

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE BOREL

**À propos de la définition de l'intégrale définie (lettre à M. le Directeur des Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure)**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 37 (1920), p. 461-462

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1920\\_3\\_37\\_\\_461\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1920_3_37__461_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

A PROPOS  
DE  
**LA DÉFINITION DE L'INTÉGRALE DÉFINIE**

(Lettre à M. le Directeur des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*)

PAR M. ÉMILE BOREL.

—

M. Lebesgue revient sur la discussion qu'il a soulevée à propos des définitions de l'intégrale définie, et insiste en particulier sur la définition que j'ai donnée pour l'intégration des fonctions non bornées (1). Il me paraît superflu de répéter mes arguments; les lecteurs de ce Journal ne sont pas de ceux pour lesquels celui qui parle le dernier a nécessairement raison; ceux que cette polémique intéresse ne manqueront pas de relire ma Note (2) après avoir lu celle de M. Lebesgue. Je voudrais seulement, par une citation d'une phrase que j'ai écrite il y a 20 ans, préciser le point de vue auquel je me suis toujours placé pour apprécier les faits mathématiques; je sais que ce point de vue ne peut pas être logiquement imposé à l'adhésion de tous; mais, comme je le crois juste, je tiens d'autant plus à le signaler quand l'occasion s'en présente.

Il s'agissait de l'affirmation d'Euler, d'après laquelle les géomètres ne se tromperaient pas en attribuant la valeur  $\frac{1}{2}$  à la série divergente :

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

M. Pringsheim avait formé un exemple dans lequel l'affirmation d'Euler était en défaut; il va de soi que tout analyste moderne forme-

---

(1) Voir les *Annales de l'École Normale*, 3<sup>e</sup> série, t. XXXV et XXXVII.

(2) *Annales de l'École Normale*, t. XXXVI.

rait aisément de nombreux exemples de ce genre et que je ne l'ignorais pas lorsque j'avais repris pour mon compte l'affirmation d'Euler. Voici maintenant la conclusion à laquelle j'arrivais, après une discussion inutile à reproduire ici (1) :

« Pour prouver donc que l'affirmation d'Euler est fausse, en se plaçant au point de vue d'Euler, il faudrait fournir l'exemple d'un géomètre qui, *n'ayant aucune préoccupation relative aux séries divergentes et à la légitimité de leur emploi*, a trouvé, dans des calculs ayant pour objet des recherches d'un ordre tout différent, une série pour laquelle la règle d'Euler est en défaut.

» Tant qu'on n'aura pas fourni un tel exemple, on pourra dire que cette règle est exacte, *au point de vue pratique et expérimental*, puisque, depuis un siècle, elle n'aurait trompé aucun des géomètres qui l'auraient appliquée, sauf ceux qui se seraient précisément proposé comme but de la mettre en défaut; ceux-là, non plus, n'auraient d'ailleurs pas été trompés, puisqu'ils savaient à l'avance le but vers lequel ils tendaient. »

J'ajouterai que ceux-là même qui ne seraient pas entièrement d'accord avec moi sur ce point de vue initial ne peuvent contester la rigueur et l'importance de la théorie des séries divergentes à laquelle il m'a conduit et que de nombreux géomètres ont développée depuis mes premiers travaux. D'une manière analogue, ceux-là même qui considéreraient que l'interprétation littérale des textes (2) justifie les objections élevées contre ce que je persiste à regarder, pour ma part, comme une déformation, je dirais presque une caricature de ma définition de l'intégrale des fonctions non bornées, ceux-là même ne pourront, je pense, contester la rigueur et l'utilité mathématique des déductions qui ont été ou qui seront tirées de cette définition par ceux qui se seront placés à mon point de vue.

(1) *Leçons sur les séries divergentes*, p. 8 (Gauthier-Villars, 1901).

(2) Ou plus exactement du texte seul de mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* (1912), sans tenir compte de ma Note antérieure des *Comptes rendus* ni de ma Note des *Annales de l'École Normale* (1919).