous l'annoncions, est bien déterminé.

15. Écrivons (16) en la rendant homogène en ch$c$ et sh$c$:

$$\begin{aligned}&(\text{ch}^2 a - \text{ch}^2 b)\,\text{ch}^2 c \\ &\quad + 2\,\text{sh}\,b.\text{ch}\,b.\text{sh}\,c.\text{ch}\,c.\cos A.\cos\alpha - (\text{ch}^2 a + \text{sh}^2 b.\cos^2 A)\,\text{sh}^2 c = 0;\end{aligned}$$

échangeons les rôles de A et de B :

$$\begin{aligned}&(\text{ch}^2 b - \text{ch}^2 a)\,\text{ch}^2 c \\ &\quad + 2\,\text{sh}\,a.\text{ch}\,a.\text{sh}\,c.\text{ch}\,c.\cos B.\cos\beta - (\text{ch}^2 b + \text{sh}^2 a.\cos^2 B)\,\text{sh}^2 c = 0.\end{aligned}$$

Écrivons le résultant de ces deux polynomes homogènes en sh$c$, ch$c$, et égalons-le à zéro après division par $\text{ch}^2 a - \text{ch}^2 b$, ce qui suppose $a \neq b$:

$$\begin{aligned}&(\text{ch}^2 a - \text{ch}^2 b)(\text{ch}^2 a + \text{ch}^2 b + \text{sh}^2 a.\cos^2 B + \text{sh}^2 b.\cos^2 A)^2 \\ &\quad + 4(\text{sh}\,a.\text{ch}\,a.\cos B.\cos\beta + \text{sh}\,b.\text{ch}\,b.\cos A.\cos\alpha) \\ &\quad\quad \times [\text{sh}\,b.\text{ch}\,b.\cos A.\cos\alpha.(\text{ch}^2 b + \text{sh}^2 a.\cos^2 B) \\ &\quad\quad\quad - \text{sh}\,a.\text{ch}\,a.\cos B.\cos\beta.(\text{ch}^2 a + \text{sh}^2 b.\cos^2 A)] = 0\end{aligned}$$

Mais, d'après (18),

$$\text{ch}^2 a + \text{sh}^2 b.\cos^2 A = \text{ch}^2 b + \text{sh}^2 a.\cos^2 B;$$

donc, en divisant par le double de cette dernière quantité,

$$(\mathrm{ch}^2 a - \mathrm{ch}^2 b)(\mathrm{ch}^2 a + \mathrm{ch}^2 b + \mathrm{sh}^2 a.\cos^2 \mathrm{B} + \mathrm{sh}^2 b.\cos^2 \mathrm{A})$$
$$- 2(\mathrm{sh}^2 a.\mathrm{ch}^2 a.\cos^2 \mathrm{B}.\cos^2 \beta - \mathrm{sh}^2 b.\mathrm{ch}^2 b.\cos^2 \mathrm{A}.\cos^2 \alpha) = 0.$$

Remplaçons le premier terme par

$$2\,\mathrm{ch}^2 a.(\mathrm{ch}^2 b + \mathrm{sh}^2 a.\cos^2 \mathrm{B}) - 2\,\mathrm{ch}^2 b.(\mathrm{ch}^2 a + \mathrm{sh}^2 b.\cos^2 \mathrm{A});$$

la relation devient

$$\mathrm{sh}^2 a.\mathrm{ch}^2 a.\cos^2 \mathrm{B}.\sin^2 \beta - \mathrm{sh}^2 b.\mathrm{ch}^2 b.\cos^2 \mathrm{A}.\sin^2 \alpha = 0);$$

d'où, en ayant égard aux inégalités (19) et à la symétrie des rôles des trois sommets,

$$\frac{\mathrm{sh}\,a.\mathrm{ch}\,a}{\cos \mathrm{A}.\sin \alpha} = \frac{\mathrm{sh}\,b.\mathrm{ch}\,b}{\cos \mathrm{B}.\sin \beta} = \frac{\mathrm{sh}\,c.\mathrm{ch}\,c}{\cos \mathrm{C}.\sin \gamma}. \tag{20}$$

On voit facilement sur les relations (16) et (18) que ces dernières relations ont encore lieu si $a = b$; elles sont donc générales.

16. Les relations entre les éléments du triangle se réduisent à celles de la géométrie de Lobatchefski dans deux cas :

1° Si A est nul, ce qui, d'après (18), entraîne

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C} = 0;$$

alors α, β, γ jouent le rôle des angles non euclidiens; (16) s'écrit en effet dans ce cas

$$\mathrm{ch}\,2a = \mathrm{ch}\,2b.\mathrm{ch}\,2c - \mathrm{sh}\,2b.\mathrm{sh}\,2c.\cos\alpha;$$

2° Si α, β, γ sont tous égaux à zéro ou à π; alors A, B, C ou leurs suppléments jouent le rôle des angles non euclidiens, car (16) s'écrit alors

$$\mathrm{ch}\,a = \mathrm{ch}\,b.\mathrm{ch}\,c - (-1)^{\frac{\alpha}{\pi}}\mathrm{sh}\,b.\mathrm{sh}\,c.\cos \mathrm{A};$$

quant aux relations (18), elles résultent alors des relations (16) et analogues.

On verra facilement la raison de ce double fait.

17. Les relations entre les éléments du triangle vont nous permettre de démontrer les inégalités

$$a \leqq b + c; \qquad b \leqq c + a; \qquad c \leqq a + b. \tag{21}$$

En effet, la formule (16) entraîne

$$\operatorname{ch}^2 a \leqq \operatorname{ch}^2(b + c),$$

qui équivaut à la première inégalité (21). L'égalité n'a lieu que si $A = 0$, $\alpha = \pi$, c'est-à-dire si A, B, C sont sur une même pseudo-droite, A étant entre B et C.

On peut en déduire que les pseudo-droites sont les lignes de pseudo-longueur minimum.

18. Revenons aux arêtes gauches. Nous avons vu (n° 4) qu'on peut attacher à une arête gauche donnée trois points (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ'), (ξ'', η'', ζ''), tels que les équations des trois surfaces d'équidistance contenant l'arête gauche soient

$$\begin{aligned}
|x\xi_0 + y\eta_0 - z\zeta_0|^2 &= |x\xi'_0 + y\eta'_0 - z\zeta'_0|^2,\\
|x\xi_0 + y\eta_0 - z\zeta_0|^2 &= |x\xi''_0 + y\eta''_0 - z\zeta''_0|^2,\\
|x\xi'_0 + y\eta'_0 - z\zeta'_0|^2 &= |x\xi''_0 + y\eta''_0 - z\zeta''_0|^2.
\end{aligned}$$

Les éléments de ce triangle peuvent donc être considérés comme attachés à l'arête. Observons que les premiers pseudo-angles A, B, C ne sont pas nuls.

Considérons maintenant deux faces opposées du polyèdre fondamental. Pour qu'il existe une transformation qui change l'une dans l'autre, il faut que cette transformation amène la frontière de la première face à coïncider avec celle de la seconde. Si la frontière de la première face contient une arête gauche, ceci entraîne notamment que la seconde en contient une aussi, et que *les éléments des triangles attachés à ces deux arêtes sont les mêmes à l'ordre près*.

Si les conditions de cette sorte relatives au polyèdre donné sont toutes satisfaites, on constate immédiatement que la considération des cycles d'arêtes gauches ne conduit à aucune condition nouvelle.

19. Comment pourrons-nous écrire les conditions de cette sorte, connaissant les équations des faces du polyèdre et leur répartition en faces opposées? Cette question revient à cette autre : comment calculer les éléments du triangle attaché à une arête gauche donnée par les équations de deux des surfaces d'équidistance qui la contiennent?

Soient

$$\varphi(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = 0,$$
$$\psi(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = 0$$

ces deux surfaces d'équidistance. Ordonnons par rapport à λ et μ le discriminant de l'hermitien

$$xx_0 + yy_0 - zz_0 + \lambda\varphi + \mu\psi;$$

les coefficients des différents termes sont invariants par toute substitution de M. Picard. Soient

$$\varphi = axx_0 + a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0 + b_0y_0z + b'zx_0 + b'_0z_0x + b''xy_0 + b''_0x_0y,$$
$$\psi = \alpha xx_0 + \alpha'yy_0 + \alpha''zz_0 + \beta yz_0 + \beta_0y_0z + \beta'zx_0 + \beta'_0z_0x + \beta''xy_0 + \beta''_0x_0y.$$

Le terme indépendant de λ et μ se réduit à -1, les coefficients des termes en λ et en μ sont $a + a' - a''$ et $\alpha + \alpha' - \alpha''$, qui sont nuls. Les termes en λ^2 et en μ^2 donnent les invariants

$$\mathrm{I} = a'a'' + aa'' - aa' - bb_0 - b'b'_0 + b''b''_0,$$
$$\mathrm{I}' = \alpha'\alpha'' + \alpha\alpha'' - \alpha\alpha' - \beta\beta_0 - \beta'\beta'_0 + \beta''\beta''_0.$$

Le terme en $\lambda\mu$ donne l'invariant

$$\begin{aligned}\mathrm{J} = {} & a'\alpha'' + a''\alpha' \\ & + a\alpha'' + a''\alpha - a\alpha' - a'\alpha - b\beta_0 - b_0\beta - b'\beta'_0 - b'_0\beta' + b''\beta''_0 + b''_0\beta''.\end{aligned}$$

Le terme en $\lambda^2\mu$ donne l'invariant

$$\begin{aligned}\mathrm{K} = {} & aa'\alpha'' + aa''\alpha' + a'a''\alpha \\ & + bb'\beta'' + b_0b'_0\beta''_0 + bb''\beta' + b_0b''_0\beta'_0 + b'b''\beta + b'_0b''_0\beta_0 \\ & - ab\beta_0 - ab_0\beta - a'b'\beta'_0 - a'b'_0\beta' - a''b''\beta''_0 - a''b''_0\beta'' \\ & - bb_0\alpha - b'b'_0\alpha' - b''b''_0\alpha'',\end{aligned}$$

et le terme en $\lambda\mu^2$ donne l'invariant K' déduit de K par la permutation des a et des b avec les α et les β. Les termes en λ^3 et μ^3 donnent les discriminants de φ et ψ, qui sont nuls.

Amenons maintenant le triangle attaché à l'arête dans la position particulière déjà employée (n° 12). On a alors

$$\varphi = h[\,|\xi x - \zeta z|^2 - zz_0],$$
$$\psi = k[\,|\xi'_0 x + \eta' y - \zeta' z|^2 - zz_0],$$

h et k étant des constantes réelles. En utilisant les valeurs de ξ, ζ, ξ', η', ζ' trouvées au paragraphe 14, nous voyons que

$$\mathrm{I} = h^2\xi^2(\xi^2 - \zeta^2) = -h^2\,\mathrm{sh}^2 c,$$
$$\mathrm{I}' = -k^2\,\mathrm{sh}^2 b,$$
$$\begin{aligned}\mathrm{J} &= hk[\xi^2(\zeta'^2 - 1) + \xi^2\xi'\xi'_0 - \xi\zeta\zeta'(\xi' + \xi'_0)]\\ &= hk[\mathrm{sh}^2 b.\mathrm{sh}^2 c.(+\cos^2 \mathrm{A}) - 2\,\mathrm{sh}\, b.\mathrm{ch}\, b.\mathrm{sh}\, c.\mathrm{ch}\, c.\cos \mathrm{A}.\cos\alpha],\end{aligned}$$
$$\mathrm{K} = h^2 k\xi^2\eta'^2(\xi^2 - \zeta^2) = -h^2 k\,\mathrm{sh}^2 b.\mathrm{sh}^2 c.\sin^2 \mathrm{A},$$
$$\mathrm{K}' = -hk^2\,\mathrm{sh}^2 b.\mathrm{sh}^2 c.\sin^2 \mathrm{A}.$$

Si h et k sont connus, nous tirons b et c de I et de I′, A de K ou de K′, et α de J. Les autres éléments du triangle s'en déduisent par les formules (16) et (18).

Si h et k sont inconnus, K : K′ donne leur rapport. Pour avoir l'un d'eux, il faut calculer les coordonnées ξ, η, ζ du point d'intersection des polaires de φ et de ψ (c'est-à-dire du centre du polyèdre, s'il est rayonné à centre unique). Ensuite, on calcule h de façon que les premiers mineurs du discriminant de

$$\varphi - h\,|\xi_0 x + \eta_0 y - \zeta_0 z|^2$$

soient tous nuls, en supposant

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 - \zeta\zeta_0 = -1.$$

20. Considérons maintenant une *arête plane*. Je dis que, si le polyèdre fondamental est rayonné à centre unique, *les faces du polyèdre fondamental et de tous ses transformés par le groupe qui contiennent cette arête ont toutes même polaire*. En effet, cela est vrai pour les deux faces du polyèdre fondamental; passons au polyèdre transformé adjacent à l'une d'elles : cela sera vrai de la seconde face de ce polyèdre transformé;

et ainsi de suite pour tous les polyèdres, en tournant autour de l'arête.

Nous pouvons, par une transformation de M. Picard, amener cette polaire à coïncider avec $y = 0$, et, en même temps, le point d'intersection de la polaire et de l'arête plane à coïncider avec l'origine. Une face quelconque contenant cette arête sera

$$|\xi_0 x - \zeta_0 z|^2 - |\xi'_0 x - \zeta'_0 z|^2 = 0,$$

avec $\xi\xi_0 - \zeta\zeta_0 = \xi'\xi'_0 - \zeta'\zeta'_0$ et $\zeta\zeta_0 = \zeta'\zeta'_0$. Nous constatons que son intersection avec la polaire est une pseudo-droite. Ainsi, *une surface d'équidistance coupe sa polaire suivant une pseudo-droite*. Le deuxième pseudo-angle de toutes ces pseudo-droites situées dans un même plan et passant par un même point est le même que leur angle au sens géométrique ordinaire, ou au sens de la géométrie de Lobatchefski, quand on adopte pour celle-ci l'interprétation des droites au moyen de nos pseudo-droites.

Un raisonnement absolument identique à celui de Poincaré prouve alors que la somme de ces deuxièmes pseudo-angles pour toutes les arêtes planes du cycle est égale à $\frac{2\pi}{\nu}$, ν étant entier positif; si $\nu > 1$, l'arête plane est le plan double d'une substitution elliptique faisant partie du groupe, et dont la $\nu^{\text{ième}}$ puissance est égale à 1.

Telle est, pour ces arêtes planes, la forme que prennent les conditions de discontinuité.

Il nous reste à étudier le polyèdre fondamental dans les parties qui touchent la frontière du domaine principal, si ces parties existent. Nous allons le faire en nous bornant aux cas qui peuvent se présenter avec les groupes dont les fonctions automorphes ne se prolongent pas analytiquement à l'extérieur de l'hypersphère principale.

CHAPITRE III.

LES SOMMETS PARABOLIQUES.

1. Théorème. — *Si tous les points de l'hypersphère principale sont singuliers pour une certaine fonction* $\Theta(x, y)$ *thêta-automorphe de*

groupe linéaire Γ, *aucun polyèdre fondamental de* Γ *n'a de face sur l'hypersphère principale.*

On va voir en effet que, si ce polyèdre fondamental, formé par n'importe quel moyen, a une face sur cette hypersphère, toute fonction Θ peut se prolonger analytiquement à travers cette face.

Soit B un point intérieur à cette face; soit

$$\Theta(x, y) = \Sigma \mathrm{R}(x_n, y_n)\left[\frac{\partial(x_n, y_n)}{\partial(x, y)}\right]^k \qquad (k \geqq 2),$$

$\mathrm{R}(x, y)$ étant une fonction rationnelle inférieure à un nombre fixe M sur l'hypersphère et à son intérieur; (x_n, y_n) est le transformé de (x, y) par la $n^{\text{ième}}$ substitution du groupe.

Considérons une hypersphère de centre B : notre démonstration sera faite si nous prouvons que, le rayon de cette hypersphère étant assez petit, les points singuliers de $\mathrm{R}(x_n, y_n)$ ni ceux de $\frac{\partial(x_n, y_n)}{\partial(x, y)}$ ne peuvent, quel que soit n, pénétrer dans cette hypersphère [1].

Or les infinis de $\mathrm{R}(x, y)$ sont tous extérieurs à la multiplicité cyclique V de centre $x = y = 0$ dont l'équation en coordonnées homogènes est

$$xx_0 + yy_0 - zz_0 = \alpha zz_0,$$

si seulement α est *positif* mais assez petit. Les infinis de $\mathrm{R}(x_n, y_n)$ sont extérieurs à la multiplicité V_n de même paramètre α qui a pour centre le transformé de $(0, 0, 1)$ par l'inverse de la $n^{\text{ième}}$ substitution du groupe. Or toutes ces multiplicités V_n ont B à leur *intérieur*; montrons que la plus courte distance de B aux V_n reste supérieure à un nombre *fixe* ε.

En effet, les transformés par le groupe de $(0, 0, 1)$ n'ont pas B pour point d'accumulation; car, puisque B est un point d'une face du polyèdre, et non d'une des arêtes qui limitent cette face, une petite hypersphère S de centre B sera tout entière dans ce polyèdre, pour ce qui concerne les points intérieurs à l'hypersphère principale. Et, si le rayon de S est assez petit, S aura à son extérieur celui des transformés de

---

(1) *Cf.* G. Giraud, *Leçons sur les fonctions automorphes*, Chap. I, § 32.

(o, o, 1) qui est dans ce polyèdre; S aura donc à son extérieur (o, o, 1) lui-même et tous ses transformés par Γ.

Considérons la fonction de ξ, η, ζ, x, y, z :

$$(1) \qquad \frac{xx_0 + yy_0 - zz_0}{|x\xi_0 + y\eta_0 - z\zeta_0|^2} \qquad (\xi\xi_0 + \eta\eta_0 - \zeta\zeta_0 = \text{const.}),$$

où (ξ, η, ζ) varie sans aller à l'intérieur de S ni à l'extérieur de l'hypersphère principale. Cette fonction est continue quand (x, y, z) vient en B; je dis qu'elle l'est aussi pour tous les points voisins de B. Cela signifie que, si (x, y, z) est assez voisin de B, il n'existe pas de point (ξ, η, ζ) intérieur à S ou extérieur à l'hypersphère principale, tel que

$$x\xi_0 + y\eta_0 - z\zeta_0 = 0.$$

En effet, il faudrait, dans l'hypothèse contraire, que (ξ, η, ζ) fût sur la polaire de x, y, z). Or, si (x, y, z) est sur l'hypersphère principale et intérieur à S, sa polaire est extérieure à l'hypersphère principale, sauf le point (x, y, z) : donc (ξ, η, ζ) n'existe pas. Si (x, y, z) est à l'intérieur de l'hypersphère principale, (ξ, η, ζ) n'existe évidemment pas non plus. Si (x, y, z) est extérieur à l'hypersphère principale, sa polaire pénètre à l'intérieur de celle-ci : mais, si (x, y, z) est assez voisin de B, tous les points de la polaire qui ne sont pas extérieurs à cette hypersphère sont intérieurs à S; car, si B est, par exemple, (1, o, 1), on a pour les points de la polaire intérieurs à l'hypersphère principale

$$\left|\frac{\eta}{\zeta} - \frac{z_0 y}{xx_0 + yy_0}\right|^2 \leqq \frac{x^2 x_0^2 - xx_0 zz_0 + xx_0 yy_0}{(xx_0 + yy_0)^2},$$

c'est-à-dire $\frac{\eta}{\zeta}$ aussi petit qu'on veut, pourvu que (x, y, z) soit assez voisin de B; et comme

$$\frac{\xi}{\zeta} = \frac{z_0}{x_0} - \frac{y_0}{x_0}\frac{\eta}{\zeta},$$

on voit que (ξ, η, ζ) est alors aussi voisin qu'on veut de B, donc intérieur à S.

Ainsi, il existe une hypersphère S', intérieure à S, telle que la fonction (1) soit continue quand (x, y, z) est intérieur à S' ou sur son contour, et (ξ, η, ζ) extérieur à S et intérieur à l'hypersphère principale, ou situé sur le contour de l'une d'elles. Ce domaine étant fermé, (1) y est uniformément continue. Soit C ce domaine de variation de $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$.

Or, quand (x, y, z) est en B, (1) est nulle, quels que soient ξ, η, ζ. Si donc la multiplicité

$$\frac{xx_0 + yy_0 - zz_0}{|x\xi_0 + y\eta_0 - z\zeta_0|^2} = \alpha \tag{2}$$

pénètre dans C, la continuité uniforme entraîne que, sur cette multiplicité et dans C, la distance de (x, y, z) à B reste supérieure à un certain minimum ε, indépendant de ξ, η, ζ. Comme ε est plus petit que le rayon de S', ε est aussi inférieur à la distance de B à (x, y, z) pour les points de (2) qui ne seraient pas dans C.

Mais les V_n font partie des multiplicités (2) : ε est donc le nombre dont nous voulions prouver l'existence.

Donc les infinis de $R(x_n, y_n)$ ne peuvent, quel que soit n, pénétrer dans l'hypersphère de centre B et de rayon ε.

Une proposition identique s'applique aux infinis de $\frac{\partial(x_n, y_n)}{\partial(x, y)}$, qui sont les transformés par Γ du plan de l'infini.

Notre théorème est donc démontré.

2. Théorème. — *Aucune arête à une ou deux dimensions du polyèdre fondamental rayonné d'un groupe Γ, située sur l'hypersphère principale, ne peut être commune à une infinité de transformés du polyèdre fondamental rayonné par Γ.*

Soient en effet B et C deux points distincts d'une telle arête supposée existante. Les polyèdres dont une face passe par B ont tous un de leurs centres sur une certaine multiplicité passant par B et n'ayant pas d'autre point que B commun avec l'hypersphère (1). Comme les mêmes faces passent aussi par C, ces mêmes centres sont aussi sur une multiplicité analogue, passant par C, et n'ayant pas d'autre point que C commun avec l'hypersphère. L'intersection de ces multiplicités est un ensemble fermé sans point commun avec l'hypersphère. Puisque, par

(1) Son équation est $|x\xi_0 + y\eta_0 - z\zeta_0|^2 = \lambda(xx_0 + yy_0 - zz_0)$, où (ξ, η, ζ) sont les coordonnées de B, et λ un paramètre.

hypothèse, il supporte une infinité de centres de polyèdres, ceux-ci ont au moins un point d'accumulation intérieur à l'hypersphère. Or cette conclusion est absurde, même si le polyèdre fondamental n'est pas à centre unique, pourvu qu'il n'ait qu'un nombre fini de centres. Donc de telles arêtes ne peuvent pas exister.

3. Corollaire. — *Si quelque fonction* $\Theta(x, y)$, *correspondant à un groupe* Γ, *admet l'hypersphère principale comme coupure, et si le polyèdre fondamental rayonné* P *du groupe* Γ *n'a qu'un nombre fini de faces,* P *ne peut atteindre l'hypersphère principale que par des sommets.*

Car, puisque P ne peut avoir (n° 1) de face sur l'hypersphère, s'il y avait une arête à une ou à deux dimensions, celle-ci serait commune à une infinité de ses transformés par Γ, ce qui est impossible (n° 2).

4. *Définition.* — Si le prolongement analytique d'une fonction Θ ne peut pas se faire au delà de l'hypersphère, et si le polyèdre fondamental rayonné P de Γ n'a qu'un nombre fini de faces, et a un sommet A sur l'hypersphère, nous dirons ici que les hypothèses H sont satisfaites.

5. Lemme I. — *Si les hypothèses* H *sont satisfaites,* A *est point double d'une infinité de transformations du groupe* Γ.

En effet, A appartient à un cycle d'un nombre fini de sommets; soient $A_2, A_3, \ldots, A_m$ les sommets du cycle autres que A. Soit P_i un transformé de P par Γ, contenant A, et tel que, si l'on amène P_i à coïncider avec P par une transformation de Γ, A_i vienne en A. A sera maintenant nommé A_1, et P, P_1.

Il y a une infinité de polyèdres P', transformés de P_1 par Γ, autres que $P_1, P_2, \ldots, P_m$, et qui ont le sommet A. La transformation de Γ qui amène l'un d'eux sur P_1 amène A_1 en A_i, i étant l'un des nombres 1, 2, ..., m. Alors la transformation qui change P_i en P' change A_1 en lui-même : car on peut d'abord amener P_i en P_1, ce qui change A_1 en A_i, puis P_1 en P', ce qui ramène A_i en A_1.

Donc, à chaque polyèdre de sommet A, correspond une substitution de point double A ; à une même substitution ne correspondent que

m polyèdres, savoir ceux en lesquels elle change $P_1, P_2, \ldots, P_m$. Donc il y a une infinité de substitutions de point double A.

Définition. — Ces substitutions forment évidemment un groupe, que nous désignerons par G.

Remarque. — Remarquons que, si nous formons le polyèdre rayonné de G, *les centres étant les mêmes que pour* $P_1, P_2, \ldots, P_m$, *les faces passant par* A *sont les mêmes dans ce polyèdre et dans l'ensemble de* P_1, $P_2, \ldots, P_m$ (1).

6. Lemme II. — G *ne comprend pas de substitutions hyperboliques.* — Supposons qu'il en comprenne une; nous pouvons supposer que celle-ci est de la forme canonique. Si (ξ, η, ζ) est un centre d'un des polyèdres, $[(\xi\,\mathrm{ch}\,nu + \zeta\,\mathrm{sh}\,nu)e^{ni\theta}, \eta e^{-2ni\theta}, (\xi\,\mathrm{sh}\,nu + \zeta\,\mathrm{ch}\,nu)e^{ni\theta}]$ en est un autre. Si (x, y, z) appartient au polyèdre fondamental,

$$(3) \qquad |x_0(\xi\,\mathrm{ch}\,nu + \zeta\,\mathrm{sh}\,nu)e^{ni\theta} + y_0\eta e^{-2ni\theta} - z_0(\xi\,\mathrm{sh}\,nu + \zeta\,\mathrm{ch}\,nu)e^{ni\theta}|^2$$

ou l'expression analogue où (ξ, η, ζ) est remplacé par un autre centre du même polyèdre, est minimum pour $n = 0$. Or, il y a des points (x, y, z) pour lesquels cette fonction de l'entier n n'a pas de minimum, ou en a un atteint une infinité de fois : nommons-les *points exceptionnels* et recherchons-les.

Si u est, par exemple, positif, (3) tend vers $+\infty$ avec n, sauf si

$$(\xi + \zeta)(x_0 - z_0) = 0,$$

ou, comme $\xi \neq -\zeta$ (le centre appartenant au domaine principal), si

$$x = z.$$

La même expression tend vers $+\infty$ avec $-n$, sauf si

$$x = -z.$$

Les points exceptionnels sont donc parmi ceux qui vérifient l'équation

$$(x + z)(x - z) = 0.$$

---

(1) *Cf.* G. Giraud, *loc. cit.*, Chap. I, § 27.

Ceux-ci ne sont au reste pas tous exceptionnels : la réponse varie suivant que $\theta : \pi$ est rationnel ou non, et suivant la position du centre : ainsi, si $\eta = 0$, tous les points précédents sont exceptionnels. Il est inutile pour notre objet de faire la discussion complète : nous remarquerons seulement que les trois points doubles $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 0, -1)$ sont exceptionnels, et que, pour les deux derniers, situés sur l'hypersphère, (3) n'a pas de minimum; or A est un de ces deux derniers points : il y a donc contradiction.

Le lemme est démontré.

7. *Notations.* — Pour rechercher le groupe G, nous ferons un changement linéaire de variables tel que l'hypersphère devienne

$$xz_0 + x_0 z + yy_0 = 0; \tag{4}$$

et que A vienne en $(1, 0, 0)$. L'intérieur de l'hypersphère est alors

$$xz_0 + x_0 z + yy_0 < 0.$$

Toute substitution de G, étant elliptique ou parabolique, peut s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} X &= x - \beta_0 y + \alpha z, \\ Y &= e^{i\theta}(y + \beta z), \\ Z &= z, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

avec la condition

$$\alpha + \alpha_0 + \beta\beta_0 = 0. \tag{6}$$

Le déterminant de la substitution ainsi écrite est $e^{i\theta}$.

Soient S la substitution (5), T la substitution analogue où θ, α, β sont remplacés par θ', α', β'. Cherchons le produit ST. Nous trouvons qu'il se déduit de S en remplaçant θ, α, β par $\theta + \theta'$, $\alpha + \alpha' - \beta\beta'_0 e^{i\theta}$, $\beta + \beta' e^{-i\theta}$.

En particulier, si $e^{i\theta} \neq 1$, S^m a pour paramètres

$$m\theta,\ m\alpha + \frac{\beta\beta_0}{1 - e^{-i\theta}}\left(m + e^{-i\theta}\frac{1 - e^{-mi\theta}}{1 - e^{-i\theta}}\right),\quad \beta\frac{1 - e^{-mi\theta}}{1 - e^{-i\theta}};$$

si $e^{i\theta} = 1$, S^m a pour paramètres

$$0,\ m\alpha - \frac{m(m-1)}{2}\beta\beta_0,\ m\beta.$$

Pour que la substitution soit elliptique, il est nécessaire et suffisant que les coefficients de S^m soient bornés quand m varie; pour cela, il faut que

$$e^{i\theta} \neq 1,$$

et en outre que

$$(7) \qquad \alpha + \frac{\beta\beta_0}{1 - e^{-i\theta}} = 0.$$

Remarquons qu'en vertu de (6), le premier membre de (7) est en tout cas purement imaginaire.

Si $e^{i\theta} \neq 1$ et que (7) n'ait pas lieu, S est parabolique à deux points doubles.

Si $e^{i\theta} = 1$, $\beta = 0$, S est parabolique à plan double ($S = 1$ si, en outre, $\alpha = 0$).

Si $e^{i\theta} = 1$, $\beta \neq 0$, S est parabolique à point double unique.

8. Lemme III. — *Les transformés par* G *d'un point quelconque de l'espace n'ont de point d'accumulation que sur* $z = 0$.

Car G conserve

$$(8) \qquad xz_0 + x_0 z + yy_0 - \lambda z z_0,$$

où λ est une constante réelle quelconque. Or ceci est un hermitien du type voulu. Si l'on considère un point tel que z soit différent de zéro, on peut choisir λ de manière que (8) soit négatif en ce point; on peut donc, quand on se borne à G, choisir le domaine principal de manière qu'il comprenne ce point, ce qui démontre le lemme.

Corollaire I. — *Les transformés par* G *des points extérieurs à* $z = 0$ *n'ont pas d'autre point d'accumulation que* $(1, 0, 0)$.

En effet, λ étant choisi comme ci-dessus, les points d'accumulation doivent vérifier les conditions

$$z = 0,$$
$$xz_0 + x_0 z + yy_0 - \lambda z z_0 = 0,$$

qui entraînent

$$y = z = 0.$$

Corollaire II. — G *a un nombre fini de substitutions génératrices.*

Car on peut choisir λ de façon que le domaine principal ne rencontre que les faces du polyèdre fondamental qui passent par A, et qui sont en nombre fini.

9. Lemme IV. — *Si une substitution* S *du type* (5) *est permutable à toute substitution de* G, *on a*

$$\beta = 0, \qquad e^{i\theta} = 1,$$

c'est-à-dire que S *est parabolique à plan double, ou est la substitution identique.*

Supposons que ce soit faux.

1° Supposons d'abord $e^{i\theta} \neq 1$. En transformant G par une substitution du type (5), nous pouvons nous ramener au cas où $\beta = 0$. Soient θ', α', β' les paramètres d'une substitution variable T de G. Comme

$$ST = TS,$$

on en déduit

$$\beta' e^{-i\theta} = \beta',$$

d'où

$$\beta' = 0.$$

Donc toute substitution de G conserve yy_0. Je dis que cela entraîne que le polyèdre fondamental atteint l'hypersphère en des points aussi voisins que l'on veut de A : comme on sait bien qu'il n'en est rien, cette contradiction prouve que $e^{i\theta} = 1$.

Soit B un point quelconque, non situé sur $z = 0$; le polyèdre fondamental comprend un transformé de B par G, donc un point pour lequel yy_0 a la même valeur qu'en B. Soit C un point de l'hypersphère pour lequel

$$yy_0 = 2M, \qquad z = 1;$$

comme (x, y, z) est sur l'hypersphère,

$$x + x_0 = -2M, \qquad |x| \geqq M.$$

Mais

$$|y| = \sqrt{2M}.$$

Donc

$$\left|\frac{x}{y}\right| \geqq \sqrt{\frac{M}{2}}, \qquad \left|\frac{y}{z}\right| = \sqrt{2M}.$$

En choisissant B convenablement, M, et par suite ces deux rapports, sont anssi grands que l'on veut. Le point C du polyèdre fondamental et de l'hypersphère principale est donc aussi voisin de A que l'on veut, ce qu'il fallait démontrer.

2° Supposons donc $e^{i\theta} = 1$, $\beta \neq 0$: c'est la seule hypothèse qui reste pour mettre le lemme en défaut. Alors la condition $ST = TS$ nous donne

$$\beta = \beta e^{-i\theta'},$$

d'où, comme $\beta \neq 0$,

$$e^{i\theta'} = 1;$$

nous avons aussi, en considérant le paramètre qui remplace α,

$$\beta\beta'_0 = \beta_0\beta';$$

donc $\beta : \beta'$ est réel. Si nous transformons G en changeant y en $ye^{i\varphi}$, on peut choisir φ de manière que β soit réel. Alors G conserve $y - y_0$. Si l'on considère un point B, extérieur à $z = 0$, pour lequel

$$|y - y_0| = 2\sqrt{2M},$$

le point C qui lui correspond dans le domaine principal est tel que

$$yy_0 \geqq 2M;$$

nous sommes alors conduits à la même absurdité qu'il y a un instant; le lemme est donc démontré.

10. Lemme V. — *Les multiplicateurs $e^{i\theta}$ des diverses substitutions de G n'ont qu'un nombre fini de valeurs distinctes.*

Soient (5) les équations d'une substitution S de G. Considérons l'équation

$$e^{i\theta}(y + \beta z) = y,$$

qu'on peut résoudre par rapport à y si $e^{i\theta} \neq 1$:

$$(9) \qquad y = \frac{\beta e^{i\theta} z}{1 - e^{i\theta}};$$

l'hypothèse $e^{i\theta} \neq 1$ peut être faite à cause de l'énoncé : nous supprimons ainsi une des valeurs possibles de ce multiplicateur.

L'équation (9) peut être regardée comme l'équation d'une multiplicité linéaire conservée par S. Prenons un point quelconque autre que A à l'intersection de cette multiplicité (9) et de l'hypersphère principale (4); ramenons-le à l'intérieur du polyèdre fondamental par une substitution T de G. $T^{-1}ST$ est une substitution de G, de multiplicateur $e^{i\theta}$, dont la multiplicité (9) pénètre dans le polyèdre fondamental.

Soient maintenant (5) les équations de $T^{-1}ST$; en faisant $z=1$ pour un point situé à la fois sur (9), sur l'hypersphère principale, et dans le polyèdre fondamental, on trouve

$$\beta = (e^{-i\theta} - 1)y.$$

Mais il résulte de la démonstration du lemme IV que, pour ces points, on a

$$|y| < M,$$

M étant un nombre fixe. Donc

$$|\beta| < 2M.$$

Si le lemme était faux, le système des valeurs de $e^{i\theta}$ et des β correspondant aux $T^{-1}ST$ aurait au moins un système d'accumulation; pour le quotient de deux substitutions correspondant à des systèmes suffisamment voisins de ce dernier, on aurait

$$|e^{i\theta} - 1| < \varepsilon, \qquad |\beta| < \varepsilon,$$

ε étant positif quelconque; les deux expressions $e^{i\theta} - 1$ et β ne sont du reste pas nulles ensemble. Nous appellerons S la substitution donnant lieu à ces inégalités. On peut écrire

$$S = UV,$$

U et V ne faisant peut-être pas partie de G. Dans U, le paramètre β est le même que dans S, et α est réel, donc infiniment petit à cause de (6). V est alors parabolique à plan double, donc permutable à toute substitution du type (5). Alors, si T est une des substitutions génératrices de G,

$$STS^{-1}T^{-1} = UVTV^{-1}U^{-1}T^{-1} = UTU^{-1}T^{-1};$$

c'est donc, ε tendant vers zéro, une substitution infinitésimale; donc, dès que ε est assez petit,

$$STS^{-1}T^{-1} = 1.$$

Dès que ε est assez petit, S est permutable à toutes les substitutions génératrices de G (en nombre fini, lemme III, corollaire II), donc à toute substitution de G. Donc (lemme IV),

$$e^{i\theta} = 1, \qquad \beta = 0,$$

ce qui contredit un résultat précédent. Donc le lemme est démontré.

Corollaire I. — *Les rapports* $\theta : \pi$ *sont rationnels.*

Car $e^{mi\theta}$, où m est entier quelconque, n'a qu'un nombre fini de valeurs distinctes.

Corollaire II. — *Les angles* θ *sont des multiples de l'un d'entre eux* $2\pi : q$, *où* q *est entier.*

Corollaire III. — G *comprend des substitutions paraboliques à point double unique.*

Soit, en effet, E une substitution elliptique ou parabolique de G, d'angle

$$\theta = 2\pi : q.$$

Toute substitution de G est du type E^kP ($k = 0, 1, 2, \ldots, q-1$), où P correspond à $\theta = 0$. Si l'énoncé était faux, P serait parabolique à plan double; et, par suite, toutes les substitutions P seraient des puissances de l'une d'entre elles, puisque G n'a pas de substitutions infinitésimales. Or, on vérifie sans peine que le polyèdre fondamental du groupe des E^kP^p ($k = 0, 1, 2, \ldots, q-1$; $p = -\infty, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, +\infty$) atteint l'hypersphère principale en des points aussi voisins que l'on veut de A, ce qui est une contradiction.

La proposition est donc établie.

11. Lemme VI. — *Le groupe* G_1 *des substitutions de* G *d'angle* $\theta = 0$

dérive d'au plus trois substitutions génératrices, dont deux au plus sont paraboliques à point double unique.

En effet, on voit, par le même raisonnement qu'au lemme V, que les paramètres β des différentes substitutions de G forment un ensemble qui n'a pas de valeur d'accumulation à distance finie, chaque valeur de β n'étant comptée qu'une fois, même si elle correspond à plusieurs substitutions distinctes de G_1.

Soit donc P_1, de paramètres o, α_1, β_1, une des substitutions pour lesquelles β a la plus petite valeur absolue possible; soit P_2, de paramètres o, α_2, β_2, une de celles pour lesquelles β, n'étant pas multiple de β_1, a la plus petite valeur absolue possible (nier l'existence de P_2 reviendrait à admettre que G_1 dérive d'une seule substitution à point double unique). Soit enfin $P_3(o, \alpha_3, \beta_3)$ une substitution quelconque de G_1. Nous pouvons trouver trois entiers réels p_1, p_2, p_3 tels que

$$|p_1\beta_1 + p_2\beta_2 + p_3\beta_3| < \varepsilon,$$

ε étant positif arbitraire, car ceci revient à deux inégalités linéaires à coefficients réels. Alors, dès que ε est assez petit,

$$p_1\beta_1 + p_2\beta_2 + p_3\beta_3 = 0.$$

Or p_3 n'est pas nul; car autrement, de l'équation

$$p_1\beta_1 + p_2\beta_2 = 0,$$

où p_1 et p_2 sont des entiers premiers entre eux, on déduirait, en introduisant les entiers λ et μ tels que

$$\lambda p_1 + \mu p_2 = 1,$$

que P_1 et P_2 sont des produits de puissances de $P_1^{\mu} P_2^{-\lambda}$ par des substitutions paraboliques à plan double, ce qui contredit les définitions de P_1 et de P_2.

p_3 n'étant pas nul, je dis qu'on peut supposer que

$$p_3 = 1.$$

En effet, si $|p_3| > 1$, p_1, p_2 et p_3 étant premiers entre eux, soient q_1 et q_2 les entiers qui diffèrent le moins de $-p_1 : p_3$ et de $-p_2 : p_3$.

Considérons la substitution

$$P_1^{q_1} P_2^{q_2} P_3.$$

Le paramètre qui remplace β est

$$\lambda\beta_1 + \mu\beta_2,$$

$$\lambda = q_1 + \frac{p_1}{p_3}, \qquad \mu = q_2 + \frac{p_2}{p_3},$$

de sorte que

$$|\lambda| \leqq 1 : 2, \qquad |\mu| \leqq 1 : 2.$$

Sa valeur absolue est donc

$$\lambda^2 \beta_1 \beta_{1,0} + \lambda\mu(\beta_1\beta_{2,0} + \beta_{1,0}\beta_2) + \mu^2 \beta_2 \beta_{2,0}.$$

Or, d'après la manière dont on a choisi P_1 et P_2,

$$\beta_2\beta_{2,0} > \beta_1\beta_{1,0} > |\beta_1\beta_{2,0} + \beta_{1,0}\beta_2|;$$

donc,

$$\lambda^2 \beta_1 \beta_{1,0} + \lambda\mu(\beta_1\beta_{2,0} + \beta_{1,0}\beta_2) + \mu^2 \beta_2 \beta_{2,0} < 3\beta_2\beta_{2,0} : 4;$$

donc,

$$P_1^{q_1} P_2^{q_2} P_3 = P_1^r,$$

r étant entier; par suite,

$$(q_1 - r)\beta_1 + q_2\beta_2 + \beta_3 = 0;$$

nous retombons ainsi dans le cas où $p_3 = 1$.

Donc,

$$P_3 P_2^{p_2} P_1^{p_1}$$

est une substitution parabolique à plan double. Or, toutes les substitutions de G_1 paraboliques à plan double sont évidemment des puissances de l'une d'entre elles P. Donc,

$$P_3 = P^m P_1^{-p_1} P_2^{-p_2};$$

le lemme est démontré, puisque P_3 est quelconque.

12. Lemme VII. — *Les angles* θ *des diverses substitutions de* G *sont des multiples de l'un d'entre eux* $2\pi : q$, *où* $q = 1, 2, 3, 4$ *ou* 6.

Soit $E(\theta, \alpha, \beta)$ une substitution quelconque de G; soient P, P_1, P_2

les substitutions génératrices de G_1, les deux dernières seules étant paraboliques à point double unique : P_1 a pour paramètres o, α_1, β_1 et P_2 a pour paramètres o, α_2, β_2. Si G_1 n'a que moins de trois substitutions génératrices, la démonstration garde la même allure générale.

Formons $E^{-1}P_kE$ ($k = 1, 2$). Le paramètre β de cette substitution a pour valeur $\beta_k e^{i\theta}$. Son angle θ est nul; donc, cette substitution fait partie de G_1. Par suite, il existe des entiers λ, μ, ν, ρ tels que

$$(10) \qquad \begin{cases} \beta_1 e^{i\theta} = \lambda\beta_1 + \mu\beta_2, \\ \beta_2 e^{i\theta} = \nu\beta_1 + \rho\beta_2; \end{cases}$$

donc,

$$(\lambda - e^{i\theta})(\rho - e^{i\theta}) - \mu\nu = 0;$$

$e^{i\theta}$ est racine d'une équation du second degré à coefficients entiers réels, le coefficient du terme du second degré étant *un* :

$$e^{2i\theta} - (\lambda + \rho)e^{i\theta} + \lambda\rho - \mu\nu = 0.$$

Si l'on écarte le cas où $e^{i\theta} = \pm 1$, on voit donc que

$$\lambda\rho - \mu\nu = 1$$

et que

$$-2 < \lambda + \rho < 2.$$

Si $\lambda + \rho = -1$, $\theta = \pm \frac{2\pi}{3}$; si $\lambda + \rho = 0$, $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$; si $\lambda + \rho = 1$, $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$. Le lemme est donc démontré.

Corollaire. — G_1 *est un sous-groupe invariant d'ordre fini de* G.

Cet ordre est, en effet, le nombre q.

G_1 jouit, par suite, des mêmes propriétés que G : son polyèdre fondamental n'atteint pas l'hypersphère en des points infiniment voisins de A.

13. Lemme VIII. — G_1 *a exactement trois substitutions génératrices*.

En effet, soit P_1 une substitution de G_1 parabolique à point double unique (lemme V, corollaire III). Soit Q une substitution de G_1 non permutable à P_1 (lemme IV). Alors $P_1 Q P_1^{-1} Q^{-1}$, qui n'est pas la substitution identique, est parabolique à plan double; donc, G_1 comprend de telles substitutions, qui sont toutes des puissances de l'une d'entre elles P.

Nous pouvons supposer que P_1 soit l'une des substitutions de G_1 dont le paramètre β a la plus petite valeur absolue possible. Toutes les substitutions de G_1 ne sont pas du type

$$P^n P_1^p,$$

puisqu'elles ne sont pas toutes permutables à P_1 (lemme IV). Si alors P_2 est une de celles des substitutions, qui ne sont pas de ce type, pour lesquelles β a la plus petite valeur absolue possible, il résulte de la démonstration du lemme VI que toute substitution de G_1 est du type

$$P^n P_1^p P_2^r. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

14. Théorème. — *L'expression générale des substitutions de* G *est*

$$E^m P^n P_1^p P_2^r,$$

où m peut varier de 1 *à* q ($q = 1, 2, 3, 4$ *ou* 6) *et les autres exposants de* $-\infty$ *à* $+\infty$; *si* $q = 1$, E *est la substitution identique; si* $q > 1$, E *est une substitution d'angle* $2\pi : q$; P *est une substitution parabolique à plan double;* P_1 *et* P_2 *sont deux substitutions paraboliques à point double unique non permutables entre elles* (¹).

Soit, en effet, E une des substitutions d'angle $2\pi : q$ (lemme VII). Si Q est une substitution quelconque de G, d'angle $2m\pi : q$, $E^{-m}Q$ fait partie de G_1, ce qui démontre le théorème.

15. *Remarque*. — Il résulte du lemme VII que l'équation

$$(11) \qquad s^2 - (\lambda + \rho) s + \lambda\rho - \mu\nu = 0$$

admet la racine $s = e^{i\theta}$; si cette racine est imaginaire, l'autre est $e^{-i\theta}$. Je dis que, si $e^{i\theta} = \pm 1$, c'est une racine double. En effet, β_1 et β_2

(¹) *Cf.* Picard, *Comptes rendus*, t. 98, 1884, p. 563. Les groupes G y sont considérés *a priori*, en négligeant toutefois E.

satisfont alors aux équations (10), et leurs conjugués y satisfont aussi : donc, $e^{i\theta}$ est bien racine double.

Par conséquent, on a toujours

$$\lambda\rho - \mu\nu = 1.$$

16. Nous allons maintenant chercher tous les groupes discontinus dont toutes les substitutions sont du type indiqué dans l'énoncé du théorème ci-dessus.

Tout d'abord, P_1 et P_2 n'étant pas permutables, $\beta_1 : \beta_2$ ne devra jamais être réel.

Supposons d'abord que $q = 1$, de sorte que E est la substitution identique. Nous choisirons arbitrairement les substitutions non permutables P_1 et P_2, et nous devrons prendre le paramètre α de P égal à un diviseur de $\beta_{1,0}\beta_2 - \beta_1\beta_{2,0}$, de façon que $P_1P_2P_1^{-1}P_2^{-1}$ soit bien une puissance de P. Alors P, P_1, P_2 engendrent un des groupes cherchés, car

$$P_1P_2P_1^{-1}P_2^{-1} = P^m;$$

donc, P étant permutable à P_1 et à P_2,

$$P_2P_1 = P^{-m}P_1P_2, \qquad P_2^{-1}P_1^{-1} = P^{-m}P_1^{-1}P_2^{-1},$$
$$P_2^{-1}P_1 = P^{m}P_1P_2^{-1}, \qquad P_2P_1^{-1} = P^{m}P_1^{-1}P_2.$$

On peut, par application répétée de ces formules, mettre toutes les substitutions du groupe sous la forme voulue $P^nP_1^pP_2^r$. Le groupe n'a, évidemment, pas de substitution infinitésimale ; il est donc bien discontinu.

17. Si $q = 2$, nous supposerons que le groupe ait été transformé de manière que E ait pour paramètres $(\pi, \alpha, 0)$. Nous prendrons β_1 et β_2 arbitrairement, pourvu que leur rapport ne soit pas réel. On doit avoir

$$-\beta_1 = \lambda\beta_1 + \mu\beta_2,$$
$$-\beta_2 = \nu\beta_1 + \rho\beta_2,$$

ce qui entraîne

$$\lambda = \rho = -1, \qquad \mu = \nu = 0.$$

De plus,

$$(12)\qquad \begin{cases} P_1 E = E P^\sigma P_1^{-1}, \\ P_2 E = E P^\tau P_2^{-1}, \end{cases}$$

σ et τ étant entiers. Soient $(0, ih, 0)$ les paramètres de P; h sera pris égal à un diviseur de $i(\beta_{1,0}\beta_2 - \beta_1\beta_{2,0})$. On déterminera α de façon que

$$E^2 = P^\omega,$$

c'est-à-dire que

$$2\alpha = i\omega h,$$

ω étant un entier quelconque. Il reste à déterminer α_1 et α_2; on le fait au moyen des conditions (12), qui donnent

$$-2\alpha_1 = \beta_1\beta_{1,0} - \sigma i h,$$
$$-2\alpha_2 = \beta_2\beta_{2,0} - \tau i h;$$

ces relations sont compatibles avec (6).

G est ainsi déterminé. Il est du type voulu, car les conditions (12) permettent de faire passer E en tête d'un produit quelconque de ces substitutions; ensuite, les substitutions P_1 peuvent passer avant les substitutions P_2, comme au numéro précédent. G est évidemment discontinu.

18. Si $q = 3$, 4 ou 6, on a vu que l'équation (11) admet pour racines $e^{\frac{2i\pi}{q}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{q}}$. Donc,

$$\lambda\rho - \mu\nu = 1,$$

$$\lambda + \rho = 2\cos\frac{2\pi}{q} = -1,\ 0,\ \text{ou}\ 1.$$

On peut prendre λ arbitrairement, puis

$$\rho = 2\cos\frac{2\pi}{q} - \lambda,$$

$$\mu\nu = \lambda\left(2\cos\frac{2\pi}{q} - \lambda\right) - 1.$$

Il faut alors que

$$\beta_1 e^{\frac{2i\pi}{q}} = \lambda\beta_1 + \mu\beta_2,$$

$$\beta_2 e^{\frac{2i\pi}{q}} = \nu\beta_1 + \rho\beta_2,$$

ce qui donne une seule condition

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{e^{\frac{2i\pi}{q}} - \lambda}{\mu}.$$

Du reste, on ne diminue pas la généralité de G en prenant

$$\lambda = 0, \qquad \mu = 1.$$

Si P a pour paramètres $(0, ih, 0)$, h est un diviseur arbitraire de $i(\beta_{1,0}\beta_2 - \beta_1\beta_{2,0})$. E étant mis sous la forme $\left(\frac{2\pi}{q}, \alpha, 0\right)$, on doit avoir

$$E^q = P^\omega$$

ou

$$q\alpha = i\omega h.$$

Enfin, on détermine α_1 et α_2 par les conditions

$$P_1 E = EP^\sigma P_1^\lambda P_2^\mu,$$
$$P_2 E = EP^\tau P_1^\nu P_2^\rho,$$

qui se réduisent à

$$\begin{aligned}(\lambda - 1)\alpha_1 + \mu\alpha_2 &= \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\beta_1\beta_{1,0} + \frac{\mu(\mu-1)}{2}\beta_2\beta_{2,0} + \lambda\mu\beta_1\beta_{2,0} - \sigma ih,\\ \nu\alpha_1 + (\rho - 1)\alpha_2 &= \frac{\nu(\nu-1)}{2}\beta_1\beta_{1,0} + \frac{\rho(\rho-1)}{2}\beta_2\beta_{2,0} + \nu\rho\beta_1\beta_{2,0} - \tau ih;\end{aligned}$$

le déterminant de ces deux équations n'est pas nul.

On constate ensuite, comme dans les autres cas, que le groupe engendré par ces substitutions est du type indiqué, et qu'il est discontinu.

19. Cherchons le polyèdre fondamental rayonné. Il dépend, bien entendu, des centres choisis, et aussi de la valeur de λ (nº 8). Nous ferons $\lambda = 0$.

Observons tout d'abord que nous avons, bien facilement, un polyèdre fondamental non rayonné. Soient

$$X = x : z, \qquad Y = y : z.$$

Nous pouvons, dans $E^m P^n P_1^p P_2^r$, disposer de p et de r, en faisant $m = 0$, pour amener Y à l'intérieur du parallélogramme, construit sur β_1 et β_2, dont le centre est à l'origine des coordonnées. En faisant varier m, nous pouvons partager ce polygone en q autres. n permet, enfin, de rendre la partie imaginaire de X inférieure en valeur absolue à $h : 2$. Nous avons, ainsi, un polyèdre fondamental Π. Π n'a qu'un nombre fini de faces dans tout l'espace.

Passons, maintenant, à la méthode du rayonnement. Notre méthode va consister à prendre un point de Π, et à chercher quelle substitution il faut lui appliquer pour l'amener dans le polyèdre fondamental rayonné. Suivant le centre de celui-ci que l'on considère, et suivant la valeur de m, nous aurons à chercher les minima d'un nombre fini d'expressions telles que

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &\Big| X + Y(\eta_0 + p\beta_{1,0} + r\beta_{2,0}) + \xi_0 - (p\beta_1 + r\beta_2)\eta_0 - nih \\ &\quad + p\left(\alpha_{1,0} + \frac{\beta_1\beta_{1,0}}{2}\right) \\ &\quad + r\left(\alpha_{2,0} + \frac{\beta_2\beta_{2,0}}{2}\right) - \frac{p^2}{2}\beta_1\beta_{1,0} - \frac{r^2}{2}\beta_2\beta_{2,0} - pr\beta_1\beta_{2,0}\Big|^2 \end{aligned}\right.$$

quand n, p, r prennent toutes les valeurs entières possibles.

Dans l'expression dont nous venons d'écrire la norme, séparons la partie réelle et la partie imaginaire. Cette dernière, seule, contient n, et elle le contient linéairement, par le terme $-nih$. Pour le minimum cherché, nous sommes donc certains que la norme de cette partie imaginaire ne dépasse pas $h^2 : 4$. Et nous sommes sûrs aussi que, pour ce minimum, la norme de la partie réelle ne dépasse pas son propre minimum, relatif à l'ensemble des valeurs entières de p et de r, augmenté de $h^2 : 4$. Or, cette partie réelle est de la forme

$$\frac{X + X_0}{2} + a + bp + cr + Ap^2 + 2Bpr + Cr^2,$$

où la partie réelle de X est mise en évidence au seul endroit où elle entre. $Ap^2 + 2Bpq + Cr^2$ est une forme quadratique définie négative à coefficients constants. a, b, c sont des quantités bornées à l'intérieur de Π. Donc, en ce qui concerne l'intérieur de l'hypersphère

$$X + X_0 < -YY_0 \leqq 0,$$

ou, plus généralement, en ce qui concerne la partie de l'espace où la partie réelle de X est inférieure à une limite donnée, le minimum de la norme de cette partie réelle est atteint pour des valeurs de p et de r bornées. On peut même assigner une borne de p^2+r^2, au delà de laquelle la norme de cette partie réelle dépasse son minimum de $g^2:4$ au moins, g étant donné.

On constate alors immédiatement que n, qui est l'entier le plus voisin du nombre qui annulerait la partie imaginaire, est borné aussi.

Ainsi, les systèmes de valeurs de n, p, r pour lesquelles (13) est minimum, (X, Y) étant dans II, et la partie réelle de X étant bornée supérieurement, sont en nombre fini.

Comme II a un nombre fini de faces, et qu'il y a seulement un nombre fini d'expressions (13) à considérer, on en déduit que le polyèdre fondamental rayonné a seulement un nombre fini de faces dans toute portion de l'espace où la partie réelle de X est bornée supérieurement, et, notamment, dans l'intérieur de l'hypersphère principale. Ce ne serait plus vrai de l'espace entier (tandis que II a, lui, un nombre fini de faces dans l'espace entier).

Nous avons, ainsi, terminé l'étude des conditions pour qu'un polyèdre, ayant un nombre fini de faces de la nature indiquée, et n'ayant pas de face sur l'hypersphère principale, soit le polyèdre fondamental d'un groupe linéaire discontinu.

20. Considérons le groupe discontinu Γ, contenant G. Formons, pour tous les transformés par Γ d'un point B intérieur à l'hypersphère, le rapport

$$\lambda = \frac{xz_0 + x_0 z + yy_0}{zz_0}.$$

Comme λ n'est pas altéré par G, nous pouvons nous borner à l'évaluer pour les substitutions qui changent B en un point de II, B appartenant aussi à II. Soient P'_s ces substitutions, s variant de 1 à $+\infty$, et P'_1 étant la substitution identique. La substitution la plus générale de Γ peut s'écrire, à volonté,

$$P'_s E^m P^n P_1^p P_2^r$$

ou

$$E^m P^n P_1^p P_2^r P_s'.$$

Je dis que les valeurs de λ correspondant aux P_s' forment une suite discontinue ; c'est-à-dire qu'*entre deux nombres négatifs* λ_1 *et* λ_2, *il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles de* λ, *chacune d'elles n'étant comptée qu'un nombre fini de fois*.

En effet, adjoignons à Π sa frontière, et, si $\lambda_1 > \lambda_2$, détachons-en la portion définie par

$$x z_0 + x_0 z + y y_0 - \lambda_1 z z_0 \leqq 0,$$
$$x z_0 + x_0 z + y y_0 - \lambda_2 z z_0 \geqq 0.$$

La portion détachée est un ensemble fermé, sans point commun avec l'hypersphère. Elle ne contient donc qu'un nombre fini de transformés de B par Γ, ou par les P_s', ce qui démontre notre proposition.

21. Je dis, de plus, que *les valeurs prises par* λ *sont limitées inférieurement*.

Supposons qu'elles ne le soient pas. Soit (x, y, z) un transformé de B par les P_s'. Appliquons-lui la substitution P; la pseudo-distance a de (x, y, z) à son transformé est donnée par

$$\mathrm{ch}^2 a = \frac{|x z_0 + x_0 z + y y_0 - i h z z_0|^2}{(x z_0 + x_0 z + y y_0)^2}.$$

Comme, dans Π, $y : z$ et la partie imaginaire de $x : z$ sont bornés, il en résulte que le rapport précédent est d'autant plus voisin de 1, ou a de zéro, que la partie réelle de $x : z$ est plus grande en valeur absolue.

Or, précisément, il existe par hypothèse des substitutions P_s' rendant λ aussi petit que l'on veut, c'est-à-dire la partie réelle de $x : z$ inférieure à un nombre négatif quelconque.

Donc, la pseudo-distance des transformés de B par P_s' et par $P_s' P$ est aussi petite que l'on veut; donc, la pseudo-distance de B à son transformé par $P_s' P P_s'^{-1}$ est aussi petite que l'on veut; donc, Γ n'est pas discontinu.

Mais ceci est une contradiction. Donc, les λ sont bornés inférieurement.

Il résulte de là que, *si un groupe discontinu* Γ *contient un groupe tel que* G, *le point* A *appartient à quelque transformé par* Γ *du polyèdre fondamental rayonné de* Γ. *Donc, ce polyèdre fondamental lui-même admet un sommet parabolique transformé de* A *par* Γ.

22. Remarquons, enfin, que H n'a pas d'autre point commun avec la polaire de $A(z=0)$ que A lui-même.

CHAPITRE IV.

RELATIONS ALGÉBRIQUES ENTRE FONCTIONS DE M. PICARD À GROUPES LINÉAIRES. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

---

1. Commençons, bien que cela ne soit pas indispensable à notre but, par déterminer les fonctions automorphes du groupe G du précédent Chapitre.

Nous posons

$$\xi = \frac{x+z}{\sqrt{2}}, \qquad \eta = y, \qquad \zeta = \frac{x-z}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

ou, en coordonnées non homogènes,

$$\xi = \frac{x+1}{x-1}, \qquad \eta = \frac{y\sqrt{2}}{x-1}, \tag{2}$$

de façon à remettre la condition

$$x + x_0 + yy_0 < 0 \tag{3}$$

sous la forme

$$\xi\xi_0 + \eta\eta_0 - 1 < 0, \tag{4}$$

où le domaine de variation de ξ et de η est à distance finie. Le point A a, dans le système (ξ, η, ζ), les coordonnées $(1, 0, 1)$.

Une série Θ quelconque est, par définition,

$$\sum_r R(\xi_r, \eta_r)\left[\frac{\partial(\xi_r, \eta_r)}{\partial(\xi, \eta)}\right]^k \qquad (k \geqq 2), \tag{5}$$

(ξ_r, η_r) étant le transformé de (ξ, η) par la $r^{\text{ième}}$ substitution de G. $R(\xi, \eta)$ est une fonction bornée dans le domaine (4).

Nous savons que cette série est absolument et uniformément convergente dans (4); nous allons voir qu'*elle l'est également dans tout ensemble fermé ne comprenant ni* A *ni aucun point de sa polaire*.

Nous commencerons par l'établir pour la série

$$\sum_r\left[\frac{\partial(\xi_r, \eta_r)}{\partial(\xi, \eta)}\right]^k = \sum_r\left[\frac{\partial(\xi_r, \eta_r)}{\partial(x_r, y_r)}\right]^k\left[\frac{\partial(x_r, y_r)}{\partial(x, y)}\right]^k\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}\right]^k. \tag{6}$$

Nous avons

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{x-1}\right)^3.$$

Donc la série est

$$\left(\frac{x-1}{-\sqrt{2}}\right)^{3k}\sum_r\left(\frac{-\sqrt{2}}{x_r-1}\right)^{3k}\left[\frac{\partial(x_r, y_r)}{\partial(x, y)}\right]^k,$$

et nous pouvons observer que le second facteur du terme général est égal à *un* en valeur absolue.

Considérons un ensemble fermé quelconque, ne rencontrant pas la polaire $z = 0$ de A, et choisissons un nombre positif λ tel que, dans tout l'ensemble,

$$xz_0 + x_0 z + yy_0 - \lambda^2 zz_0 < 0. \tag{7}$$

Nous poserons alors

$$\xi' = \frac{x}{\lambda}, \qquad \eta' = y, \qquad \zeta' = \frac{x}{\lambda} - \lambda z,$$

de sorte que

$$xz_0 + x_0 z + yy_0 - \lambda^2 zz_0 = \xi'\xi'_0 + \eta'\eta'_0 - \zeta'\zeta'_0.$$

En ce qui concerne G, (7) peut être pris, au lieu de (4), pour domaine principal. Il en résulte que, si nous prenons en coordonnées non homogènes,

$$\xi' = \frac{x}{x-\lambda^2}, \qquad \eta' = \frac{\lambda y}{x-\lambda^2},$$

la série

$$\sum_r \left[\frac{\partial(\xi'_r, \eta'_r)}{\partial(\xi', \eta')}\right]^k = \left(\frac{x-\lambda^2}{-\lambda}\right)^{3k} \sum_r \left(\frac{-\lambda}{x_r-\lambda^2}\right)^{3k} \left[\frac{\partial(x_r, y_r)}{\partial(x, y)}\right]^k$$

est absolument et uniformément convergente dans l'ensemble considéré.

Mais $\frac{x_r-\lambda^2}{x_r-1}$ tend évidemment vers *un* quand r augmente indéfiniment. Donc la série (6) elle-même est absolument et uniformément convergente dans cet ensemble, abstraction faite, bien entendu, des termes, en nombre limité, qui deviennent infinis.

Mais, quand r augmente indéfiniment, le point (ξ_r, η_r) tend vers A (Chap. III, § 8). Donc $R(\xi_r, \eta_r)$ tend vers $R(1, 0)$. Ainsi, *en faisant,* au lieu de l'hypothèse indiquée d'abord, *l'hypothèse plus générale que* $R(\xi, \eta)$ *est fini et déterminé en* A, *la convergence absolue et uniforme de* (5) *dans l'ensemble considéré est assurée.*

Nous poserons donc

$$(8) \qquad \Theta(x, y) = \sum_r R(\xi_r, \eta_r) \left(\frac{-\sqrt{2}}{x_r-1}\right)^{3k} \left[\frac{\partial(x_r, y_r)}{\partial(x, y)}\right]^k \qquad (k \geqq 2),$$

R étant une fonction rationnelle finie en A $\left[\text{nous nous sommes ici débarrassés du facteur gênant } \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}\right]$.

$\Theta(x, y)$ se comporte, dans tout l'espace, sauf sur la polaire de A, *comme une fonction rationnelle de x et de y; c'est une fonction uniforme de ces deux variables.*

2. Voyons ce que devient Θ en A. En reprenant le nombre q du Chapitre III (§ 12), nous pouvons considérer Θ comme la somme de q séries dans chacune desquelles le nombre m de la substitution générale de G, $E^m P^n P_1^p P_2^{r}$, est constant. Chacune de ces séries se déduit de celle où $m = 0$ en effectuant sur ses variables la substitution E^m; il

suffit donc d'étudier la série correspondant à $m = 0$, c'est-à-dire au groupe G_1 (Chap. III, § 11).

Changeant de notation, nous écrirons

$$P^n P'^p P''^q$$

la substitution générale de G_1, P' et P'' remplaçant P_1 et P_2, et q remplaçant r. Soient $(0, ih, 0)$ les paramètres de P, $(0, \alpha', \beta')$ et $(0, \alpha'', \beta'')$ ceux de P' et de P'' respectivement. La substitution générale de G_1 s'écrit

$$\begin{aligned} X &= x - (p\beta'_0 + q\beta''_0)y + nih + p\left(\alpha' + \frac{\beta'\beta'_0}{2}\right) + q\left(\alpha'' + \frac{\beta''\beta''_0}{2}\right) \\ &\qquad - \frac{p^2}{2}\beta'\beta'_0 - pq\beta'_0\beta'' - \frac{q^2}{2}\beta''\beta''_0, \\ Y &= y + p\beta' + q\beta''. \end{aligned}$$

Faisons d'abord la sommation par rapport à n. Nous obtenons une fonction $S_{p,q}\left(e^{\frac{2\pi x}{h}}, y\right)$, rationnelle par rapport à $e^{\frac{2\pi x}{h}}$, et nulle quand $e^{\frac{2\pi x}{h}}$ est nul ou infini, c'est-à-dire nulle en A si (x, y) reste dans Π.

Faisons maintenant la sommation par rapport à p et à q. Nous avons une série qui converge absolument et uniformément pour y fixe et x variable mais de partie réelle constante : on peut en effet se borner à faire varier la partie imaginaire de x de 0 à ih, et alors la convergence absolue et uniforme résulte de ce que nous savons. Si la partie réelle constante de x a été choisie assez grande en valeur absolue pour qu'aucun des $S_{p,q}$ ne devienne infini quand la partie réelle de x dépasse cette valeur constante, on constate immédiatement, au moyen de propositions classiques sur les séries de fonctions holomorphes, que la convergence absolue et uniforme a lieu même quand la partie réelle de x dépasse cette valeur constante. Il en résulte que $\Theta(x, y)$ se comporte comme une fonction rationnelle de $e^{\frac{2\pi x}{h}}$ pour toute valeur de cette variable, même 0 et l'infini. Donc $\Theta(x, y)$ *est rationnel par rapport à* $e^{\frac{2\pi x}{h}}$, et nul quand cette variable est nulle ou infinie. Par rapport à y, Θ est analytique.

Les seules singularités de Θ sont les infinis des termes de la série (8) et la polaire de A. Cette polaire est une singularité essentielle : en effet A en est une ; d'après les travaux de M. E.-E. Levi [1], il existe alors au moins une multiplicité analytique à deux dimensions, passant par A, et dont tous les points sont singuliers essentiels ; cette multiplicité ne peut être que la polaire de A ; d'ailleurs on peut voir directement que Θ est indéterminée au voisinage de tout point de cette polaire.

3. Nous pouvons donc écrire

$$\Theta(x, y) = \left(\sum_{r=1}^{k-1} a_r e^{\frac{2\pi r x}{h}}\right) : \left(\sum_{r=0}^{k} b_r e^{\frac{2\pi r x}{h}}\right),$$

le second membre étant la fonction rationnelle la plus générale nulle pour $e^{\frac{2\pi x}{h}} = 0$ ou $= \infty$. Les a_r et les b_r sont des fonctions de y dont nous allons maintenant nous occuper.

Nous avons évidemment

$$\Theta(x - \beta'_0 y + \alpha', y + \beta') = \Theta(x, y),$$
$$\Theta(x - \beta''_0 y + \alpha'', y + \beta'') = \Theta(x, y).$$

Il en résulte que

$$\frac{a_r(y + \beta')\, e^{-\frac{2\pi r}{h}(\beta'_0 y - \alpha')}}{a_r(y)} = \frac{b_r(y + \beta')\, e^{-\frac{2\pi r}{h}(\beta'_0 y - \alpha')}}{b_r(y)} = \varphi(y),$$

φ étant indépendant de r ; on a aussi des relations analogues avec α'' et β'' au lieu de α' et β'.

Mais nous pouvons, sans changer Θ, multiplier les a_r et les b_r par une même fonction de y. Comme b_0 n'est pas identiquement nul, profitons-en pour prendre

$$b_0 = 1.$$

Alors

$$a_r(y + \beta') = e^{\frac{2\pi r}{h}(\beta'_0 y - \alpha')} a_r(y),$$
$$a_r(y + \beta'') = e^{\frac{2\pi r}{h}(\beta''_0 y - \alpha'')} a_r(y),$$

---

[1] E.-E. Levi, *Annali di Matematica*, 3ᵉ série, t. XVII, 1910.

et de même pour les b_r. De plus, ces fonctions sont méromorphes. *Ce sont donc des fonctions doublement périodiques de troisième espèce* (de première si $r=0$).

Supposons que h soit positif, ainsi que le coefficient de i dans le rapport $\beta'' : \beta'$, et nommons λ l'entier $(\beta'_0\beta'' - \beta'\beta''_0) : ih$, qui est alors aussi positif. Alors l'excès du nombre des zéros de a_r ou de b_r sur le nombre de ses pôles, dans un parallélogramme de périodes, est égal à λr.

Les fonctions automorphes peuvent s'écrire d'une façon analogue, mais elles ne sont plus obligatoirement nulles pour $e^{\frac{2\pi x}{h}} = 0$ ou $= \infty$.

4. Soient f_1, f_2, f_3 trois fonctions automorphes correspondant à G. En tout point de II, f_1, f_2, f_3 se comportent comme des fonctions rationnelles de $e^{\frac{2\pi x}{h}}$ et de y. Donc f_1, f_2 et f_3 sont liées par une relation algébrique

$$\varphi(f_1, f_2, f_3) = 0. \tag{9}$$

Les équations

$$f_1 = \mu_1, \qquad f_2 = \mu_2,$$

si μ_1 et μ_2 n'occupent pas une position exceptionnelle, et si le déterminant fonctionnel de f_1 et de f_2 n'est pas nul identiquement, n'auront qu'un nombre fini de solutions dans II. Nous pouvons admettre que A n'est pas une de ces solutions, et que ces solutions sont distinctes.

Nous pouvons alors trouver un nombre λ^2 tel que, pour toutes ces solutions,

$$x + x_0 + yy_0 - \lambda^2 < 0;$$

et, par conséquent, nous pouvons choisir la fonction f_3 telle qu'elle prenne des valeurs distinctes pour ces différentes solutions. Alors *à toute solution de* (9) *en* f_1, f_2, f_3 *répond un point de* II, *et, en général, un seul.*

Soit alors f_4 une quatrième fonction automorphe de G, absolument quelconque. On a

$$\psi(f_1, f_2, f_4) = 0,$$
$$\chi(f_1, f_3, f_4) = 0,$$

ψ et χ étant des polynomes. Si f_1, f_2 et f_3, liés par (9), sont donnés, ces équations en f_4 n'auront qu'une racine commune en général. Donc *f_4 s'exprime rationnellement en f_1, f_2, f_3*.

Si maintenant nous remplaçons f_4 par une fonction quelconque, invariante par G, se comportant dans Π comme une fonction rationnelle de $e^{\frac{2\pi x}{h}}$ et de y, on a la même conclusion : donc cette fonction est une fonction automorphe de G.

Donc, en particulier (si $q = 1$),

$$e^{\frac{2\pi\lambda x}{h}} u(y),$$

où $u(y)$ est une fonction doublement périodique de troisième espèce (de première si $\lambda = 0$), telle que

$$u(y+\beta') = e^{\frac{2\pi\lambda}{h}(\beta'_0 y - \alpha')},$$
$$u(y+\beta'') = e^{\frac{2\pi\lambda}{h}(\beta''_0 y - \alpha'')},$$

est *une fonction automorphe de* G.

En combinant rationnellement ces dernières fonctions, nous avons donc toutes les fonctions automorphes de G. Si $q > 1$ (Chap. III, § 12), on verra facilement comment se modifie cette conclusion.

5. Nous allons maintenant nous occuper d'un groupe discontinu quelconque Γ, contenant G, et chercher l'allure en A des fonctions automorphes correspondantes.

Reprenons les variables ξ, η définies par (2). Une série Θ quelconque sera

$$\Theta(x, y) = \left(-\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^{3k} \sum_r R(\xi_r, \eta_r)\left(-\frac{\sqrt{2}}{x_r - 1}\right)^{3k}\left[\frac{\partial(x_r, y_r)}{\partial(x, y)}\right]^k \qquad (k \geqq 2),$$

$R(\xi, \eta)$ étant une fonction rationnelle bornée dans (4).

Nous choisirons dans Γ des substitutions $P'_1, P'_2, \ldots, P'_l, \ldots$ telles que toute substitution de Γ puisse s'écrire $P^n P'_l$ d'une manière et d'une seule, P étant la substitution parabolique à plan double de G. Faisant alors d'abord la sommation par rapport à n, nous obtenons encore une fonction $S_l\left(e^{\frac{2\pi x}{h}}, y\right)$, rationnelle en $e^{\frac{2\pi x}{h}}$, et nulle pour $e^{\frac{2\pi x}{h}} = 0$ ou $= \infty$.

Mais, dans la sommation par rapport à l, la convergence n'est plus assurée que dans l'hypersphère principale. C'en est assez néanmoins pour qu'on puisse affirmer que

$$\Theta(x, y) = \left(\frac{x-1}{-\sqrt{2}}\right)^{3k} S\left(e^{\frac{2\pi x}{h}}, y\right),$$

S étant holomorphe dans l'hypersphère principale par rapport à $e^{\frac{2\pi x}{h}}$ et y, ainsi que pour $e^{\frac{2\pi x}{h}} = 0$ et y quelconque : pour ce dernier système de valeurs, $\Theta = 0$.

Nous déduisons de là, comme dans le cas particulier du paragraphe 4, que, *si le polyèdre fondamental de* Γ *n'atteint l'hypersphère principale que par des sommets paraboliques* (¹), *trois fonctions automorphes quelconques de* Γ *sont liées par une relation algébrique.*

Toutes ces fonctions automorphes peuvent s'exprimer rationnellement au moyen de trois d'entre elles, f_1, f_2, f_3.

Si l'on se donne les valeurs de f_1, f_2, f_3, *liées par la relation algébrique correspondante*

$$\varphi(f_1, f_2, f_3) = 0,$$

il leur correspond en général un point et un seul à l'intérieur du polyèdre fondamental.

6. Nommons maintenant x, y, u ces trois fonctions f_1, f_2, f_3 ; soit

$$f(x, y, u) = 0 \tag{10}$$

la relation algébrique qui les lie, et soient X, Y les variables indépendantes et $XX_0 + YY_0 = 1$ l'hypersphère principale.

Considérons

$$z_1 = \sqrt[3]{\frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)}}, \qquad z_2 = X\sqrt[3]{\frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)}}, \qquad z_3 = Y\sqrt[3]{\frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)}} \tag{11}$$

comme des fonctions de x et de y. Nous pouvons former un système

(¹) On a vu (Chap. III, § 3) un autre énoncé de cette hypothèse.

complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles

$$(12) \qquad \begin{cases} r = a_1 p + b_1 q + c_1 z, \\ s = a_2 p + b_2 q + c_2 z, \\ t = a_3 p + b_3 q + c_3 z \end{cases}$$

dont z_1, z_2 et z_3 soient les trois intégrales linéairement indépendantes. Comme

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & z_1 \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & z_2 \\ \frac{\partial z_3}{\partial x} & \frac{\partial z_3}{\partial y} & z_3 \end{vmatrix} = z_1^2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & z_1 \\ \frac{\partial\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}{\partial x} & \frac{\partial\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}{\partial y} & z_2 \\ \frac{\partial\left(\frac{z_3}{z_1}\right)}{\partial x} & \frac{\partial\left(\frac{z_3}{z_1}\right)}{\partial y} & z_3 \end{vmatrix} = z_1^3 \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = 1,$$

c'est-à-dire, comme ce déterminant est constant, il en résulte que ce système d'équations aux dérivées partielles est de la forme

$$(13) \qquad \begin{cases} r = ap + bq + cz, \\ s = -a'p - aq + c''z, \\ t = b'p + a'q + c'z. \end{cases}$$

Si l'on exécute sur X et Y une transformation du groupe, z_1, z_2, z_3 subissent une simple transformation linéaire; donc, a, b, ..., c'' ne changent pas. Du reste, a, b, ..., c'', considérés comme fonctions de X et de Y, se comportent en un sommet parabolique comme les fonctions automorphes : ce sont donc des fonctions rationnelles de x, y, u (¹).

On a ainsi un système dont les intégrales s'expriment en fonctions automorphes de deux paramètres X, Y au moyen des formules (11).

7. Nous allons, maintenant, étudier les irrégularités du système (13).

Nous ferons la convention préalable suivante : nous ne considérons

(¹) M. Picard a déjà considéré ce système d'équations aux dérivées partielles (*Comptes rendus*, t. 98, 1884, p. 563; *Acta mathematica*, t. II).

comme véritables points singuliers que ceux qui ne peuvent être rendus réguliers par le remplacement de x et de y par deux autres fonctions automorphes x', y' du même groupe, faisant partie d'un système de trois fonctions x', y', u' au moyen desquelles toutes les fonctions du groupe s'expriment rationnellement.

Si l'on pose

$$z'_1 = \sqrt[3]{\frac{\partial(x', y')}{\partial(\mathrm{X}, \mathrm{Y})}}, \qquad z'_2 = \mathrm{X} z'_1, \qquad z'_3 = \mathrm{Y} z'_1,$$

on voit que

$$z'_h = z_h \sqrt[3]{\frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)}} \qquad (h = 1, 2, 3);$$

mais $\frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)}$ est une fonction automorphe du groupe, car elle est invariante pour toute substitution du groupe, et ses singularités sont de la nature voulue, ce qui entraîne qu'elle est fonction rationnelle de x, y, u, ou de x', y', u'. Ainsi, quand on passe des variables x, y aux variables x', y', il faut, pour obtenir le système tranformé de (13), remplacer z par

$$z' = z \sqrt[3]{\frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)}}.$$

Nous pouvons profiter de cette convention pour admettre, tout d'abord, que x, y, u sont tels que la relation (10) qui les lie puisse être considérée comme l'équation d'une surface algébrique n'ayant d'autres singularités qu'une courbe double avec des points triples, ces singularités étant les plus générales de leur nature [1].

Les points où u, et, par suite, a, b, ..., c'', ne sont pas fonctions uniformes de x et de y, c'est-à-dire les points où le plan tangent à la surface précédente est parallèle à l'axe des u, ne doivent pas, d'après cette convention, être considérés comme singuliers.

On peut en dire autant des points de la courbe double, et des points où x ou y devient infini.

Nous avons à voir quels sont, en dehors des points précédents, les points où z_1, z_2, z_3 ne sont pas fonctions holomorphes de x et de y.

---

[1] *Cf.* Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. I, p. 82.

Ce sont les points où X et Y ne sont pas fonctions holomorphes de x et de y, et ceux où $\sqrt[3]{\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\mathrm{X}, \mathrm{Y})}}$ n'est pas fonction holomorphe de X et de Y.

Ces deux catégories de points rendent $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(\mathrm{X}, \mathrm{Y})}$ nul ou infini. Nous avons donc à trouver les points pour lesquels cette circonstance se produit, même si l'on remplace x, y par d'autres fonctions automorphes, conformément à notre convention.

Or, ces points sont exclusivement les points de la surface (10) qui correspondent, soit à un sommet parabolique, soit à un point double de quelque substitution elliptique du groupe : en tout autre point, en effet, on peut trouver deux fonctions x', y' telles que leur déterminant fonctionnel ait une valeur arbitraire [1].

8. Réciproquement, à tout point double de substitution elliptique ou parabolique du groupe correspond un point ou une courbe singulière du système (13).

Démontrons-le d'abord pour les points doubles de substitutions elliptiques.

En un tel point, X et Y ne peuvent être fonctions uniformes de x, y, puisque la substitution elliptique transforme, justement, tout point X, Y voisin du point double en un autre point voisin du point double et pour lequel x et y ont la même valeur.

On peut répéter à peu près la même chose pour les sommets paraboliques, en remplaçant X par $e^{\frac{2\pi \mathrm{X}}{h}}$. Cette variable n'étant pas, en même temps que Y, fonction uniforme de x et de y, la même chose a lieu pour X et Y.

Dans les deux cas, on peut voir directement que z_1, z_2, z_3 ne sont pas fonctions uniformes de x et de y. Si l'on a affaire à un point double de substitution elliptique, on peut se ramener au cas où celle-ci est

$$(\mathrm{X}, \mathrm{Y};\ \mathrm{X}e^{i\varphi}, \mathrm{Y}e^{i\psi});$$

---

[1] G. GIRAUD, *loc. cit.*, Chap. I, n° 37.

alors z_1, z_2, z_3 sont multipliés respectivement par

$$e^{-\frac{i(\varphi+\psi)}{3}}, \quad e^{\frac{i(2\varphi-\psi)}{3}}, \quad e^{\frac{i(2\psi-\varphi)}{3}},$$

facteurs qui ne sont pas tous égaux à *un*.

Si l'on prend maintenant un sommet parabolique, on peut supposer que ce soit (1, 0, 1) et qu'une des substitutions correspondantes soit (15) (Chap. I). Par cette substitution, z_1, z_2, z_3 sont remplacés par

$$3z_1 - 2z_2 + 2z_3, \quad 2z_1 - z_2 + 2z_3, \quad 2z_1 - 2z_2 + z_3;$$

donc, ils ne sont pas uniformes.

9. Cherchons à préciser la nature des singularités du système (13) aux points de vue suivants : sont-ce des points isolés (cela n'est pas absurde, au point de vue où nous nous sommes placés, et nous en verrons un exemple) ou des courbes algébriques? Et, dans ce dernier cas, quel est le genre de celles-ci? Enfin, quelle est l'équation fondamentale déterminante de cette courbe singulière, qui, nous le verrons, est régulière?

Prenons d'abord un point double de substitution elliptique de Γ. Supposons que, parmi les substitutions elliptiques qui admettent ce point double, aucune ne soit à plan double pénétrant dans l'hypersphère. Soit ($X = 0$, $Y = 0$) ce point double.

Toute fonction automorphe est le quotient de deux fonctions Θ, régulières à l'origine. Suivant leur poids commun, celles-ci seront ou non certainement nulles à l'origine. Il peut donc arriver que l'une au moins des fonctions x, y, u soit indéterminée en $X = Y = 0$: alors à ce point correspondent sur (10) une ou plusieurs *courbes unicursales :* ce sont les courbes singulières cherchées.

Si aucune des fonctions x, y, u n'est indéterminée, à l'origine correspond un point déterminé de (10). Par ce point passent les courbes

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)} = 0, \qquad \frac{\partial(x, u)}{\partial(X, Y)} = 0, \qquad \frac{\partial(y, u)}{\partial(X, Y)} = 0;$$

comme par l'origine ne passe, par hypothèse, aucun plan double de substitution de Γ, ces courbes n'auront, dans le voisinage de $X = Y = 0$, aucun autre point commun à toutes trois; donc, il n'y a pas de plan tangent (du moins unique) au point considéré : c'est un point singulier de la surface (10). Remarquons, toutefois, que ce point ne fait pas partie d'une ligne double : ce cas ne se présente donc pas si x, y, u sont choisis comme nous l'avons dit.

Du reste, si (10) n'a d'autre singularité qu'une courbe double avec des points triples, il est évident que (13) ne peut avoir que des *lignes* singulières : en effet, en un point de (10), une des trois fonctions x, y, u, la dernière, par exemple, est fonction holomorphe des deux autres [1]; au voisinage de ce point, $a, b, \ldots, c''$ sont donc des fonctions uniformes de x et de y; nous savons qu'alors les singularités de (13) forment des courbes.

Partons d'un point (X, Y), voisin de $X = Y = 0$, et allons par un chemin continu de ce point à un autre transformé du premier par une de nos substitutions elliptiques : le point (x, y, u) décrit sur (10) un circuit fermé, z_1, z_2, z_3 subissent la transformation linéaire correspondant à notre substitution elliptique : donc, le circuit décrit par (x, y, u) ne peut pas se réduire à zéro sans rencontrer de ligne singulière; cette circonstance n'est pas due à la connexion de la surface (10), car, si le chemin décrit par (X, Y) tend en tous ses points vers l'origine, le circuit décrit par (x, y, u) tend en tous ses points vers l'ensemble des points de (10) correspondant à $X = Y = 0$. Or, cet ensemble de points se compose, au plus, d'un système de courbes *unicursales*. De plus, on peut faire en sorte que tous les points du circuit (x, y, u) tendent vers des points d'une seule de ces courbes unicursales; en effet, quand $Y : X$ a une valeur donnée t et que X tend vers zéro, le point (x, y, u) tend vers une position limite dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles de t, peut-être des constantes; on a ainsi un point ou une courbe unicursale de (10); ce n'est que si, X tendant vers zéro, t varie et tend vers certaines valeurs en nombre fini, que l'on a d'autres points limites pour (x, y, u); or, on peut bien supposer que les valeurs de t correspondant au chemin

[1] En un point-pince, ce n'est plus vrai; mais on peut encore prendre deux paramètres dont les valeurs, même au point-pince, soient bien déterminées.

décrit par (X, Y) restent, par exemple, fixes, et ne comprennent pas ces valeurs particulières; alors, les points limites de (x, y, u) appartiennent à une seule courbe unicursale. Mais un circuit fermé tracé sur une courbe unicursale peut se réduire à un point; donc, il en est de même du circuit décrit par (x, y, u) sur (10).

Donc, à $X = Y = 0$ correspond au moins une courbe singulière. Mais à cette courbe ne correspondent, pour z_1, z_2, z_3, que les puissances d'une seule substitution linéaire. Par suite, si les substitutions elliptiques de point double $X = Y = 0$ ne sont pas des puissances d'une seule d'entre elles, on pourra encore trouver un circuit fermé sur la surface (10), qui ne peut pas se réduire à un point sans traverser d'autre courbe singulière que la précédente; donc, il existe dans ce cas une deuxième courbe singulière unicursale correspondant à $X = Y = 0$. En continuant ainsi, on voit qu'il y a un nombre de courbes unicursales, correspondant à $X = Y = 0$, au moins égal au nombre minimum des substitutions fondamentales du sous-groupe de Γ formé par les substitutions elliptiques de point double

$$X = Y = 0.$$

Ces lignes singulières sont-elles régulières? Évidemment, car z_1, z_2, z_3 ne peuvent, d'après leurs expressions, avoir de singularités essentielles.

Ramenons à la forme

$$(X, Y; Xe^{i\alpha}, Ye^{i\beta})$$

la substitution elliptique correspondant à l'une de ces courbes singulières. Par une rotation autour de cette courbe, z_1, z_2, z_3 sont simplement multipliés par

$$e^{-i\frac{\alpha+\beta}{3}+2\pi i\frac{\lambda}{3}}, \quad e^{i\frac{2\alpha-\beta}{3}+2\pi i\frac{\lambda}{3}}, \quad e^{i\frac{2\beta-\alpha}{3}+2\pi i\frac{\lambda}{3}},$$

λ étant un entier provenant du radical cubique. Donc, les racines de l'équation fondamentale déterminante relative à cette courbe sont respectivement égales à

$$r_1 = -\frac{\alpha+\beta}{6\pi} + \frac{\lambda}{3}, \qquad r_2 = \frac{2\alpha-\beta}{6\pi} + \frac{\lambda}{3} + \mu, \qquad r_3 = \frac{2\beta-\alpha}{6\pi} + \frac{\lambda}{3} + \nu,$$

μ, ν étant deux nouveaux entiers, et λ étant maintenant complètement déterminé, au lieu qu'il ne l'était jusqu'à présent qu'à un multiple près de 3.

Si $e^{i\alpha} \neq e^{i\beta}$, on doit prendre comme intégrales fondamentales correspondant à r_1, r_2, r_3 les fonctions z_1, z_2, z_3 elles-mêmes. Si $e^{i\alpha} = e^{i\beta}$, il peut se faire qu'on doive remplacer z_3 par $z_3 + gz_2$, g étant une constante.

Montrons qu'on peut faire en sorte que

$$z_1^{r_2-r_3} z_2^{r_3-r_1} (z_3 + gz_2)^{r_1-r_2} \qquad (g = 0 \text{ si } e^{i\alpha} \neq e^{i\beta})$$

ne soit pas constant sur la courbe singulière : cela nous ramènera à ce cas simple étudié spécialement dans un autre travail (¹). Cette expression se réduit à

$$X^{r_3-r_1}(Y + gX)^{r_1-r_2}.$$

Comme elle est finie et non identiquement nulle sur la ligne singulière,

$$(r_3 - r_1)(r_1 - r_2) < 0.$$

En modifiant, au besoin, α et β de certains multiples de 2π, la même expression devient

$$X^{\frac{\beta}{2\pi}}(Y + gX)^{-\frac{\alpha}{2\pi}}.$$

Il faut montrer que, (x, y, u) tendant vers un point *variable* de la ligne singulière, cette quantité tend vers une limite *variable*. Or, si cette expression tendait vers une constante $k^{-\frac{\alpha}{2\pi}} \neq 0$, il faudrait que, pour

$$Y = -gX + kX^{\frac{\beta}{\alpha}}(1 + \varepsilon),$$

plusieurs termes des fonctions Θ qui figurent au numérateur et au dénominateur des fonctions x, y, u vinssent se détruire, de manière que les parties principales dépendissent de ε. Or, si α et β sont diffé-

(¹) Ce travail n'est pas encore publié. On peut consulter : HORN, *Acta mathematica*, t. XI, XIV.

rents, les termes qui se détruiraient seraient, par rapport à X et Y, de degrés différents; or, on sait qu'on peut toujours modifier les coefficients de tels termes de manière à empêcher cette particularité (¹). Si, maintenant, $\alpha = \beta$, la constance de $(Y + gX) : X$ montrerait seulement que g a reçu une valeur erronée.

10. Considérons, maintenant, les points d'un plan double de substitution elliptique de Γ.

Je dis que *le plan double revient sur lui-même par une infinité de substitutions du groupe*. Nous pouvons nous ramener au cas où le plan double est

$$Y = 0.$$

Ce plan ne peut pénétrer à l'intérieur d'aucun polyèdre fondamental; d'ailleurs, si l'un d'eux atteint le plan double, celui-ci en est une arête plane; car, si

$$\left(X, Y; X, Y e^{\frac{2i\pi}{q}}\right)$$

est une substitution elliptique de Γ telle que toutes les substitutions de Γ qui ont le plan double $Y = 0$ en soient des puissances, elle permet de déduire d'un polyèdre qui atteint le plan double $q - 1$ autres polyèdres qui l'atteignent aux mêmes points; l'arête est non apparente si $q = 2$. Mais le plan double ne fait pas, dans toute son étendue, partie du contour d'un même polyèdre fondamental : car autrement, celui-ci atteindrait l'hypersphère principale

$$XX_0 + YY_0 = 1$$

suivant une arête à une dimension

$$Y = 0, \qquad XX_0 = 1,$$

ce qui est impossible dans notre hypothèse. Nous pouvons, pour le même motif, affirmer que l'arête $Y = 0$ appartient à une *infinité* de polyèdres transformés par Γ du polyèdre fondamental. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_m, \ldots$ ces polyèdres. Amenons-les tous, par une substi-

(¹) G. Giraud, *Leçons sur les fonctions automorphes*, Chap. I, n° 37.

tution de Γ, à coïncider avec P_1 : $Y = 0$ viendra chaque fois coïncider avec une arête de P_1 ; comme celles-ci sont en nombre fini, on trouvera l'une d'elles une infinité de fois; dès lors, $Y = 0$ est transformée en elle-même par une infinité de substitutions de Γ, comme nous l'avions annoncé.

Ces substitutions de Γ sont alors du type

$$\left(X, Y; \frac{aX+b}{cX+d}, \frac{Ye^{i\psi}}{cX+d}\right).$$

Les substitutions

$$\left(X, \frac{aX+b}{cX+d}\right)$$

correspondantes forment un groupe de Poincaré Γ', dont le cercle principal est

$$XX_0 = 1.$$

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les centres du polyèdre rayonné P_1 et d'un certain nombre de ses transformés $P_2, \ldots, P_m, \ldots$, choisis de telle manière qu'en les ramenant sur P_1, $Y = 0$ prenne toutes les positions possibles, et chacune de celles-ci une seule fois. Soient ξ_k, η_k les coordonnées de A_k. Alors, on constate immédiatement que P_1 et ceux de ses transformés que nous considérons, pris ensemble, atteignent $Y = 0$ suivant le polygone fondamental rayonné de Γ' qui a pour centres ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$ (¹).

Comme nos polyèdres n'ont pas d'arête à une dimension sur l'hypersphère principale, Γ' est un groupe de la première, de la deuxième, ou de la sixième famille de Poincaré (²).

Comme en outre les sommets paraboliques du polygone fondamental de Γ' sont évidemment des sommets paraboliques du polyèdre fondamental de Γ, nous pouvons ajouter que, si q n'est pas l'un des entiers 2, 3, 4, 6, Γ' est de la première famille.

Pour $Y = 0$, nos fonctions automorphes se réduisent à des fonctions de Poincaré de X, correspondant au groupe Γ'.

Soit p le genre de Γ'. Pour $Y = 0$, x, y, u sont fonctions rationnelles

---

(¹) Cette propriété justifie l'introduction des centres multiples dans la méthode du rayonnement.

(²) Poincaré, *Œuvres*, t. II, p. 128.

de deux variables liées par une relation algébrique de genre p. Donc x et y, par exemple, sont liées par une relation algébrique de genre p au maximum [1]. Le genre sera p exactement si, ce qui est réalisable, à un système de valeurs de x et de y ne répond d'ordinaire qu'un point du polygone fondamental de Γ'; et alors u sera une fonction rationnelle de x et de y. Ainsi la courbe singulière est alors

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad u = \psi(x, y),$$

φ étant de genre p, et ψ étant rationnelle.

11. Supposons maintenant qu'un certain point, par exemple

$$X = Y = 0,$$

soit situé dans le ou les plans doubles d'une ou de plusieurs substitutions de Γ, et soit en même temps point double de substitutions sans plan double (pénétrant dans l'hypersphère).

Alors, à chacun des plans doubles passant par $X = Y = 0$, correspond une courbe singulière de (13). Si les substitutions à plan double peuvent, par leurs combinaisons, engendrer toutes les autres substitutions de point double $X = Y = 0$, nous ne savons pas à l'avance s'il existe d'autres lignes singulières, qui seraient alors unicursales, correspondant au point $X = Y = 0$. Mais, dans le cas contraire, le raisonnement du paragraphe 9 prouve qu'il existe au moins autant d'autres lignes singulières, unicursales, qu'il faut ajouter de substitutions supplémentaires pour obtenir toutes les autres.

Par exemple, si toutes les substitutions de point double $X = Y = 0$ sont des puissances de

$$\left(X, Y; Xe^{\frac{2\pi i}{q}}, Ye^{\frac{2\pi i p}{r}}\right),$$

où p, q, r sont trois entiers, p et r étant premiers entre eux et q et r *différents*, l'une au moins de ces substitutions est à plan double; c'est celle qu'on obtient en répétant la substitution fondamentale un nombre de fois égal au plus petit des entiers q et r. Mais on est certain qu'à

(1) *Cf.* Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 498.

$X = Y = 0$ correspond une courbe singulière unicursale de (13), bien que $X = Y = 0$ soit déjà dans le plan double de la substitution indiquée, plan auquel correspond déjà une courbe singulière de (13).

12. Il nous reste à considérer les sommets paraboliques. Supposons de nouveau que l'hypersphère principale soit

$$X + X_0 + YY_0 = 0,$$

et que le sommet parabolique A soit le point $X = \infty$, Y fini quelconque.

Alors, en ce point, x, y, u se comportent comme des fonctions rationnelles de $e^{\frac{2\pi X}{h}} = T$ et de Y, h étant une certaine constante positive.

Il faut étudier l'ensemble des points de (10) qui correspond à $T = 0$, Y quelconque.

En utilisant les fonctions Θ, nous pouvons écrire

$$x = \frac{\sum_{r=0}^{\infty} a_r(Y)T^r}{\sum_{r=0}^{\infty} b_r(Y)T^r},$$

développement valable dans toute l'hypersphère. On verra, comme au paragraphe 4 de ce Chapitre, que $\frac{a_0(Y)}{b_0(Y)}$ est une fonction elliptique de périodes déterminées. Mais même dans le cas où la surface (10) n'a d'autre singularité qu'une seule courbe double avec des points triples, ces singularités étant les plus générales de leur nature, nous ne savons pas à l'avance si cette fonction et les fonctions analogues relatives à y et à u ne se réduisent pas à la fois à des constantes. Dans le cas où cette circonstance ne se produit pas, la courbe peut être ramenée au type

$$(14) \qquad \varphi(x, y) = 0, \qquad u = \psi(x, y),$$

où la relation $\varphi = 0$ est *au maximum de genre un*, et où ψ est rationnelle. On connaît des exemples effectifs de groupes de l'espèce qui nous occupe, comportant des sommets paraboliques, et dont le système (13) correspondant n'a que des lignes singulières unicursales : le genre peut donc n'être pas *un*. Ces exemples proviennent de la considération des fonctions hypergéométriques de deux variables : leur étude a été faite par M. Picard (¹), et, à un autre point de vue, par M. Appell (²).

Mais ce n'est pas tout. Parmi les substitutions de point double A peuvent figurer des substitutions elliptiques à plan double, et des substitutions paraboliques à deux points doubles. Soit

$$(15) \qquad [X, Y; X - \beta_0 Y + \alpha, e^{-3i\theta}(Y + \beta)] \qquad (e^{3i\theta} \neq 1)$$

une telle substitution. Considérons le plan

$$Y = \frac{\beta}{1 - e^{-3i\theta}}$$

qui revient sur lui-même par cette substitution. Si la substitution est elliptique, c'est son plan double; à ce plan correspond une ligne singulière de (13), d'un type déjà étudié. Si la substitution est parabolique, ainsi que toutes les autres substitutions de point double A qui changent ce plan en lui-même, je dis qu'on ne peut, sans donner à la surface (10) une des singularités exclues, admettre que x, y, u sont à la fois bien déterminés pour

$$(16) \qquad T = 0, \qquad Y = \frac{\beta}{1 - e^{-3i\theta}}.$$

En effet, si (T, Y) est un système de valeurs voisin de celui-ci, notre substitution parabolique le change en un système encore voisin de (16). Si à (16) correspondait un point unique de (10), nous pourrions donc tracer sur (10) une courbe fermée dont tous les points seraient aussi voisins que l'on voudrait de ce point unique, et à

(¹) PICARD, *Sur une extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques* (*Annales de l'École Normale*, 2ᵉ série, t. X, 1881, p. 305); *Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables* (*Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. II, 1885, p. 357).

(²) APPELL, *Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables* (*Journal de Mathématiques*, 3ᵉ série, t. VIII, 1882, p. 173.

laquelle correspondrait pour z_1, z_2, z_3 une substitution linéaire déduite de (15). Donc ce circuit ne peut se réduire à un point sans traverser une courbe singulière, autre que (14) si celle-ci existe; car, si (14) existe, une rotation autour de cette courbe en restant dans le voisinage d'un de ses points revient à augmenter l'argument de T d'un multiple de 2π, Y restant fixe, c'est-à-dire à faire subir à (X, Y) la substitution

$$(X, Y; X + mih, Y), \tag{17}$$

qui n'est pas la substitution (15). Donc une courbe singulière autre que (14) passe par le point unique correspondant à (16); mais ceci donne une contradiction, puisqu'au voisinage de (16), dans le domaine principal, il n'y a de point double d'aucune autre substitution. Donc, en (16), l'une des fonctions x, y, u au moins est indéterminée. On obtient ainsi une *courbe singulière unicursale*.

x, y, u peuvent être indéterminés encore pour d'autres valeurs de Y, T étant nul; on a encore des courbes singulières unicursales, auxquelles correspondent, pour z_1, z_2, z_3, de simples multiplications par une même racine cubique de l'unité.

Supposons maintenant que Γ ne compte aucune substitution parabolique à deux points doubles ou elliptique de point double A; ou que ces substitutions ne suffisent pas à engendrer, par leurs combinaisons, toutes les autres substitutions de point double A. Alors la courbe (14) existe; on le voit en imitant les raisonnements déjà faits.

Si, de plus, les substitutions elliptiques et paraboliques à deux points doubles ne suffisent pas à engendrer au moins une des substitutions $P^m P'$, où P^m est la substitution (17), m étant un entier arbitraire, et où P' est une substitution parabolique donnée de Γ ayant A pour point double unique, la courbe (14) est de genre *un*. Si, en effet, elle était unicursale, à la substitution P' on pourrait faire correspondre une courbe fermée qui pourrait se réduire à un point sans traverser d'autre courbe singulière que (14) et les autres courbes singulières déjà étudiées, ce qui est absurde par hypothèse. Donc (14) est de genre *un;* le circuit fermé correspondant à P' peut se réduire à l'une des deux lignes fermées suivant lesquelles il faut couper (14) pour la rendre simplement connexe.

Quelles substitutions éprouvent z_1, z_2, z_3 quand x, y, u tourne autour d'une des courbes singulières que nous venons de rencontrer, en restant dans le voisinage d'un point de celles-ci?

Pour la courbe (14), on a la substitution

$$[z_1, z_2, z_3;\ \omega z_1, \omega(z_2 + mih z_1), \omega z_3], \tag{18}$$

ω étant une racine cubique de l'unité. Pour la courbe correspondant à (16), on a la substitution

$$[z_1, z_2, z_3;\ \omega z_1, \omega(\alpha z_1 + z_2 - \beta_0 z_3), \omega e^{-3i\theta}(\beta z_1 + z_3)]; \tag{19}$$

si l'on fait une transformation convenable, celle-ci peut se ramener au type

$$[z_1, z_2, z_3;\ \omega z_1, \omega(\alpha z_1 + z_2), \omega e^{-3i\theta} z_3]. \tag{20}$$

Il nous reste à voir si ces lignes singulières sont du type simple, où les coefficients a, b, ..., c'' sont les quotients de fonctions régulières par le carré de $\varphi(x, y)$.

Nous examinerons en même temps si z_1, z_2, z_3 ne sont pas les intégrales dont les développements sont prévus par la théorie de ces systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Prenons d'abord la substitution (18). Si la ligne est régulière, et que z_1, z_2, z_3 soient ces intégrales, on a

$$\left\{\begin{aligned} & z_1 = [\varphi(x, y)]^\alpha Z_1(x, y), \qquad z_2 = A z_1 \log\varphi(x, y) + [\varphi(x, y)]^\beta Z_2(x, y), \\ & z_3 = [\varphi(x, y)]^\gamma Z_3(x, y), \end{aligned}\right. \tag{21}$$

A étant une constante, et Z_1, Z_2, Z_3 des fonctions régulières, non identiquement nulles pour $\varphi(x, y) = 0$; les exposants α, β, γ ont des différences mutuelles entières; ce sont des fractions à termes entiers de dénominateur 3.

Si $\beta < \alpha$, nous avons à considérer

$$z_1^{\beta-\gamma} z_2^{\gamma-\alpha} z_3^{\alpha-\beta} = X^{\gamma-\alpha} Y^{\alpha-\beta};$$

cette quantité, qui est finie et non identiquement nulle pour $\varphi = 0$, doit n'être pas constante. Or, sur cette courbe, Y est variable, et X infini : donc $\alpha = \gamma$, et l'expression se réduit à $Y^{\alpha-\beta}$, qui n'est pas constant; la ligne est de la forme indiquée.

Si $\beta = \alpha$, il faut considérer

$$\frac{z_3}{z_1} e^{-\frac{\gamma-\alpha}{A}\frac{z_2}{z_1}} = Y e^{-\frac{(\gamma-\alpha)2\pi}{mh}X},$$

car $A = \frac{mh}{2\pi}$. Cette expression étant finie et non identiquement nulle sur la courbe, $\alpha = \gamma$; elle se réduit alors à Y, qui est variable; la ligne est encore de la forme indiquée.

Si $\beta > \alpha$, il faut considérer

$$\frac{z_3}{z_1} \varphi^{\alpha-\gamma} = Y \varphi^{\alpha-\gamma}.$$

Toujours pour le même motif, $\alpha = \gamma$; l'expression est encore variable, et la ligne est de la forme voulue.

Passons à la forme (20). La ligne singulière correspond à $Y = 0$, X infini; elle est obtenue en posant

$$Y = \alpha_1 e^{-\frac{2\pi\beta_1 X}{h}} + \alpha_2 e^{-\frac{2\pi\beta_2 X}{h}} + \ldots + \alpha_m e^{-\frac{2\pi\beta_m X}{h}},$$

$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ étant des nombres positifs croissants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ des constantes, et α_m le paramètre variable; si $e^{-\frac{2\pi X}{h}}$ tend vers zéro, (x, y, u) tend vers un point variable de la courbe singulière.

z_1, z_2, z_3 sont de la forme (21), mais cette fois $\alpha - \beta$ est entier, tandis que $\alpha - \gamma$ et $\beta - \gamma$ ne le sont pas; donc en particulier $\alpha \neq \gamma$.

Ceci suffit à faire écarter l'hypothèse $\beta < \alpha$: car alors $X^{\gamma-\alpha} Y^{\alpha-\beta}$ tendrait toujours vers zéro ou vers l'infini dans les conditions indiquées.

Donc $\beta \geqq \alpha$. Mais alors ce qui précède ne suffit pas à indiquer si x, y, u peuvent être choisis de manière que la ligne soit de la forme simple considérée.

Enfin, si (x, y, u) est indéterminé pour X infini et pour une autre valeur de Y que celles qui correspondent à une substitution (15), nous ne sommes pas assurés non plus qu'on puisse trouver des fonctions automorphes (x, y, u) telles que cette singularité disparaisse ou soit ramenée à notre forme simple.

DEUXIÈME PARTIE.

FONCTIONS HYPERABÉLIENNES.

CHAPITRE V.

CLASSIFICATION. APPLICATION DE LA MÉTHODE DU RAYONNEMENT A CERTAINS GROUPES SPÉCIAUX.

---

1. Si dans un groupe hyperabélien Γ, qui comprend des substitutions gauches, on met à part les substitutions droites, celles-ci forment un groupe Γ', sous-groupe invariant d'ordre 2 de Γ. A cause de cela, nous porterons surtout notre attention sur les groupes de substitutions droites.

2. La classification des substitutions droites,

$$X = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad Y = \frac{a'y+b'}{c'y+d'}, \tag{1}$$

où $a, b, c, d, a', b', c', d'$ sont réels et où

$$ad - bc = a'd' - b'c' = 1,$$

est immédiate. Nous les désignerons sous les noms de substitutions (HH), (HE), (HP), (HI), etc., selon que les substitutions linéaires subies par x et par y respectivement sont toutes deux hyperboliques, ou l'une hyperbolique et l'autre elliptique ou parabolique ou identique, etc. Il n'y a pas lieu de distinguer, par exemple, (HE) de (EH), car on peut transformer par des substitutions gauches : il est donc indifférent, pour la classification, que ce soit x ou y qui subisse la transformation hyperbolique; la même observation s'applique aux autres cas désignés par deux lettres distinctes.

Nous aurons plus loin à établir une sous-distinction dans le type (HH).

3. On peut faire provenir les groupes hyperabéliens des transformations semblables d'une forme quadratique quaternaire telle que

$$x_1 x_4 + x_2 x_3; \tag{2}$$

il suffit de poser

$$\frac{x_2}{x_1} = x, \qquad \frac{x_3}{x_1} = -y, \qquad \frac{x_4}{x_1} = xy, \tag{3}$$

pour faire correspondre à certaines substitutions de la forme (2) des substitutions hyperabéliennes droites ou gauches [1].

Nous emploierons souvent les variables homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 liées par la relation

$$x_1 x_4 + x_2 x_3 = 0. \tag{4}$$

Pour ce qui concerne les points à l'infini, nous les définirons comme des systèmes de quatre nombres x_1, x_2, x_3, x_4, définis à un facteur près, liés par la relation (4), et dont le premier est nul.

Le *domaine principal* sera

$$i(x - x_0) < 0, \qquad i(y - y_0) < 0$$

Nous nommerons souvent les multiplicités

$$x = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad y = \text{const.},$$

des *génératrices :* ce sont, en effet, des génératrices rectilignes d'une quadrique dont l'équation serait (4). La génératrice est *réelle*, si la valeur constante de x ou de y est réelle; ces génératrices contiennent aussi des points imaginaires.

---

[1] *Cf.*, par exemple, mon Ouvrage : *Leçons sur les fonctions automorphes.*

Les *multiplicités cycliques* ont pour équations

$$
\begin{aligned}
(5)\qquad \alpha(|x_1\xi_4+x_2\xi_3+x_3\xi_2+x_4\xi_1|^2+|x_{1,0}\xi_4+x_{2,0}\xi_3+x_{3,0}\xi_2+x_{4,0}\xi_1|^2)& \\
+\gamma(x_1x_{4,0}+x_{1,0}x_4+x_2x_{3,0}+x_{2,0}x_3)& \\
\times(\xi_1\xi_{4,0}+\xi_{1,0}\xi_4+\xi_2\xi_{3,0}+\xi_{2,0}\xi_3 &= 0
\end{aligned}
$$

ou bien, si

$$\frac{\xi_2}{\xi_1}=\xi,\qquad \frac{\xi_3}{\xi_1}=-\eta,$$

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad \alpha[(x-\xi)(x_0-\xi_0)(y-\eta)(y_0-\eta_0)& \\
+(x-\xi_0)(x_0-\xi)(y-\eta_0)(y_0-\eta)]& \\
+\gamma(x-x_0)(y-y_0)(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)&=0;
\end{aligned}
$$

cette surface peut être considérée comme le lieu des points tels que

$$
(7)\qquad \begin{cases}(x-\xi)(x_0-\xi_0)+(x-\xi_0)(x_0-\xi)+(x-x_0)(\xi-\xi_0)\operatorname{ch}\delta=0,\\ (y-\eta)(y_0-\eta_0)+(y-\eta_0)(y_0-\eta)+(y-y_0)(\eta-\eta_0)\operatorname{ch}\delta'=0,\end{cases}
$$

quand δ et δ' varient de façon que

$$\alpha(\operatorname{ch}\delta\operatorname{ch}\delta'+1)+2\gamma=0.$$

Les équations (7) représentent deux cercles situés dans les plans des variables complexes x et y : ce sont ceux qui s'introduisent dans la théorie des groupes de Poincaré.

On peut aussi changer $\operatorname{ch}\delta$ ou $\operatorname{ch}\delta'$ en $-\operatorname{ch}\delta$ ou $-\operatorname{ch}\delta'$; mais alors (7) n'est plus, pour δ et δ' réels, située dans le domaine principal.

4. Ceci fait suffisamment connaître la forme de ces multiplicités quand ξ et η sont imaginaires.

Supposons que (ξ, η) tende vers un point imaginaire de la multiplicité

$$\xi-\xi_0=0,$$

et qu'en même temps $\dfrac{\gamma(\xi-\xi_0)}{\alpha}$ tende vers une limite $i\gamma'$. Alors la multiplicité tend vers la multiplicité limite

$$
(8)\qquad xx_0[(y-i)(y_0+i)+(y+i)(y_0-i)]-2\gamma'(x-x_0)(y-y_0)=0,
$$

en supposant que la limite de (ξ, η) soit $(0, i)$. On peut considérer cette multiplicité comme engendrée par la multiplicité à deux dimensions

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} &xx_0 + i\lambda(x - x_0) = 0,\\ &(y-i)(y_0+i) + (y+i)(y_0-i) + 2i(y-y_0)\operatorname{ch}\delta' = 0,\end{aligned}\right.$$

quand λ et δ' varient de manière que

$$\lambda \operatorname{ch}\delta' + \gamma' = 0.$$

Ceci suffit à nous montrer la forme de la surface (8) : elle contient toute la génératrice réelle $x = 0$ qui passe par le *centre* $(0, i)$. Cette génératrice, comme toutes les génératrices réelles, est entièrement située sur la surface

$$(x - x_0)(y - y_0) = 0.$$

A l'exception de cette génératrice, (8) est entièrement située dans le domaine

$$(x - x_0)(y - y_0) \neq 0;$$

si λ est positif et δ' réel, (9) est dans le domaine principal.

Si maintenant le centre (ξ, η) tend vers un point réel, par exemple $(0, 0)$, de manière que

$$\frac{\gamma(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)}{\alpha}$$

tende vers une limite γ'', la surface tend vers

$$(10)\qquad 2xx_0yy_0 + \gamma''(x - x_0)(y - y_0) = 0,$$

lieu de la multiplicité à deux dimensions

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &xx_0 + i\lambda(x - x_0) = 0,\\ &yy_0 + i\mu(y - y_0) = 0,\end{aligned}\right.$$

où λ et μ varient de façon que

$$2\lambda\mu = \gamma'';$$

si λ et μ sont positifs, (11) est dans le domaine principal, (10) n'atteint la frontière de celui-ci que le long des deux génératrices réelles $x = 0$, $y = 0$, qui passent par le centre.

5. Nous allons maintenant chercher les polyèdres fondamentaux des groupes formés des puissances d'une seule substitution. Nous chercherons surtout à mettre en évidence les *points exceptionnels* de ces groupes, c'est-à-dire ceux qui n'appartiennent ni au polyèdre fondamental ni à ses transformés, ou qui appartiennent à une infinité d'entre eux.

On peut remarquer que ces points exceptionnels appartiennent nécessairement à la multiplicité

$$(x - x_0)(y - y_0) = 0.$$

Nous nous bornerons aux substitutions droites, et nous négligerons les types (EE) et (EI), qui ne donnent que des groupes finis.

6. *Type* (HH). — Comme on peut transformer la substitution fondamentale par une substitution arbitraire, nous la mettrons sous la forme

$$\left(x, y; \frac{ax}{d}, \frac{a'x}{d'}\right) \qquad [ad = a'd' = 1;\ (a-d)(a'-d') \neq 0]$$

ou, en coordonnées homogènes, sous la forme

$$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ r_1 x_1,\ r_2 x_2,\ r_3 x_3,\ r_4 x_4),$$

avec

$$r_1 = dd', \qquad r_2 = ad', \qquad r_3 = a'd, \qquad r_4 = aa'.$$

Comme on peut échanger x et y, ou changer x ou y en leurs inverses, nous pouvons admettre que

$$|d| \geqq |d'| > 1$$

ou, par suite, que

$$|r_1| > |r_2| \geqq 1 \geqq |r_3| > |r_4|,$$

les égalités $|r_2| = 1$ et $|r_3| = 1$ n'ayant lieu que si $|d| = |d'|$; alors $r_2 = r_3 = \pm 1$.

Le polyèdre fondamental est l'ensemble des points pour lesquels le minimum de certaines expressions

$$(12) \qquad \begin{aligned} &|r_1^n x_1 \xi_4 + r_2^n x_2 \xi_3 + r_3^n x_3 \xi_2 + r_4^n x_4 \xi_1|^2 \\ &\quad + |r_1^n x_{1,0} \xi_4 + r_2^n x_{2,0} \xi_3 + r_3^n x_{3,0} \xi_2 + r_4^n x_{4,0} \xi_1|^2, \end{aligned}$$

où $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ reçoit un nombre fini de systèmes de valeurs, a lieu pour $n = 0$. Les points exceptionnels sont ceux pour lesquels ces expressions n'ont pas de minimum, ou bien atteignent celui-ci une infinité de fois.

Or, si $x_1 x_4 \neq 0$, ces fonctions de n tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $\pm\infty$: donc elles ont un minimum.

Supposons maintenant que $|r_2| \neq 1$: nous avons la même conclusion si $x_1 = 0$, $x_2 x_4 \neq 0$ (x_3 est alors nul); si $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 \neq 0$, comme x_3 est encore nul, nous avons un point exceptionnel, qui est l'un des quatre points doubles de la substitution. Si $x_1 = x_2 = 0$, nous avons une génératrice, dont tous les points sont exceptionnels, et n'appartiennent à aucun polyèdre. En partant de l'hypothèse $x_4 = 0$, on trouve de même la génératrice de points exceptionnels $x_3 = x_4 = 0$. Il n'y a pas d'autres points exceptionnels que ceux de ces deux génératrices, qui contiennent les quatre points doubles et n'appartiennent à aucun polyèdre.

Si maintenant $r_2 = r_3 = \pm 1$, les conclusions sont différentes. Si $x_1 = 0$, x_2 ou x_3 est nul aussi; soit, par exemple, $x_2 \neq 0$, $x_3 = 0$; alors, quand n tend vers $+\infty$, l'expression (12) tend vers $2|x_2\xi_3|^2$; et, si $r_4 \neq 0$, elle tend vers $+\infty$ quand n tend vers $-\infty$. Les points exceptionnels de cette catégorie sont ceux pour lesquels l'expression (12) ne peut tomber au-dessous de $2|x_2\xi_3|^2$; or, pour $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$, (12) devient

$$2r_4^{2n} x_4 x_{4,0} \xi_1 \xi_{1,0} + r_4^n r_2^n (x_4 x_{2,0} + x_{4,0} x_2)(\xi_1 \xi_{3,0} + \xi_{1,0}\xi_3) + 2x_2 x_{2,0} \xi_3 \xi_{3,0}.$$

Les points exceptionnels sont ceux pour lesquels

$$2r_4^{2n} x_4 x_{4,0} \xi_1 \xi_{1,0} + r_4^n r_2^n (x_4 x_{2,0} + x_{4,0} x_2)(\xi_1 \xi_{3,0} + \xi_{1,0}\xi_3) \geqq 0$$

quel que soit n entier; si $r_2 r_4 > 0$, ce sont donc évidemment les points pour lesquels

$$(x_4 x_{2,0} + x_{4,0} x_2)(\xi_1 \xi_{3,0} + \xi_{1,0}\xi_3) \geqq 0;$$

on le voit en faisant tendre n vers $-\infty$. Ainsi les points exceptionnels dépendent ici des positions des centres.

Si $x_1 = 0$, $x_3 \neq 0$, on trouve de même les points tels que

$$(x_3 x_{4,0} + x_{3,0} x_4)(\xi_1 \xi_{2,0} + \xi_{1,0} \xi_2) \gtreqless 0,$$

pourvu que $r_2 r_4 > 0$.

Si $x_4 = 0$, on a des conclusions analogues.

Si $r_2 r_4 < 0$, on n'a de points exceptionnels autres que les quatre points doubles que si $\xi_1 \xi_{2,0} + \xi_{1,0} \xi_2$ ou $\xi_1 \xi_{3,0} + \xi_{1,0} \xi_3$ est nul ; l'une des expressions $\xi_2 \xi_{4,0} + \xi_{2,0} \xi_4$, $\xi_3 \xi_{4,0} + \xi_{3,0} \xi_4$ est alors nulle aussi ; si les deux premières sont nulles à la fois, il en est de même des deux autres.

Dans ce cas où $r_2 r_3 = \pm 1$, deux des quatre points doubles appartiennent à tous les polyèdres ; les autres points exceptionnels n'appartiennent à aucun. Nous dirons que ces substitutions appartiennent au *type* (HH) *spécial*.

7. *Type* (HE). — Nous pouvons mettre la substitution fondamentale sous la forme

$$\left(x, y ; \frac{x \cos\varphi - \sin\varphi}{x \sin\varphi + \cos\varphi}, \frac{a' y}{d'}\right) \qquad (a'd' = 1,\ a' - d' \neq 0,\ \varphi \text{ non multiple de } \pi),$$

ou

$$[x_1, x_2, x_3, x_4 ; r(x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi),\ r(-x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi),$$
$$r'(x_3 \cos\varphi - x_4 \sin\varphi),\ r'(x_3 \sin\varphi + x_4 \cos\varphi)]$$
$$(r = d',\ r' = a').$$

La fonction à considérer pour le polyèdre fondamental est

$$\begin{aligned}(13)\qquad & |\, r'^n x_1(\xi_3 \sin n\varphi + \xi_4 \cos n\varphi) + r'^n x_2(\xi_3 \cos n\varphi - \xi_4 \sin n\varphi) \\ & \quad + r^n x_3(-\xi_1 \sin n\varphi + \xi_2 \cos n\varphi) + r^n x_4(\xi_1 \cos n\varphi + \xi_2 \sin n\varphi)\,|^2 \\ & + |\, r'^n x_{1,0}(\xi_3 \sin n\varphi + \xi_4 \cos n\varphi) + r'^n x_{2,0}(\xi_3 \cos n\varphi - \xi_4 \sin n\varphi) \\ & \quad + r^n x_{3,0}(-\xi_1 \sin n\varphi + \xi_2 \cos n\varphi) + r^n x_{4,0}(\xi_1 \cos n\varphi + \xi_2 \sin n\varphi)\,|^2.\end{aligned}$$

On peut supposer que

$$|r| > 1.$$

Cherchons les points (x_1, x_2, x_3, x_4) tels que

$$\begin{aligned}(14)\qquad & |\, x_3(\xi_1 \sin n\varphi - \xi_2 \cos n\varphi) - x_4(\xi_1 \cos n\varphi + \xi_2 \sin n\varphi)\,|^2 \\ & + |\, x_{3,0}(\xi_1 \sin n\varphi - \xi_2 \cos n\varphi) - x_{4,0}(\xi_1 \cos n\varphi + \xi_2 \sin n\varphi)\,|^2\end{aligned}$$

puisse prendre, l'entier n variant, des valeurs aussi petites que l'on veut. Nous pouvons, dans cette fonction, remplacer $n\varphi$ par $n\varphi + 2m\pi$, m étant entier, de façon que

$$0 \leqq n\varphi + 2m\pi < 2\pi.$$

Soient ε_i des nombres positifs tendant vers zéro quand i augmente indéfiniment. Soient n_i, m_i des entiers tels que (14) soit plus petit que ε_i pour $n = n_i$ et pour m tel que

$$0 \leqq n_i\varphi + 2m_i\pi < 2\pi.$$

Quand i augmente indéfiniment, les angles $n_i\varphi + 2m_i\pi$ ont au moins un angle limite θ

$$0 \leqq \theta \leqq 2\pi;$$

si l'on remplace $n\varphi$ par θ dans (14), le nombre obtenu est la limite des ε_i, c'est-à-dire zéro. Donc

$$(x_3\xi_1 - x_4\xi_2)\sin\theta - (x_3\xi_2 + x_4\xi_1)\cos\theta = 0,$$
$$(x_{3,0}\xi_1 - x_{4,0}\xi_2)\sin\theta - (x_{3,0}\xi_2 + x_{4,0}\xi_1)\cos\theta = 0.$$

Par conséquent,

$$(x_3\xi_2 + x_4\xi_1)(x_{3,0}\xi_1 - x_{4,0}\xi_2) - (x_3\xi_1 - x_4\xi_2)(x_{3,0}\xi_2 + x_{4,0}\xi_1) = 0,$$

ou

$$(x_3x_{4,0} - x_{3,0}x_4)(\xi_1^2 + \xi_2^2) = 0.$$

Si d'abord

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \xi_2 = \pm i\xi_1,$$

les deux équations en θ se réduisent à une seule

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{x_3\xi_2 + x_4\xi_1}{x_3\xi_1 - x_4\xi_2} = \frac{\pm ix_3 - x_4}{x_3 \pm ix_4};$$

comme θ doit être réel,

$$x_3 = x_4 = 0,$$

et alors θ est indéterminé : (14) est identiquement nul. Si maintenant

$$x_3x_{4,0} - x_{3,0}x_4 = 0,$$

$x_3 : x_4$ est réel; mais $(x_3\xi_2 + x_4\xi_1) : (x_3\xi_1 - x_4\xi_2)$ doit être aussi réel; et comme $\xi_2 : \xi_1$ est imaginaire, on a encore

$$x_3 = x_4 = 0.$$

Donc, les seuls points trouvés sont ceux de la génératrice ci-dessus.

Donc (13) tend vers $+\infty$ avec n, sauf pour les points de cette génératrice; (13) tend encore vers $+\infty$ quand n tend vers $-\infty$, sauf pour les points de la génératrice

$$x_1 = x_2 = 0.$$

Pour les points de la première génératrice, (13) tend vers zéro quand n tend vers $+\infty$, sans d'ailleurs atteindre sa limite; on a un résultat analogue pour la deuxième génératrice.

Donc, les points exceptionnels sont ceux de ces deux génératrices réelles, comprenant les quatre points doubles; ils sont en dehors de tous les polyèdres.

8. *Type* (HP). — La substitution fondamentale peut s'écrire

$$\left(x, y; x+1, \frac{a'y}{d'}\right) \qquad (a'd' = 1,\ a' \neq d')$$

ou

$$[x_1, x_2, x_3, x_4;\ rx_1, r(x_1+x_2), r'x_3, r'(-x_3+x_4)] \qquad (r = d', r' = a');$$

on peut supposer

$$|r| > 1.$$

Nous avons à considérer la fonction

$$\begin{gathered} |r'^n x_1 \ (-n\xi_3+\xi_4) + r'^n x_2 \ \xi_3 + r^n x_3 \ (n\xi_1+\xi_2) + r^n x_4 \ \xi_1|^2 \\ + |r'^n x_{1,0}(-n\xi_3+\xi_4) + r'^n x_{2,0}\xi_3 + r^n x_{3,0}(n\xi_1+\xi_2) + r^n x_{4,0}\xi_1|^2. \end{gathered}$$

Elle tend vers $+\infty$ quand n tend vers $\pm\infty$, sauf si

$$x_3 = x_4 = 0$$

ou si

$$x_1 = x_2 = 0.$$

Tels sont les points exceptionnels; ils sont en dehors de tous les polyèdres.

9. *Type* (HI). — La substitution fondamentale est

$$\left(x, y; x, \frac{a'y}{d'}\right) \qquad (a'd' = 1, a' \neq d')$$

ou

$$(x_1, x_2, x_3, x_4; rx_1, rx_2, r'x_3, r'x_4).$$

Le calcul est pareil à celui du type (HH) en faisant $r_1 = r_2 = r$, ou à celui du type (HE) en faisant $\varphi = 0$. Les résultats sont aussi les mêmes. Les points exceptionnels

$$x_1 = x_2 = 0, \qquad x_3 = x_4 = 0$$

sont les points doubles; ils sont extérieurs à tous les polyèdres.

10. *Type* (PE). — La substitution fondamentale est

$$\left(x, y; \frac{x\cos\varphi - \sin\varphi}{x\sin\varphi + \cos\varphi}, y + 1\right);$$

sa puissance n, en coordonnées homogènes, est

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4;\ & x_1\cos n\varphi + x_2\sin n\varphi,\ -x_1\sin n\varphi + x_2\cos n\varphi,\\ & -nx_1\cos n\varphi - nx_2\sin n\varphi + x_3\cos n\varphi - x_4\sin n\varphi,\\ & -nx_1\sin n\varphi + nx_2\cos n\varphi + x_3\sin n\varphi + x_4\cos n\varphi).\end{aligned}$$

On reconnaît immédiatement qu'il n'y a pas d'autres points exceptionnels que ceux de la génératrice

$$x_1 = x_2 = 0$$

qui contient les deux points doubles. Reste à voir si ceux-ci sont exceptionnels. Nous avons à considérer la fonction

$$(15) \qquad \begin{aligned}&|(x_3\ \xi_2 + x_4\ \xi_1)\cos n\varphi + (x_3\ \xi_1 - x_4\ \xi_2)\sin n\varphi|^2\\ +\ &|(x_{3,0}\xi_2 + x_{4,0}\xi_1)\cos n\varphi + (x_{3,0}\xi_1 - x_{4,0}\xi_2)\sin n\varphi|^2.\end{aligned}$$

Remplaçons $n\varphi$ par θ, et cherchons quand elle est indépendante de θ. Il faut et il suffit pour cela que

$$|x_3\xi_2 + x_4\xi_1|^2 + |x_{3,0}\xi_2 + x_{4,0}\xi_1|^2 - |x_3\xi_1 - x_4\xi_2|^2 - |x_{3,0}\xi_1 - x_{4,0}\xi_2|^2 = 0,$$

$$\begin{aligned}&(x_3\ \xi_2 + x_4\ \xi_1)(x_{3,0}\xi_{1,0} - x_{4,0}\xi_{2,0}) + (x_{3,0}\xi_{2,0} + x_{4,0}\xi_{1,0})(x_3\ \xi_1 - x_4\ \xi_2)\\ +\ &(x_{3,0}\xi_2 + x_{4,0}\xi_1)(x_3\ \xi_{1,0} - x_4\ \xi_{2,0}) + (x_3\ \xi_{2,0} + x_4\ \xi_{1,0})(x_{3,0}\xi_1 - x_{4,0}\xi_2) = 0,\end{aligned}$$

ou que

$$(x_3 x_{3,0} - x_4\ x_{4,0})(\xi_1\xi_{1,0} - \xi_2\xi_{2,0}) - (x_3 x_{4,0} + x_{3,0}x_4\ )(\xi_1\xi_{2,0} + \xi_{1,0}\xi_2) = 0,$$
$$(x_3 x_{4,0} + x_{3,0}x_4\ )(\xi_1\xi_{1,0} - \xi_2\xi_{2,0}) + (x_3 x_{3,0} - x_4\ x_{4,0})(\xi_1\xi_{2,0} + \xi_{1,0}\xi_2) = 0.$$

Or,

$$(\xi_1\xi_{1,0} - \xi_2\xi_{2,0})^2 + (\xi_1\xi_{2,0} - \xi_{1,0}\xi_2)^2 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)(\xi_{1,0}^2 + \xi_{2,0}^2).$$

Si ce déterminant est nul, c'est donc que $\xi_2 = \pm i\xi_1$, et, alors, les deux équations précédentes sont des identités : donc, si le centre est unique et a même projection sur le plan des x que l'un des points doubles, tous les points de $x_1 = x_2 = 0$ sont exceptionnels et sont sur tous les polyèdres.

Si, maintenant, ce déterminant n'est plus nul, ces deux équations donnent

$$x_3 x_{3,0} - x_4 x_{4,0} = 0, \qquad x_3 x_{4,0} + x_{3,0} x_4 = 0;$$

comme $x_1 = x_2 = 0$, x_3 et x_4 ne sont pas nuls ensemble ; donc, le déterminant de ces deux équations linéaires en x_3 et x_4 est nul :

$$x_{3,0}^2 + x_{4,0}^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x_4 = \pm i x_3.$$

Cela signifie qu'on est en l'un des deux points doubles : donc, ces deux points doubles sont exceptionnels et appartiennent à tous les polyèdres.

Qu'arrive-t-il quand la fonction (15) n'est pas indépendante de θ, c'est-à-dire quand $\xi_1^2 + \xi_2^2$ et $x_3^2 + x_4^2$ sont différents de zéro? Il faut distinguer deux cas, selon que $\varphi : \pi$ est rationnel ou non.

Si $\varphi : \pi$ est rationnel, (15) ne prend, quand n varie, qu'un nombre limité de valeurs : donc, elle a un minimum, atteint une infinité de fois; tous les points de la génératrice $x_1 = x_2 = 0$ sont exceptionnels et appartiennent à une infinité de polyèdres.

Si $\varphi : \pi$ est irrationnel, remplaçons $n\varphi$ par la variable continue θ. La fonction atteint son minimum et son maximum pour

$$\operatorname{tang} 2\theta = -\frac{(x_3 x_{3,0} - x_4 x_{4,0})(\xi_1\xi_{2,0} + \xi_{1,0}\xi_2) + (x_3 x_{4,0} + x_{3,0} x_4)(\xi_1\xi_{1,0} - \xi_2\xi_{2,0})}{(x_3 x_{3,0} - x_4 x_{4,0})(\xi_1\xi_{1,0} - \xi_2\xi_{2,0}) - (x_3 x_{4,0} + x_{3,0} x_4)(\xi_1\xi_{2,0} + \xi_{1,0}\xi_2)}.$$

Si x_3 et x_4 sont tels que le minimum soit atteint pour $\theta = n\varphi + k\pi$, n et k étant entiers, il y a un minimum, atteint une fois et une seule quand n varie : pour chaque valeur de n nous trouvons ainsi une circonférence, passant par les points doubles, et dont les points autres que les points doubles et qui correspondent à un minimum (non à un maximum) ne sont pas exceptionnels. La région où l'on a un minimum est celle où

$$\begin{aligned}
&-[\ (x_3 x_{3,0} - x_4\ x_{4,0})(\xi_1 \xi_{1,0} - \xi_2\ \xi_{2,0}) \\
&\qquad - (x_3 x_{4,0} + x_{3,0} x_4\ )(\xi_1 \xi_{2,0} + \xi_{1,0} \xi_2\ )] \cos 2n\varphi \\
&+[\ (x_3 x_{3,0} - x_4\ x_{4,0})(\xi_1 \xi_{2,0} + \xi_{1,0} \xi_2\ ) \\
&\qquad + (x_3 x_{4,0} + x_{3,0} x_4\ )(\xi_1 \xi_{1,0} - \xi_2\ \xi_{2,0})] \sin 2n\varphi < 0;
\end{aligned}$$

c'est la portion de la première circonférence intérieure à un certain cercle; les points d'intersection sont les points doubles. Ces portions de circonférences forment un ensemble partout dense sur la génératrice $x_1 = x_2 = 0$. Les points qui ne sont sur aucune d'elles sont tous exceptionnels et n'appartiennent à aucun polyèdre : car, n variant, la fonction (15) reste toujours supérieure à sa plus petite limite. Dans ce dernier cas, le polyèdre fondamental a une infinité de faces.

11. *Type* (PP). — La substitution fondamentale est

$$(x, y;\ x+1,\ y+\varepsilon) \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

En effet, on sait qu'en transformant la substitution linéaire parabolique à une seule variable

$$\left(x;\ \frac{ax+b}{cx+d}\right) \qquad (ad - bc = 1)$$

par une autre substitution linéaire

$$\left(x;\ \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right) \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1),$$

on peut ramener la première à un seul des deux types

$$(x;\ x+\varepsilon) \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

(On trouvera des calculs analogues dans ma Thèse, Chap. II, §§ VII à XI.) Ici cela nous donne donc

$$(x, y;\ x+\varepsilon,\ y+\eta),$$

qu'on ramène au type indiqué en le remplaçant, au besoin, par son inverse. En coordonnées homogènes, sa puissance n est

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1,\ n x_1 + x_2,\ -\varepsilon n x_1 + x_3,\ \varepsilon n^2 x_1 + \varepsilon n x_2 - n x_3 + x_4).$$

On a donc à considérer les minima de

$$\begin{aligned}(16)\qquad & |x_1\ (\varepsilon n^2 \xi_1 + \varepsilon n \xi_2 - n \xi_3 + \xi_4) + x_2\ (-\varepsilon n \xi_1 + \xi_3) \\ & \qquad\qquad + x_3\ (\quad n \xi_1 + \xi_2) + x_4\ \xi_1|^2 \\ & + |x_{1,0}(\varepsilon n^2 \xi_1 + \varepsilon n \xi_2 - n \xi_3 + \xi_4) + x_{2,0}(-\varepsilon n \xi_1 + \xi_3) \\ & \qquad\qquad + x_{3,0}(\quad n \xi_1 + \xi_2) + x_{4,0} \xi_1|^2.\end{aligned}$$

On trouve immédiatement que le seul point exceptionnel est

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \qquad x_4 \neq 0;$$

c'est le point double; il appartient à tous les polyèdres.

Le polyèdre fondamental atteint la frontière du domaine principal en des points aussi voisins que l'on veut du point double. Car, si l'on considère l'une des génératrices qui passent par le point double, par exemple

$$x_1 = x_2 = 0,$$

on trouve pour points du polyèdre fondamental ceux qui satisfont à la condition

$$x_3 x_{3,0} \xi_1 \xi_{1,0} > |x_3 x_{3,0}(\xi_1 \xi_{2,0} + \xi_{1,0} \xi_2) + (x_3 x_{4,0} + x_{3,0} x_4) \xi_1 \xi_{1,0}|.$$

Or, si $x_3 = 1$, on peut choisir la partie réelle de x_4 de manière que le second membre soit nul : alors la condition est satisfaite; ensuite, on peut prendre la partie imaginaire de x_4 aussi grande que l'on veut, ce qui donne des points aussi voisins que l'on veut du point double.

Observons, ensuite, que les points assez voisins de ces derniers font, en général, partie du polyèdre fondamental, de sorte que la frontière du domaine principal est coupée par ce polyèdre, au voisinage du point double, selon une multiplicité à *trois* dimensions. En effet, soient

$$x_1 = \lambda x_3, \qquad x_2 = -\lambda x_4,\ x_3,\ x_4$$

les coordonnées d'un de ces points où λ est un nombre complexe aussi petit en valeur absolue que l'on veut. Quand λ est différent de zéro, deux cas peuvent se présenter selon son argument :

1° La dérivée de la fonction (16) de la variable *continue* n peut n'avoir qu'une racine; alors, pour n entier, le minimum est atteint pour la même valeur de n que quand $\lambda = 0$, c'est-à-dire $n = 0$;

2° Cette dérivée peut avoir trois racines; deux d'entre elles tendent vers l'infini quand λ tend vers zéro, et si

$$\lambda = \mu e^{i\varphi}, \qquad \mu > 0,$$

on vérifie que leurs parties principales sont

$$\frac{-3\varepsilon\cos\varphi \pm \sqrt{9\cos^2\varphi - 8}}{8\mu}.$$

Dès lors, sauf peut-être pour des valeurs particulières de φ, la fonction (16) prend, pour ces deux dernières racines, des valeurs qui augmentent indéfiniment quand μ tend vers zéro; le minimum correspond donc à la troisième racine. Si n est entier, le minimum est donc encore atteint pour $n = 0$.

12. *Type* (PI). — La substitution fondamentale est

$$(x, y;\ x, y + 1);$$

sa puissance n en coordonnées homogènes est

$$(x_1, x_2, x_3, x_4;\ x_1, x_2, -nx_1 + x_3, nx_2 + x_4).$$

Les points exceptionnels sont les points doubles $x_1 = x_2 = 0$, ils font partie de tous les polyèdres. Si $x_1 = 1$, et si $x_2 = x$ est réel, et si $x_3 = \lambda$, $x_4 = -\lambda x$, on vérifie que la partie imaginaire de λ ne figure pas dans les inégalités qui définissent le polyèdre fondamental. Donc, la frontière du domaine principal est atteinte, au voisinage des points doubles, selon une multiplicité à trois dimensions.

13. En résumé, si x ou y subit une transformation hyperbolique, les points exceptionnels sont un système de deux génératrices réelles, comprenant les points doubles, et situé en dehors de tous les polyèdres; il n'y a exception que pour le type (HH) spécial, qui est, de tous ces types, le seul où les multiplicateurs de la substitution linéaire subie par x_1, x_2, x_3, x_4 ne sont pas tous différents de *un* en valeur absolue.

Les substitutions des types (PP) et (PI) n'ont pas d'autres points exceptionnels que les points doubles, qui appartiennent à tous les polyèdres. Le polyèdre fondamental coupe la frontière du domaine principal, au voisinage des points doubles, selon une région à trois dimensions.

Enfin, les substitutions des types (HH) spécial et (PE) donnent lieu à des circonstances plus compliquées.

CHAPITRE VI.

SOMMETS ET ARÊTES PARABOLIQUES.

1. Théorème. — *Si tous les points-frontières du domaine principal sont singuliers pour une certaine fonction $\Theta(x, y)$ thêta-hyperabélienne, de groupe Γ, aucun polyèdre fondamental de Γ n'a de face sur la frontière du domaine principal.*

La démonstration ressemble beaucoup à celle du théorème correspondant du Chapitre III.

On va voir que, si un polyèdre fondamental a une face sur cette frontière, toute fonction Θ peut se prolonger analytiquement à travers cette face.

Nous ramenons, pour la formation des fonctions Θ, le domaine principal à distance finie. Nous supposons donc que celui-ci est défini par les inégalités

$$xx_0 < 1, \qquad yy_0 < 1,$$

x et y subissant séparément des substitutions linéaires, avec, au besoin, permutation de ces variables, si l'on considère des substitutions gauches.

Supposons que le polyèdre fondamental ait une face sur la portion de multiplicité

$$(xx_0 - 1)(yy_0 - 1) = 0$$

qui limite le domaine principal. Soit B un point de cette face, pour lequel on peut admettre que

$$xx_0 = 1, \qquad yy_0 < 1.$$

Soit

$$\Theta(x, y) = \Sigma R(x_n, y_n)\left[\frac{\partial(x_n, y_n)}{\partial(x, y)}\right]^k \qquad (k \geqq 2)$$

une fonction Θ du groupe. Il nous suffit encore de démontrer que les infinis de $R(x_n, y_n)$ et de $\dfrac{\partial(x_n, y_n)}{\partial(x, y)}$ ne peuvent, quel que soit n, pénétrer dans une hypersphère de centre B et de rayon ε assez petit.

Pour cela, nous considérons la fonction F définie, pour chaque couple de points $(x, y; \xi, \eta)$, par l'égalité

$$F = \text{le plus grand des nombres } \frac{(xx_0 - 1)(1 - \xi\xi_0)}{|x\xi_0 - 1|^2} \quad \text{et} \quad \frac{(yy_0 - 1)(1 - \eta\eta_0)}{|y\eta_0 - 1|^2}.$$

F est évidemment invariant par le groupe. Considérons la multiplicité V

$$F = \alpha,$$

où α est positif, et où $\xi = \eta = 0$: si α est suffisamment petit, les infinis de $R(x, y)$ sont tous extérieurs à V, c'est-à-dire situés dans la région

$$F > \alpha;$$

B est, au contraire, intérieur à V. Il suffit donc, comme au Chapitre III, de démontrer que la plus courte distance de B aux transformés V_n de V par le groupe reste, quel que soit n, supérieure à un nombre fixe ε.

On commence, encore comme au Chapitre III, par remarquer que les transformés de $\xi = \eta = 0$ n'ont pas B pour point d'accumulation : il n'y a pas à revenir sur ce point de la démonstration. Soit S une hypersphère de centre B ayant à son extérieur $\xi = \eta = 0$ et tous ses transformés.

Considérons maintenant la fonction F des parties réelles et imaginaires de x, y, ξ, η, où (ξ, η) varie sans aller à l'intérieur de S ni à l'extérieur du domaine principal. Je dis que, si (x, y) est situé dans une hypersphère S' de centre B et de rayon assez petit, F est continu. En effet, F n'est discontinu que si $x\xi_0 - 1$ ou $y\eta_0 - 1$ s'annule. Mais on peut supposer que dans tout S'

$$yy_0 < 1.$$

Alors $y\eta_0 - 1$ ne s'annule pour aucun point (ξ, η) du domaine principal. D'autre part, si B est, par exemple, le point $x = 1$, $y = 0$, on voit $x\xi_0 - 1$ ne s'annuler que pour des points (ξ, η) intérieurs à S dès que x est assez voisin de 1. Donc S' existe.

Donc, F est continu pour (ξ, η) non intérieur à S ni extérieur au domaine principal et (x, y) intérieur à S' : ce domaine de variation C étant fermé, la continuité est uniforme. Or, quand (x, y) est en B, $F = 0$ quels que soient ξ et η. Donc, si la multiplicité

$$F = \alpha \tag{1}$$

pénètre dans C, la continuité uniforme entraîne que, sur cette multiplicité et dans C, la distance de (x, y) à B reste supérieure à un minimum ε, indépendant de (ξ, η). Comme ε est plus petit que le rayon de S', ε est inférieur à la distance de B aux points de la multiplicité (1) qui ne sont pas dans C.

Mais les V_n font partie des multiplicités (1) : donc ε est le nombre dont nous voulions prouver l'existence.

Une démonstration toute pareille s'applique aux infinis de $\dfrac{\partial(x_n, y_n)}{\partial(x, y)}$, qui sont les transformés de la multiplicité à l'infini.

Notre théorème est démontré.

2. Théorème. — *Si le polyèdre fondamental rayonné atteint la frontière du domaine principal une arête à une ou à deux dimensions commune à une infinité de transformés du polyèdre fondamental, cette arête est entièrement située sur une même génératrice réelle.*

En effet, supposons qu'il existe sur une telle arête deux points B et C non situés sur une même génératrice réelle.

Les polyèdres dont une face passe par B ont tous un de leurs centres situé sur une multiplicité passant par B et n'ayant pas d'autre point commun avec la frontière du domaine principal que ceux de la génératrice réelle (si B est imaginaire) *ou* des deux génératrices réelles (si B est réel) qui passent par B (Chap. V, § 4). Le point C introduit une multiplicité analogue. Ces deux multiplicités n'ont, par hypothèse, aucun point d'intersection sur la frontière du domaine principal [1]. Or sur cette intersection se trouvent une infinité de centres de polyèdres : on a donc une contradiction, même si le polyèdre fondamental a plusieurs centres (en nombre fini).

Donc, B et C sont sur une même génératrice. Si l'arête a des points imaginaires, elle est donc tout entière sur une même génératrice réelle. Si elle n'a que des points réels, il en est de même, car les secondes génératrices qui passent respectivement par B et par C n'ont aucun point commun.

3. Corollaire. — *Si quelque fonction $\Theta(x, y)$ correspondant à un groupe Γ admet la frontière du domaine principal comme coupure, et si le polyèdre fondamental rayonné* P *de* Γ *n'a qu'un nombre fini de faces,* P *ne peut atteindre la frontière du domaine principal que par des sommets ou par des arêtes entièrement situées sur une même génératrice réelle.*

Car, P n'ayant pas de face sur cette frontière, chacune de ces arêtes est commune à une infinité de transformés de P.

4. Dans l'hypothèse du paragraphe précédent, tout sommet ou toute arête de P situé sur la frontière du domaine principal est changé en lui-même par une infinité de transformations de Γ formant un groupe G.

Cela ne veut pas dire que les arêtes soient changées en elles-mêmes point par point.

Si l'on fait correspondre à chacun des éléments du cycle dont fait partie ce sommet ou cette arête un polyèdre P_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) transformé en P par la substitution qui amène cet élément du cycle à coïncider avec ce sommet ou avec cette arête, le polyèdre fondamental rayonné de G qui a pour centres ceux des P_k a mêmes faces passant par ce sommet ou par cette arête que l'ensemble des P_k. La démonstration est la même qu'au Chapitre III, paragraphe 5.

---

(1) Ceci est inexact si B et C sont réels; dans ce cas, on ajoute un troisième point.

Cas où P atteint le domaine réel.

5. Si P atteint le domaine réel par une arête A, celle-ci est à une dimension, puisque x ou y seul y est variable, et reste réelle. Je dis que, *sur cette arête, il y a un sommet réel*.

En effet, A est transformée en elle-même par quelque substitution de G. Si ce n'est pas point par point, la proposition est évidente, la partie réelle de la génératrice qui porte l'arête ne faisant pas tout entière partie de P.

Si A est transformée en elle-même point par point, ce ne peut être que par une substitution du type (PI) (Chap. V, § 13); et toutes les substitutions de ce type qui changent A en elle-même sont des puissances de l'une d'entre elles. Mais alors A est changée en elle-même par d'autres substitutions, sinon P atteindrait le domaine réel par une arête à *deux* dimensions.

Donc il y a toujours un sommet réel.

6. Plaçons-nous donc dans le cas où P a un sommet réel A, appartenant ou non à une arête réelle. G sera le sous-groupe des substitutions droites de Γ qui ont A pour point double.

Les substitutions de G appartiennent toutes aux types (PP), (PI) et (HH) spécial (Chap. V, § 13).

7. *Nous supposerons d'abord qu'il n'y ait pas de substitution du type* (HH) *spécial*. Alors, si A est le point

$$x = \infty, \quad y = \infty,$$

les substitutions de G sont toutes de la forme

$$(x, y; x + h, y + k),$$

où h et k sont deux nombres réels.

G ne se réduit pas aux puissances d'une de ces substitutions, sinon P atteindrait la frontière du domaine principal par des régions à trois dimensions.

D'autre part, pour toutes ces substitutions autres que la substitution identique, h^2+k^2 reste supérieur à un certain minimum, sinon G ne serait pas discontinu.

D'autre part, h^2+k^2 atteint son minimum pour quelque substitution de G; car, pour les substitutions de G de paramètres (h, k) et (h', k'), les différences $h-h'$ et $k-k'$ ne tombent pas à la fois au-dessous d'une certaine limite : et, si le minimum n'était pas atteint, il serait possible de trouver deux substitutions de G pour lesquelles ces différences, sans être nulles ensemble, seraient à la fois aussi petites que l'on voudrait.

Soit (h', k') la substitution pour laquelle h^2+k^2 est minimum; soit (h'', k'') la substitution qui n'est pas une puissance de (h', k') et pour laquelle h^2+k^2 atteint le minimum correspondant aux substitutions qui ne sont pas des puissances de (h', k').

Alors $(mh'+nh'', mk'+nk'')$ est une substitution de G, quels que soient les entiers m et n; je dis que c'en est la substitution générale. En effet la forme quadratique en m et n

$$m^2(h'^2+k'^2)+2mn(h'h''+k'k'')+n^2(h''^2+k''^2)$$

est réduite. Si (h''', k''') appartenait à G et n'était pas de la forme indiquée, on pourrait, en résolvant les équations

$$\begin{aligned} mh'+nh'' &= h''', \\ mk'+nk'' &= k''', \end{aligned}$$

et en remplaçant les valeurs de m et de n par les entiers les plus voisins, en déduire l'existence dans G d'une substitution où h et k seraient inférieurs ou égaux en valeur absolue à $\dfrac{|h'|+|h''|}{2}$ et à $\dfrac{|k'|+|k''|}{2}$; donc h^2+k^2 serait inférieur à

$$\frac{h'^2+k'^2}{4}+\frac{|h'h''|+|k'k''|}{2}+\frac{h''^2+k''^2}{4}.$$

Mais

$$(|h'h''|+|k'k''|)^2=(h'^2+k'^2)(h''^2+k''^2)-(|h'k''|-|h''k'|)^2;$$

donc

$$|h'h''|+|k'k''|\leqq h''^2+k''^2.$$

Si c'est *l'inégalité* qui a lieu,

$$h^2 + k^2 < h''^2 + k''^2$$

pour notre substitution : ce qui donne une contradiction avec les définitions de (h, k) et de (h', k'), Si c'est *l'égalité* qui a lieu,

$$h'^2 + k'^2 = h''^2 + k''^2,$$

$$|h' k''| = |h'' k'|;$$

donc

$$\left|\frac{h'}{h''}\right| = \left|\frac{k'}{k''}\right| = 1;$$

par suite, (h'', k'') n'étant pas une puissance de (h', k'), cette substitution ou son inverse se réduit à $(h', -k')$. La troisième substitution doit se réduire à $\left(\pm \frac{|h'| + |h''|}{2}, \pm \frac{|k'| + |k''|}{2}\right)$; elle coïncide donc avec une des précédentes ou avec son inverse, ce qui est encore une contradiction. Donc *toute substitution du groupe* G *est de la forme*

$$(x, y; x + mh' + nh'', y + nk' + nk'').$$

8. Formons le polyèdre fondamental rayonné P de G. Nous avons à étudier les minima de

$$\begin{aligned} &|x_1[(mh' + nh'')(mk' + nk'')\xi_1 + (mk' + nk'')\xi_2 - (mh' + nh'')\xi_3 + \xi_4] \\ &\qquad + x_2[-(mk' + nk'')\xi_1 + \xi_3] + x_3[(mh' + nh'')\xi_1 + \xi_2] + x_4\xi_1|^2 \\ &+ |x_{1,0}[(mh' + nh'')(mk' + nk'')\xi_1 + (mk' + nk'')\xi_2 - (mh' + nh'')\xi_3 + \xi_4] \\ &\qquad + x_{2,0}[-(mk' + nk'')\xi_1 + \xi_3] + x_{3,0}[(mh' + nh'')\xi_1 + \xi_2] + x_{4,0}\xi_1|^2. \end{aligned}$$

En quels points ce polyèdre atteint-il la génératrice réelle

$$x_1 = x_2 = 0?$$

Nous avons à considérer

$$(17) \qquad |x_3[(mh' + nh'')\xi_1 + \xi_2] + x_4\xi_1|^2 + |x_{3,0}[(mh' + nh'')\xi_1 + \xi_2] + x_{4,0}\xi_1|^2.$$

Si $h' : h''$ est irrationnel, je dis que cette génératrice est atteinte, au voisinage de A, par des arêtes à une seule dimension. En effet, le polynome du second degré par rapport à la variable réelle λ

$$|x_3(\lambda\xi_1 + \xi_2) + x_4\xi_1|^2 + x_{3,0}(\lambda\xi_1 + \xi_2) + x_{4,0}\xi_1|^2$$

atteint son minimum pour

$$\lambda = -\frac{x_3\xi_1(x_{3,0}\xi_{2,0}+x_{4,0}\xi_{1,0})+\ldots}{4x_3x_{3,0}\xi_1\xi_{1,0}},$$

les termes non écrits du numérateur se déduisant du terme écrit en permutant les variables x et les variables ξ avec leurs conjuguées de toutes les manières possibles. Si $x_4 : x_3$ est tel que λ soit de la forme $mh' + nh''$, nous avons un point d'un des polyèdres transformés de P. En particulier, pour $m = n = 0$, nous trouvons le cercle

$$(\xi_1\xi_{2,0}+\xi_{1,0}\xi_2)x_3x_{3,0}+\xi_1\xi_{1,0}(x_3x_{4,0}+x_{3,0}x_4)=0.$$

Si λ n'est pas de cette forme, le point n'appartient à aucun polyèdre, la fonction (17) restant supérieure à sa plus petite limite. Nous avons bien des arêtes à une dimension.

Or je dis que c'est impossible. Cette arête devrait en effet être transformée en elle-même par quelque substitution de Γ. Celle-ci devrait transformer en elle-même la génératrice $x_1 = x_2 = 0$ entière. Elle serait donc d'un des types (HH), spécial ou non, (HE), (HP), (HI), (PE), (PP), (PI). Or les types (HH) non spécial, (HE), (HP), (HI) doivent être écartés, parce que les points doubles seraient en dehors de tous les polyèdres, et A est un de ces points doubles pour la substitution ou pour son carré. Le type (PP) n'a qu'un point double et ne peut convenir. Restent les types (PE), (PI), (HH) spécial. Or la substitution du type (HH) spécial devrait avoir A pour point double : elle n'existe donc pas par hypothèse. Quant à celle du type (PE), une de ces puissances serait du type (PI).

Il suffit donc de montrer que le type (PI) est impossible aussi. Or, s'il y avait une substitution S de ce type, elle serait de la forme

$$(x, y; x, y+1)$$

ou de la forme

$$(x, y; x+1, y),$$

car A en serait point double. Mais la première de ces formes ne convient pas, car, par les puissances de S, tous les points de la génératrice seraient conservés : la génératrice serait atteinte par une région à deux dimensions, ce qui n'est pas. La deuxième ne convient pas non plus, car notre cercle devrait avoir un seul point réel A; or il en a un autre.

Donc il n'y a pas d'arête à une dimension aboutissant à A.

Donc *$h' : h''$ est rationnel* (peut être infini). De même *$k' : k''$ est rationnel.*

Soit

$$\frac{h'}{h''} = \frac{p}{q},$$

p et q étant des entiers premiers entre eux. Soient α et β des entiers tels que

$$\alpha p + \beta q = 1;$$

on peut remplacer $S' = (h', k')$ et $S'' = (h'', k'')$ par $S'^{\alpha} S''^{\beta}$ et $S'^{-q} S''^{p}$: ce qui revient à prendre $h'' = 0$.

On trouve immédiatement que *les génératrices réelles passant par* A, $x_1 = x_2 = 0$, $x_1 = x_3 = 0$, *sont atteintes l'une et l'autre par des régions à deux dimensions au voisinage de* A, *n'ayant pas d'autre point réel voisin de* A *que* A *lui-même.*

9. *Supposons maintenant que* G *comprenne une substitution* S *du* (HH) *spécial.*

Si A est encore le point

$$x = \infty, \qquad y = \infty,$$

cette substitution est de la forme

$$(x, y;\ rx + b,\ r'y + b') \qquad (rr' = 1,\ r > 1)$$

et, par une transformation hyperabélienne conservant A, on peut la ramener à la forme

$$(x, y;\ rx,\ r'y).$$

Or G ne se réduit pas aux puissances de cette substitution. Car on trouve que si $x = y = g$, g étant réel, la fonction de la variable continue positive t

$$\varphi = 2\left|\xi_4 + \frac{g\xi_3}{t} - tg\xi_2 + g^2\xi_1\right|^2,$$

déduite de celle qui donne le polyèdre rayonné en y remplaçant r^n par t, a une dérivée dont une racine positive tend (dans certains cas) vers une limite finie quand g augmente indéfiniment, les deux autres, si elles existent, tendent l'une vers zéro, l'autre vers l'infini : ces dernières sont alors de l'ordre de g ou de $1 : g$, et ne fournissent pas le minimum. Le polyèdre fondamental atteint donc la frontière du domaine principal en des points voisins de A et non situés sur les génératrices réelles qui passent par A, ce qui est absurde. Si aucune racine positive ne tend vers une limite finie, et si

$$(\xi_1\xi_{2,0}+\xi_{1,0}\xi_2)(\xi_1\xi_{3,0}+\xi_{1,0}\xi_3)\neq 0,$$

on obtient la même conclusion que ci-dessus en prenant $x=-y=g$. Si

$$\xi_1\xi_{2,0}+\xi_{1,0}\xi_2=\xi_1\xi_{3,0}+\xi_{1,0}\xi_3=0,$$

la même fonction a une seule racine positive, dont la limite est finie : on est conduit à la même absurdité. Si enfin, par exemple,

$$\xi_1\xi_{2,0}+\xi_{1,0}\xi_2=0, \qquad \xi_1\xi_{3,0}+\xi_{1,0}\xi_3\neq 0,$$

le minimum est donné par une racine de l'ordre de $g^{\frac{1}{3}}$, ce qui donne toujours la même absurdité : x et y tendent encore tous deux vers l'infini pour le minimum, quoique avec des ordres différents.

Je dis maintenant que G renferme des substitutions du type (PP) ou du type (PI). Soit en effet

$$(\mathrm{S}') \qquad (x, y;\ ax+b,\ a'y+b') \qquad (aa'=1)$$

une substitution non puissance de S. Alors b ou b' n'est pas nul; car si $b=b'=0$, G ne serait pas discontinu, ou bien les substitutions S et S' seraient des puissances d'une même troisième; or r ne peut pas s'approcher de 1 autant qu'on le veut : on peut donc bien admettre que b ou b' n'est pas nul. Or

$$\mathrm{SS'S^{-1}S'^{-1}}=[x, y;\ x+a'b(r'-1),\ y+ab'(r-1)]$$

qui est du type (PP) ou (PI).

Je dis encore que G ne renferme pas de substitution du type (PI). Car si, en changeant la notation,

$$\mathrm{S}'=(x, y;\ x+h, y)$$

fait partie de G,

$$S^{-n}S'S^{n}=(x, y; x+hr^{n}, y)$$

en fait partie aussi : or si n tend vers $-\infty$, c'est une substitution infinitésimale, ce qui est absurde.

Donc G comprend des substitutions du type (PP). Je dis qu'elles ne sont pas toutes des puissances d'une seule d'entre elles. Car, si la contradictoire a lieu, soit

$$S'=(x, y; x+h', y+k')$$

cette dernière Comme

$$S^{-1}S'S=(x, y; x+h'r, y+k'r')$$

est du type (PP), il existe un entier α tel que

$$h'r=\alpha h', \qquad k'r'=\alpha k',$$

ou que

$$r=r'=\alpha;$$

donc $\alpha=1$, et S est la substitution identique, contre l'hypothèse.

Le même raisonnement qu'au paragraphe 7 prouve alors que toutes les substitutions de G du type (PP) sont des produits de puissances de deux d'entre elles, S' et

$$S''=(x, y; x+h'', y+k'').$$

Je dis enfin que toute substitution de G du type (HH) spécial est le produit d'une puissance d'une substitution fixe S par des puissances de S' et de S''. En effet, soit

$$S'''=(x, y; ax+b, a'x+b')$$

une telle substitution. Choisissons des entiers m et n tels que

$$|a^{n}r^{m}-1|<\varepsilon;$$

on a

$$S^{m}S'''^{n}S'^{p}S''^{q}=(x, y; r^{m}a^{n}x+b+ph'+qh'', r'^{m}a'^{n}y+b'+pk'+qk'').$$

On peut choisir les entiers p et q de façon que

$$|b+ph'+qh''| \leqq \frac{|h'|+|h''|}{2},$$
$$|b'+pk'+qk''| \leqq \frac{|k'|+|k''|}{2}.$$

Ceci nous prouve que, ε tendant vers zéro, les coefficients de

$$S^m S'''^n S'^p S''^q$$

ont au moins un système de valeurs d'accumulation. On en déduit l'existence dans cet ensemble de substitutions de deux substitutions identiques, ce qui prouve en particulier que

$$r^m a^n = 1$$

pour des entiers m et n non tous deux nuls; par suite, les quantités telles que $\log r$, $\log a$ sont toutes des multiples de l'une d'entre elles, par exemple de $\log r$.

Alors il existe un entier m tel que $S''' S^{-m}$ soit du type (PP); donc

$$S''' = S^m S'^p S''^q.$$

C. Q. F. D.

Nous avons ainsi la forme générale $S^m S'^p S''^q$ des substitutions de G. Comme $S^{-1}S'S$ et $S^{-1}S''S$ font partie de G, il existe des entiers α, β, γ, δ tels que

$$\begin{aligned} h'r &= \alpha h' + \beta h'', \\ k'r' &= \alpha k' + \beta k'', \\ h''r &= \gamma h' + \delta h'', \\ k''r' &= \gamma k' + \delta k''; \end{aligned}$$

r et r' sont donc les racines de l'équation en s

$$(\alpha - s)(\delta - s) - \beta\gamma = 0;$$

par suite,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1;$$

de plus, r et r' étant réels et positifs,

$$\alpha + \delta > 2.$$

10. Réciproquement, donnons-nous quatre entiers α, β, γ, δ tels

que
$$\alpha\delta-\beta\gamma=1, \qquad \alpha+\delta>2.$$

Soient r et r' les racines de l'équation en s correspondante. Choisissons à volonté des nombres h', k', h'', k'', tels que

$$\frac{h''}{h'}=\frac{r-\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{r-\delta},$$
$$\frac{k''}{k'}=\frac{r'-\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{r'-\delta}.$$

Les substitutions
$$\begin{aligned}
S&=(x, y;\ rx,\ r'y),\\
S'&=(x, y;\ x+h',\ y+k'),\\
S''&=(x, y;\ x+h'',\ y+k'')
\end{aligned}$$

engendrent un groupe G dont la substitution générale est de la forme $S^m S'^n S''^p$. En effet, comme

$$S'S=SS'^{\alpha}S''^{\beta}, \qquad S''S=SS'^{\gamma}S''^{\delta},$$

on peut toujours, dans un produit de S, S', S'', amener toutes les substitutions S au premier rang à gauche; alors il reste un produit de S' et de S'', qui sont permutables.

En transformant le groupe précédent par une substitution quelconque de point double A, on a le groupe G le plus général correspondant à ce point. Le seul effet de la transformation est de remplacer S par
$$(x, y;\ rx+b,\ r'y+b'),$$

b et b' étant des constantes absolument quelconques.

11. Cherchons de quelle manière le polyèdre rayonné de G atteint les génératrices réelles passant par A.

Nous avons à étudier les minima de

$$\begin{aligned}
&|x_1[(nh'+ph'')(nk'+pk'')\xi_1+(nk'+pk'')r^m\xi_2-(nh'+ph'')r'^m\xi_3+\xi_4]\\
&\quad+x_2[-(nk'+pk'')\xi_1+r'^m\xi_3]+x_3[(nh'+ph'')\xi_1+r^m\xi_2]+x_4\xi_1|^2\\
&\quad+|x_{1,0}[(nh'+ph'')(nk'+pk'')\xi_1+(nk'+pk'')r^m\xi_2-(nh'+ph'')r'^m\xi_3+\xi_4]\\
&\quad+x_{2,0}[-(nk'+pk'')\xi_1+r'^m\xi_3]+x_{3,0}[(nh'+ph'')\xi_1+r^m\xi_2]+x_{4,0}\xi_1|^2.
\end{aligned}$$

Prenons, par exemple, la génératrice

$$x_1 = x_2 = 0.$$

La fonction précédente devient

$$|x_3[nh' + ph'')\xi_1 + r^{m}\xi_2] + x_4\xi_1|^2 + |x_{3,0}[(nh' + ph'')\xi_1 + r^{m}\xi_2] + x_{4,0}\xi_1|^2$$

ou

$$\begin{aligned} & 2x_3 x_{3,0} |(nh' + ph'')\xi_1 + r^{m}\xi_2|^2 \\ & + (x_3 x_{4,0} + x_{3,0} x_4) \{ [(nh' + ph'')\xi_1 + r^{m}\xi_2]\xi_{1,0} + [(nh' + ph'')\xi_{1,0} + r^{m}\xi_{2,0}]\xi_1 \} \\ & + 2x_4 x_{4,0}\xi_1\xi_{1,0}. \end{aligned}$$

Divisons par $x_3 x_{3,0}$, ce qui est permis si $x_3 \neq 0$, c'est-à-dire si nous ne sommes pas au point A; ou, ce qui revient au même, faisons $x_3 = 1$. Nous constatons que les termes qui contiennent m, n, p ne changent pas si l'on remplace x_4 par sa partie réelle : donc le minimum de la fonction précédente, supposé existant, est atteint pour les mêmes valeurs de m, n, p que le minimum de celle qui s'en déduit en remplaçant x_4 par sa partie réelle. Or notre fonction devient alors

$$2|(nh' + ph'')\xi_1 + r^{m}\xi_2 + x_4\xi_1|^2.$$

Or cette fonction est toujours *positive*, car $\xi_2 : \xi_1$ est imaginaire. D'autre part, elle peut devenir aussi petite en valeur absolue que l'on veut, car, $h'' : h'$ étant irrationnel, il existe des entiers n et p tels que

$$(nh' + ph'' + x_4)\xi_1$$

soit aussi petit en valeur absolue que l'on veut; et l'on peut choisir m de façon que $r^{m}\xi_2$ soit aussi petit en valeur absolue que l'on veut. Donc cette fonction n'a pas de minimum.

Donc les génératrices réelles passant par A ne sont atteintes qu'en A.

12. Nous avons remarqué (n° 3) que toute arête réelle devait contenir un sommet réel. Mais nous venons de voir (n^{os} 8 et 11) que par aucun sommet réel ne passent d'arêtes réelles.

Donc il n'existe jamais d'arêtes réelles.

Cas où P atteint la partie imaginaire de la frontière du domaine principal.

13. *Il est impossible que le polyèdre fondamental atteigne la surface*

$$(x-x_0)(y-y_0)=0$$

par une arête à une dimension, aucun point voisin de cette arête sur le polyèdre n'étant sur la surface, et les arêtes du même cycle jouissant de la même propriété.

Si une telle arête existait, elle serait transformée en elle-même par des substitutions de Γ, qui transformeraient aussi en elle-même toute la génératrice réelle contenant l'arête.

Supposons que la génératrice réelle qui contient l'arête soit

$$x_1=x_2=0.$$

Alors l'équation de l'arête est évidemment du type

$$ax_3x_{3,0}+b(x_3x_{4,0}+x_{3,0}x_4)+cx_4x_{4,0}=0,$$

a, b, c étant trois constantes réelles. Cette équation est satisfaite par deux points réels, car si b^2-ac n'était pas positif, il n'y aurait pas d'arête.

Soit G le groupe des substitutions qui transforment l'arête en elle-même. Parmi les substitutions de G, les unes échangent les deux points réels de l'arête, les autres les ont comme points doubles. Ces dernières forment un sous-groupe G_1 invariant d'ordre deux du groupe G.

Amenons, par une transformation hyperabélienne, l'arête à être

$$x_3x_{4,0}+x_{3,0}x_4=0.$$

Les transformations de G_1 sont du type

$$[x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4;\ rx_1,\ r'x_2,\ r(\lambda x_1+x_3),\ r'(-\lambda x_2+x_4)] \qquad (rr'=1)$$

ou, en coordonnées non homogènes,

$$(x,\ y;\ r'^2x,\ y-\lambda).$$

G_1 étant discontinu, ces substitutions, qui sont permutables, sont des produits de puissances de deux d'entre elles au maximum, comme on le voit en imitant des raisonnements déjà faits.

Nous avons à voir quelles conditions sont nécessaires pour que le polyèdre fondamental d'un tel groupe atteigne $x_1 = x_2 = 0$ de la manière indiquée. Nous avons à étudier les minima de

$$|r'^m \rho'^n x_3 \xi_2 + r^m \rho^n x_4 \xi_1|^2 + |r'^m \rho'^n x_{3,0} \xi_2 + r^m \rho^n x_{4,0} \xi_1|^2$$

ou de

$$2 r'^{2m} \rho'^{2n} \xi_2 \xi_{2,0} x_3 x_{3,0} + (x_3 x_{4,0} + x_{3,0} x_4)(\xi_1 \xi_{2,0} + \xi_{1,0} \xi_2) + 2 r^{2m} \rho^{2n} \xi_1 \xi_{1,0} x_4 x_{4,0},$$

(r, r') et (ρ, ρ') étant les multiplicateurs des deux substitutions fondamentales; s'il n'y en a qu'une, il suffit de faire, par exemple,

$$\rho = \rho' = 1.$$

Nous distinguons deux cas :

1° Si $\log \rho : \log r$ est irrationnel, les seuls points de la génératrice qui appartiennent à un transformé du polyèdre fondamental sont tels que

$$\frac{x_4 x_{4,0} \xi_1 \xi_{1,0}}{x_3 x_{3,0} \xi_2 \xi_{2,0}} = r'^{4m} \rho'^{4n}.$$

Pour le polyèdre fondamental même, et sur notre arête, nous ne trouvons que le point

$$\frac{x_4}{x_3} = i \left| \frac{\xi_2}{\xi_1} \right|;$$

ce cas est donc à écarter.

2° Si $\log \rho : \log r$ est rationnel, $r^m \rho^n$ est une puissance arbitraire p d'un nombre R convenable. On est donc ramené aux minima de

$$2 R'^{2p} \xi_2 \xi_{2,0} x_3 x_{3,0} + (x_3 x_{4,0} + x_{3,0} x_4)(\xi_1 \xi_{2,0} + \xi_{1,0} \xi_2) + 2 R^{2p} \xi_1 \xi_{1,0} x_4 x_{4,0}.$$

Or le minimum est atteint pour une région à deux dimensions de $x_1 = x_2 = 0$, savoir

$$\xi_2 \xi_{2,0} x_3 x_{3,0} + \xi_1 \xi_{1,0} x_4 x_{4,0} < R'^2 \xi_2 \xi_{2,0} x_3 x_{3,0} + R^2 \xi_1 \xi_{1,0} x_4 x_{4,0},$$
$$\xi_1 \xi_{2,0} x_3 x_{3,0} + \xi_1 \xi_{1,0} x_4 x_{4,0} < R^2 \xi_2 \xi_{2,0} x_3 x_{3,0} + R'^2 \xi_1 \xi_{1,0} x_4 x_{4,0}.$$

Donc notre arète, ou quelque autre du même cycle, appartiendrait à une arête à deux dimensions située sur la frontière du domaine principal, ce qui est contre l'hypothèse.

Donc il n'existe pas de telles arêtes à une dimension.

14. *Il est impossible que le polyèdre fondamental atteigne la surface*

$$(x - x_0)(y - y_0) = 0$$

par un sommet imaginaire, aucun point voisin du sommet sur le polyèdre n'étant sur la surface, et les sommets du même cycle jouissant de la même propriété.

Nous pouvons admettre, si ce sommet A existe, qu'il ait pour coordonnées

$$x = i, \qquad y = \infty.$$

A est point double d'une infinité de substitutions de Γ, de la forme

$$\left(x, y; \frac{x \cos\varphi + \sin\varphi}{-x \sin\varphi + \cos\varphi}, ry + h\right) \qquad (r > 0),$$

formant un groupe G.

Pour toutes les substitutions de G, $r = 1$; car, si $r \neq 1$, la substitution est de l'un des types (HE) ou (HI), et le polyèdre fondamental ne peut atteindre A. Il reste donc les substitutions

$$\left(x, y; \frac{x \cos\varphi + \sin\varphi}{-x \sin\varphi + \cos\varphi}, y + h\right).$$

Si h et h' sont les valeurs du paramètre h dans deux de ces substitutions S et S', $h + h'$ sera la valeur correspondant à SS'. Donc les h sont tous multiples de l'un d'entre eux, sans quoi G ne serait pas discontinu.

En faisant une transformation convenable, nous pouvons admettre que $h = 1$ pour une transformation de G, et que h soit entier pour toutes les autres.

Plusieurs substitutions de G peuvent-elles correspondre à la même valeur de h? Soient S et S' deux telles substitutions. Pour SS'^{-1}, $h = 0$;

SS'^{-1} est donc du type (EI),

$$SS'^{-1} = \left(x, y; \frac{x\cos\varphi + \sin\varphi}{-x\sin\varphi + \cos\varphi}, y\right).$$

Or G ne peut contenir qu'un nombre fini de telles substitutions, à cause de la discontinuité. Soit g ce nombre ($g \geqq 1$). Pour chaque valeur entière de h, il y aura g substitutions de G.

S étant une substitution fixe de G, telle que $h = 1$, et S' une substitution fixe de G du type (EI) convenablement choisie, on aura

$$S'^g = 1$$

et la substitution la plus générale de G sera

$$S^h S'^k \quad (h = -\infty, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, +\infty; \; k = 0, 1, 2, \ldots, g-1).$$

Distinguons maintenant deux cas, selon que, dans S, $\varphi : \pi$ est rationnel ou non.

Si $\varphi : \pi$ est rationnel, on trouve immédiatement que le minimum de l'expression qui donne le polyèdre fondamental est atteint pour une région à deux dimensions de la génératrice $x_1 = x_2 = 0$, qui contient A; A, ou un autre sommet du même cycle, appartient donc à une arête à deux dimensions située sur une génératrice réelle. Mais ceci est contraire à l'hypothèse. Le cas de $\varphi : \pi$ rationnel ne convient donc pas.

Si $\varphi : \pi$ est irrationnel, comme k n'a qu'un nombre fini de valeurs, il suffit de considérer les substitutions S^h. Alors (Chap. V, n° 10), suivant la position du ou des centres, A ou un des sommets du même cycle appartient à une arête à deux dimensions située sur une génératrice réelle; ou au moins A ou un des sommets du même cycle appartient à une arête à une dimension située sur une génératrice réelle. Mais, dans les deux cas, l'hypothèse est contredite. Donc $\varphi : \pi$ ne peut non plus être irrationnel.

Donc il n'y a pas de sommet tel que A.

15. *Supposons donc que le polyèdre fondamental atteigne la surface*

$$(x - x_0)(y - y_0) = 0$$

par une arête à deux dimensions.

Cette arête à deux dimensions est entièrement située sur une génératrice réelle, que l'on peut supposer être

$$x_1 = x_2 = 0.$$

Elle est transformée en elle-même par une infinité de substitutions de Γ telles que

$$(1) \qquad \left(x, y; \frac{ax+b}{cx+d}, ry+h\right),$$

formant un groupe G.

Mais cette arête ne comprend qu'une partie de la génératrice, et en particulier un nombre fini (peut-être nul) de points réels. Cette arête est donc l'intérieur d'un polygone, situé sur la génératrice, et dont les côtés sont des arcs de cercles orthogonaux à l'axe réel; l'axe réel n'est atteint (s'il l'est) que par des sommets.

Quand l'arête est transformée en elle-même, ce polygone est transformé en lui-même; mais ce polygone ne peut, par une substitution

$$\left(x, \frac{ax+b}{cx+d}\right),$$

être amené à coïncider avec lui-même que d'un nombre fini de manières, peut-être même une seule : cela est évident s'il a au moins un sommet imaginaire; et s'il n'a que des sommets réels, il en a au moins quatre, de sorte que la proposition est encore vraie.

Donc il existe un entier g tel que la puissance g de toute substitution de G ait tous les points de $x_1 = x_2 = 0$ comme point double, et par suite soit du type (PI)

$$(x, y; x, y+h),$$

car le type (HI) ne permettrait pas au polyèdre d'atteindre cette génératrice.

Les substitutions de G du type (PI) forment un groupe G_1; G_1 est un sous-groupe invariant d'ordre g du groupe G. G_1 est formé des puissances d'une seule substitution.

16. La *génératrice* $x_1 = x_2 = 0$ est transformée en elle-même par une infinité de substitutions de Γ formant un groupe G_2 contenant G, et par suite G_1. Toutes les substitutions de G_2 sont de la forme (1).

Je dis que, pour toutes ces substitutions, $r = 1$. En effet, soit T une transformation de G_2 pour laquelle $r \neq 1$. Formons $T^{-n} S T^n$, où n est un entier quelconque et où

$$S = (x, y; x, y + h)$$

est la substitution fondamentale de G_1. Nous trouvons

$$T^{-n} S T^n = (x, y; x, y + h r^n).$$

Si n est assez grand en valeur absolue et de signe convenable, ceci est une substitution infinitésimale, ce qui est absurde. Donc $r = 1$ pour toute substitution de G_2. La substitution la plus générale de G_2 est du type

$$\left(x, y; \frac{ax + b}{cx + d}, y + k\right). \tag{2}$$

17. Aucune substitution de Γ ne peut changer le point arbitraire $(x = \xi, y = \eta)$ en un point pour lequel $i(y_0 - y)$ soit aussi grand que l'on veut.

Car, dans l'hypothèse contraire, Γ compterait des substitutions

$$\left(x, y; \frac{ax + b}{cx + d}, \frac{a'y + b'}{c'y + d'}\right) \qquad (ad - bc = a'd' - b'c' = 1),$$

où c' et d' seraient aussi petits que l'on veut. Or, si T est une telle substitution, on vérifie que

$$TST^{-1} = \left[x, y; x, \frac{(1 + hc'd')y + hd'^2}{-hc'^2 y + 1 - hc'd'}\right];$$

c'est une substitution infinitésimale, ce qui est absurde; donc notre proposition est démontrée.

18. Comme l'expression

$$\xi_1 \xi_{1,0} + \xi_{1,0} \xi_1 + \xi_2 \xi_{3,0} + \xi_{2,0} \xi_3 = \xi_1 \xi_{1,0} (x - x_0)(y - y_0)$$

est invariante par Γ, il en résulte que

$$i\xi_1\xi_{1,0}(x_0 - x) = i(\xi_1\xi_{2,0} - \xi_{1,0}\xi_2)$$

est limité inférieurement pour les transformés d'un point fixe quelconque de D, cette limite inférieure n'étant pas nulle.

19. Soient

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$$

les coordonnées d'un transformé par Γ d'un des centres du polyèdre fondamental; soit (x_3, x_4) un point imaginaire fixe de la génératrice $x_1 = x_2 = 0$,

$$i(x_3 x_{4,0} - x_{3,0} x_4) > 0.$$

Quand la substitution employée de Γ *varie,*

$$(3) \qquad |x_3\xi_2 + x_4\xi_1|^2 + |x_{3,0}\xi_2 + x_{4,0}\xi_1|^2$$

atteint un certain minimum.

Remarquons d'abord que si

$$i(\xi_1\xi_{2,0} - \xi_{1,0}\xi_2) = a^2,$$

l'expression (3) reste supérieure ou égale à

$$a^2 i(x_3 x_{4,0} - x_{3,0} x_4).$$

Donc, si (3) n'atteint pas sa limite inférieure, il existe dans Γ une infinité de substitutions telles que

$$i(\xi_1\xi_{2,0} - \xi_{1,0}\xi_2)$$

soit inférieur à une limite fixe. Les valeurs de

$$i(\xi_1\xi_{2,0} - \xi_{1,0}\xi_2)$$

ont donc une valeur d'accumulation *positive*.

De plus, (3) est supérieur à

$$(|x_3^2| + |x_4^2| - |x_3^2 + x_4^2|)(\xi_1\xi_{1,0} + \xi_2\xi_{2,0});$$

donc les systèmes (ξ_1, ξ_2) ont au moins un système d'accumulation, tel que

$$i(\xi_1 \xi_{2,0} - \xi_{1,0} \xi_2)$$

soit positif.

Les valeurs correspondantes de $i(y_0 - y)$ ont aussi une valeur d'accumulation *positive*, puisque

$$\xi_1 \xi_{4,0} + \xi_{1,0} \xi_4 + \xi_2 \xi_{3,0} + \xi_{2,0} \xi_3 = -(\xi_1 \xi_{2,0} - \xi_{1,0} \xi_2)(y - y_0).$$

Enfin, on peut faire en sorte que la partie réelle de y soit comprise entre o et h; car la substitution S n'altère pas x, ni la partie imaginaire de y.

Donc les y correspondants auront une valeur d'accumulation *imaginaire*.

Donc les transformés des centres auraient un point d'accumulation dans le domaine principal, ce qui est absurde.

Donc le minimum est atteint.

20. Il résulte de là que tout point imaginaire de $x_1 = x_2 = 0$ tel que

$$i(x_3 x_{4,0} - x_{3,0} x_4) > 0$$

fait partie d'une arête à deux dimensions située sur $x_1 = x_2 = 0$ et appartenant à un transformé du polyèdre fondamental par Γ.

On en déduit, en reprenant le raisonnement du Chapitre V (n° 10), que $x_1 = x_2 = 0$ est transformée en elle-même par une infinité de substitutions du type (2), formant un groupe mériédriquement isomorphe au groupe de Poincaré formé par les

$$\left(x; \frac{ax+b}{cx+d}\right); \tag{4}$$

et ce dernier groupe est de la première, de la deuxième ou de la sixième famille.

Les exemples fournis par les transformations arithmétiques à coefficients entiers de formes quadratiques quaternaires à coefficients entiers ne donnent que des groupes de la deuxième ou de la sixième famille [1].

21. Donnons-nous un groupe de Poincaré, admettant

$$i(x_0 - x) > 0$$

comme domaine principal, et appartenant à la première, à la deuxième ou à la sixième famille. Pouvons-nous en déduire un groupe G_2?

Il faut pouvoir calculer le paramètre h de la substitution S du type (PI), et les paramètres k des substitutions (3) correspondant à (4).

Prenons h arbitrairement, mais positif. On peut supposer

$$0 \leq k < h.$$

Soient $S_1, S_2, \ldots, S_n$ les substitutions fondamentales du groupe de Poincaré, et $k_1, k_2, \ldots, k_n$ les valeurs correspondantes de k. A toute relation entre les S

$$S_{\alpha_1}^{\beta_1} S_{\alpha_2}^{\beta_2} \ldots S_{\alpha_r}^{\beta_r} = 1,$$

devra, à cause de l'isomorphie, correspondre une relation

$$\beta_1 k_{\alpha_1} + \beta_2 k_{\alpha_2} + \ldots + \beta_r k_{\alpha_r} = \text{multiple de } h.$$

Il suffira d'écrire ces relations pour les relations fondamentales qui existent entre les S. Elles sont compatibles, car elles admettent toujours la solution

$$k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0.$$

Donc le groupe G_2 existe toujours.

---

(1) *Cf.* G. Giraud, *Sur les transformations semblables de certaines formes quadratiques quaternaires indéfinies, etc.* (*Ann. scient. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXXIII, 1916, p. 303 sqq.).

CHAPITRE VII.

RELATIONS ALGÉBRIQUES ENTRE FONCTIONS HYPERABÉLIENNES DE M. PICARD. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

1. Si le polyèdre fondamental a un sommet réel ou une arête à deux dimensions sur une génératrice réelle, les fonctions hyperabéliennes se comportent, dans le voisinage de ce sommet ou de cette arête, comme des fonctions rationnelles de certaines variables, comme on va le voir.

1° Soit un sommet réel A ne comportant pas de substitutions du type (HH) spécial, et par suite appartenant à deux arêtes à deux dimensions situées sur des génératrices réelles, l'une sur la surface

$$x - x_0 = 0,$$

l'autre sur la surface

$$y - y_0 = 0.$$

On peut supposer que A est le point $x = y = \infty$. Il y a deux substitutions

$$(x, y; x + h, y) \quad \text{et} \quad (x, y; x, y + k)$$

qui ont A comme point double. Au voisinage de A, les fonctions hyperabéliennes se comportent comme des fonctions rationnelles de $e^{\frac{2\pi i x}{h}}$ et de $e^{\frac{2\pi i y}{k}}$.

2° Si le sommet réel A n'appartient à aucune arête à deux dimensions située sur une génératrice réelle, le voisinage de A dans le polyèdre fondamental se partage en un nombre fini de domaines dans chacun desquels les fonctions hyperabéliennes se comportent comme des fonctions rationnelles de certaines exponentielles.

3° Si une arête est située sur une génératrice réelle, par exemple sur

$$x_1 = x_2 = 0,$$

les fonctions hyperabéliennes se comportent au voisinage de tout point imaginaire de cette arête comme des fonctions rationnelles de x et de $e^{\frac{2i\pi y}{h}}$, en désignant par $(x, y; x, y+h)$ la substitution du type (PI) correspondante.

Il est sans doute inutile de démontrer ces divers points : la démonstration ne ferait que reprendre celle qui a été donnée pour les groupes de provenance arithmétique [1], et serait d'ailleurs très analogue à la démonstration analogue du Chapitre IV.

2. Il résulte de là que, *si le prolongement analytique d'une fonction Θ d'un groupe quadratique Γ de M. Picard ne peut pas sortir du domaine principal, et si le polyèdre fondamental rayonné n'a qu'un nombre fini de faces, trois fonctions automorphes quelconques de groupe Γ sont liées par une relation algébrique.*

En outre, *toutes les fonctions automorphes de groupe Γ s'expriment en fonctions rationnelles de trois d'entre elles* (de deux dans certains cas particuliers).

3. Soient maintenant X et Y les variables indépendantes, et x, y, u les trois fonctions automorphes, liées par la relation

$$f(x, y, u) = 0, \tag{1}$$

au moyen desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement.

Posons

$$z_1 = 1 : \sqrt[4]{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2},$$

$$z_2 = X z_1, \qquad z_3 = -Y z_1, \qquad z_4 = XY z_1,$$

et regardons les z comme fonctions de x et de y.

Il existe un système d'équations linéaires aux dérivées partielles

$$\left\{\begin{aligned} r &= as + bp + cq + gz, \\ \frac{\partial s}{\partial x} &= \alpha s + \beta p + \gamma q + \delta z, \\ \frac{\partial s}{\partial y} &= \alpha' s + \gamma' p + \beta' q + \delta' z, \\ t &= a's + c'p + b'q + g'z, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

(1) *Cf.* G. GIRAUD, *loc. cit.*

où a, b, c, g, α, β, γ, δ et les mêmes lettres accentuées sont des fonctions rationnelles de x, de y et de u admettant comme intégrales z_1, z_2, z_3, z_4 liées par la relation

$$z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0.$$

Pour le démontrer, il faut montrer que

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_1 & p_1 & q_1 & z_1 \\ s_2 & p_2 & q_2 & z_2 \\ s_3 & p_3 & q_3 & z_3 \\ s_4 & p_4 & q_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul, s_i, p_i, q_i étant les fonctions s, p, q correspondant à z_i. Or on trouve immédiatement que

$$\Delta = 1,$$

ce qui entraine l'existence des fonctions a, b, ..., δ' de x et de y, et montre en outre que

$$\alpha = -b, \qquad \alpha' = -b'.$$

Quand X et Y subissent une substitution du groupe, z_1, z_2, z_3, z_4 subissent une transformation linéaire; donc a, b, ..., δ' ne changent pas. De plus, si on les regarde comme fonctions de X et de Y, les singularités de ces coefficients sont les mêmes que celles des fonctions automorphes : ce sont donc des fonctions automorphes, c'est-à-dire des fonctions rationnelles de x, y, u, comme on l'avait annoncé.

Montrons en outre que $aa' - 1$ n'est pas identiquement nul, ce qui, d'après une remarque de M. Appell, permet de supprimer les deux équations qui donnent $\frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y}$; ces deux équations se déduisent alors des deux autres par dérivation. Or, comme

$$a = \begin{vmatrix} r_1 & p_1 & q_1 & z_1 \\ r_2 & p_2 & q_2 & z_2 \\ r_3 & p_3 & q_3 & z_3 \\ r_4 & p_4 & q_4 & z_4 \end{vmatrix},$$

et comme a' a une valeur analogue, on trouve que

$$1 - aa' = \left[\frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}\right]^2 : \left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2,$$

qui n'est pas identiquement nul.

On peut aussi, avec M. Picard ([1]), poser

$$z_1 = \sqrt{\frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)}}, \qquad z_2 = X z_1, \; z_3 = -Y z_1, \; z_4 = XY z_1.$$

On a des résultats analogues, sauf que Δ n'est plus constant.

4. Cherchons maintenant la nature des singularités de ce système (2).

Comme dans le passage analogue relatif aux fonctions à groupe linéaire, nous ne considérons comme véritables singularités que les points qui restent singuliers après remplacement de x, y par deux autres fonctions automorphes du groupe, faisant partie d'un système de trois fonctions au moyen desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement.

On en conclut, comme pour les groupes linéaires, que les véritables singularités sont exclusivement les points de (1) qui correspondent à des points doubles de substitutions du groupe : ces substitutions sont de l'un des types (EE), (EI), (PE), (PI), (PP).

5. Si l'on s'est arrangé, comme il est possible, pour que (1) n'ait pas d'autre singularité qu'une courbe double avec des points triples, ces singularités étant les plus générales de leur nature, on peut voir, comme dans le cas des groupes linéaires, qu'à un point double de substitutions du type (EE) correspond une ou plusieurs courbes singulières unicursales.

Remarquons qu'ici les substitutions qui ont un même point double dans le domaine principal sont permutables et sont des produits de puissances de deux d'entre elles.

([1]) Picard, *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. I, 1885.

Par exemple, si l'on met le domaine principal sous la forme

$$XX_0 < 1, \quad YY_0 < 1, \tag{3}$$

les substitutions qui ont pour point double l'origine sont du type

$$(X, Y; Xe^{i\alpha}, Ye^{i\beta}),$$

ce qui suffit à démontrer notre remarque.

Remarquons en outre que, si ces substitutions ne sont pas des puissances d'une seule d'entre elles, il y a parmi elles des substitutions du type (EI).

6. On peut démontrer, encore comme pour les groupes linéaires, que le plan double d'une substitution du type (EI) est transformé en lui-même par une infinité de substitutions du groupe discontinu.

Si le domaine principal est (3), et si le plan double est

$$Y = 0,$$

ces substitutions sont du type

$$\left(X, Y; \frac{aX+b}{cX+d}, Ye^{i\psi}\right).$$

Les substitutions

$$\left(X; \frac{aX+b}{cX+d}\right)$$

correspondantes forment un groupe de Poincaré Γ' de la première, de la deuxième ou de la sixième famille, dont le cercle principal est

$$XX_0 < 1.$$

Pour $Y = 0$, les fonctions automorphes sont des fonctions de Poincaré de groupe Γ'.

Si Γ' est de genre p, à

$$Y = 0$$

correspond une courbe de genre p qui est une courbe singulière de (2).

7. Les courbes singulières qui correspondent à des points doubles

de substitutions des types (EE) et (EI) sont régulières. On peut toujours faire en sorte que ces singularités soient du type simple étudié ailleurs, où la courbe singulière est un infini simple pour a et a', et un infini double pour les autres coefficients b, c, g, b', c', g'.

8. A un sommet parabolique correspond une ou plusieurs courbes singulières unicursales ou un point singulier.

A une arête parabolique correspondant à un groupe de Poincaré de genre p correspond une courbe singulière de genre p au maximum, avec peut-être des courbes unicursales, ou un point singulier.

On peut, à propos des arêtes et des sommets paraboliques, répéter les mêmes remarques dans le cas linéaire.

9. Les courbes singulières qui correspondent à des arêtes ou à des sommets paraboliques sont régulières, mais ne peuvent peut-être pas toujours se ramener au type simple précédent.