

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

F. DIDON

Développements sur certaines séries de polynômes à un nombre quelconque de variables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1^{re} série, tome 7 (1870), p. 247-268

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1870_1_7_247_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉVELOPPEMENTS

SUR

CERTAINES SÉRIES DE POLYNOMES

A UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES,

PAR M. F. DIDON,

CHARGÉ DE COURS A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

On doit à M. Hermite la découverte de deux séries de polynômes à deux variables $U_{m,n}$ et $V_{m,n}$, qui jouissent de la propriété suivante : « Quelles que soient les valeurs entières et positives de m, n, m', n' , et pourvu que m et n ne soient pas en même temps égaux à m' et n' , on a

$$\iint U_{m,n} V_{m',n'} dx dy = 0,$$

les variables étant limitées dans l'intégration par la condition

$$x^2 + y^2 \leq 1. »$$

Ce système de séries associées n'est pas unique, et, dans ce travail, on trouvera la preuve de l'existence d'une infinité de systèmes analogues, et une manière d'en former autant qu'on en voudra. Parmi tous ces systèmes, il en est un qui se distingue des autres par cette circonstance, que les deux séries qui le constituent sont identiques. En réalité, il y a un second système semblable, mais qui n'est pas, à proprement parler, distinct du premier. Ainsi, dans ce cas, en désignant

l'élément général de chacune des deux séries, actuellement les mêmes, par $P_{m,n}$ on aura

$$\iint P_{m,n} P_{m',n'} dx dy = 0,$$

où l'on suppose que $(m - m')^2 + (n - n')^2$ n'est pas nul. Ces fonctions $P_{m,n}$ présentent la plus grande analogie avec les fonctions X_n de Legendre, et, en particulier, elles permettent de réaliser un certain mode d'approximation des fonctions quelconques de deux variables, au moyen de polynômes entiers, par rapport à ces mêmes variables. Plus généralement, j'indique une série de polynômes $P_{m,n}$ satisfaisant à la condition

$$\iint P_{m,n} P_{m',n'} f(x, y) dx dy = 0,$$

quand l'on n'a pas en même temps $m = m'$, $n = n'$. L'intégration pourra être faite ici dans l'intérieur d'un contour quelconque. Les rapports de ces dernières fonctions avec l'intégrale $\int \int \frac{f(z, z') dz dz'}{(x - z)(y - z')}$ donnent, à un certain point de vue, une généralisation de la théorie de l'intégrale $\int_a^b \frac{f(z) dz}{x - z}$. Enfin j'ajouterai que l'extension des résultats précédents, au cas d'un nombre quelconque de variables, se fait avec la plus grande facilité.

I.

La fonction

$$P_{m,n} = k_{m,n} \frac{1}{(y^2 - 1)^{m + \frac{1}{2}}} \frac{d^n (y^2 - 1)^{m + n + \frac{1}{2}}}{dy^n} \frac{d^m (x^2 + y^2 - 1)^m}{dx^m},$$

dans laquelle $k_{m,n}$ désigne une constante, est un polynôme du degré $m + n$, dans lequel l'exposant de x ne surpasse pas m . Si l'on se propose le calcul de l'intégrale

$$\iint P_{m,n} P_{m',n'} dx dy$$

prise dans l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 1$, on est d'abord conduit à chercher la valeur de

$$\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} \frac{d^m (x^2 + y^2 - 1)^m}{dx^m} \frac{d^{m'} (x^2 + y^2 - 1)^{m'}}{dx^{m'}} dx.$$

Cette expression, par le changement de variables $x = \sqrt{1 - y^2} z$, devient

$$(1 - y^2)^{\frac{m+m'+1}{2}} \int_{-1}^{+1} \frac{d^m(z^2 - 1)^m}{dz^m} \frac{d^{m'}(z^2 - 1)^{m'}}{dz^{m'}} dz,$$

ou bien

$$m! m'! 2^{m+n'} (1 - y^2)^{\frac{m+m'+1}{2}} \int_{-1}^{+1} X_m X_{m'} dx,$$

X_m désignant ici la fonction de Legendre; et, par conséquent, nulle, si m et m' sont différents, elle est égale, dans le cas de $m' = m$, à

$$\frac{m! m! 2^{2m+1}}{2m+1} (1 - y^2)^{m+\frac{1}{2}}.$$

Ainsi donc, quand on a $m \leq m'$, l'intégrale $\iint P_{m,n} P_{m',n'} dx dy$ est nulle, et si $m = m'$,

$$\begin{aligned} \iint P_{m,n} P_{m,n'} dx dy &= \frac{m! m! 2^{2m+1}}{2m+1} k_{m,n} k_{m,n'} (-1)^{m+\frac{1}{2}} \\ &\times \int_{-1}^{+1} \frac{1}{(y^2 - 1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n(y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \frac{d^{n'}(y^2 - 1)^{m+n'+\frac{1}{2}}}{dy^{n'}} dy. \end{aligned}$$

Supposons que n et n' soient différents, et, par exemple, que n' soit plus petit que n . L'intégrale définie du second membre de l'égalité précédente, pouvant s'écrire

$$(-1)^n \int_{-1}^{+1} (y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}} \frac{d^n}{dy^n} \left[\frac{1}{(y^2 - 1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^{n'}(y^2 - 1)^{m+n'+\frac{1}{2}}}{dy^{n'}} \right] dy,$$

est manifestement nulle; si au contraire $n' = n$, sa valeur est représentée par

$$\begin{aligned} &(-1)^n n! (2m+n+2)(2m+n+3)\dots(2m+2n+1) \int_{-1}^{+1} (y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}} dy \\ &= (-1)^{m+\frac{1}{2}} \pi n! \frac{1.3.5\dots(2m+2n+1)}{2.4.6\dots(2m+2n+2)} (2m+n+2)(2m+n+3)\dots(2m+2n+1). \end{aligned}$$

Ainsi l'on a

$$\iint P_{m,n} P_{m',n'} dx dy = 0,$$

quand m et n ne sont pas simultanément égaux à m' et n' , et

$$\iint P_{m,n} P_{m,n} dx dy = \frac{2\pi k_{m,n}^2}{2m+1} 2^{2m} m! m! n! \frac{1.3.5 \dots (2m+2n+1)}{2.4.6 \dots (2m+2n+2)} (2m+n+2) \dots (2m+2n+1).$$

Si l'on fait

$$k_{m,n} = \frac{1}{m! n! 2^{m+n}},$$

il vient finalement

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & \iint P_{m,n} P_{m,n} dx dy \\ & = \frac{2\pi}{2m+1} \frac{(2m+n+2)(2m+n+3) \dots (2m+2n+1)}{n! 2^{m+2n}} \frac{1.3.5 \dots (2m+2n+1)}{2.4.6 \dots (2m+2n+2)}. \end{aligned} \right.$$

Cherchons maintenant la fonction génératrice de ces polynômes $P_{m,n}$, c'est-à-dire

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a^m b^n P_{m,n}.$$

En supposant d'abord m constant, on est conduit à faire la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n}{n! 2^n} \frac{d^n (y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n}.$$

Elle s'effectue immédiatement avec le secours de la formule de Lagrange

$$F'(z) \frac{dz}{dy} = F'(y) + \frac{b}{1.2} \frac{d[F'(y)f(y)]}{dy} + \dots + \frac{b^n}{n! 2^n} \frac{d^n [F'(y)f^n(y)]}{dy^n} + \dots,$$

qui se rapporte à la racine z de l'équation

$$z = y + \frac{b}{2} f(z),$$

se réduisant à y , pour $b = 0$. Si l'on fait

$$f(y) = y^2 - 1, \quad F'(y) = (y^2 - 1)^{m+\frac{1}{2}},$$

on obtient, pour la somme cherchée,

$$\frac{\sqrt{2}}{b} (1 - 2by + b^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - by - \sqrt{1 - 2by + b^2})^{\frac{1}{2}} \frac{2^m}{b^{2m}} (1 - by - \sqrt{1 - 2by + b^2})^m,$$

et il ne reste plus, en dernier lieu, qu'à calculer l'expression

$$\sum_{m=0}^{m=+\infty} \frac{1}{m! 2^m} \left[\frac{1 - by - \sqrt{1 - 2by + b^2}}{\frac{b^2}{a}(y^2 - 1)} \right]^m \frac{d^m(x^2 + y^2 - 1)^m}{dx^m},$$

que l'on devra multiplier par

$$\frac{\sqrt{2}}{b} \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} (1 - 2by + b^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - by - \sqrt{1 - 2by + b^2})^{\frac{1}{2}},$$

pour avoir la fonction génératrice demandée. On fera cette dernière sommation en employant encore la formule de Lagrange, dans laquelle on remplacera y par x , $f(z)$ par $z^2 + y^2 - 1$, $F'(z)$ par 1 , et b par $a \frac{1 - by - \sqrt{1 - 2by + b^2}}{b^2(y^2 - 1)}$. En opérant ainsi et réduisant, on trouve, pour la fonction génératrice des polynômes $P_{m,n}$,

$$(1 - 2by + b^2)^{-\frac{1}{2}} \left[1 - ax - by - \frac{2(1 - by + \sqrt{1 - 2by + b^2})}{(a^2 + b^2)(y^2 - 1)} \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

La généralisation des résultats précédents, pour le cas d'un nombre quelconque de variables, ne comporte pas la moindre difficulté. Je me contenterai de donner la forme du terme général $P_{m,n,p}$ de la série de polynômes à trois variables satisfaisant à la condition

$$\iiint P_{m,n,p} P_{m',n',p'} dx dy dz = 0$$

avec $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, et à l'exception du cas $m = m', n = n', p = p'$. On a

$$P_{m,n,p} = K_{m,n,p} \frac{1}{(z^2 - 1)^{m+n+1}} \frac{d^p(z^2 - 1)^{m+n+p+1}}{dz^p} \\ \times \frac{1}{(y^2 + z^2 - 1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n(y^2 + z^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} \frac{d^m(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^m}{dz^m},$$

$K_{m,n,p}$ étant une constante.

II.

Considérons la suite $P_{0,m+n}, P_{1,m+n-1}, P_{2,m+n-2}, \dots, P_{m,n}, \dots, P_{m+n,0}$ des polynômes P , dans lesquels la somme des indices est constante et égale à $m+n$. La première fonction de cette suite ne contient qu'un terme du degré $m+n$, qui est en y^{m+n} ; la troisième contient un terme semblable, et de plus un seul autre terme du degré $m+n$, à savoir : un terme en $x^2 y^{m+n-2}$; la cinquième fonction contient deux termes analogues aux précédents, et, en outre, un terme en $x^4 y^{m+n-4}$, de degré $m+n$, et ainsi de suite; de même, la seconde, la quatrième, la sixième, ... fonction de la suite renferment respectivement, si l'on se borne à la partie de ces fonctions qui est du degré $m+n$: ou bien un seul terme en xy^{m+n-1} , ou bien deux termes en xy^{m+n-1} et $x^3 y^{m+n-3}$, ou bien trois termes en xy^{m+n-1} , $x^3 y^{m+n-3}$ et $x^5 y^{m+n-5}$, etc. On conclut de là qu'un terme en $x^h y^k$ pourra toujours s'exprimer par une fonction linéaire des polynômes $P_{m,n}$, dont la somme des indices m, n est égale à $h+k$, augmentée d'un polynôme entier de degré inférieur à $h+k$. La partie de ce polynôme du degré le plus élevé pourra de même être représentée par une fonction linéaire des polynômes P , dans lesquels la somme des indices est égale à ce degré, augmentée d'un polynôme de degré inférieur, et ainsi de suite; de sorte que, finalement, on conçoit la possibilité d'exprimer un terme en $x^h y^k$, par le moyen d'une fonction linéaire des polynômes $P_{m,n}$, pour lesquels on a

$$m+n \geq h+k.$$

De là résulte qu'une fonction quelconque $f(x, y)$ de deux variables, si elle est développable en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de x et de y , pourra être mise sous la forme d'une fonction linéaire des polynômes P , et l'on aura

$$f(x, y) = \sum A_{m,n} P_{m,n}$$

$A_{m,n}$ étant une constante, dont la détermination se fera en multipliant les deux membres de l'égalité par $P_{m,n} dx dy$, et en intégrant ensuite les résultats dans l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 1$. Alors on obtiendra,

d'après les propriétés contenues dans le paragraphe précédent,

$$(2) \quad \iint f(x, y) P_{m,n} dx dy = A_{m,n} \iint (P_{m,n})^2 dx dy,$$

c'est-à-dire, en s'appuyant sur la formule (1),

$$A_{m,n} = \frac{2m+1}{2\pi} \frac{n! 2^{2m+2n}}{(2m+n+2) \dots (2m+2n+1)} \\ \times \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2m+2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+2n+1)} \iint f(x, y) P_{m,n} dx dy.$$

Nous allons tirer du résultat précédent une conséquence importante.

Si l'on cherche, parmi tous les polynômes $\varphi(x)$ de degré μ , celui qui, entre les limites -1 et $+1$ de la variable, s'approche le plus d'une fonction donnée $f(x)$; en d'autres termes, celui qui rend minimum l'intégrale $\int_{-1}^{+1} [f(x) - \varphi(x)]^2 dx$, on trouve, comme on le sait, que ce polynôme est représenté par la portion du développement de $f(x)$, suivant les fonctions X_n de Legendre, qui s'arrête au terme en X_μ inclusivement.

Rien n'est maintenant plus facile que de traiter la question analogue relative à un nombre quelconque de variables, c'est-à-dire que de trouver le polynôme $\varphi(x, y, z, \dots, u)$, du degré μ , qui rend minimum l'intégrale $\iiint \dots [f(x, y, z, \dots, u) - \varphi(x, y, z, \dots, u)]^2 dx dy dz \dots du$, dans laquelle les variables sont limitées par la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 + \dots + u^2 \leq 1.$$

Me bornant au cas de deux variables, je puis, en effet, supposer, dans la recherche du minimum de l'intégrale

$$\iint [f(x, y) - \varphi(x, y)]^2 dx dy,$$

que le polynôme $\varphi(x, y)$ de degré μ est mis sous la forme $\sum B_{m,n} P_{m,n}$, $m+n$ ne devant pas surpasser μ , et il s'agit de trouver les coefficients constants $B_{m,n}$. En égalant à zéro la dérivée de l'intégrale par rapport à $B_{m,n}$, on obtient

$$\iint [f(x, y) - \varphi(x, y)] P_{m,n} dx dy = 0,$$

c'est-à-dire

$$\iint f(x, y) P_{m,n} dx dy = B_{m,n} \iint (P_{m,n})^2 dx dy,$$

et, par conséquent, en comparant l'égalité précédente à la formule (2), $B_{m,n} = A_{m,n}$; d'où l'on voit que le polynôme $\varphi(x, y)$ cherché est la portion du développement de la fonction $f(x, y)$ suivant les polynômes P, que l'on obtient en négligeant tous les termes en $P_{m,n}$, dans lesquels $m + n$ est supérieur à μ .

Ici je ferai quelques remarques. On peut poser

$$P_{m,n} = \sum C_{h,k} U_{h,k},$$

$h + k$ ne surpassant pas $m + n$, $C_{h,k}$ étant une constante et $U_{h,k}$ l'une des fonctions de M. Hermite. On en déduit

$$\iint P_{m,n} V_{h,k} dx dy = C_{h,k} \iint U_{h,k} V_{h,k} dx dy,$$

où V désigne la fonction associée de U. Donc $C_{h,k} = 0$, si $h + k$ est inférieur à $m + n$.

Ainsi $P_{m,n}$ s'exprime par une fonction linéaire des polynômes $U_{h,k}$, dans lesquels la somme des indices $h + k$ est égale à $m + n$, de sorte que la fonction entière précédente $\varphi(x, y)$ s'obtiendra également bien par le développement de $f(x, y)$ suivant les polynômes U, en négligeant toujours les termes en $U_{m,n}$, dans lesquels $m + n$ est supérieur à μ . Mais il y a quelque chose de particulier aux fonctions P, qui n'existe plus à l'égard des fonctions U.

Modifions, en effet, l'énoncé de la question précédente en cherchant, parmi tous les polynômes $\varphi(x, y)$ de degré μ , dans lesquels les termes de degré μ ne contiennent pas de puissances de x , ayant des exposants supérieurs à m , celui qui s'approche le plus d'une fonction donnée quelconque $f(x, y)$ dans l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = r$. Nous trouverons évidemment le polynôme $\varphi(x, y)$ cherché, dans la portion du développement de $f(x, y)$, suivant les fonctions P, que l'on obtient en prenant les termes en $P_{m,n}$, qui correspondent aux valeurs de $m + n$ inférieures à μ , et, de plus, parmi ceux pour lesquels $m + n = \mu$, les seuls termes en $P_{0,m+n}, P_{1,m+n-1}, \dots, P_{m,n}$.

Si, au lieu de limiter ainsi la portion de degré μ du polynôme $\varphi(x, y)$, on l'astreignait à ne pas contenir de puissances de y supérieures à m , la solution serait alors donnée au moyen d'une nouvelle série de fonctions $P'_{m,n}$, se déduisant de la série des fonctions $P_{m,n}$, par la permu-

tation de x et de y , de sorte que l'on aurait

$$P'_{m,n} = \frac{1}{m! n! 2^{2m+n}} \frac{1}{(x^2 - 1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n (x^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dx^n} \frac{d^m (x^2 + y^2 - 1)^m}{dy^m}$$

Mais cette nouvelle série, qui satisfait aussi à la relation

$$\iint P'_{m,n} P'_{m',n'} dx dy = 0,$$

quand $(m - m')^2 + (n - n')^2$ n'est pas nul, ne peut pas être regardée comme réellement distincte de la première.

La considération des polynômes $P_{m,n}$ permet de retrouver les fonctions U et V de M. Hermite ainsi qu'il suit.

Définissons une série de polynômes $V'_{m,n}$, de manière que chacun d'eux soit une fonction linéaire quelconque des fonctions $P_{h,k}$ pour lesquelles la somme des indices $h + k = m + n$. Nous aurons alors, tous les α étant arbitraires,

$$\begin{aligned} V'_{0,m+n} &= \alpha_{0,0} P_{0,m+n} + \alpha_{0,1} P_{1,m+n-1} + \dots + \alpha_{0,m+n} P_{m+n,0}, \\ V'_{1,m+n-1} &= \alpha_{1,0} P_{0,m+n} + \alpha_{1,1} P_{1,m+n-1} + \dots + \alpha_{1,m+n} P_{m+n,0}, \\ &\dots\dots\dots \\ V'_{m+n,0} &= \alpha_{m+n,0} P_{0,m+n} + \alpha_{m+n,1} P_{1,m+n-1} + \dots + \alpha_{m+n,m+n} P_{m+n,0}. \end{aligned}$$

Une fonction $U'_{m,n}$ de la forme

$$B_0 P_{0,m+n} + B_1 P_{1,m+n-1} + \dots + B_{m+n} P_{m+n,0}$$

sera complètement déterminée, à un facteur constant près, par les conditions

$$\begin{aligned} \iint U'_{m,n} V'_{0,m+n} dx dy &= 0, \quad \iint U'_{m,n} V'_{1,m+n-1} dx dy = 0, \dots, \\ \iint U'_{m,n} V'_{m-1,n+1} dx dy &= 0, \quad \iint U'_{m,n} V'_{m+1,n-1} dx dy = 0, \dots \end{aligned}$$

Les deux séries de fonctions $U'_{m,n}$ et $V'_{m,n}$ constitueront évidemment un système complètement analogue au système des deux séries de polynômes U et V de M. Hermite, en ce sens que l'on aura

$$\iint U'_{m,n} V'_{m',n'} dx dy = 0$$

quand $(m - m')^2 + (n - n')^2$ ne sera pas nul.

Voilà donc un moyen de former une infinité de systèmes de fonctions associées; pour retrouver, par la méthode précédente, le système de M. Hermite, il suffira de prendre les α de manière que la fonction $V'_{m,n}$ contienne le seul terme, en $x^m y^n$, de degré $m+n$. Les fonctions V' et V se confondent alors, ainsi que les fonctions U' et U . L'expression des fonctions U et V au moyen des polynômes P est intéressante, ainsi que l'expression réciproque au moyen des polynômes V de $P_{m,n}$. C'est ce dernier résultat qui m'a conduit à mettre $P_{m,n}$ sous la forme donnée antérieurement. Mais, pour abrégé, je n'indiquerai pas ces diverses expressions.

III.

Ce paragraphe sera consacré à l'étude d'un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre, auquel satisfait le polynôme $P_{m,n}$, et qui le caractérise, si l'on se borne aux solutions du système qui sont des fonctions entières.

Soit, pour un instant, $u = (x^2 + y^2 - 1)^m$; on en conclut

$$\frac{du}{dx} = 2mx(x^2 + y^2 - 1)^{m-1},$$

ou bien

$$(x^2 + y^2 - 1) \frac{du}{dx} = 2mx \cdot u;$$

et, par suite, en différentiant $m+1$ fois par rapport à x ,

$$(x^2 + y^2 - 1) \frac{d^{m+2}u}{dx^{m+2}} + 2x \frac{d^{m+1}u}{dx^{m+1}} - m(m+1) \frac{d^m u}{dx^m} = 0.$$

Si donc l'on se reporte maintenant à la forme analytique du polynôme $P_{m,n}$, que je représenterai simplement par P , on reconnaît que ce polynôme satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$(3) \quad (1 - x^2 - y^2) \frac{d^2 P}{dx^2} - 2x \frac{dP}{dx} + m(m+1)P = 0.$$

Ensuite, comme $P_{m,n}$ est une fonction linéaire des polynômes $V_{h,k}$, pour lesquels la somme $h+k$ des indices est égale à $m+n$, il est clair

que l'on a

$$(4) \quad \begin{cases} (1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} + (1-y^2) \frac{d^2 P}{dy^2} - 2xy \frac{d^2 P}{dx dy} \\ - 3x \frac{dP}{dx} - 3y \frac{dP}{dy} + (m+n)(m+n+2)P = 0, \end{cases}$$

équation qui convient, comme je l'ai fait voir autrefois, à tous ces polynômes $V_{h,k}$. Mais, désirant faire l'étude de la fonction P , indépendamment de celle des fonctions V , je vais trouver directement cette dernière équation. En posant

$$Q = \frac{1}{(y^2-1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n(\gamma^2-1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n}, \quad R = \frac{d^m(x^2+y^2-1)^m}{dx^m},$$

on a, par la suppression d'un facteur constant, $P = QR$, et l'on voit que l'expression

$$(5) \quad \begin{cases} (1-x^2) \frac{d^2 P}{dx^2} + (1-y^2) \frac{d^2 P}{dy^2} - 2xy \frac{d^2 P}{dx dy} \\ - 3x \frac{dP}{dx} - 3y \frac{dP}{dy} + (m+n)(m+n+2)P \end{cases}$$

est égale à

$$\begin{aligned} & Q \left[(1-x^2) \frac{d^2 R}{dx^2} + (1-y^2) \frac{d^2 R}{dy^2} - 2xy \frac{d^2 R}{dx dy} \right. \\ & \quad \left. - 3x \frac{dR}{dx} - 3y \frac{dR}{dy} + (m+n)(m+n+2)R \right] \\ & + R \left[(1-y^2) \frac{d^2 Q}{dy^2} - 3y \frac{dQ}{dy} \right] + 2 \frac{dQ}{dy} \left[(1-y^2) \frac{dR}{dy} - xy \frac{dR}{dx} \right]. \end{aligned}$$

En opérant comme je l'ai fait dans le tome V des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, on arrive au résultat suivant, qui d'ailleurs s'y trouve indiqué :

$$(1-x^2) \frac{d^2 R}{dx^2} + (1-y^2) \frac{d^2 R}{dy^2} - 2xy \frac{d^2 R}{dx dy} - 3x \frac{dR}{dx} - 3y \frac{dR}{dy} + m(m+2)R = 0.$$

D'un autre côté, posons

$$R' = \frac{d^m(x^2+y^2-z^2)^m}{dx^m},$$

nous obtiendrons

$$x \frac{dR'}{dx} + y \frac{dR'}{dy} + z \frac{dR'}{dz} = mR',$$

puisque R' est une fonction homogène de x, y, z . Mais

$$\frac{dR'}{dz} = -2mz \frac{d^m(x^2 + y^2 - z^2)^{m-1}}{dx^m} = -\frac{z}{y} \frac{dR'}{dy}.$$

Donc

$$xy \frac{dR'}{dx} + y^2 \frac{dR'}{dy} - z^2 \frac{dR'}{dy} = mR',$$

et, si l'on fait $z = 1$,

$$xy \frac{dR}{dx} + (y^2 - 1) \frac{dR}{dy} = mR.$$

Par conséquent, l'expression (5) se réduit à

$$R \left[(1 - y^2) \frac{d^2 Q}{dy^2} - (2m + 3)y \frac{dQ}{dy} + n(2m + n + 2)Q \right];$$

de telle façon que l'équation (4) sera établie si l'on fait voir que la fonction Q satisfait à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(6) \quad (1 - y^2) \frac{d^2 Q}{dy^2} - (2m + 3)y \frac{dQ}{dy} + n(2m + n + 2)Q = 0.$$

C'est ce que l'on reconnaît facilement de la manière suivante. Soit $v = (y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}$. On en conclut

$$\frac{dv}{dy} = (2m + 2n + 1)y(y^2 - 1)^{m+n-\frac{1}{2}},$$

et, par suite,

$$(y^2 - 1) \frac{dv}{dy} = (2m + 2n + 1)yv.$$

Différentiant ensuite $n + 1$ fois par rapport à y , on obtient

$$(y^2 - 1) \frac{d^{n+2} v}{dy^{n+2}} - (2m - 1)y \frac{d^{n+1} v}{dy^{n+1}} - (n + 1)(2m + n + 1) \frac{d^n v}{dy^n} = 0,$$

et il suffit de remplacer dans cette formule $\frac{d^n v}{dy^n}$ par $(y^2 - 1)^{m+\frac{1}{2}} Q$, pour trouver l'équation (6).

Le système des équations (3) et (4), auquel satisfait le polynôme $P_{m,n}$, permet d'établir sans difficulté la proposition exprimée par l'égalité suivante

$$\iint P_{m,n} P_{m',n'} dx dy = 0.$$

On a, en effet,

$$(1 - x^2 - y^2) \frac{d^2 P_{m,n}}{dx^2} - 2x \frac{dP_{m,n}}{dx} + m(m+1)P_{m,n} = 0,$$

$$(1 - x^2 - y^2) \frac{d^2 P_{m',n'}}{dx^2} - 2x \frac{dP_{m',n'}}{dx} + m'(m'+1)P_{m',n'} = 0.$$

Multiplions la première de ces équations par $P_{m',n'} dx dy$, la seconde par $P_{m,n} dx dy$, retranchons et intégrons les deux membres de l'équation résultante entre les limites $x^2 + y^2 \leq 1$, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} & \iint \left[(1 - x^2 - y^2) \left(P_{m',n'} \frac{d^2 P_{m,n}}{dx^2} - P_{m,n} \frac{d^2 P_{m',n'}}{dx^2} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2x \left(P_{m',n'} \frac{dP_{m,n}}{dx} - P_{m,n} \frac{dP_{m',n'}}{dx} \right) \right] dx dy \\ & = [m'(m'+1) - m(m+1)] \iint P_{m,n} P_{m',n'} dx dy. \end{aligned}$$

Le premier membre est égal à

$$\iint \frac{d \left[(1 - x^2 - y^2) \left(P_{m',n'} \frac{dP_{m,n}}{dx} - P_{m,n} \frac{dP_{m',n'}}{dx} \right) \right]}{dx} dx dy,$$

et, en faisant l'intégration par rapport à x , on obtient zéro comme résultat; donc, si m et m' sont différents,

$$\iint P_{m,n} P_{m',n'} dx dy = 0.$$

Si l'on veut compléter la démonstration de l'égalité précédente pour tous les cas où elle a lieu, il suffira dès lors de l'établir pour l'hypothèse où $m+n$ serait différent de $m'+n'$, et c'est ce que j'ai fait, dans le tome V des *Annales de l'École Normale*, au moyen de l'équation (4).

J'arrive maintenant à la recherche de la solution générale du système des équations (3) et (4). Cette solution contient évidemment quatre constantes arbitraires, et on pourra l'obtenir en prenant la dérivée

d'ordre m , relative à x , de la solution du système

$$(7) \begin{cases} (1 - x^2 - y^2) \frac{d^2 S}{dx^2} + 2(m-1)x \frac{dS}{dx} + 2mS = 0, \\ (1 - x^2) \frac{d^2 S}{dx^2} + (1 - y^2) \frac{d^2 S}{dy^2} - 2xy \frac{d^2 S}{dx dy} \\ + (2m-3)x \frac{dS}{dx} + (2m-3)y \frac{dS}{dy} + (2m+n)(n+2)S = 0, \end{cases}$$

qui est tel, qu'en posant $\frac{d^m S}{dx^m} = Q$, Q satisfait aux équations (3) et (4), comme on s'en assure immédiatement.

Si l'on fait $S = (x^2 + y^2 - 1)^m T$, le système (7) se transforme dans le suivant :

$$(8) \begin{cases} (1 - x^2 - y^2) \frac{d^2 T}{dx^2} - 2(m+1)x \frac{dT}{dx} = 0, \\ (1 - x^2) \frac{d^2 T}{dx^2} + (1 - y^2) \frac{d^2 T}{dy^2} - 2xy \frac{d^2 T}{dx dy} \\ - (2m+3)x \frac{dT}{dx} - (2m+3)y \frac{dT}{dy} + n(2m+n+2)T = 0, \end{cases}$$

qui se résout facilement de la manière suivante.

La première équation de ce système donne

$$T = \varphi(y) + \psi(y) \int_0^x \frac{dx}{(1 - x^2 - y^2)^{m+1}},$$

et, en substituant cette valeur de T dans la seconde équation, on obtient comme résultat, après des réductions aisées,

$$(1 - y^2) \frac{d^2 \varphi}{dy^2} - (2m+3)y \frac{d\varphi}{dy} + n(2m+n+2)\varphi + \int_0^x \frac{dx}{(1 - x^2 - y^2)^{m+1}} \\ \times \left[(1 - y^2) \frac{d^2 \psi}{dy^2} + (2m-1)y \frac{d\psi}{dy} + (n+1)(2m+n+1)\psi \right] = 0,$$

relation qui se dédouble évidemment dans les deux suivantes :

$$(9) \begin{cases} (1 - y^2) \frac{d^2 \varphi}{dy^2} - (2m+3)y \frac{d\varphi}{dy} + n(2m+n+2)\varphi = 0, \\ (1 - y^2) \frac{d^2 \psi}{dy^2} + (2m-1)y \frac{d\psi}{dy} + (n+1)(2m+n+1)\psi = 0. \end{cases}$$

Mais la dernière de ces deux équations se déduit de la précédente par la substitution dans celle-ci de $(1 - y^2)^{-m-\frac{1}{2}}\psi$ à la place de φ , de sorte qu'il suffit maintenant de résoudre l'équation (9).

Pour y arriver, j'observe que, si χ satisfait à la relation

$$(10) \quad (1 - y^2) \frac{d^2 \chi}{dy^2} + (2m + 2n - 1)y \frac{d\chi}{dy} + (2m + 2n + 1)\chi = 0,$$

et que l'on pose $\frac{d^n \chi}{dy^n} = \psi$, ψ satisfera à l'équation (9).

Dès lors, tout revient finalement à résoudre cette équation (10). On reconnaît qu'elle a pour solution $\chi = (1 - y^2)^{m+n+\frac{1}{2}}$; on en déduira, par l'une quelconque des méthodes connues, son intégrale générale, qui est

$$\chi = (1 - y^2)^{m+n+\frac{1}{2}} \left(C + D \log \frac{1-y}{1+y} \right),$$

C et D étant deux constantes arbitraires. En résumé, la solution du système des équations (3) et (4) est la suivante :

$$\begin{aligned} P = & \frac{1}{(y^2 - 1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^m (x^2 + y^2 - 1)^m}{dx^m} \\ & \times \left\{ A \frac{d^n (y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} + B \frac{d^n \left[(y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}} \log \frac{1-y}{1+y} \right]}{dy^n} \right\} \\ & + \frac{d^m \left[(x^2 + y^2 - 1)^m \int_0^x \frac{dx}{(x^2 + y^2 - 1)^{m+1}} \right]}{dx^m} \\ & \times \left\{ C \frac{d^n (y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n} + D \frac{d^n \left[(y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}} \log \frac{1-y}{1+y} \right]}{dy^n} \right\}, \end{aligned}$$

A, B, C, D désignant quatre constantes arbitraires.

Le coefficient seul de A étant une fonction entière de x et de y , $P_{m,n}$ est bien, comme nous l'avons annoncé, le seul polynôme solution du système des équations (3) et (4).

IV.

On peut mettre aisément la fonction $P_{m,n}$ sous la forme d'un produit élégant de deux intégrales définies simples. La formule de Laplace

$$\frac{1}{m! 2^n} \frac{d^m(x^2 - 1)^m}{dx^m} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x - \cos \varphi \sqrt{x^2 - 1})^m d\varphi$$

donne d'abord

$$\frac{1}{m! 2^n} \frac{d^m(x^2 + y^2 - 1)^m}{dx^m} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x - \cos \varphi \sqrt{x^2 + y^2 - 1})^m d\varphi.$$

Soit maintenant

$$Q = \frac{1}{(y^2 - 1)^{m+\frac{1}{2}}} \frac{d^n(y^2 - 1)^{m+n+\frac{1}{2}}}{dy^n}.$$

Il est clair que l'on peut poser

$$Q = \sum A_h y^h (\sqrt{y^2 - 1})^{n-h},$$

où l'on suppose que A_h est une constante, et que $n - h$ est un nombre pair, positif et entier. On a

$$Q = (y^2 - 1)^{\frac{n}{2}} \sum A_h \left(\frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} \right)^h,$$

et aussi

$$Q = (x^2 - 1)^{-\frac{n}{2}} \sum A_h x^h,$$

si les variables x et y sont liées ensemble par la relation $\frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} = x$.

En faisant le même changement de variables dans l'équation (6), à laquelle satisfait le polynôme Q , on obtient

$$(x^2 - 1)^2 \frac{d^2 Q}{dx^2} - 2mx(x^2 - 1) \frac{dQ}{dx} - n(2m + n + 2)Q = 0.$$

Si actuellement on pose, dans cette équation, $Q = (x^2 - 1)^{-\frac{n}{2}} H$, elle devient

$$(x^2 - 1) \frac{d^2 H}{dx^2} - 2(m + n)x \frac{dH}{dx} + n(2m + n + 1)H = 0,$$

et cette nouvelle équation, qui admet pour solution le polynôme de degré n , $\Sigma A_h x^h$, permettra de le déterminer facilement, à un facteur constant près. On trouve

$$\begin{aligned} A_{n-1} &= 0, \quad A_{n-3} = 0, \quad A_{n-5} = 0, \dots, \\ A_{n-2} &= \frac{n(n-1)}{2(2m+3)} A_n, \quad A_{n-4} = \frac{(n-2)(n-3)}{4(2m+5)} A_{n-2}, \dots, \\ A_{n-2k} &= \frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2k(2m+2k+1)} A_{n-2k+2}, \dots; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$A_{n-2k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2k(2m+3)(2m+5)\dots(2m+2k+1)} A_n.$$

Je groupe les facteurs de A_{n-2k} de la manière suivante :

$$A_{n-2k} = \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{(2m+3)(2m+5)\dots(2m+2k+1)} A_n,$$

et j'observe que

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2k-1)}{(2m+3)(2m+5)\dots(2m+2k+1)} = \frac{1}{\int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi' d\varphi'} \int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi' \cos^{2k} \varphi' d\varphi'.$$

Si donc l'on pose $\frac{A_n}{\int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi' d\varphi'} = C$, et si l'on remarque que

$\int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi' \cos^h \varphi' d\varphi'$ est nul quand h est impair, on reconnaîtra l'exactitude de la formule

$$Q = C \sum_{h=0}^{h=n} (-1)^h \frac{n!}{h!(n-h)!} \int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi' \cos^h \varphi' y^{n-h} (\sqrt{y^2-1})^h d\varphi',$$

qui peut être écrite

$$Q = C \int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi' (y - \cos \varphi' \sqrt{y^2-1})^n d\varphi'.$$

Pour déterminer la constante C, on égalera les coefficients des termes en y^n des deux membres, ce qui donnera

$$\begin{aligned} & (2m+n+2)(2m+n+3)\dots(2m+2n+1) \\ &= C \int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi' (1 - \cos \varphi')^n d\varphi' \\ &= C \cdot 2^{2m+n+1} \frac{m!}{(m+n+1)(m+n+2)\dots(2m+n+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, finalement,

$$\begin{aligned} P_{m,n} &= \frac{1}{2^{2m+2n+1}} \frac{(2m+2n+1)!}{m!n!(m+n)!} \frac{1}{\pi} \\ &\times \int_0^\pi (x - \cos \varphi \sqrt{x^2+y^2-1})^m d\varphi \int_0^\pi \sin^{2m+1} \varphi' (y - \cos \varphi' \sqrt{y^2-1})^n d\varphi', \end{aligned}$$

et cette forme analytique rappelle la forme donnée par Laplace à la fonction X_n de Legendre. Du reste, cette dernière fonction présente avec les polynômes $P_{m,n}$ de nombreuses analogies. En particulier, je citerai l'égalité

$$(11) \quad \iint P_{m,n} x^h y^k dx dy = 0,$$

qui résulte des propriétés des fonctions P, et qui convient à toutes les valeurs entières et positives de h et de k dont la somme est inférieure à $m+n$, et aussi, quand cette somme est égale à $m+n$, aux valeurs de h inférieures à m . Le système des équations précédentes caractérise, à un facteur constant près, le polynôme $P_{m,n}$, si l'on admet que ce polynôme est du degré $m+n$, et que, dans les termes du plus haut degré $m+n$, l'exposant de x ne peut pas surpasser m .

Soit

$$P_{m,n} = \sum_{r,s} A_{r,s} x^r y^s.$$

L'équation (11) donne

$$\sum_{r,s} A_{r,s} \iint x^{r+h} y^{s+k} dx dy = 0,$$

ou bien

$$(12) \quad \sum_{r,s} A_{r,s} S_{r+h, s+k} = 0,$$

si l'on pose, en général,

$$S_{p,q} = \iint z^p z'^q dz dz'.$$

On admet toujours que les limites de l'intégration sont données par la condition $z^2 + z'^2 \leq 1$.

La relation (12) montre que, dans le produit de $P_{m,n}$ par la série

$$\frac{S_{0,0}}{xy} + \frac{S_{0,1}}{xy^2} + \frac{S_{1,0}}{x^2y} + \dots + \frac{S_{p,q}}{x^{p+1}y^{q+1}} + \dots,$$

qui est égale à

$$\iint \frac{dz dz'}{(x-z)(y-z')},$$

ou bien à

$$2\pi \operatorname{arctang} \frac{1}{x\sqrt{y^2-1} + y\sqrt{x^2-1}},$$

le terme en $\frac{1}{x^{h+1}y^{k+1}}$ n'existe pas; et ceci aura lieu pour toutes les valeurs de h et de k indiquées plus haut. L'analogie de ce qui précède avec ce qui a lieu pour la fonction X_n , relativement au produit $X_n \int_1^{+1} \frac{dz}{x-z} = X_n \log \frac{x+1}{x-1}$, est évidente.

V.

Cette propriété du polynôme $P_{m,n}$ m'a donné l'idée d'étendre, à un certain point de vue, aux fonctions de plusieurs variables, la théorie de l'intégrale $\int_a^b \frac{f(z) dz}{x-z}$. Pour abrégier, je considérerai seulement le cas de deux variables. Soit l'intégrale

$$I = \iint \frac{f(z, z') dz dz'}{(x-z)(y-z')},$$

où les variables z, z' sont limitées par une condition quelconque indépendante de x et de y , que je ne spécifierai pas, mais qui restera la

même dans toutes les intégrales suivantes. On a

$$I = \sum_{m=0}^{m=+\infty} \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{T_{p,q}}{x^{p+1}y^{q+1}},$$

en posant

$$T_{p,q} = \iint f(z, z') z^p z'^q dz dz'.$$

Cela étant, on peut définir une série de polynômes $Q_{m,n}$ de la manière suivante. Le polynôme $Q_{m,n}$ sera du degré $m+n$, et les termes de degré $m+n$ ne contiendront pas de puissances de x supérieures à x^m ; de plus, le produit $IQ_{m,n}$ ne renfermera pas de termes en $\frac{1}{x^{h+1}y^{k+1}}$, h et k devant prendre toutes les valeurs entières et positives dont la somme est inférieure à $m+n$; ou bien, dans le cas de $h+k$ égal à $m+n$, h devant rester plus petit que m . Soit

$$Q_{m,n} = \sum_{r,s} B_{r,s} x^r y^s.$$

On exprimera que, dans le produit $IQ_{m,n}$, le terme en $\frac{1}{x^{h+1}y^{k+1}}$ n'existe pas, par la relation

$$\sum_{r,s} B_{r,s} T_{r+h, s+k} = 0,$$

ou bien

$$\iint f(x, y) \sum_{r,s} B_{r,s} x^{r+h} y^{s+k} dx dy = 0,$$

ou enfin

$$\iint f(x, y) Q_{m,n} x^h y^k dx dy = 0.$$

Cette relation montre immédiatement que l'intégrale

$$\iint f(x, y) Q_{m,n} Q_{m',n'} dx dy$$

est nulle, si l'on n'a pas en même temps $m = m'$, $n = n'$.

Dans le développement du produit $IQ_{m,n}$, on trouve non-seulement des termes en $\frac{1}{x^{h+1}y^{k+1}}$ contenant à la fois x et y en dénominateur, mais

aussi des termes entiers, des termes en $\frac{x^p}{y^q}$, et des termes en $\frac{y^{p'}}{x^{q'}}$, q et q' étant entiers, positifs et différents de zéro. Ces diverses catégories de termes se séparent facilement, comme je vais le faire voir, en donnant une nouvelle démonstration de la proposition précédente. Je représenterai le polynôme $Q_{m,n}$ par $Q(x, y)$. La formule de Taylor démontre l'identité suivante

$$Q(x, y) = Q(x, z') - Q(z, z') + Q(z, y) - Q(z, z') + Q(z, z') + (x - z)(y - z') \Phi(x, y, z, z'),$$

$\Phi(x, y, z, z')$ étant une fonction entière de x, y, z et z' . On en conclut

$$\begin{aligned} Q(x, y) & \int \int \frac{f(z, z') dz dz'}{(x - z)(y - z')} \\ & = \int \int \frac{[Q(x, z') - Q(z, z')] f(z, z') dz dz'}{(x - z)(y - z')} \\ & \quad + \int \int \frac{[Q(z, y) - Q(z, z')] f(z, z') dz dz'}{(x - z)(y - z')} \\ & \quad + \int \int \frac{Q(z, z') f(z, z') dz dz'}{(x - z)(y - z')} + \int \int \Phi(x, y, z, z') f(z, z') dz dz'. \end{aligned}$$

Dans le développement du premier ou du second membre suivant les puissances décroissantes de x et de y , les termes contenant y seul en dénominateur seront tous fournis par la première partie du second membre, parce que le polynôme $Q(x, z') - Q(z, z')$ est divisible par $x - z$; de même, la seconde partie fournira tous les termes contenant x seul en dénominateur; la troisième partie comprendra tous les termes renfermant à la fois x et y en dénominateur, et la quatrième partie, les termes entiers en x et y . De là on conclut immédiatement que l'on exprimera la même chose en disant que le terme en $\frac{1}{x^{h+1} y^{k+1}}$ n'existe pas dans le produit IQ , ou que l'intégrale

$$\int \int Q(z, z') f(z, z') z^h z'^k dz dz'$$

est nulle.

Si, dans les intégrales précédentes, les variables sont limitées par

la condition $z^2 + z'^2 \leq 1$, et si l'on prend $f(z, z') = 1$, on trouve

$$Q_{m,n} = P_{m,n}.$$

Si, en conservant la même limitation des variables, on prend

$$f(z, z') = (z^2 + z'^2 - 1)^h,$$

h étant supérieur à -1 , pour que l'intégrale $\iint \frac{f(z, z')}{(x-z)(y-z')}$ soit finie, on trouve

$$Q_{m,n} = \frac{1}{(y^2 - 1)^{m+h+\frac{1}{2}}} \frac{d^n (y^2 - 1)^{m+n+h+\frac{1}{2}}}{dy^n} \frac{1}{(x^2 + y^2 - 1)^h} \frac{d^m (x^2 + y^2 - 1)^{m+h}}{dx^m}.$$

