JEAN CLAIRIN

# Sur les transformations de quelques équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 37 (1920), p. 95-105

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1920_3_37__95_0>

SUR LES

# TRANSFORMATIONS DE QUELQUES ÉQUATIONS LINÉAIRES

## AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

PAR M. JEAN CLAIRIN.

Dans ce travail [1] j'emploierai les notations de Monge : $x$ et $y$ étant deux variables indépendantes et $z$ une fonction de ces variables, les dérivées premières $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont représentées par $p$ et $q$, les dérivées secondes $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ par $r$, $s$, $t$. Les lettres $z$, $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ affectées d'indices désigneront de même une fonction de $x$ et $y$ ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres. En outre, X et Y représenteront toujours deux fonctions dépendant la première de $x$, la seconde de $y$ seulement. Lorsqu'il y aura lieu de considérer simultanément plusieurs fonctions analogues, nous ajouterons un indice à côté des lettres X, Y, les accents indiquant toujours la dérivation. Les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre que nous étudierons seront constamment supposées ne contenir ni $r$, ni $t$, ni terme indépendant de $z$ et de ses dérivées : ces hypothèses ne restreignent pas la généralité.

D'une équation linéaire on peut déduire deux nouvelles équations également linéaires à l'aide des transformations de Laplace qui sont les seules transformations de Bäcklund de première espèce que l'on

---

[1] Ce travail provient des papiers que Clairin a laissés à Lille en 1914 à son départ pour la guerre. Ces papiers, maintes fois compulsés par des mains allemandes, ont été en 1918 retrouvés en désordre par M$^{me}$ Clairin et remis pieusement par elle aux collègues de son mari à la Faculté des Sciences de Lille. Le dépouillement n'en est pas achevé, et peut fournir d'autres travaux.

puisse effectuer ([1]). J'ai indiqué antérieurement ([2]) toutes les transformations de Bäcklund de deuxième espèce qui sont applicables à une telle équation, les variables indépendantes n'étant pas changées. Pour les transformations de Bäcklund de troisième espèce, même si les variables indépendantes sont conservées, le problème est plus compliqué. J'ai pu déterminer un certain nombre de ces transformations en faisant usage des remarques suivantes.

Une équation linéaire admet toutes les transformations infinitésimales de contact ayant pour fonction caractéristique $\lambda z + \psi(x, y)$, $\lambda$ désignant une constante et $\psi(x, y)$ une intégrale quelconque de l'équation. Des changements très simples de fonction inconnue permettent de supposer la fonction caractéristique égale à $z$ tant que $\lambda$ est différent de zéro et à $1$ si $\lambda$ est nul. Je me suis proposé de rechercher toutes les transformations $(B_3)$ qui puissent s'appliquer à une équation linéaire, les intégrales de cette équation qui correspondent à une même intégrale de l'équation transformée se déduisant de l'une d'entre elles à l'aide des transformations du groupe engendré par la transformation infinitésimale de contact $z$ ou par la transformation infinitésimale $1$, c'est-à-dire en multipliant cette intégrale par une constante arbitraire ou en lui ajoutant une constante arbitraire.

Ce travail comprend deux Parties : dans la première sont étudiées les transformations de Bäcklund qui correspondent ainsi qu'il vient d'être dit à la transformation infinitésimale de contact $z$, dans la seconde celles qui correspondent à la transformation $1$.

## I.

L'équation linéaire étant supposée mise sous la forme réduite

$$s + a(x, y)p + b(x, y)z = 0, \tag{1}$$

en remplaçant $z$ par $e^{z_0}$ il vient

$$s_0 + p_0 q_0 + a(x, y)p_0 + b(x, y) = 0; \tag{2}$$

---

([1]) Étant donnés deux systèmes d'équations qui définissent deux transformations de Bäcklund, si des transformations de contact permettent de remplacer l'un de ces systèmes par l'autre, les deux transformations de Bäcklund sont considérées comme équivalentes.

([2]) *Annales de la Faculté de Toulouse*, 2e série, t. V, 1903, p. 435. — *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXIII, 1905, p. 90.

si $z$ est multipliée par une constante, $z_0$ est augmentée d'une quantité constante et réciproquement. Le problème que nous voulons résoudre revient donc à la recherche des transformations $(B_3)$ applicables à l'équation (2) telles que de toute intégrale de la transformée on déduise une infinité d'intégrales de (2) différant par une constante additive. Une telle transformation qui ne modifie pas les variables indépendantes est définie par deux équations qui ne contiennent pas $z_0$ :

$$p_1 = f(x, y, p_0; z_1),$$
$$q_1 = \varphi(x, y, q_0; z_1).$$

En écrivant que $f$ et $\varphi$ satisfont à la condition d'intégrabilité on trouve

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p_0} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_0}\right)s_0 + \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial f}{\partial z_1} - f\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = 0,$$

cette équation est identique à (2) si l'on a

$$(3) \qquad \Omega(x, y, p_0, q_0, z_1) = (p_0 q_0 + a p_0 + b)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_0} - \frac{\partial f}{\partial p_0}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \varphi\frac{\partial f}{\partial z_1} - f\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = 0.$$

On déduit de là

$$(4) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial p_0} = -(p_0 q_0 + a p_0 + b)\frac{\partial^2 f}{\partial p_0^2} + (q_0 + a)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_0} - \frac{\partial f}{\partial p_0}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial p_0} + \varphi\frac{\partial^2 f}{\partial p_0\, \partial z_1} - \frac{\partial f}{\partial p_0}\frac{\partial \varphi}{\partial z_1} = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{\partial \Omega}{\partial q_0} = (p_0 q_0 + a p_0 + b)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_0^2} + p_0\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_0} - \frac{\partial f}{\partial p_0}\right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial q_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_0}\frac{\partial f}{\partial z_1} - f\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_0\, \partial z_1} = 0,$$

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p_0\, \partial q_0} = (q_0 + a)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_0^2} - p_0\frac{\partial^2 f}{\partial p_0^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_0} - \frac{\partial f}{\partial p_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_0}\frac{\partial^2 f}{\partial p_0\, \partial z_1} - \frac{\partial f}{\partial p_0}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_0\, \partial z_1} = 0,$$

$$(7) \qquad \frac{\partial^3 \Omega}{\partial p_0^2\, \partial q_0} = -p_0\frac{\partial^3 f}{\partial p_0^3} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial p_0^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_0}\frac{\partial^3 f}{\partial p_0^2\, \partial z_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_0^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_0\, \partial z_1} = 0,$$

$$(8) \qquad \frac{\partial^3 \Omega}{\partial p_0\, \partial q_0^2} = (q_0 + a)\frac{\partial^3 \varphi}{\partial q_0^3} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_0^2}\frac{\partial^2 f}{\partial p_0\, \partial z_1} - \frac{\partial f}{\partial p_0}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial q_0^2\, \partial z_1} = 0,$$

$$(9) \qquad \frac{\partial^4 \Omega}{\partial p_0^2\, \partial q_0^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_0^2}\frac{\partial^3 f}{\partial p_0^2\, \partial z_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial p_0^2}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial q_0^2\, \partial z_1} = 0.$$

Écartons d'abord le cas où $f$ serait linéaire par rapport à $p_0$ ainsi que celui où $\varphi$ serait linéaire par rapport à $q_0$, on déduit de la dernière équation écrite

$$\frac{\dfrac{\partial^3 f}{\partial p_0^2\,\partial z_1}}{\dfrac{\partial^2 f}{\partial p_0^2}} = \frac{\dfrac{\partial^3 \varphi}{\partial q_0^2\,\partial z_1}}{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial q_0^2}} = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{H}(x, y, z_1)}{\partial z_1}}{\mathrm{H}(x, y, z_1)},$$

H désignant une fonction convenablement choisie des seules variables $x$, $y$, $z_1$ et l'on trouve en intégrant

$$f(x, y, p_0; z_1) = \mathrm{H}(x, y, z_1)\,g(x, y, p_0) + m(x, y, z_1)p_0 + n(x, y, z_1),$$
$$\varphi(x, y, q_0; z_1) = \mathrm{H}(x, y, z_1)\,\theta(x, y, q_0) + \mu(x, y, z_1)q_0 + \rho(x, y, z_1).$$

Prenons $\displaystyle\int \frac{dz_1}{\mathrm{H}(x, y, z_1)}$ comme nouvelle fonction inconnue au lieu de $z_1$, on peut écrire les équations de la transformation

$$p_1 = f(x, y, p_0; z_1) = g(x, y, p_0) + m(x, y, z_1)p_0 + n(x, y, z_1),$$
$$q_1 = \varphi(x, y, q_0; z_1) = \theta(x, y, q_0) + \mu(x, y, z_1)q_0 + \rho(x, y, z_1).$$

Les lettres $m$, $n$, $\mu$, $\rho$ ne représentent plus les mêmes fonctions que précédemment, nous les conservons cependant pour ne pas compliquer outre mesure l'écriture, de même que nous désignons encore par $z_1$ la nouvelle fonction inconnue. Nous ferons plusieurs fois de même dans la suite de ce travail.

Écrivons que les expressions trouvées pour $f$ et $\varphi$ satisfont à la condition (7), il vient

$$p_0\frac{\partial^3 g}{\partial p_0^3} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z_1} + 2\right)\frac{\partial^2 g}{\partial p_0^2} = 0.$$

Cette équation montre d'abord que $\mu(x, y, z_1)$ est une fonction linéaire de $z_1$

$$\mu = -\alpha(x, y)z_1 - \beta(x, y)$$

et l'on doit avoir

$$p_0\frac{\partial^3 g}{\partial p_0^3} = (\alpha - 2)\frac{\partial^2 g}{\partial p_0^2}.$$

On tire de là si $\alpha(x, y)$ est nulle

$$g(x, y, p_0) = \gamma(x, y)\,\mathrm{Log}\,p_0,$$

si $\alpha$ est égale à un

$$g(x, y, p_0) = \gamma(x, y) p_0 \operatorname{Log} p_0,$$

et dans tous les autres cas

$$g(x, y, p_0) = \gamma(x, y) p_0^\alpha,$$

en négligeant d'écrire une fonction linéaire de $p_0$, ce qui est permis puisque nous cherchons à déterminer $f$ qui s'obtient précisément en ajoutant à $g$ une fonction linéaire de $p_0$.

Examinons en premier lieu le cas où $\alpha(x, y)$ n'est égale ni à o ni à 1, les équations de la transformation sont

$$\begin{gathered} p_1 = f(x, y, p_0; z_1) = \gamma(x, y) p_0^\alpha + m(x, y, z_1) p_0 + n(x, y, z_1), \\ q_1 = \varphi(x, y, q_0; z_1) = \theta(x, y, q_0) - [\alpha(x, y) z_1 + \beta(x, y)] q_0 + \rho(x, y, z_1). \end{gathered}$$

Un changement très simple de fonction inconnue permet toujours de revenir au cas où $\gamma(x, y)$ est égale à l'unité et où $\beta(x, y)$ est nulle. On peut alors écrire l'équation (6)

$$\begin{aligned} (10) \qquad & [q_0 + a(x, y)] \frac{\partial^2 \theta}{\partial q_0^2} + \frac{\partial \theta}{\partial q_0} - \alpha(x, y) z_1 \\ & \qquad + [\alpha(x, y) - 1] m(x, y, z_1) + \left[ \frac{\partial \theta}{\partial q_0} - \alpha(x, y) z_1 \right] \frac{\partial m}{\partial z_1} = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit en dérivant par rapport à $z_1$

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial q_0} - \alpha z_1 \right) \frac{\partial^2 m}{\partial z_1^2} = \frac{\partial m}{\partial z_1} + \alpha.$$

On tire facilement de cette dernière équation

$$m(x, y, z_1) = -\alpha(x, y) z_1 - \xi(x, y),$$

puis en portant dans (10) et en intégrant, il vient

$$\theta(x, y, q_0) = \zeta(x. y)(q_0 + a)^\alpha - \xi(x, y) q_0,$$

si nous négligeons un terme indépendant de $q_0$, ce qui est permis à condition de modifier la fonction $\rho(x, y, z_1)$. En ajoutant encore à $z_1$ une fonction convenable de $x$ et $y$, on revient au cas où $\xi(x, y)$ est nulle et les équations de la transformation sont

$$p_1 = f(x, y, p_0; z_1) = p_0^\alpha - \alpha p_0 z_1 + n(x, y, z_1),$$
$$q_1 = \varphi(x, y, q_0; z_1) = \zeta(x, y)(q_0 + a)^\alpha - \alpha q_0 z_1 + \rho(x, y, z_1).$$

Remplaçons maintenant $f$ et $\varphi$ par ces expressions dans (3), nous trouvons après réductions

$$\begin{aligned}(11)\quad & b\alpha\zeta(q_0+a)^{\alpha-1} - (ap_0+b)\alpha p_0^{\alpha-1} + \frac{\partial\alpha}{\partial y} p_0^\alpha \operatorname{Log} p_0 - \frac{\partial\alpha}{\partial y} p_0 z_1 \\ & + \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}(q_0+a)^\alpha + \alpha\zeta(q_0+a)^{\alpha-1}\frac{\partial a}{\partial x} \\ & - \zeta\frac{\partial\alpha}{\partial x}(q_0+a)^\alpha \operatorname{Log}(q_0+a) + \frac{\partial\alpha}{\partial x} q_0 z_1 - \frac{\partial\rho}{\partial x} - \alpha\rho p_0 + \alpha n q_0 \\ & + \frac{\partial n}{\partial z_1}[\zeta(q_0+a)^\alpha - \alpha q_0 z_1 + \rho] - \frac{\partial\rho}{\partial z_1}[p_0^\alpha - \alpha p_0 z_1 + n] = 0.\end{aligned}$$

Les dérivées $\frac{\partial\alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial\alpha}{\partial y}$ doivent évidemment être nulles, c'est-à-dire que $\alpha$ doit se réduire à une constante. Supposons qu'il en soit ainsi, le premier membre de l'égalité précédente contient des termes en $p^\alpha$, $p^{\alpha-1}$, $p$ qui ne sont pas semblables tant que $\alpha$ n'est pas égale à 2. Ecartons d'abord ce cas et écrivons que les coefficients des termes en $p_0^{\alpha-1}$, $(q_0+a)^{\alpha-1}$ sont nuls, c'est-à-dire que l'on a

$$\alpha\zeta\left(b - \frac{\partial a}{\partial x}\right) = 0, \qquad \alpha b = 0.$$

Ces égalités expriment que les invariants de l'équation (1) sont nuls, c'est-à-dire qu'en augmentant $z_0$ d'une fonction convenablement choisie de $x$ et $y$, l'équation (2) se réduit à

$$s_0 + p_0 q_0 = 0,$$

$a$ et $b$ étant nuls. Remplaçons donc $a$ et $b$ par zéro dans (11) :

$$\begin{aligned}& \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial\zeta}{\partial x} q_0^\alpha - \frac{\partial\rho}{\partial x} - \alpha\rho p_0 + \alpha n q_0 \\ & \quad + \frac{\partial n}{\partial z_1}[\zeta q_0^\alpha - \alpha q_0 z_1 + \rho] - \frac{\partial\rho}{\partial z_1}[p_0^\alpha - \alpha p_0 z_1 + n] = 0.\end{aligned}$$

En écrivant les conditions qui résultent de cette égalité on trouve

$$z_1 \frac{\partial \rho}{\partial z_1} - \rho = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial z_1} = 0,$$

donc $\rho$ est nulle. On a ensuite

$$z_1 \frac{\partial n}{\partial z_1} - n = 0, \qquad \frac{\partial n}{\partial z_1} = \frac{\partial \operatorname{Log} \zeta}{\partial x};$$

d'où

$$n = \frac{\partial \operatorname{Log} \zeta}{\partial x} z_1.$$

Enfin on trouve

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{\partial^2 \operatorname{Log} \zeta}{\partial x \, \partial y} z_1 = 0$$

ou

$$\zeta(x, y) = \mathrm{XY},$$

ce qui permet d'écrire les équations de la transformation

$$p_1 = p_0^\alpha - \alpha p_0 z_1 + \frac{\mathrm{X}'}{\mathrm{X}} z_1,$$
$$q_1 = \mathrm{XY} q_0^\alpha - \alpha q_0 z_1.$$

Remplaçons $z_1$ par $\mathrm{X} z_1$ et prenons comme deuxième variable indépendante, au lieu de $y$, $\int \mathrm{Y}^{\frac{1}{\alpha-1}} dy$, ces équations deviennent

$$p_1 = p_0^\alpha - \alpha p_0 z_1,$$
$$q_1 = q_0^\alpha - \alpha q_0 z_1.$$

Définissons $z_2$ par l'égalité

$$z_1 = z_2^{1-\alpha},$$

remplaçons dans les équations de la transformation $z_1$ par cette valeur, $p_1$ et $q_1$ par leurs expressions en fonction de $z_2$, $p_2$, $q_2$, nous avons

$$(13) \qquad \begin{cases} (1-\alpha) p_2 = (p_0 z_2)^\alpha - \alpha p_0 z_2, \\ (1-\alpha) q_2 = (q_0 z_2)^\alpha - \alpha q_0 z_2. \end{cases}$$

Il est aisé de trouver l'équation à laquelle satisfait $z_2$ : les deux dernières équations donnent

$$p_0 z_2 = \omega(p_2), \qquad q_0 z_2 = \varpi(q_2),$$

En écrivant que les expressions trouvées pour $p_0$ et $q_0$ satisfont à la condition d'intégrabilité, il vient

$$(14) \qquad z_2 s_2 = \frac{\omega(p_2)q_2 - \varpi(q_2)p_2}{\dfrac{d\omega}{dp_2} - \dfrac{d\varpi}{dq_2}}.$$

Si nous remplaçons dans les équations (13) $p_0 z_2$ et $q_0 z_2$ respectivement par $\omega$ et $\varpi$ et si nous dérivons, nous trouvons

$$\frac{d\omega}{dp_2} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{1}{\omega^{\alpha-1}-1} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\omega}{\omega^{\alpha}-\omega} = \frac{1}{\alpha}\frac{\omega}{p_2-\omega},$$
$$\frac{d\varpi}{dq_2} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{1}{\varpi^{\alpha-1}-1} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\varpi}{\varpi^{\alpha}-\varpi} = \frac{1}{\alpha}\frac{\varpi}{q_2-\varpi},$$

et l'équation (14) devient, après quelques simplifications,

$$z_2 s_2 = \alpha[p_2 - \omega(p_2)][q_2 - \varpi(q_2)]$$

ou encore

$$(15) \qquad z_2 s_2 = \omega_1(p_2)\varpi_1(q_2)$$

en posant

$$\omega_1(p_2) = \sqrt{\alpha}[p_2 - \omega(p_2)], \qquad \varpi_1(q_2) = \sqrt{\alpha}[q_2 - \varpi(q_2)],$$

$\omega_1(p_2)$ et $\varpi_1(q_2)$ satisfaisant d'ailleurs aux conditions

$$(16) \qquad \frac{d\omega_1}{dp_2} = \frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{p_2}{\omega_1(p_2)}, \qquad \frac{d\varpi_1}{dq_2} = \frac{\alpha+1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{q_2}{\varpi_1(q_2)}.$$

L'équation (15) que nous venons d'obtenir dérive, d'après ce qui précède, de

$$s = 0$$

par la transformation

$$(1-\alpha)p_2 = \left(\frac{pz_2}{z}\right)^{\alpha} - \alpha\frac{pz_2}{z},$$
$$(1-\alpha)q_2 = \left(\frac{qz_2}{z}\right)^{\alpha} - \alpha\frac{qz_2}{z},$$

comme on le voit en remplaçant dans (13) $p_0$ et $q_0$ par $\frac{p}{z}$ et $\frac{q}{z}$ ainsi qu'il résulte évidemment de la relation entre $z$ et $z_0$. Cette équation (15) a été intégrée par M. Goursat [1]. Nous remarquerons encore que dans le second membre des équations (16) le terme constant peut prendre toutes les valeurs différentes de 2, $\alpha$ n'étant égal ni à o ni à 1.

Les conditions que nous avons écrites pour exprimer que les fonctions $a$, $b$, $\alpha$, $\zeta$, $n$, $\rho$ satisfont à l'équation (11) sont toujours suffisantes, mais elles ne sont pas nécessaires si $\alpha$ est égale à 2. Il y a donc lieu d'examiner ce qui se passe dans ce cas particulier; nous reviendrons un peu plus loin là-dessus, nous supposerons d'abord que la constante $\alpha$ prenne les valeurs o ou 1, les résultats que nous obtiendrons présentant de très grandes analogies avec celui qui vient d'être établi.

Nous avons vu que si $\alpha$ est égale à o on a

$$p_1 = f(x, y, p_0;\, z_1) = \operatorname{Log} p_0 + m(x, y, z_1)p_0 + n(x, y, z_1),$$
$$q_1 = \varphi(x, y, q_0;\, z_1) = \theta(x, y, q_0) + \rho(x, y, z_1),$$

la fonction désignée plus haut par $\beta$ pouvant être supposée nulle sans restreindre la généralité, de même que la fonction $\gamma$ peut être remplacée par l'unité.

La condition (6) s'écrit alors

$$(q_0 + a)\frac{\partial^2\theta}{\partial q_0^2} + \left(\frac{\partial m}{\partial z_1} + 1\right)\frac{\partial\theta}{\partial q_0} - m(x, y, z_1) = 0.$$

En différentiant par rapport à $q_0$ et $z_1$ on trouve facilement que $m$ doit dépendre de $x$ et $y$ seulement, puis en intégrant il vient

$$\theta(x, y, q_0) = \zeta(x, y)\operatorname{Log}[q_0 + a(x, y)] + m(x, y)q_0.$$

Remplaçons dans (3) $f$ et $\varphi$ par les expressions ainsi trouvées, après quelques réductions il reste

$$-\frac{b}{p_0} - (q_0 + a) + \zeta p_0 + \frac{b\zeta}{q_0 + a} + \frac{\partial m}{\partial y}p_0 + \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial\zeta}{\partial x}\operatorname{Log}(q_0 + a)$$
$$-\frac{\zeta\dfrac{\partial a}{\partial x}}{q_0 + a} - \frac{\partial m}{\partial x}q_0 - \frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial n}{\partial z_1}[\zeta\operatorname{Log}(q_0 + a) + mq_0 + \rho]$$
$$-\frac{\partial\rho}{\partial z_1}[\operatorname{Log} p_0 + m p_0 + n] = 0.$$

---

[1] *Annales de la Faculté de Toulouse*, 2e série, t. I, 1899, p. 47.

On voit immédiatement que $b$ et $\frac{\partial a}{\partial x}$ doivent être nuls, c'est-à-dire que $a$ et $b$ peuvent être remplacées par zéro, comme il a été expliqué; les autres conditions s'écrivent

$$\frac{\partial \rho}{\partial z_1} = 0, \qquad \zeta \frac{\partial n}{\partial z_1} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial m}{\partial y} + \zeta = 0,$$
$$\frac{\partial m}{\partial x} - m \frac{\partial n}{\partial z_1} + 1 = 0, \qquad \frac{\partial n}{\partial y} + \rho \frac{\partial n}{\partial z_1} = \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

On peut augmenter $z_1$ d'une fonction de $x$ et de $y$ sans changer la forme de $f$ et $\varphi$ et l'on revient ainsi au cas où $\rho$ est nulle. La dernière équation montre alors que $n$ est une fonction de $x$ et $z_1$ seulement : d'après l'équation

$$\zeta \frac{\partial n}{\partial z_1} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0,$$

on aura

$$\zeta(x, y) = XY', \qquad n(x, z_1) = \frac{X'}{X} z_1,$$

en négligeant d'ajouter à l'expression trouvée pour $n$ une fonction de $x$ que l'on peut toujours faire disparaître en changeant encore $z_1$. Enfin les équations non employées jusqu'ici donnent

$$m = -XY + X_0,$$

$X$ et $X_0$ étant liées par la relation

$$\left(\frac{X_0}{X}\right)' + \frac{1}{X} = 0.$$

La transformation est donc définie par les équations

$$\frac{Xp_1 - X'z_1}{X^2} = \frac{1}{X} \operatorname{Log} p_0 + \left(\frac{X_0}{X} - Y\right) p_0,$$
$$\frac{q_1}{X} = Y' \operatorname{Log} q_0 + \left(\frac{X_0}{X} - Y\right) q_0.$$

Faisons un changement de variables en prenant $-\frac{X_0}{X}$ et $Y$ pour nouvelles variables indépendantes et

$$\frac{z_1}{X} + \int \frac{\operatorname{Log} X}{X} dx - \int Y' \operatorname{Log} Y' dy - \left(\frac{X_0}{X} - Y\right) \operatorname{Log}\left(\frac{X_0}{X} - Y\right)$$

pour nouvelle fonction inconnue, des calculs faciles montrent que les équations précédentes deviennent, si l'on remplace en outre $z_0$ par $\log z$,

$$(17)\quad \begin{cases} p_1 - 1 = \operatorname{Log}\left[\dfrac{(-x-y)p}{z}\right] - \dfrac{(x+y)p}{z}, \\ q_1 - 1 = \operatorname{Log}\left[\dfrac{(-x-y)q}{y}\right] - \dfrac{(x+y)q}{z}; \end{cases}$$

$z$ est une intégrale de l'équation

$$s = 0.$$

En résolvant les équations (17), il vient

$$(x+y)\frac{p}{z} = \omega(p_1), \qquad (x+y)\frac{q}{z} = \varpi(q_1),$$

$\omega$ et $\varpi$ satisfaisant aux égalités

$$\frac{d\omega}{dp_1} = \frac{\omega}{1-\omega}, \qquad \frac{d\varpi}{dq_1} = \frac{\varpi}{1-\varpi},$$

que l'on déduit immédiatement de (17) en dérivant.

Il suffit d'écrire que $p$ et $q$ satisfont à la condition d'intégrabilité et de tenir compte des dernières relations pour arriver à l'équation

$$(18)\quad (x+y)s_1 = [1-\omega(p_1)][1-\varpi(q_1)] = \omega_1(p_1)\varpi_1(q_1),$$

si l'on pose

$$1-\omega(p_1) = \omega_1(p_1), \qquad 1-\varpi(q_1) = \varpi_1(q_1).$$

On déduit du reste sans difficulté des équations (17)

$$\omega_1(p_1) = 1 + e^{p_1 - \omega_1(p_1)}, \qquad \varpi_1(q_1) = 1 + e^{q_1 - \varpi_1(q_1)},$$

et l'on voit que l'équation (18) définie par la transformation (17) est encore une équation étudiée par M. Goursat dans le Mémoire cité plus haut.