

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

L. J. GRUEY

Recherches sur la flexion de la lunette méridienne

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1^{re} série, tome 7 (1870), p. 211-245

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1870_1_7__211_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RECHERCHES

SUR LA

FLEXION DE LA LUNETTE MÉRIDIENNE,

PAR M. L.-J. GRUEY,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE CLERMONT-FERRAND.

INTRODUCTION.

1. Si toutes les parties d'une lunette méridienne formaient un système parfaitement rigide, l'axe optique aurait une direction constante par rapport à trois droites liées invariablement à ce système. Mais les deux canons ou les deux moitiés du tube, qui réunit l'objectif à l'oculaire, fléchissent individuellement sous l'action de leur poids, autour de leur axe commun de rotation et suivant toute probabilité de quantités inégales. Il en résulte, lorsque la hauteur de la lunette varie, un changement dans la direction de l'axe optique, à l'intérieur de l'instrument.

Le cercle de déclinaison qui accompagne ordinairement la lunette méridienne se déforme par son propre poids; mais les effets de cette déformation disparaissent, en grande partie, dans la moyenne des lectures faites à des microscopes placés symétriquement, par rapport à la verticale, autour du centre de la graduation.

L'axe de rotation fléchit aussi sous le poids de tout le système; mais, comme cette flexion est à peu près constante pour les diverses hauteurs de la lunette, son influence sur l'observation n'est que du second ordre.

2. La flexion du tube est ainsi la principale et la seule que nous voulions étudier spécialement. Elle peut produire sur l'axe optique d'une

grande lunette un déplacement angulaire supérieur à 1 seconde. Il est donc nécessaire de la déterminer pour rendre comparables entre elles des observations faites à des hauteurs différentes. De l'aveu de tous les astronomes, cette détermination a été jusqu'à ce jour très-imparfaite. La discussion des méthodes suivies dans les divers observatoires exigerait des développements trop longs pour trouver place ici. Il nous suffira de dire qu'elles reposent toutes sur des suppositions plus ou moins gratuites, dont l'erreur peut être, dans certains cas, de l'ordre de la flexion à mesurer.

La flexion est si mal connue, que, pour l'éliminer autant que possible, l'observateur *doit toujours* rapporter les positions du Soleil et des planètes à des étoiles situées sur le parallèle de ces astres ou sur des parallèles très-voisins.

3. L'objet de notre travail est de montrer qu'il est possible de mesurer la flexion, comme un tour de vis, une distance de fils, en dehors de toute hypothèse, par des moyens purement physiques et pour une hauteur quelconque de la lunette.

Dans la première Partie, nous établissons des formules générales qui expriment les effets optiques de la flexion sur un système de lentilles sphériques dont les centres sont distribués dans le voisinage d'une droite.

Dans la seconde Partie, nous déduisons, de la mesure directe de quelques-uns de ces effets, la *flexion astronomique* ou la correction qu'il faut apporter aux observations méridiennes, pour tenir compte de la flexion de la lunette.

PREMIÈRE PARTIE.

§ I. — Réfraction.

1. *Réfraction par une surface.* — Considérons un premier et un second milieu, d'indices de réfraction n et n' , traversés successivement

par un rayon de lumière qui se brise à leur surface de séparation. Soient $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \lambda, \mu, \nu$ les cosinus des angles formés avec trois axes rectangulaires ox, oy, oz par les directions respectives du rayon incident, du rayon réfracté et de la normale à la surface au point d'incidence. Nous supposons la direction de la normale prise dans le sens du rayon réfracté, et que β, γ, μ, ν sont de petites quantités du premier ordre.

Les lois de la réfraction donnent rigoureusement

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha' = l\alpha \pm m\lambda, \\ \beta' = l\beta \pm m\mu, \\ \gamma' = l\gamma \pm m\nu, \end{cases}$$

et

$$(2) \quad \frac{1 - (\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)^2}{1 - (\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma')^2} = \frac{n'^2}{n^2},$$

l et m désignant des quantités positives et le signe \pm répondant à $n' \gtrless n$.

Les relations (1), (2), jointes à celles qui unissent les trois cosinus d'une même direction, donnent facilement

$$l = \frac{n}{n'}, \quad m = \pm \frac{n' - n}{n'},$$

et par suite

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha' = \frac{n}{n'} \alpha + \frac{n' - n}{n'} \lambda, \\ \beta' = \frac{n}{n'} \beta + \frac{n' - n}{n'} \mu, \\ \gamma' = \frac{n}{n'} \gamma + \frac{n' - n}{n'} \nu, \end{cases}$$

en négligeant le second ordre dans m et α' , et le troisième dans β' et γ' .

2. *Réfraction par une suite de surfaces sphériques dont les centres sont voisins d'une ligne droite.* — Prenons cette droite pour axe des x , et conservons pour chaque surface les notations du numéro précédent affectées du nombre d'accents qui répond au rang de cette surface.

Désignons par $\rho, \rho', \rho'', \dots$ les rayons des diverses surfaces, par N, N', N'', \dots les abscisses de leurs intersections avec $o\alpha$, par $M, \eta, \zeta; M', \eta', \zeta', \dots$ les coordonnées de leurs centres. Les abscisses M, M', \dots sont finies, et les ordonnées latérales $\eta, \zeta, \dots; \eta', \zeta', \dots$ des petites quantités du premier ordre.

Désignons encore par $a, b, c; a', b', c', \dots$ les coordonnées des divers points d'incidence successive du rayon lumineux, qui sont du même ordre de grandeur que les coordonnées correspondantes des centres.

Les équations du rayon incident et successivement réfracté seront, en négligeant le troisième ordre,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \beta(x - N) + b, \\ z = \gamma(x - N) + c; \\ y = \beta'(x - N') + b', \\ z = \gamma'(x - N') + c'; \\ y = \beta''(x - N'') + b'', \\ \dots \end{array} \right.$$

puisque $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ ne diffèrent de 1 et a, a', a'', \dots de N, N', N'', \dots que d'une quantité du second ordre.

Les formules (3) établies généralement ont lieu pour chaque réfraction.

Il s'agit de trouver $\beta', \gamma'; \beta'', \gamma''; \dots; b', c'; b'', c''; \dots$; connaissant β, γ et b, c .

Si l'on remarque que

$$\begin{aligned} b &= \rho\mu + \eta, & b' &= \rho'\mu' + \eta', \dots, \\ c &= \rho\nu + \zeta, & c' &= \rho'\nu' + \zeta', \dots, \end{aligned}$$

on aura d'abord, en chassant $\mu, \nu; \mu', \nu'; \dots$ des relations (3),

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} n'\beta' = n\beta + \frac{n' - n}{\rho}(b - \eta), \\ n'\gamma' = n\gamma + \frac{n' - n}{\rho}(c - \zeta), \end{array} \right.$$

Écrivant ensuite que le premier rayon réfracté passe par (a, b, c) , le second par (a', b', c') ,..., et remplaçant a par N , on aura, par les équations (4),

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} b' = b + \beta'(N' - N), \\ c' = c + \gamma'(N' - N), \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Les relations (5) et (6) permettent évidemment de suivre le rayon lumineux dans ses réfractions successives.

3. Comme les quantités $\beta, \beta', \dots; \gamma, \gamma', \dots$ sont accompagnées, dans les relations (5), des facteurs n, n', \dots , qui n'existent pas dans les relations (6), posons, pour faciliter l'usage de ces relations,

$$\begin{array}{l} n\beta = B, \quad n\gamma = C, \\ n'\beta' = B', \quad n'\gamma' = C', \\ \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots \end{array}$$

Posons encore, dans le même but,

$$\begin{array}{l} \frac{n' - n}{\rho} = r, \quad \frac{N' - N}{n'} = s', \\ \frac{n'' - n'}{\rho'} = r', \quad \frac{N'' - N'}{n''} = s'', \\ \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots, \\ \frac{n^{p+1} - n^p}{\rho^p} = r^p, \quad \frac{N^p - N^{p-1}}{n^p} = s^p; \end{array}$$

les équations successives du rayon lumineux seront, en négligeant le troisième ordre,

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{B}{n}(x - N) + b, \\ z = \frac{C}{n}(x - N) + c; \\ y = \frac{B'}{n'}(x - N') + b', \\ z = \frac{C'}{n'}(x - N') + c'; \end{array} \right.$$

avec les conditions

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} B' = rb + B - r\eta, \\ b' = s'B' + b; \\ B'' = r'b' + B' - r'\eta', \\ b'' = s''B'' + b'; \\ \dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

et un système de relations identique à (8), en C, C', ...; c, c', ..., qu'il est inutile d'écrire.

4. Soit $(p + 1)$ le nombre des surfaces réfringentes. L'avant-dernier rayon réfracté sera

$$y = \frac{B^p}{n^p} (x - N^p) + b^p,$$

$$z = \frac{C^p}{n^p} (x - N^p) + c^p,$$

et le rayon émergent

$$y = \frac{B^{p+1}}{n^{p+1}} (x - N^{p+1}) + b^{p+1},$$

$$z = \frac{C^{p+1}}{n^{p+1}} (x - N^{p+1}) + c^{p+1}.$$

Mais, comme toutes les surfaces ont été traversées, N^{p+1} , b^{p+1} , c^{p+1} ne peuvent être considérés que comme les coordonnées du point d'incidence du rayon final sur une surface arbitraire, ou comme les coordonnées d'un point arbitraire de ce rayon. Choisissons le point d'émergence en prenant $N^{p+1} = N^p$, et par suite $b^{p+1} = b^p$ et $c^{p+1} = c^p$; le dernier couple des équations (7), formé des équations du rayon émergent, sera

$$y = \frac{B^{p+1}}{n^{p+1}} (x - N^p) + b^{p+1},$$

$$z = \frac{C^{p+1}}{n^{p+1}} (x - N^p) + c^{p+1},$$

et le dernier couple des conditions (8) sera

$$B^{p+1} = r^p b^p + B^p - r^p \eta^p,$$

$$b^{p+1} = b^p.$$

Les conditions (8) et les conditions identiques en C, c; C', c',... permettront de passer de proche en proche du rayon incident au rayon émergent.

5. Le système (8) ne se résout pas immédiatement par l'emploi des fractions continues; mais nous le décomposons en systèmes successifs, solubles immédiatement par ces fractions, de la manière suivante.

Considérons généralement le système

$$\begin{aligned} A_2 &= a_0 A_1 + A_0 - \alpha_0, \\ A_3 &= a_1 A_2 + A_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ A_{2i} &= a_{2i-2} A_{2i-1} + A_{2i-2} - \alpha_{2i-2}, \\ A_{2i+1} &= a_{2i-1} A_{2i} + A_{2i-1}, \\ A_{2i+2} &= a_{2i} A_{2i+1} + A_{2i} - \alpha_{2i}. \end{aligned}$$

On en tire, en procédant de bas en haut par divisions successives,

$$(9) \quad \frac{A_{2i+2}}{A_{2i+1}} = a_{2i} + \frac{1}{a_{2i-1} + \frac{1}{a_{2i-2} + \dots + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_0 + \frac{1}{\frac{A_1 + B_1}{A_0 + B_0}}}}}}$$

en posant successivement et dans le même ordre

$$(9') \quad \left\{ \begin{aligned} B_2 &= a_0 B_1 + B_0 + \alpha_0, \\ B_3 &= a_1 B_2 + B_1, \\ &\dots\dots\dots, \\ B_{2i} &= a_{2i-2} B_{2i-1} + B_{2i-2} + \alpha_{2i-2}, \\ 0 &= a_{2i-1} B_{2i} + B_{2i-1}, \\ 0 &= B_{2i} + \alpha_{2i}. \end{aligned} \right.$$

Ce nouveau système, abstraction faite des deux dernières relations qui déterminent B_{2i-1} et B_{2i}, est de même forme que le système pri-

mitif, à cela près que le signe des quantités α est changé. On aura donc, par le même procédé,

$$(10) \quad \frac{B_{2i}}{B_{2i-1}} = a_{2i-2} + \frac{1}{a_{2i-3}} + \dots + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_0 + \frac{1}{\frac{B_1 + C_1}{B_0 + C_0}}}}$$

avec

$$(10') \quad \left\{ \begin{array}{l} C_2 = a_0 C_1 + C_0 - \alpha_0, \\ C_3 = a_1 C_2 + C_1, \\ \dots \dots \dots \\ C_{2i-2} = a_{2i-4} C_{2i-3} + C_{2i-4} - \alpha_{2i-4}, \\ 0 = a_{2i-3} C_{2i-2} + C_{2i-3}, \\ 0 = \quad \quad \quad C_{2i-2} - \alpha_{2i-2}, \end{array} \right.$$

et ainsi de suite jusqu'à un dernier système de même forme

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} H_2 = a_0 H_1 + H_0 \pm \alpha_0, \\ 0 = a_1 H_2 + H_1, \\ 0 = \quad \quad \quad H_2 \pm \alpha_2, \end{array} \right.$$

le signe + et le signe - correspondant au cas de i impair et de i pair.

6. Si donc on désigne les dernières réduites des fractions

$$a_m + \frac{1}{a_{m-1} + \frac{1}{a_{m-2} + \dots + \frac{1}{a_0}}}$$

et

$$a_m + \frac{1}{a_{m-1} + \frac{1}{a_{m-2} + \dots + \frac{1}{a_1}}}$$

respectivement par $\frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}$ et $\frac{p'_m}{q'_{m+1}}$, on a, par les relations (9), (10), (11)

et la théorie élémentaire des fractions continues,

$$\begin{aligned}
 + (A_0 + B_0) &= - (p_{2i+1} A_{2i+1} - q_{2i+1} A_{2i+2}), \\
 - (B_0 + C_0) &= + (p_{2i-1} B_{2i-1} - q_{2i-1} B_{2i}), \\
 &\dots\dots\dots, \\
 \pm (G_0 + H_0) &= \mp (p_3 G_3 - q_3 G_4), \\
 \mp (H_0 \pm \alpha_0) &= \pm (p_1 H_1 - q_1 H_2),
 \end{aligned}$$

les signes supérieurs correspondant à i impair et les inférieurs à i pair.

En ajoutant ces équations membre à membre, et remarquant qu'en vertu des deux dernières relations (9'), (10') et (11)

$$\begin{aligned}
 B_{2i-1} &= a_{2i-1} \alpha_{2i}, & B_{2i} &= - \alpha_{2i}, \\
 C_{2i-3} &= - a_{2i-3} \alpha_{2i-2}, & C_{2i-2} &= \alpha_{2i-2}, \\
 &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots, \\
 H_1 &= \pm a_1 \alpha_2, & H_2 &= \mp \alpha_2,
 \end{aligned}$$

on trouve

$$(12) \left\{ \begin{aligned}
 p_{2i+1} A_{2i+1} - q_{2i+1} A_{2i+2} &= - A_0 + (p_{2i-1} a_{2i-1} + q_{2i-1}) \alpha_{2i} \\
 &+ (p_{2i-3} a_{2i-3} + q_{2i-3}) \alpha_{2i-2} \\
 &+ \dots\dots\dots \\
 &+ (p_1 a_1 + q_1) \alpha_2 \\
 &+ \alpha_0.
 \end{aligned} \right.$$

On aura de même

$$\begin{aligned}
 + (A_1 + B_1) &= + (p'_{2i+1} A_{2i+1} - q'_{2i+1} A_{2i+2}), \\
 - (B_1 + C_1) &= - (p'_{2i-1} B_{2i-1} - q'_{2i-1} B_{2i}), \\
 &\dots\dots\dots, \\
 \pm (G_1 + H_1) &= \pm (p'_3 G_3 - q'_3 G_4), \\
 \mp (H_1 \mp a_1 \alpha_2) &= 0,
 \end{aligned}$$

et par suite

$$(13) \left\{ \begin{aligned}
 p'_{2i+1} A_{2i+1} - q'_{2i+1} A_{2i+2} &= A_1 + (p'_{2i-1} a_{2i-1} + q'_{2i-1}) \alpha_{2i} \\
 &+ (p'_{2i-3} a_{2i-3} + q'_{2i-3}) \alpha_{2i-2} \\
 &+ \dots\dots\dots \\
 &+ (p'_3 a_3 + q'_3) \alpha_4 \\
 &+ a_1 \alpha_2.
 \end{aligned} \right.$$

Mais on a

$$p_{m-1} a_{m-1} + q_{m-1} = p_m \quad \text{et} \quad p'_{m-1} a_{m-1} + q'_{m-1} = p'_m.$$

Si donc nous posons

$$(14) \quad \begin{cases} \omega_\alpha = -p_{2i} \alpha_{2i} - p_{2i-2} \alpha_{2i-2} - \dots - p_2 \alpha_2 - p_0 \alpha_0, \\ \omega'_\alpha = p'_{2i} \alpha_{2i} + p'_{2i-2} \alpha_{2i-2} + \dots + p'_2 \alpha_2, \end{cases}$$

avec la convention $p_0 = 1$, et si nous résolvons (12) et (13) par rapport à A_{2i+1} , A_{2i+2} , nous obtenons

$$A_{2i+1} = q'_{2i+1} (A_0 + \omega_\alpha) + q_{2i+1} (A_1 + \omega'_\alpha),$$

$$A_{2i+2} = p'_{2i+1} (A_0 + \omega_\alpha) + p_{2i+1} (A_1 + \omega'_\alpha).$$

7. Pour appliquer ces formules générales au système (8), il suffit de remplacer

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2i}$$

par

$$r, s', r', \dots, r^p,$$

et

$$\alpha_0, \alpha_2, \dots, \alpha_{2i}$$

par

$$r\eta, r'\eta', \dots, r^p\eta^p;$$

il vient alors, en désignant par R , R' et S , S' les valeurs actuelles de p_{2i+1} , p'_{2i+1} et q_{2i+1} , q'_{2i+1} , et par ω , ω' celles de ω_α , ω'_α ,

$$(15) \quad \begin{cases} B^{p+1} = R(b + \omega') + R'(B + \omega), \\ b^{p+1} = S(b + \omega') + S'(B + \omega), \end{cases}$$

où ω , ω' sont de l'ordre de η , η' .

Si l'on remplace dans ω , ω' les quantités η , η' , ... par ζ , ζ' , ... et qu'on désigne les résultats par ϖ , ϖ' , il vient, par les mêmes raisons,

$$(15') \quad \begin{cases} C^{p+1} = R(c + \varpi') + R'(C + \varpi), \\ c^{p+1} = S(c + \varpi') + S'(C + \varpi), \end{cases}$$

où ϖ , ϖ' sont de l'ordre de ζ , ζ' , ...

Le rayon émergent, correspondant à un rayon incident donné, sera donc déterminé par la connaissance des huit constantes R , R' , S , S' ; ω , ω' , ϖ , ϖ' . Les quatre premières sont finies, et les quatre dernières

de l'ordre des distances des centres des surfaces réfringentes à la droite autour de laquelle ils sont distribués.

On trouvera peut-être que l'expression de ces huit constantes, au moyen des données, est remarquable par sa simplicité et son élégance.

8. *Remarque.* — Nous avons fait dans les calculs qui précèdent, et nous ferons encore dans ceux qui suivent, tacitement usage de la propriété importante des réduites d'une fraction continue exprimée par la relation

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^n,$$

où $\frac{p_n}{q_n}$ désigne généralement la réduite de rang n .

§ II. — Points et plans principaux d'une lunette. Images.

9. Comme nous n'avons plus de loi de succession à mettre en évidence, nous désignerons dans ce qui suit par $B_1, b_1, C_1, c_1, N_1, n_1$ les quantités désignées jusqu'ici par $B^{p+1}, b^{p+1}, C^{p+1}, c^{p+1}, N^{p+1}, n^{p+1}$; de sorte que, le rayon incident étant

$$y = \frac{B}{n}(x - N) + b,$$

$$z = \frac{C}{n}(x - N) + c,$$

le rayon émergent sera

$$y' = \frac{B_1}{n_1}(x - N_1) + b_1,$$

$$z' = \frac{C_1}{n_1}(x - N_1) + c_1,$$

et l'on passera de l'un à l'autre au moyen des relations

$$(16) \quad \begin{cases} B_1 = R(b + \omega') + R'(B + \omega), \\ b_1 = S(b + \omega') + S'(B + \omega), \\ C_1 = R(c + \omega') + R'(C + \omega), \\ c_1 = S(c + \omega') + S'(C + \omega). \end{cases}$$

10. *Image d'un point.* — Si l'on écrit que le rayon incident passe

par le point (x_0, y_0, z_0) , on trouve, par un calcul facile, que le rayon émergent passe par le point (x, y, z) , tel que

$$(17) \quad \begin{cases} x = N_1 - n_1 \frac{(N - x_0)S + nS'}{(N - x_0)R + nR'}, \\ y = m(y_0 + \Omega), \\ z = m(z_0 + \Pi), \end{cases}$$

en posant

$$m = \frac{n}{nR' + (N - x_0)R},$$

$$\Omega = \omega' - (N - x_0) \frac{\omega}{n},$$

$$\Pi = \varpi' - (N - x_0) \frac{\varpi}{n}.$$

Le point p , dont les coordonnées sont x, y, z , est l'image du point p_0 , dont les coordonnées sont x_0, y_0, z_0 , ou son foyer conjugué.

Les plans P_0, P menés par p_0, p , perpendiculairement à l'axe ox , sont dits *plans conjugués*.

11. En assujettissant p_0 ou p et par suite P_0 et P à de certaines conditions particulières, on obtient *les points et les plans principaux*.

1° Les conditions $x_0 = \infty, \frac{y_0}{x_0} = \beta, \frac{z_0}{x_0} = \gamma$ donnent, pour l'image d'un faisceau parallèle de direction (β, γ) , le point

$$(18) \quad \begin{cases} x = N_1 - n_1 \frac{S}{R}, \\ y = -\frac{n}{R} \left(\beta + \frac{\omega}{n} \right), \\ z = -\frac{n}{R} \left(\gamma + \frac{\varpi}{n} \right); \end{cases}$$

le plan P est alors le *plan focal principal*, et son abscisse x le *foyer principal*.

Il est utile de remarquer sur les formules (18) que ω et ϖ sont nuls si l'on choisit pour ox la droite menée, dans la direction d'un faisceau parallèle, par le point image de ce faisceau.

2° La condition $m = 1$ détermine x_0 et x , et donne

$$x_0 = N + n \frac{R' - 1}{R},$$

$$x = N_1 - n_1 \frac{S - 1}{R}.$$

P_0 et P sont, dans ce cas, les plans principaux de première et seconde espèce, dits *plans principaux de Gauss*.

3° La condition du parallélisme des rayons incident et émergent exige que l'on ait

$$x_0 = N - \frac{n_1 - nR'}{R}, \quad x = N_1 - \frac{n - n_1S}{R},$$

$$y_0 = - \left(\frac{R'}{R} \omega + \omega' \right), \quad y = - \omega,$$

$$z_0 = - \left(\frac{R'}{R} \varpi + \varpi' \right), \quad z = - \varpi;$$

les points p_0, p ainsi définis sont les *points nodaux de Listing*.

4° Les conditions $x_0 = N$ et $x_0 = x$ donneraient respectivement l'*anneau oculaire de Biot* et les *points de Bravais* avec la même facilité.

12. *Axe de similitude*. — Si le point p_0 décrit une courbe quelconque dans le plan P_0 , le point p trace dans le plan P une courbe semblable et semblablement placée, image de la première. Le centre de similitude de ces deux courbes se déplace lorsque x_0 varie d'une manière continue et décrit un lieu géométrique qui se trouve sans difficulté. C'est une droite qui a pour équations

$$Dy - [\omega(R' - 1) + R\omega'](x - N) - (A\omega - B\omega') = 0,$$

$$Dz - [\varpi(R' - 1) + R\varpi'](x - N) - (A\varpi - B\varpi') = 0,$$

où

$$A = R'(N - N_1) + n_1S,$$

$$B = -R(N - N_1) - n_1S + n,$$

$$D = -B(R' - 1) - AR.$$

On pourrait appeler cette droite *axe de similitude*. Elle coïncide avec ox lorsque les centres des surfaces sphériques sont situés sur cet axe de coordonnées. Dans ce dernier cas, l'axe de similitude est lié aux plans

principaux de Gauss par une propriété bien connue, et nos formules démontrent que cette propriété est tout à fait générale. Elles conduisent en effet à la proposition suivante, qu'on vérifiera sans peine :

L'axe de similitude est toujours parallèle à la droite qui joint les points de rencontre des plans principaux de Gauss de première et seconde espèce, respectivement, avec le rayon incident et le rayon émergent.

§ III. — Effets optiques de la flexion.

13. Supposons actuellement que plusieurs ou toutes les surfaces réfringentes changent de position, en tournant autour de leurs intersections N, N', \dots avec l'axe fixe $o\alpha$. Les coordonnées latérales des centres de ces surfaces varieront, et, si leurs variations sont de petites quantités du premier ou du second ordre, les formules précédentes s'appliqueront à la nouvelle position des surfaces, avec le seul soin d'y remplacer partout $\omega, \omega', \varpi, \varpi'$ par $\omega + \partial\omega, \omega' + \partial\omega', \varpi + \partial\varpi, \varpi' + \partial\varpi'$.

Ce changement est encore le seul à apporter dans ces formules, lorsque, les surfaces tournant autour de N, N', \dots , ces derniers points se déplacent en même temps sur $o\alpha$ de quantités très-petites par rapport aux déplacements des centres des surfaces.

Il est clair, en effet, que les formules du § II ainsi modifiées donneront encore, dans ces deux cas, l'abscisse de l'image d'un point, en négligeant le second ordre et ses ordonnées latérales, en négligeant le troisième ordre.

Le dernier cas se présente pour la lunette méridienne, qui n'est autre chose qu'un tube portant un système de lentilles à chaque extrémité, objectif et oculaire.

Ce tube, presque cylindrique, est encastré par son milieu dans le cube de l'axe horizontal de rotation. Imaginons trois axes rectangulaires, $\mu\xi, \mu\eta, \mu\zeta$, liés invariablement à un élément massif μ du tube, dont la longueur est prise pour le sens de $\mu\zeta$ (*).

(*) Il semblera peut-être que ξ, η, ζ répondant à x, y, z , nous devrions, pour la correspondance des notations des paragraphes II et III, prendre la longueur du tube pour le sens de $\mu\xi$. Mais nous serions alors obligé de rompre plus tard cette correspondance avec plus de désavantage, comme on le verra dans la seconde Partie.

Si le tube était inflexible, ses divers points auraient toujours les mêmes coordonnées ξ, η, ζ pour toute hauteur de la lunette; mais, en réalité, à chaque hauteur répond une déformation particulière du tube, sous l'action de son poids.

Or il résulte des notions élémentaires sur la flexion, appliquées aux circonstances actuelles, que, si l'on regarde comme du premier ordre les variations $\partial\eta, \partial\xi, \dots$ des ordonnées latérales du centre d'une surface réfringente, la variation $\partial N, \dots$ de l'intersection de cette surface avec $\mu\zeta$ ne sera que du second ordre.

Les formules du § II s'appliqueront donc aux divers états que la flexion fait subir au système optique d'une lunette, si, lorsque la hauteur varie, on y considère N, N', \dots et R, S, R', S' comme invariables, et $\omega, \omega', \varpi, \varpi'$ comme devant être augmentés de leurs variations, qui dépendent de cette hauteur.

14. *Flexion astronomique.* — On voit, d'après cela, quelle est l'influence de la flexion sur les observations astronomiques.

L'image (ξ, η, ζ) d'un point (ξ_1, η_1, ζ_1) lié aux axes μ est

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = m(\xi_1 + \Omega), \\ \eta = m(\eta_1 + \Pi), \\ \zeta = N_1 - n_1 \frac{(N - \zeta_1)S + nS'}{(N - \zeta_1)R + nR'}, \end{array} \right.$$

où

$$m = \frac{n}{nR' + (N - \zeta_1)R},$$

$$\Omega = \omega' - \frac{\omega}{n}(N - \zeta_1),$$

$$\Pi = \varpi' - \frac{\varpi}{n}(N - \zeta_1).$$

On formera d'ailleurs $\omega, \omega', \varpi, \varpi'$, comme nous l'avons indiqué aux nos 6 et 7, au moyen des ordonnées latérales ξ, η, \dots des centres des surfaces réfringentes.

Dans le cas des observations astronomiques, on doit faire ζ_1 infini,

et si l'on désigne par α, β les limites de $\frac{\xi_1}{\zeta_1}, \frac{\eta_1}{\zeta_1}$, on a

$$(20) \quad \begin{cases} \zeta = N_1 - n_1 \frac{S}{R}, \\ \xi = -\frac{n}{R} \left(\alpha + \frac{\omega}{n} \right), \\ \eta = -\frac{n}{R} \left(\beta + \frac{\varpi}{n} \right). \end{cases}$$

Les premiers termes $-\frac{n}{R}\alpha, -\frac{n}{R}\beta$, de ξ et η , sont indépendants de la hauteur de la lunette ou de sa distance zénithale θ ; mais les seconds termes $-\frac{\omega}{R}, -\frac{\varpi}{R}$ varient avec θ suivant une loi qui dépend du tube de la lunette, et que nous avons exprimée par les relations (14), au moyen des déplacements des centres des surfaces réfringentes.

Les formules (20) donnent la position de l'image du faisceau parallèle (α, β) , dans le plan focal principal $\zeta = N_1 - n_1 \frac{S}{R}$, qui est indépendant de la flexion à notre degré d'approximation.

Soient ξ_0, η_0 les coordonnées du point de croisement des fils rectangulaires du micromètre établi au plan focal principal de la lunette; ξ_0, η_0 seront aussi des fonctions de θ , et l'on aura pour toute valeur de cette variable

$$\begin{aligned} \xi - \xi_0 &= -\frac{n}{R}\alpha - \left(\frac{1}{R}\omega + \xi_0 \right), \\ \eta - \eta_0 &= -\frac{n}{R}\beta - \left(\frac{1}{R}\varpi + \eta_0 \right). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que la lunette passe de la distance zénithale θ à la distance zénithale quelconque $\theta + \delta\theta$, on aura, α, β étant constants,

$$(21) \quad \begin{cases} \delta(\xi - \xi_0) = -\left(\frac{1}{R}\delta\omega + \delta\xi_0 \right), \\ \delta(\eta - \eta_0) = -\left(\frac{1}{R}\delta\varpi + \delta\eta_0 \right). \end{cases}$$

L'image du faisceau parallèle (α, β) se déplacera sur le micromètre pré-

ciement de $\delta(\xi - \xi_0)$ dans le sens des ξ , et de $\delta(\eta - \eta_0)$ dans le sens des η . Ces déplacements sont indépendants de la direction du faisceau lié aux axes $\mu\xi$, $\mu\eta$, $\mu\zeta$.

Or, si, la lunette étant inflexible, α et β venaient à varier de $\delta\alpha$, $\delta\beta$, l'image se déplacerait sur le micromètre fixe de

$$-\frac{n}{R}\delta\alpha, \quad -\frac{n}{R}\delta\beta,$$

et si l'on prend

$$(22) \quad \begin{cases} \delta\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial\xi_0} + \frac{R}{n}\delta\xi_0, \\ \delta\beta = \frac{\partial\beta}{\partial\eta_0} + \frac{R}{n}\delta\eta_0, \end{cases}$$

on voit que ce déplacement réel serait le même que le déplacement apparent (21) qui a lieu pour la lunette flexible.

Si les axes $\mu\xi$, $\mu\eta$ sont parallèles aux fils rectangulaires du micromètre, $\delta\alpha$ est la *flexion en ascension droite*, $\delta\beta$ la *flexion en distance polaire*. Ce sont effectivement les corrections à apporter aux observations faites à la distance zénithale $\theta + \delta\theta$ pour les rendre comparables à celles faites à la distance θ .

15. Faisons, pour terminer cette première Partie, quelques remarques rapides sur les effets généraux de la flexion à l'égard des images, provenant de points liés aux axes μ , lorsque la lunette tourne autour de son axe :

1° Le plan focal principal, le foyer principal, les plans principaux de Gauss, les plans de Bravais restent invariables.

2° L'abscisse ζ de l'image d'un point reste invariable; mais ses ordonnées latérales ξ , η varient de $m\delta\Omega$, $m\delta\Pi$ lorsque la lunette tourne de $\delta\theta$.

L'image d'un objet plan, perpendiculaire à $\mu\zeta$ et lié à cet axe, est donc transportée parallèlement à elle-même et au plan $\xi\mu\eta$, sans altération des dimensions, à une distance

$$d = m\sqrt{\delta\Omega^2 + \delta\Pi^2},$$

et dans une direction faisant, avec l'axe $\mu\xi$, l'angle τ tel, que

$$(23) \quad \text{tang} \tau = \frac{\delta \Pi}{\delta \Omega} = \frac{n \delta \omega' - \delta \omega (N - \zeta_1)}{n \delta \omega - \delta \omega (N - \zeta_1)}.$$

La relation (23) permet de trouver immédiatement le lien qui unit les abscisses ζ_1, ζ'_1 des points dont les images se déplacent à angle droit. Il est donné par l'équation

$$(\delta \omega^2 + \delta \omega'^2) \zeta_1 \zeta'_1 + n(\delta \omega \delta \omega' + \delta \omega \delta \omega')(\zeta_1 + \zeta'_1) + n^2(\delta \omega'^2 + \delta \omega^2) = 0.$$

C'est une hyperbole équilatère dont le centre est sur la bissectrice des axes des ζ_1 et ζ'_1 , et dont les asymptotes sont parallèles à ces axes. De plus, la distance du centre à l'origine est égale au demi-axe transverse de la courbe, $n\sqrt{2} \frac{\delta \omega \delta \omega' + \delta \omega \delta \omega'}{\delta \omega^2 + \delta \omega'^2}$.

3° Si la flexion, répondant à la rotation $\partial \theta$ satisfaisait à la condition

$$(24) \quad \frac{\partial \omega}{\partial \omega} = \frac{\partial \omega'}{\partial \omega'},$$

τ serait indépendant de ζ_1 , et toutes les images seraient déplacées dans la direction constante définie par $\text{tang} \tau = \frac{\partial \omega}{\partial \omega}$.

Réciproquement, pour que le déplacement de l'image parallèlement au plan $\xi\mu\eta$ ait lieu dans une direction fixe, τ , quelle que soit la position de l'objet, il faut que la condition (24) soit remplie. Or, si l'on se reporte aux formules (14), on voit que cela exige que, par suite de la rotation $\partial \theta$, les centres des surfaces réfringentes se déplacent tous parallèlement au plan unique $\eta = \xi \text{ tang} \tau$.

Dans le cas où cette condition (24) a lieu, les points du plan mené perpendiculairement à $\mu\xi$ par l'abscisse $\zeta_1 = N - n \frac{\partial \omega'}{\partial \omega}$ ont leurs images invariables.

4° La droite joignant les points de rencontre des plans principaux invariables de Gauss avec le rayon incident et le rayon émergent conserve son parallélisme avec l'axe de similitude. Le déplacement de cet

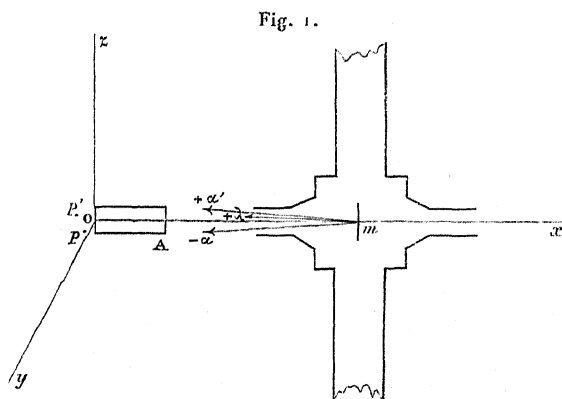
axe dépend d'ailleurs de la nature du tube de la lunette et du système de lentilles, suivant une loi que les équations du n° 12 mettent assez en évidence.

DEUXIÈME PARTIE.

Les inégalités des tourillons d'une lunette méridienne et les flexions de l'axe de rotation exercent sur les observations astronomiques, quelles que soient d'ailleurs les flexions du tube optique, une influence dont il faut tenir compte, ou qu'il faut éliminer par une disposition spéciale. Nous commencerons donc cette deuxième Partie par l'étude de la rotation de la lunette.

§ I — *Rotation de la lunette méridienne.*

1. Pour étudier le mouvement de rotation de la lunette méridienne, imaginons que la disposition suivante soit remplie :



Les deux tourillons de la lunette sont entièrement percés. Un collimateur fixe A est dirigé suivant leur axe et muni d'un oculaire nadiral. Un miroir plan m est fixé vers le centre du cube aussi perpendiculairement que possible à l'axe de rotation.

Le micromètre du collimateur, situé dans son plan focal principal,

se compose de deux fils fixes rectangulaires, l'un horizontal, l'autre vertical, que nous prendrons pour les axes oy et oz , et de deux fils mobiles parallèlement aux premiers au moyen de vis micrométriques. Un tambour indique la marche de chaque vis dont le pas p répond à un angle ε déterminé préalablement, et satisfait à la relation $p = \frac{n}{R} \varepsilon$, qui donne la constante $\frac{n}{R}$ du collimateur (*).

Le micromètre étant éclairé par une lumière qui tombe sur l'oculaire nadiral, un point quelconque p des fils fixes peut être considéré comme un point lumineux qui donne naissance à un faisceau parallèle émergent du collimateur. Ce faisceau se réfléchit sur le miroir m , et donne naissance, dans le plan focal du collimateur, à une image p' du point p . On prendra la position de cette image au moyen des fils mobiles. Cette position variera avec la hauteur de la lunette, et de ses variations on pourra conclure le mouvement de l'axe du miroir.

Supposons encore qu'un cercle de distances polaires ou zénithales, grossièrement divisé, est monté sur l'axe de rotation de la lunette.

2. Prenons pour axe ox la direction du faisceau parallèle qui fait son image à l'origine o des coordonnées; les constantes ω , ϖ du collimateur seront nulles (première Partie, n° 11). Soient, pour une distance zénithale θ de la lunette, λ , μ , ν les cosinus des angles de l'axe du miroir, ou de la normale du côté poli, avec ox , oy , oz ; α , β , γ ; α' , β' , γ' les quantités analogues pour le faisceau émergent du collimateur et pour le faisceau réfléchi; (y, z) le point du micromètre fixe répondant au faisceau émergent, et (y', z') l'image de ce point.

Si l'on se reporte aux formules du n° 1 (première Partie), on voit que, pour passer du cas de la réfraction à celui de la réflexion, il faut faire $l = 1$, $m = 2$; ce qui donne

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha' = \alpha + 2\lambda, \\ \beta' = \beta + 2\mu, \\ \gamma' = \gamma + 2\nu. \end{cases}$$

(*) Cette constante peut d'ailleurs, pour tout instrument d'optique, s'obtenir par divers procédés très-précis; nous la considérerons donc comme connue (voir *Astronomie physique* de Biot; Chapitre des *instruments d'optique*).

Les points (y, z) , (y', z') n'étant autre chose que les images des faisceaux parallèles, définis respectivement par $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ et α' , β' , γ' , on a, par les formules (18) [première Partie],

$$y = \frac{n}{R} \beta, \quad z = \frac{n}{R} \gamma,$$

$$y' = -\frac{n}{R} \beta', \quad z' = -\frac{n}{R} \gamma';$$

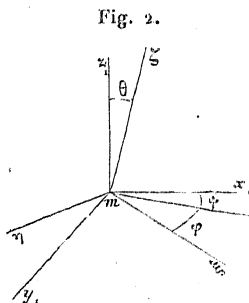
d'où

$$(2) \quad \frac{1}{2}(y + y') = -\frac{n}{R} \mu, \quad \frac{1}{2}(z + z') = -\frac{n}{R} \nu.$$

$(y + y')$, $(z + z')$ se mesurent au micromètre, et les formules (2) donnent μ et ν pour les diverses valeurs de θ . On prendra naturellement dans le micromètre le point o pour le point (y, z) , et l'on aura $y = 0$, $z = 0$ dans les formules (2), qui deviendront

$$\frac{1}{2}y' = -\frac{n}{R} \mu, \quad \frac{1}{2}z' = -\frac{n}{R} \nu.$$

3. Imaginons, par un point m du miroir, trois axes mx_1 , my_1 , mz_1 de direction constante, parallèles à ox , oy , oz , et trois autres axes



rectangulaires $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$, liés au miroir, $m\xi$ étant l'axe prolongé du miroir, et $m\zeta$ dirigé dans le sens du tube de la lunette. Les variations de l'angle $z_1 m\zeta$ seront suffisamment représentées par celles de θ lues sur le cercle des distances zénithales.

Appelons ψ et φ les angles que fait, avec mx_1 et $m\xi$, l'intersection des deux plans $x_1 y_1$ et $\xi \eta$; $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$; λ' , μ' , ν' ; λ'' , μ'' , ν'' étant les cosinus des angles de $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$ avec les axes de direction con-

stante, nous aurons, par les formules d'Euler,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\lambda = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ -\mu = \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta, \\ -\nu = \sin \varphi \sin \theta; \\ \\ \lambda' = -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ \mu' = -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta, \\ \nu' = \cos \varphi \sin \theta; \\ \\ \lambda'' = \sin \psi \sin \theta, \\ \mu'' = -\cos \psi \sin \theta, \\ \nu'' = \cos \theta. \end{array} \right.$$

Connaissant θ , μ , ν , on connaît φ , ψ , et par suite le mouvement des trois axes liés au miroir.

4. Proposons-nous, par exemple, en vue de ce qui suit, de calculer les variations de l'inclinaison de $m\zeta$ sur $m\alpha$, ou sur ox .

On a, par la seconde des formules (3), en négligeant le troisième ordre relativement à φ , ψ , qui sont de l'ordre de μ , ν ,

$$\sin \psi = \nu \cot \theta - \mu,$$

et par suite

$$\lambda'' = \nu \cos \theta - \mu \sin \theta.$$

Connaissant λ'' pour chaque valeur de θ , on formera sa valeur moyenne λ''_m , et si l'on pose

$$\lambda'' = \lambda''_m + \Delta\lambda''_m,$$

on pourra regarder comme connue la quantité $\Delta\lambda''_m$, qui varie lorsque l'on passe de la distance zénithale θ à la distance $\theta + \delta\theta$.

5. *Remarques.* — 1° Considérons, dans le plan du micromètre du collimateur, le point p ayant pour coordonnées $-\frac{n}{R}\mu$, $-\frac{n}{R}\nu$. Le centre de gravité des points p sera

$$y = -\frac{n}{R} \Sigma \mu, \quad z = -\frac{n}{R} \Sigma \nu.$$

Supposons maintenant que l'on change un peu l'orientation initiale

du miroir m , et que λ, μ, ν soient alors désignés par λ_1, μ_1, ν_1 ; représentons par a, b, c les cosinus des angles du nouvel axe du miroir avec les anciens axes $m\xi, m\eta, m\zeta$, b et c étant par hypothèse de petites quantités et a voisin de -1 .

On aura évidemment, a, b, c étant constants pour toute valeur de θ ,

$$\Sigma \mu_1 = -a \Sigma \mu + b \Sigma \mu' + c \Sigma \mu'',$$

$$\Sigma \nu_1 = -a \Sigma \nu + b \Sigma \nu' + c \Sigma \nu''.$$

Or, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$\mu' = \cos \theta, \quad \mu'' = -\sin \theta, \quad a = -1;$$

donc

$$\Sigma \mu_1 = \Sigma \mu + b \Sigma \cos \theta - c \Sigma \sin \theta.$$

Si les observations ont été faites en divisant par parties égales la rotation complète de la lunette, $\Sigma \cos \theta, \Sigma \sin \theta$ seront nuls, et l'on aura

$$\Sigma \mu_1 = \Sigma \mu,$$

et, pour les mêmes raisons,

$$\Sigma \nu_1 = \Sigma \nu.$$

Le centre de gravité des points p est donc indépendant des petites différences que peut présenter à l'intérieur du cube l'orientation initiale du miroir dans deux études distinctes de la rotation de la lunette.

2° Remarquons encore que, si une droite liée invariablement aux axes $m\xi, m\eta, m\zeta$, est très-voisine de $m\zeta$, on aura, pour le cosinus a de l'angle de cette droite avec ox ,

$$(4) \quad a = \alpha + \lambda'',$$

en négligeant le second ordre, et en appelant α le cosinus de l'angle de cette droite avec $m\xi$; par suite on pourra prendre $\delta\lambda''$ pour $\delta\alpha$, puisque α est constant.

§ II. — Flexion de la lunette méridienne.

Après avoir ainsi rapporté à des axes fixes ox, oy, oz les axes $m\xi, m\eta, m\zeta$, quelles que soient les inégalités des tourillons et les flexions de l'axe de rotation, dont l'étude a été jusqu'ici inutile, passons au

système de lentilles portées par le tube de la lunette, et rapportons-le aux axes $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$, dont le mouvement dans l'espace est actuellement connu.

6. *Flexion astronomique du tube déterminée à toutes les hauteurs.* — La lunette ayant la distance zénithale θ , supposons qu'un miroir plan soit vissé à la suite de l'objectif sur le même barillet, et que de petites masses additionnelles, d'un poids total égal à celui du miroir, symétriquement disposées sur la circonférence du barillet, aient été enlevées immédiatement après le vissage du miroir, en sorte que la flexion soit la même dans les deux cas.

Un point du micromètre éclairé par une lumière incidente sur l'oculaire nadiral de la lunette donnera naissance à un faisceau parallèle émergent de la lunette, se réfléchissant sur le miroir et donnant l'image du point considéré dans le plan même du micromètre.

Soient α , β , γ ; α' , β' , γ' ; λ' , μ' , ν' les cosinus des angles avec les axes $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$ de la direction du faisceau émergent, du faisceau réfléchi, de l'axe du miroir; et ξ_0 , η_0 ; ξ'_0 , η'_0 les coordonnées du point du micromètre et de son image. On aura, pour la distance zénithale θ , les constantes R , n , ω , ϖ se rapportant à la lunette,

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \frac{n}{R} \left(\alpha - \frac{\omega}{n} \right), & \eta_0 &= \frac{n}{R} \left(\beta - \frac{\varpi}{n} \right), \\ \xi'_0 &= -\frac{n}{R} \left(\alpha' + \frac{\omega}{n} \right), & \eta'_0 &= -\frac{n}{R} \left(\beta' + \frac{\varpi}{n} \right);\end{aligned}$$

d'où, à cause des relations (1),

$$\begin{aligned}\xi_0 + \xi'_0 &= -2 \frac{n}{R} \left(\lambda' + \frac{\omega}{n} \right), \\ \eta_0 + \eta'_0 &= -2 \frac{n}{R} \left(\mu' + \frac{\varpi}{n} \right).\end{aligned}$$

Si θ varie de $\delta\theta$, on a, en différentiant ces formules et éliminant $\delta\omega$, $\delta\varpi$ au moyen des relations (22) [première Partie],

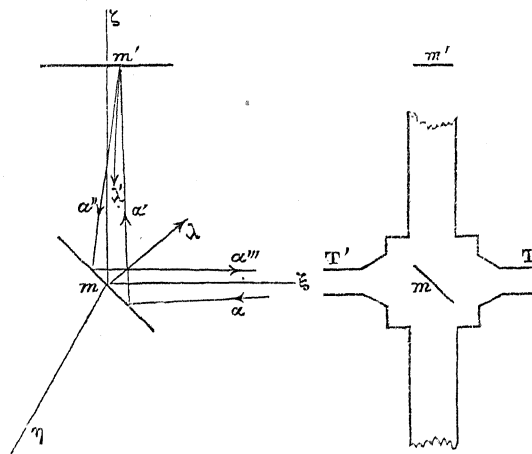
$$(5) \quad \begin{cases} \delta(\xi'_0 - \xi_0) = -2 \frac{n}{R} (\delta\lambda' + \delta\alpha), \\ \delta(\eta'_0 - \eta_0) = -2 \frac{n}{R} (\delta\mu' + \delta\beta). \end{cases}$$

Or $\delta(\xi'_0 - \xi_0)$, $\delta(\eta'_0 - \eta_0)$ se mesurent au micromètre de la lunette, au moyen de ses fils mobiles, en toute rigueur si ces fils rectangulaires sont parallèles aux axes $m\xi$, $m\eta$, mais avec une approximation suffisante dans tous les cas, car ce parallélisme est toujours assez bien rempli pour la mesure de différences de coordonnées.

Les formules (5) montrent que la recherche des flexions astronomiques $\delta\alpha$, $\delta\beta$ est ramenée à celle de $\delta\lambda'$, $\delta\mu'$, c'est-à-dire de la variation d'inclinaison du miroir employé ou de tout autre peu incliné sur lui et vissé à la même place.

7. *Détermination de $\delta\lambda'$ et $\delta\mu'$.* — Faisons tourner le miroir m de 135 degrés environ autour de $m\eta$, remplaçons l'objectif et son barillet par un miroir de même poids m' et vissé sur le tube à la même place.

Fig. 3.



La flexion ne sera pas altérée par cette substitution.

Disposons, dans l'ouverture du tourillon T, un microscope muni d'un micromètre à son plan focal principal, et d'un oculaire nadiral sur lequel tombe un faisceau de lumière.

Soient η_0 , ζ_0 les coordonnées d'un point du micromètre du microscope; α , β , γ ; α' , β' , γ' ; α'' , β'' , γ'' ; α''' , β''' , γ''' les cosinus des angles que font avec les axes $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$ les directions du faisceau parallèle sortant du microscope, se réfléchissant sur le miroir m , le miroir m' , le

miroir m , et rentrant dans le microscope pour y former l'image (η'_0, ζ'_0) du point (η_0, ζ_0).

Soient encore $\lambda, \mu, \nu; \lambda', \mu', \nu'$ les cosinus relatifs aux directions des axes des miroirs m et m' .

On aura

$$\alpha' = \alpha + q\lambda,$$

$$\beta' = \beta + q\mu,$$

$$\gamma' = \gamma + q\nu,$$

et de même

$$\alpha'' = \alpha' + q'\lambda', \quad \alpha''' = \alpha'' + q''\lambda,$$

$$\beta'' = \beta' + q'\mu', \quad \beta''' = \beta'' + q''\mu,$$

$$\gamma'' = \gamma' + q'\nu', \quad \gamma''' = \gamma'' + q''\nu,$$

avec

$$q = -2(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma),$$

$$q' = -2(\lambda'\alpha' + \mu'\beta' + \nu'\gamma'),$$

$$q'' = -2(\lambda\alpha'' + \mu\beta'' + \nu\gamma'').$$

Il résulte de là

$$\alpha''' = \alpha + q'\lambda' + (q + q'')\lambda,$$

$$\beta''' = \beta + q'\mu' + (q + q'')\mu,$$

$$\gamma''' = \gamma + q'\nu' + (q + q'')\nu,$$

où, en négligeant les quantités du second ordre,

$$\alpha''' = \alpha + 2\lambda' + (q + q'')\lambda,$$

$$\beta''' = \beta + 2\mu' + (q + q'')\mu,$$

$$\gamma''' = \gamma + 2\nu' + (q + q'')\nu;$$

d'où l'on tire, pour les variations qui auront lieu lorsque la lunette passera de la distance zénithale θ à la distance $\theta + \delta\theta$,

$$0 = 2\delta\lambda' + \lambda\delta(q + q''),$$

$$\delta\beta''' = \delta\beta + 2\delta\mu' + \mu\delta(q + q''),$$

$$\delta\gamma''' = \delta\gamma + 2\delta\nu' + \nu\delta(q + q'').$$

Éliminant entre ces relations $\delta(q + q'')$, il vient

$$\delta\lambda' = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\nu} (\delta\gamma - \delta\gamma'''),$$

$$\delta\mu' = \frac{1}{2} \frac{\mu}{\nu} (\delta\gamma - \delta\gamma''') - \frac{1}{2} (\delta\beta - \delta\beta''').$$

Si l'on admet que le miroir m ait son axe assez voisin de la bissectrice des axes ξ, ζ pour qu'on puisse sans erreur sensible remplacer $\frac{\lambda}{\nu}$ par 1 et $\frac{\mu}{\nu}$ par 0, on aura

$$(6) \quad \begin{cases} \delta\lambda' = \frac{1}{2} (\delta\gamma - \delta\gamma'''), \\ \delta\mu' = -\frac{1}{2} (\delta\beta - \delta\beta'''). \end{cases}$$

Cela posé, le point (η_0, ζ_0) et le point (η'_0, ζ'_0) pouvant être considérés comme les images provenant de *faisceaux parallèles* dont les directions correspondent aux cosinus $-\alpha, -\beta, -\gamma$, et $\alpha''', \beta''', \gamma'''$, on aura

$$\eta_0 = + \frac{n}{R} \left(\beta - \frac{\omega}{n} \right),$$

$$\zeta_0 = + \frac{n}{R} \left(\gamma - \frac{\varpi}{n} \right),$$

et

$$\eta'_0 = - \frac{n}{R} \left(\beta''' + \frac{\omega}{n} \right),$$

$$\zeta'_0 = - \frac{n}{R} \left(\gamma''' + \frac{\varpi}{n} \right),$$

lorsque la lunette a la position définie par θ ; ω, ϖ, n, R ayant leur sens habituel appliqué au microscope T. Les deux premières de ces quantités dépendent de θ , les deux autres sont constantes. On conclut de là

$$(7) \quad \begin{cases} \eta'_0 - \eta_0 = \frac{n}{R} (\beta - \beta''') - 2 \frac{\omega}{R} - 2\eta_0, \\ \zeta'_0 - \zeta_0 = \frac{n}{R} (\gamma - \gamma''') - 2 \frac{\varpi}{R} - 2\zeta_0, \end{cases}$$

et, lorsque la distance zénithale devient $\theta + \delta\theta$, on a

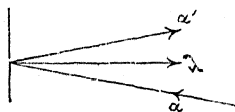
$$(8) \quad \begin{cases} \delta(\eta_0 - \eta'_0) = + \frac{2n}{R} \delta\mu' + 2 \left(\frac{\partial\omega}{R} + \delta\eta_0 \right), \\ \delta(\zeta_0 - \zeta'_0) = - \frac{2n}{R} \delta\lambda' + 2 \left(\frac{\partial\varpi}{R} + \delta\zeta_0 \right). \end{cases}$$

Les fils rectangulaires mobiles du micromètre étant suffisamment parallèles aux axes η , ζ , donneront les premiers membres des relations (7). Si le tourillon T était inflexible par rapport au centre du cube ou aux axes ξ , η , ζ , on voit que $\partial\omega$, $\partial\varpi$, $\delta\eta_0$, $\delta\zeta_0$ seraient nuls, et les relations (7) donneraient immédiatement $\delta\mu'$, $\delta\lambda'$.

Généralement, les flexions de l'axe de rotation seront du second ordre ou négligeables devant celles du tube; mais, sans admettre cette hypothèse, nous pouvons déterminer $\left(\frac{\partial\omega}{R} + \delta\eta_0 \right)$, $\left(\frac{\partial\varpi}{R} + \delta\zeta_0 \right)$ de la manière suivante.

8. *Détermination de la flexion de l'axe de rotation.* — Tournons le miroir m de 180 degrés autour de $m\eta$, à partir de la position qu'il avait pour l'étude du mouvement de rotation de la lunette, ou mieux des axes

Fig. 4.



ξ , η , ζ , et ne changeons rien à la disposition du microscope du tourillon T. On aura, en conservant les notations précédentes, pour l'image (η'_1, ζ'_1) du point (η_1, ζ_1) du micromètre, les équations (7), où l'on remplacera seulement β'' , γ'' par β' , γ' , savoir

$$\eta'_1 - \eta_1 = \frac{n}{R} (\beta - \beta') - 2 \left(\frac{\omega}{R} + \eta_1 \right),$$

$$\zeta'_1 - \zeta_1 = \frac{n}{R} (\gamma - \gamma') - 2 \left(\frac{\varpi}{R} + \zeta_1 \right),$$

avec

$$\beta' = \beta + q\mu, \quad \gamma' = \gamma + q\nu, \quad q = 2;$$

de sorte que, lorsque la lunette prendra la position $\theta + \delta\theta$, on aura, en remarquant que μ et ν sont invariables,

$$\delta(\beta' - \beta) = 0, \quad \delta(\gamma' - \gamma) = 0,$$

et, par suite, à cause de $\delta\eta_1 = \delta\eta_0$, $\delta\zeta_1 = \delta\zeta_0$,

$$(9) \quad \begin{cases} \delta(\eta'_1 - \eta_1) = -2 \left(\frac{\partial\omega}{R} + \delta\eta_0 \right), \\ \delta(\zeta'_1 - \zeta_1) = -2 \left(\frac{\partial\omega}{R} + \delta\zeta_0 \right). \end{cases}$$

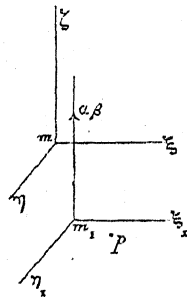
Les premiers membres de (9) sont donnés par les mesures micrométriques faites au microscope T; on les substituera aux seconds membres, dans les équations (8), s'ils ne sont pas négligeables. Les valeurs de $\delta\lambda'$, $\delta\mu'$ tirées de (8) seront portées dans (5), qui fourniront $\delta\alpha$, $\delta\beta$.

§ III. — *Observations astronomiques rapportées aux axes fixes ox , oy , oz .*

9. Ces quantités $\delta\alpha$, $\delta\beta$ étant connues expérimentalement pour un certain nombre de distances zénithales de la lunette et par interpolation pour les distances intermédiaires, il sera possible de ramener toutes les observations astronomiques à ce qu'elles seraient si le tube optique de la lunette était inflexible.

Soient $m_1\xi_1$, $m_1\eta_1$ les fils d'ascension droite et de déclinaison du

Fig. 5.



micromètre du tube de la lunette. Ils sont sensiblement parallèles à

$m\xi, m\eta$. Soient α, β les cosinus de l'inclinaison sur ces derniers axes, du faisceau incident parallèle dont l'image se fait en m_1 , pour la distance zénithale θ de la lunette. Nommons *axe optique de la lunette* cette direction (α, β) , variable avec θ .

Tout faisceau incident parallèle, qui, pour la même valeur de θ , aura son image au point p de coordonnées ξ_1, η_1 , fera, avec $m\xi, m\eta$, des angles dont les cosinus seront

$$\alpha - \frac{R}{n} \xi_1, \quad \beta - \frac{R}{n} \eta_1,$$

$\frac{R}{n}$ étant l'inverse de la constante connue $\frac{n}{R}$ de la lunette.

La valeur de θ variant de 0 à 360, α et β éprouveront, en raison des flexions du tube, des variations $\delta\alpha, \delta\beta$ que nous venons de mesurer.

Soient α_m, β_m les valeurs moyennes actuellement inconnues de α et β , et $\Delta\alpha_m, \Delta\beta_m$ les différences $\alpha - \alpha_m, \beta - \beta_m$, variables avec θ .

$\Delta\alpha_m, \Delta\beta_m$ résultent simplement de $\delta\alpha, \delta\beta$, et peuvent être regardées comme connues. On aura ainsi

$$\alpha = \alpha_m + \Delta\alpha_m,$$

$$\beta = \beta_m + \Delta\beta_m.$$

Si l'on connaissait α_m, β_m , on aurait donc α, β , quel que soit θ , et par suite la direction de l'astre, dont l'image est en p , rapportée aux axes m .

10. Mais ce n'est pas aux axes mobiles m qu'il s'agit de rapporter la direction des astres; c'est aux axes fixes ox, oy, oz du collimateur A, dont la situation à l'égard du méridien sera déterminée ultérieurement. Occupons-nous d'abord de l'*ascension droite*.

Soit a le cosinus de l'inclinaison de l'axe optique sur ox ; a variera avec θ pour deux raisons : la flexion du tube relative aux axes m et l'inégalité d'inclinaison de ces axes sur ox lorsque la lunette tourne. Soit a_m la valeur moyenne de a , et

$$a = a_m + \Delta a_m,$$

Δa_m se composera donc de deux parties : une première, due à la flexion

du tube et sensiblement égale à $\Delta\alpha_m$, puisque $m\xi$ est peu incliné sur ox ; une seconde, due au mouvement des axes m et sensiblement égale à $\Delta\lambda'_m$, déterminé n° 4, puisque l'axe optique est peu incliné sur $m\xi$.

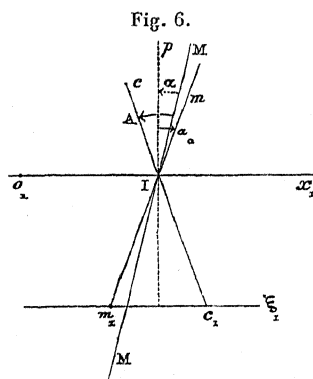
On a ainsi

$$\Delta a_m = \Delta\alpha_m + \Delta\lambda'_m.$$

Δa_m est donc connu pour toute valeur de θ . Il suffirait d'avoir a_m , ou la *collimation moyenne*, pour avoir a , ou la *collimation correspondante à la distance zénithale* θ .

11. *Mesure de la collimation moyenne.* — Deux collimateurs sont disposés, l'un au nord, l'autre au sud de la lunette méridienne, et réglés l'un sur l'autre de telle sorte que leurs axes optiques coïncident. Soit cc_1 leur direction commune.

Supposons d'abord la lunette dirigée sur le collimateur nord, et soit c_1 l'image de la croisée des fils de ce collimateur. L'angle ω_0 de la



direction c, c_1 et de l'axe optique m, m de la lunette est mesuré au micromètre de cette dernière par m_1, c_1 . Menons par le point de rencontre I de ces deux directions o, x_1 et pI respectivement parallèle et perpendiculaire à ox , et aussi IM parallèle à la méridienne. Désignons par a_0 la collimation horizontale nord, par A et α l'azimut des collimateurs et de ox ; nous avons, en tenant compte des signes qu'il est d'usage d'attribuer à ces quantités,

$$A - \alpha - a_0 = \omega_0,$$

d'ailleurs

$$a_0 = a_m + \Delta_0 a_m;$$

d'où

$$A - \alpha = a_m + \Delta_0 a_m + \omega_0.$$

On trouvera de même, par un pointé sur le collimateur sud, $\Delta_0 a_m$, ω_0 étant devenus A, a_m et ω_1 , tandis que A, α restent invariables,

$$A - \alpha = -a_m - \Delta_1 a_m + \omega_1;$$

d'où

$$(10) \quad a_m = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_0) - \frac{1}{2}(\Delta_0 a_m + \Delta_1 a_m),$$

$$(11) \quad A - \alpha = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_0) + \frac{1}{2}(\Delta_0 a_m - \Delta_1 a_m).$$

Les seconds membres de (10) et (11) étant donnés par l'observation, a_m et en outre $A - \alpha$ sont connus.

12. *Inclinaison et azimut de l'axe ox .* — Nous connaissons actuellement l'inclinaison de l'axe optique sur ox pour une valeur quelconque de θ . Pour conclure du passage d'un astre au point $p(\eta_1, \xi_1)$ l'époque de son passage au méridien, il ne reste donc plus qu'à connaître la position de ox relativement au méridien, c'est-à-dire son inclinaison et son azimut.

Inclinaison. — L'axe ox n'est autre chose que l'axe optique du collimateur fixe A, au moyen duquel nous avons étudié la rotation de la lunette.

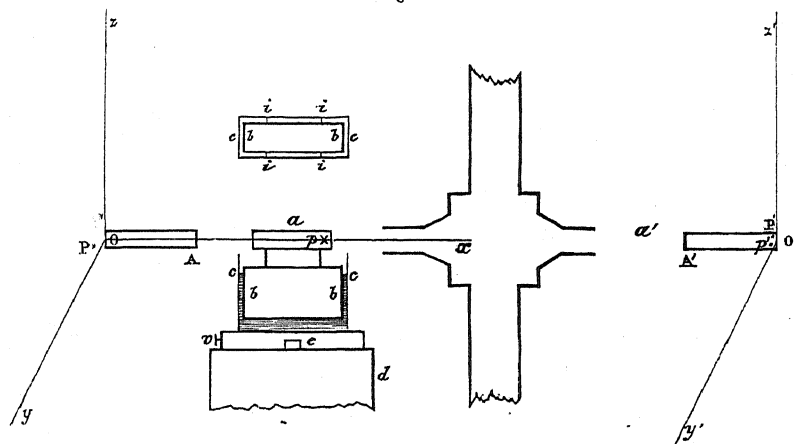
Imaginons un collimateur a , surmontant à peu de distance une base plus large et très-allongée bb , aussi lourde que possible, pour des dimensions données, et plongeant d'une certaine quantité dans le mercure du vase cc . Supposons que le fond de ce vase puisse tourner librement sur lui-même autour de l'axe e du pied d , qui supporte tout l'appareil, installé à poste fixe, comme le collimateur A; soit v une vis de rappel pour régler cette rotation. Supposons, en outre, que, par un moyen quelconque, soit par un piston agissant sur le mercure, soit par un glissement vertical du pied d dans un étui muni de vis de pression, on puisse élever ou abaisser le collimateur a de tout le diamètre du collimateur A.

Disposons un second collimateur fixe A' symétrique de A par rapport à la lunette. Cela posé, faisons les opérations suivantes :

1° Les objectifs de a et A étant en présence et a en équilibre, le

croisement p du réticule de α , convenablement éclairé, fait son image en P dans le plan du réticule de A . On fera sur P , avec le fil horizontal mobile parallèle à oy , et le fil vertical mobile parallèle à oz , un nombre

Fig. 6.



suffisant de pointés dont on prendra la moyenne, pour chaque fil, que l'on fixera ensuite dans cette position moyenne.

2° On fera tourner le vase c autour de son axe, aussi lentement qu'on voudra, au moyen de la vis v , d'un angle de 180 degrés, mesuré sur une graduation adaptée au pied d .

3° Le collimateur A' ayant été mis préalablement dans le prolongement du collimateur A , l'image de p se fera en un point p' de A' . On fera sur p' un nombre suffisant de pointés avec le fil horizontal mobile parallèle à oy' .

4° On abaissera le collimateur α , de manière que l'image du point P vienne se faire librement en P' , que l'on pointera le même nombre de fois.

La distance angulaire $P'p'$ mesurée au collimateur A' est le double de l'inclinaison de l'axe optique, relatif au point P , du collimateur de A .

La valeur du tour de vis de A et les pointés faits sur P permettent de passer de cette inclinaison à celle de l'axe optique relatif à o ou de ox .

Ce qui précède suppose que les fils des collimateurs fixes parallèles à oy , oy' sont horizontaux. On s'assurera qu'il en est ainsi en don-

nant au collimateur α , au moyen de la vis à mouvement lent v , deux positions successives telles, que les images correspondantes de p soient aux extrémités du champ du collimateur A ou A'. Si les pointés faits sur ces deux images ont même moyenne, le fil oy ou $o'y'$ est suffisamment horizontal; si l'on trouve une différence entre les moyennes, on fera tourner le micromètre sur lui-même jusqu'à ce qu'elle disparaisse. Il y a même là un procédé précis pour mesurer l'inclinaison d'un fil sur l'horizon par la différence des pointés correspondant aux images extrêmes de p . Je crois qu'il pourrait s'appliquer aux fils de déclinaison de la lunette méridienne, et remplacer avec avantage la comparaison des pointés sur une même étoile à son entrée et à sa sortie du champ.

On disposera intérieurement au vase cc , et perpendiculairement à ses grandes faces, de petites pointes i, i , très-déliées et de même longueur, qui éteindront immédiatement les faibles oscillations de la base bb du collimateur α , après une rotation du vase. Il est évident d'ailleurs que les petites variations d'azimut qui pourront se produire dans la position de α , d'un nivellement à l'autre, sont sans influence sur la mesure de l'inclinaison.

Comme vérification, on remarquera que l'image de oy dans A' doit être parallèle à $o'y'$.

Azimut. — La détermination de l'azimut α n'offre rien de particulier dans cette théorie; elle se fera, comme à l'ordinaire, par les passages d'étoiles circumpolaires. Il faudra seulement avoir le soin essentiel de remplacer partout, dans les formules usuelles, la collimation par $a_m + \delta a_m$, δa_m se rapportant à la distance zénithale de l'étoile observée: α connu, (11) donnera A.

13. *Flexion en distance polaire.* — Pour tenir compte de l'effet de la flexion du tube de la lunette sur les distances polaires, il faudra corriger les observations de la quantité $\delta\beta_m$, que nous avons déterminée précédemment pour toutes les distances zénithales. Les flexions de l'axe de rotation n'ont pas d'influence sensible. Quant aux flexions du cercle divisé sur lequel se lisent les distances polaires, nous n'avons pas à nous en occuper ici.

14. Terminons cette étude en remarquant que, si la lunette se re-

tourne, on peut, pour chaque position, effectuer les opérations que nous avons indiquées. La comparaison des résultats obtenus fournira des vérifications utiles, qu'il ne faudra jamais négliger, et dont on pourrait encore augmenter le nombre, en installant un second collimateur mobile α' , symétrique de α par rapport à la lunette. Comme vérification qui n'exige pas le retournement de la lunette, citons celle-ci : Les deux microscopes collimateurs étant disposés dans leurs tourillons respectifs, l'image du réticule de l'un se fait dans le plan du réticule de l'autre. Si l'on fait tourner la lunette, l'observation de cette image donne la flexion du premier tourillon rapportée au second. Cette flexion doit être la somme des flexions individuelles de chaque tourillon obtenues comme nous l'avons dit, et conséquemment le double de chacune d'elles dans le cas où elles seraient égales.

Les méthodes exposées ne supposent que l'emploi du miroir plan et de l'oculaire nadiral. Un tel oculaire est d'un emploi universel, et son mode d'éclairage, variable avec les circonstances d'installation, ne présentera jamais de difficulté qui ne puisse être vaincue facilement. Quant au miroir plan, sa perfection est assez rare; mais elle n'est pas sans exemple, quoique les physiciens, si l'on en excepte Foucault, et les constructeurs, s'en soient assez peu occupés (*).

Nous regrettons de ne pouvoir faire suivre notre théorie d'une application numérique, pour laquelle nous manquons absolument de tout le matériel nécessaire. Aussi, dans nos formules, avons-nous cru inutile d'exprimer en angle les coordonnées micrométriques de certains points images, au moyen du nombre des tours de la vis employée et de la valeur d'un tour.

(*) Nous apprenons que M. Martin espère aujourd'hui pouvoir construire de bons miroirs plans, ayant jusqu'à 80 centimètres de diamètre.