ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. BOUSSINESQ

Aplatissement suivant l'axe polaire, par la tension superficielle d'une goutte liquide de révolution et sans pesanteur, possédant une vitesse angulaire donnée de rotation autour de cet axes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 38 (1921), p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1921_3_38__1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

APLATISSEMENT SUIVANT L'AXE POLAIRE,
PAR LA TENSION SUPERFICIELLE,
D'UNE GOUTTE LIQUIDE,
DE RÉVOLUTION ET SANS PESANTEUR,
POSSÉDANT UNE VITESSE ANGULAIRE DONNÉE DE ROTATION AUTOUR DE CET AXE,

PAR M. J. BOUSSINESQ.

I. Parmi les analogies physiques auxquelles pensèrent les théologiens du XIII[e] siècle pour s'expliquer la sphéricité de la Terre, il y a celle des gouttes de pluie ou de rosée que l'on voit pendre aux feuilles des arbres, gouttes si bien arrondies surtout après s'être détachées pour tomber en chute libre. Ces théologiens sembleraient donc avoir admis, au moins implicitement, la fluidité primitive de notre globe, comme le firent d'une manière explicite, cinq cents ans plus tard, Newton et ses disciples en recourant à la pesanteur. Or il peut y avoir un certain intérêt théorique à poursuivre la même analogie des gouttes d'eau, mais d'une manière plus précise que ne l'a fait Plateau, jusque dans la question de l'aplatissement polaire du méridien terrestre, en attribuant à la goutte une rotation initiale et, d'ailleurs, une figure devenue permanente.

II. Adoptons, dans un plan méridien de la goutte, un demi-axe équatorial, a, comme axe des abscisses x, et un demi-axe polaire, b, comme axe d'ordonnées y. De plus, pour fixer les idées et simplifier, supposons non volatile et isolée dans l'espace, ou même soustraite à toute action extérieure, notre goutte liquide, dont nous ferons enfin la densité égale à 1. A la face interne de la *couche superficielle* de révolution, la pression p, due entièrement à la tension constante f de celle-ci, sera, comme on sait, le produit de $2f$ par la *courbure moyenne* de cette couche, courbure ayant, parmi ses expressions connues, celle-ci,

$$\frac{1}{2x}\frac{d}{dx}\left[xy'(1+y'^2)^{-\frac{1}{2}}\right], \tag{1}$$

en tous les points (x, y) du demi-méridien actuellement situé du côté des x positifs.

Comme l'accélération du fluide se réduit, dans tout l'intérieur de la demi-section méridienne considérée de la goutte (dont ω désignera la vitesse angulaire donnée de rotation), à sa composante centripète $-\omega^2 x$, dirigée vers l'axe de rotation ou produisant pour l'unité de volume l'inertie (*force centrifuge*) $\omega^2 x$, suivant les x positifs, les équations d'Euler exigeront une pression p constante le long de toute parallèle à l'axe des y et croissante avec x, aux divers points tant intérieurs que superficiels du demi-plan méridien en question, comme la fonction primitive, $\frac{\omega^2 x^2}{2}$, de $\omega^2 x$. En appelant r le *rayon de courbure* du méridien en (x, y) et, en particulier, r_0 ce qu'il devient au *pôle* de la couche superficielle, *ombilic* où son inverse $\frac{1}{r_0}$ exprime justement la courbure moyenne (1), $\frac{2f}{r_0}$ sera donc la *pression intérieure* à ce pôle même, pression liée, comme on le verra plus loin, au volume total invariable de la goutte, et qui, *provisoirement*, sera censée donnée. On aura donc partout

$$p = \frac{2f}{r_0} + \frac{\omega^2}{2}x^2. \tag{2}$$

Tout le long du demi-méridien à ordonnée y, où cette pression se réduit au produit de $2f$ par la courbure moyenne (1), il viendra ainsi, après division par f, comme équation différentielle seconde du méridien,

$$\frac{2}{\tau_0} + \frac{\omega^2}{2f} x^2 = \frac{1}{x} \frac{d}{dx}\left(x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right). \tag{3}$$

Multipliée par $x\,dx$ et intégrée, celle-ci donne, si C désigne la constante arbitraire introduite,

$$x \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{x^2}{\tau_0} + \frac{\omega^2}{8f} x^4 + C. \tag{4}$$

M. Globa-Mikhaïlenko, qui est, ce me semble, le premier géomètre ayant abordé ces sortes de questions, a donné, dans sa Thèse de doctorat d'Université ès sciences mathématiques, cette équation (4), et a montré, en la résolvant par rapport à y', puis intégrant une fois de plus, que le méridien est une courbe dont l'ordonnée égale une certaine intégrale hyperelliptique de l'abscisse x, où figure sous le signe $\int$, en dénominateur, un radical carré portant sur un polynome pair du huitième degré (¹). C'est que M. Globa considère une goutte adhérant à un axe solide tournant qui l'entraîne; cas où la couche superficielle n'a pas de point sur l'axe $x = 0$.

III. Mais, ici, il y a deux *pôles* où s'annule, avec x, le premier membre de (4), dont le facteur fractionnaire n'excède nulle part la valeur 1, et le second membre de (4) est tenu de s'y annuler aussi; on a donc $C = 0$, simplification très importante. En supprimant alors partout un facteur x et élevant au carré, il vient

$$\frac{y'^2}{1+y'^2} = \frac{x^2}{\tau_0^2}\left(1 + \frac{\omega^2 \tau_0}{8f} x^2\right)^2.$$

Isolons y'^2; puis extrayons la racine carrée *négative* des deux membres, pour nous borner au *premier* quart du méridien (compris dans l'angle des coordonnées positives) où y', nul au pôle

(¹) *Voir*, par exemple, sa seconde Thèse, ou Thèse pour le doctorat d'État, soutenue à Paris en 1920 [*Contribution à l'étude des mouvements d'une masse fluide en rotation* (Gauthier-Villars, 1920), p. 23, équation (α)]. Elle a paru aussi au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (année 1920).

$(x = 0, y = b)$, décroît jusqu'à $-\infty$, en allant vers l'équateur où $x = a$, tandis que y y diminue de b à zéro. En posant finalement, pour abréger,

$$(5) \qquad u = \frac{x^2}{\tau_0^2} \; (\text{ou } x = \tau_0\sqrt{u}) \qquad \text{et} \qquad \omega\sqrt{\frac{\tau_0^3}{8f}} = k,$$

nous aurons l'équation cherchée de ce quart de méridien :

$$(6) \qquad y = b - \frac{\tau_0}{2}\int_0^{\frac{x^2}{\tau_0^2}} \frac{(1 + k^2 u)\, du}{\sqrt{1 - u(1 + k^2 u)^2}}.$$

L'ordonnée s'y exprime donc *par une intégrale elliptique du carré* x^2 *de l'abscisse.*

IV. Les deux rayons, équatorial a et polaire b, se détermineront en écrivant que, pour $x = a$, la tangente est parallèle à l'axe des y, ou que la quantité placée sous le radical du dénominateur s'annule. On a donc tout à la fois, grâce, finalement, à l'extraction d'une racine carrée positive,

$$(7) \qquad \frac{a}{\tau_0}\left(1 + k^2\frac{a^2}{\tau_0^2}\right) = 1, \qquad b = \frac{\tau_0}{2}\int_0^{\frac{a^2}{\tau_0^2}} \frac{(1 + k^2 u)\, du}{\sqrt{1 - u(1 + k^2 u)^2}}.$$

On commencera, τ_0 et k étant donnés, par évaluer la racine positive a, ou mieux $\Big($en posant

$$(7\ bis) \qquad \alpha = \frac{a}{\tau_0}\Big),$$

le rapport $\frac{a}{\tau_0}$, que nous appellerons ainsi α, racine positive, évidemment unique, de l'équation

$$(8) \qquad \alpha(1 + k^2\alpha^2) = 1 \qquad \text{ou} \qquad \alpha^3 + \frac{\alpha}{k^2} = \frac{1}{k^2};$$

et la seconde (7) fera ensuite connaître b.

Mais, pour étudier de plus près la courbe (6), nous aurons aussi à considérer, à partir du pôle $(x = 0, y = b)$, la partie du quart de méridien comprise depuis ce pôle jusqu'à une abscisse x quelconque entre zéro et a. Il est clair qu'alors l'équation (6) nous donnera, au lieu de la seconde (7),

$$(9) \qquad y = \frac{z_0}{2} \int_{\frac{x^2}{z_0^2}}^{\frac{a^2}{z_0^2}} \frac{(1 + k^2 u)\, du}{\sqrt{1 - u(1 + k^2 u)^2}}.$$

V. Cela posé, résolvons la seconde équation (8) par la méthode de Cardan, qui consiste, ici, à considérer α comme la différence constante, $\mu - \nu$, de deux nombres positifs μ, ν, dont on fera grandir le second, à partir de zéro, jusqu'à ce que le produit croissant $\mu\nu$ atteigne une valeur permettant de simplifier cette seconde équation (8) ainsi devenue

$$\mu^3 - \nu^3 - \left(3\mu\nu - \frac{1}{k^2}\right)(\mu - \nu) = \frac{1}{k^2}.$$

La simplification se produit au moment où le terme en $\mu - \nu$ du premier membre s'évanouit, par l'hypothèse

$$(10) \qquad \mu\nu = \frac{1}{3k^2} \qquad \text{ou} \qquad \nu = \frac{1}{3k^2\mu}.$$

Cela donne

$$\mu^3 - \nu^3 = \frac{1}{k^2} \qquad \text{ou} \qquad \mu^3 - \frac{1}{27k^6\mu^3} = \frac{1}{k^2},$$

équation qui, multipliée par μ^3, est du second degré seulement en μ^3, admettant comme racine positive unique la valeur

$$(11) \qquad \mu^3 = \frac{1}{2k^2}(\gamma + 1), \qquad \text{où il est posé} \qquad \gamma = \sqrt{1 + \frac{4}{27k^2}}.$$

Il résulte de cette dernière formule, en utilisant finalement la première (10),

$$(12) \qquad \frac{9}{4}(\gamma + 1)(\gamma - 1) = \frac{1}{3k^2} = \mu\nu.$$

Et l'on en déduit successivement

$$\mu^3\nu^3 = (\mu\nu)^2(\mu\nu) = \left(\frac{1}{3k^2}\right)^2 \frac{9}{4}(\gamma + 1)(\gamma - 1), \qquad \left(2k^2 \frac{\mu^3}{\gamma + 1}\right)\left(2k^2 \frac{\nu^3}{\gamma - 1}\right) = 1.$$

Or, dans la dernière de ces relations, où le premier membre est, comme on voit, le produit de deux facteurs inverses l'un de l'autre et analogues, la formule (11) montre que le premier de ces facteurs vaut 1, et, par suite, ne diffère pas du second. Les deux rapports de μ^3 à $\gamma+1$ et de ν^3 à $\gamma-1$ ont donc, comme valeur commune, $\frac{1}{2k^2}$. Dès lors, deux extractions de racines cubiques font connaître μ et ν, dont la différence $\mu-\nu$ n'est autre que notre racine cherchée α :

$$(13) \qquad \alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2k^2}}\left(\sqrt[3]{\gamma+1}-\sqrt[3]{\gamma-1}\right).$$

VI. Son carré fait connaître, vu (7 *bis*), la limite supérieure de l'intégration à effectuer, d'après la seconde (7) et d'après (9), pour obtenir l'ordonnée quelconque y du méridien.

Inutile de s'arrêter à cette effectuation dans le cas simple d'une vitesse angulaire ω nulle, où $k=0$ et $\alpha=1$. On sait qu'alors le méridien est circulaire, avec $b=a$. Mais supposons seulement ω et k assez petits pour que α, alors voisin de 1, permette de négliger à côté de l'unité, dans le calcul de y, les puissances de k^2 supérieures à la première. La seconde équation (8), multipliée par k^2, en y posant $\alpha=1-\varepsilon$ et $\alpha^3=1-3\varepsilon$ très sensiblement, puis négligeant le produit $k^2\varepsilon$ devant k^2, donnera $\varepsilon=k^2$ environ, à une première approximation.

Sans négliger encore partout les puissances de k^2, posons, dans (9), $u=v^2$, afin d'avoir, aux expressions des deux limites supérieure et inférieure, α et x au lieu de leurs carrés. Il viendra $du=2v\,dv$ et la formule (9) de y prendra la forme

$$(14) \qquad y = \iota_0\int_{\frac{x}{\iota_0}}^{\alpha}\frac{v(1+k^2v^2)\,dv}{\sqrt{1-v^2(1+k^2v^2)^2}}.$$

Ici, la quantité sous le radical, différence de deux carrés, devient le produit de deux facteurs dont le premier, $1-v(1+k^2v^2)$, seul susceptible de s'annuler, se dédouble lui-même en facteurs si l'on y remplace le terme 1, en vertu de la première (8), par $\alpha+k^2\alpha^3$; car il équivaut alors à

$$(\alpha-v)[1+k^2(\alpha^2+\alpha v+v^2)].$$

Et l'équation (14) devient

$$(15)\qquad y = \varepsilon_0 \int_{\frac{x}{\varepsilon_0}}^{\alpha} \frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{(\alpha-\rho)(1+\rho)}}$$
$$\times [1 + k^2\rho^2]\,[1 + k^2(\alpha^2 + \alpha\rho + \rho^2)]^{-\frac{1}{2}} \left[1 + k^2 \frac{\rho^3}{1+\rho}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Or, sous le signe $\int$, les puissances des expressions entre crochets, à premier terme 1, seront développables, par la formule du binome de Newton, en séries convergentes procédant suivant k^2, k^4, ...; après quoi leur produit le sera de même. On n'aura donc plus à intégrer que des différentielles algébriques ne contenant aucune autre irrationnelle que le radical $\sqrt{(\alpha-\rho)(1+\rho)}$. Et en prenant, par exemple,

$$\sqrt{(\alpha-\rho)(1+\rho)} = (\alpha-\rho)t;$$

d'où

$$\rho = \frac{\alpha t^2 - 1}{t^2+1}, \qquad d\rho = \frac{2(1+\alpha)t\,dt}{(t^2+1)^2}, \qquad t = \sqrt{\frac{1+\rho}{\alpha-\rho}},$$

ou aussi

$$\sqrt{(\alpha-\rho)(1+\rho)} = \frac{(1+\alpha)t}{t^2+1},$$

il ne restera à intégrer que des différentielles rationnelles.

VII. Bornons-nous au cas où sont négligeables les termes en k^4, k^6, ..., et où par suite, dans les termes en k^2, α se trouve réductible à sa première valeur approchée 1. Il vient alors, par des simplifications immédiates donnant, sous le signe $\int$, le trinome

$$1 - \frac{k^2}{2} - \frac{k^2}{2}\,\frac{\rho}{1+\rho}$$

comme produit des facteurs où figure k^2, et, si l'on se contente de faire d'abord $x = 0$ à la limite inférieure,

$$(16)\qquad b = 2\varepsilon_0\left(1 - \frac{k^2}{2}\right)\int_{\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}^{\infty} \frac{(\alpha t^2 - 1)\,dt}{(t^2+1)^2} - \varepsilon_0 k^2 \int_1^{\infty} \frac{(t-1)^2\,dt}{t(t^2+1)^2}.$$

Ici, en remplaçant le premier numérateur, $\alpha t^2 - 1$, par

$$\alpha(t^2+1) - (1+\alpha),$$

on dédouble la première intégrale en deux, où les fonctions primitives sont respectivement

$$\alpha \operatorname{arc tang} t \quad \text{et} \quad -\frac{1+\alpha}{2}\left(\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arc tang} t\right).$$

Entre les deux limites proposées, cela donne, toutes réductions faites,

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{2} - \frac{1-\alpha}{2} \operatorname{arc tang} \sqrt{\alpha}.$$

D'ailleurs, dans ce premier terme du second membre de (16), la petite partie où figure k^2 comporte, comme la seconde intégrale, la réduction de α à l'unité. Et il viendra ainsi, très aisément, pour le premier terme du second membre,

$$v_0\left[\sqrt{\alpha} - (1-\alpha) \operatorname{arc tang} \sqrt{\alpha}\right] - v_0 \frac{k^2}{2}.$$

Quant à la seconde intégrale, la fonction sous le signe $\int$ s'y décompose en

$$\frac{1}{t}, \quad \frac{-t}{t^2+1}, \quad \frac{-2}{(t^2+1)^2},$$

ayant respectivement les fonctions primitives

$$\log t, \quad -\log\sqrt{t^2+1} \quad \text{et} \quad -\left(\frac{t}{t^2+1} + \operatorname{arc tang} t\right).$$

Cette seconde intégrale, où la fonction primitive est en tout, vu que les logarithmes sont ici népériens comme dans toute l'Analyse, mais en les désignant par le symbole L pour éviter des confusions,

$$\mathrm{L}\frac{t}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{t}{t^2+1} - \operatorname{arc tang} t,$$

donne, entre les deux limites 1 et ∞,

$$\mathrm{L}\sqrt{2} + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Cela fait pour le dernier terme de (16), et en y joignant la petite partie $-\varepsilon_0\frac{k^2}{2}$ du terme précédent,

$$-\frac{\varepsilon_0}{2}k^2\left(2+\mathrm{L}2-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\varepsilon_0}{2}k^2\left(2,69315-\frac{\pi}{2}\right)=-0,56117\varepsilon_0 k^2.$$

L'expression du demi-axe polaire b du méridien sera donc

$$(17)\qquad b=\varepsilon_0\left[\sqrt{\alpha}-(1-\alpha)\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\alpha}\right]-0,56117\varepsilon_0 k^2.$$

VIII. Il y a lieu maintenant d'évaluer α en fonction de k. A cet effet, observons que, vu la petitesse admise de k^2, la seconde relation (11) donne γ très grand. Par suite, les racines cubiques de $\gamma\pm 1$ peuvent s'écrire, grâce à la formule du binome,

$$\sqrt[3]{\gamma\pm 1}=\sqrt[3]{\gamma}\left(1\pm\frac{1}{\gamma}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\gamma}\left(1\pm\frac{1}{3\gamma}-\frac{1}{9\gamma^2}\pm\frac{5}{81\gamma^3}-\ldots\right);$$

ce qui donne

$$(18)\qquad \sqrt[3]{\gamma+1}-\sqrt[3]{\gamma-1}=2\sqrt[3]{\gamma}\left(\frac{1}{3\gamma}+\frac{5}{81\gamma^3}+\ldots\right)$$
$$=\frac{2\sqrt[3]{\gamma}}{3\gamma}\left(1+\frac{5}{27\gamma^2}+\ldots\right)=\frac{2}{3\sqrt[3]{\gamma^2}}\left(1+\frac{5}{27\gamma^2}+\ldots\right).$$

Mais il résulte, d'autre part, de la relation (11) définissant γ, que

$$\gamma^2=\frac{4}{27k^2}\left(1+\frac{27}{4}k^2\right)\qquad\text{et}\qquad\frac{8}{\gamma^2}=54k^2\left(1-\frac{27}{4}k^2+\ldots\right).$$

Le dernier membre de (18) devient donc, vu cette dernière formule,

$$k^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{2}\left(1-\frac{9}{4}k^2+\ldots\right)\left(1+\frac{5}{4}k^2+\ldots\right)=k^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{2}\,(1-k^2+\ldots);$$

et, en divisant celle-ci par $(2k^2)^{\frac{1}{3}}$, il vient enfin la valeur cherchée de α,

$$(19)\qquad \alpha=1-k^2+\ldots,$$

comme l'avait, du reste, montré déjà le calcul de première approximation effectué au commencement du n° VI (p. 6).

Par suite, $1-\alpha = k^2$, $\sqrt{\alpha} = 1 - \frac{k^2}{2}$; et, au second membre de (17), où $\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\alpha}$ s'écarte de $\frac{\pi}{4}$ d'une quantité du même ordre que l'écart de sa tangente d'avec 1, c'est-à-dire du même ordre que $\frac{k^2}{2}$ (¹), on peut remplacer $\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\alpha}$ par $\frac{\pi}{4} = 0,7854$, le facteur $1-\alpha$ ayant déjà la petite valeur k^2. Cette formule (17) donne donc simplement

$$(20) \qquad b = \iota_0\left(1 - \frac{1}{2}k^2 - 0,7854\,k^2 - 0,56117\,k^2\right) = \iota_0(1 - 1,8466\,k^2).$$

L'aplatissement $\frac{a-b}{a}$ du méridien, où $a = \iota_0\alpha = \iota_0(1-k^2)$, aura, par suite, la valeur

$$(21) \qquad \text{Aplatissement} = 0,8466\,k^2.$$

IX. Enfin, l'expression (5) de k dépend de la vitesse angulaire donnée ω et de la pression $\frac{2f}{\iota_0}$ exercée au pôle sous la couche superficielle. Comme, ici, d'une manière générale, la pression p se règle à partir du dehors où on la donne nulle, et que la force centrifuge s'y combine avec la tension superficielle, émanée de cette couche, pour régler de proche en proche les variations de p à mesure qu'on s'avance vers l'intérieur, ce sont les dimensions même de la goutte, suivant les divers sens, et, par conséquent, son *volume invariable*, caractéristique *naturelle* de la question, qui interviendra pour déterminer sa valeur partout. Or nous nous donnerons le volume, par l'intermédiaire du rayon R qu'aura la goutte quand elle sera exactement sphérique; de sorte que le demi-volume compris du côté des y positifs, depuis le pôle ($x=0, y=b$) jusqu'à l'équateur $y=0$, aura pour expression $\frac{2}{3}\pi R^3$.

Évaluons-le en fonction de ω et de ι_0. L'élément naturel en est la

(¹) Car, aux environs de 45°, la variation de l'arc est deux fois moindre que celle de sa tangente, vu la formule de la différentielle de $\operatorname{tang}\varphi$, qui est $\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$, c'est-à-dire alors $2\,d\varphi$. Donc le produit $(1-\alpha)\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\alpha}$, ou $k^2\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\alpha}$, ne diffère de k^2 que par une quantité négligeable, de l'ordre de k^4.

couche circulaire $\pi x^2\, dy$ de base πx^2 perpendiculaire à l'axe polaire des y, ayant d'ailleurs son centre sur cet axe, avec l'abscisse x comme rayon, et, pour hauteur dy, l'intervalle de deux couches élémentaires consécutives, depuis $y = 0$ et $x = a$, jusqu'à $y = b$ et $x = 0$. L'intégrale définie (9), différentiée par rapport à sa limite inférieure, en continuant à y appeler, pour abréger, u le carré de $\frac{x}{\iota_0}$, ou $\iota_0^2\ u$ celui de x, donne, d'une part, $x^2 = \iota_0^2 u$, d'autre part, à raison de ce que, ici, dy et du devront se prendre en valeur absolue,

$$dy = \frac{\iota_0}{2}\,\frac{(1+k^2u)\,du}{\sqrt{1-u(1+k^2u)^2}}. \tag{22}$$

D'où, en observant que u variera, du pôle à l'équateur, depuis zéro jusqu'à α^2,

$$\text{Demi-volume } \frac{2}{3}\pi R^3 = \pi\iota_0^2 \int_0^{\alpha^2} u\,\frac{\iota_0}{2}\,\frac{(1+k^2u)\,du}{\sqrt{1-u(1+k^2u)^2}}$$
$$= \frac{\pi\iota_0^3}{2}\int_0^{\alpha^2} \frac{u(1+k^2u)\,du}{\sqrt{1-u(1+k^2u)^2}}.$$

Cela donne, en multipliant par $\frac{3}{2\pi\iota_0^3}$,

$$\left(\frac{R}{\iota_0}\right)^3 = \frac{3}{4}\int_0^{\alpha^2} \frac{u(1+k^2u)\,du}{\sqrt{1-u(1+k^2u)^2}}. \tag{23}$$

Or les réductions ordinaires des différentielles polynomes [1] ramènent cette dernière intégrale à celle dont nous avons obtenu une valeur approchée aux n^{os} VII et VIII, c'est-à-dire aux expressions (17) et (20) du demi-axe polaire b. Elles conduisent, en effet, à la formule de réduction, que vérifient des différentiations immédiates,

$$\int \frac{u(1+k^2u)\,du}{\sqrt{1-u(1+k^2u)^2}} = -\frac{2}{3k^2}\sqrt{1-u(1+k^2u)^2}$$
$$-\frac{1}{3k^2}\int \frac{(1+k^2u)\,du}{\sqrt{1-u(1+k^2u)^2}}. \tag{24}$$

---

(1) *Voir*, par exemple, mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, t. II, *Fascicule complémentaire*, p. 27* à 32*.

Entre les deux limites o, α^2, celle-ci, où la quantité sous le radical est nulle à la limite supérieure en raison de (8), donne simplement

$$(25)\qquad \int_0^{\alpha^2} \frac{u(1+k^2 u)\,du}{\sqrt{1-u(1+k^2 u)^2}} = \frac{1}{3k^2}\left[2 - \int_0^{\alpha^2} \frac{(1+k^2 u)\,du}{\sqrt{1-u(1+k^2 u)^2}}\right].$$

Remplaçons ici les deux intégrales, d'après (23) et (7), par les expressions respectives équivalentes $\frac{4}{3}\left(\frac{R}{\tau_0}\right)^3$, $\frac{2b}{\tau_0}$; et il viendra *exactement, entre les trois rayons* τ_0, b, R, la relation simple

$$(26)\qquad \left(\frac{R}{\tau_0}\right)^3 = \frac{1}{2k^2}\left(1 - \frac{b}{\tau_0}\right).$$

Si l'on suppose k^2 assez petit pour que l'on puisse négliger k^4 en comparaison, la formule approchée (20) de b donne

$$(27)\qquad \left(\frac{R}{\tau_0}\right)^3 = 0{,}9233 \qquad \text{ou} \qquad R = 0{,}9737\tau_0, \qquad \tau_0 = 1{,}027\,R.$$

X. Évaluons enfin, par (15) et (16), non plus seulement b, mais l'ordonnée y du premier quart de méridien, qui correspond à une abscisse x quelconque entre zéro et $a = \tau_0\alpha = \tau_0(1-k^2)$, abscisse dont nous appellerons ρ le rapport à τ_0.

La limite inférieure des intégrations en t devient alors $\sqrt{\frac{1+\rho}{\alpha-\rho}}$, ou $\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}$ à peu près. Et l'on obtient, toutes réductions faites, au lieu de (20), l'équation générale approchée de la courbe,

$$(28)\qquad y = \tau_0\left[\sqrt{1-\rho^2} - \frac{k^2}{2}\left(2\sqrt{1-\rho^2} + \sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}} + \log\frac{2}{1+\rho}\right)\right],$$

se réduisant bien à (20) pour $\rho = 0$.

Comme c'est R qui est donné, et non τ_0, on éliminera τ_0 de (28) et de l'expression (5) de k par les deux dernières formules (27), en faisant, dans (28),

$$(29)\qquad \rho = 0{,}9737\frac{x}{R}, \quad \tau_0 = 1{,}027\,R, \quad k = 1{,}0407\,\omega\sqrt{\frac{R^3}{8f}} \quad \text{ou} \quad k^2 = 0{,}1354\,\frac{\omega^2 R^3}{f}.$$

et R pourra même, *dans les termes en* k^2, remplacer a, b, τ_0, τ, etc.