Annales scientifiques de l'É.N.S.

Jules Drach

L'équation différentielle de la balistique extérieure et son intégration par quadratures

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 37 (1920), p. 1-94
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1920_3_37__1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE
DE
LA BALISTIQUE EXTÉRIEURE
ET
SON INTÉGRATION PAR QUADRATURES

PAR M. JULES DRACH.

Le travail actuel [1] a pour but l'application à l'équation de la Balistique extérieure, mise sous la forme

$$\frac{dv}{du} = \frac{1 - v^2}{v + \rho}, \tag{1}$$

où ρ est une fonction arbitraire de la variable u, des méthodes de *formation systématique de tous les cas de réduction*, indiquées (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 158, 30 mars 1914, p. 926) pour

---

[1] Ce travail a été présenté à l'Académie des Sciences le 5 mars 1917 et renvoyé à la Commission de Balistique (cf. *Comptes rendus*, t. 170, 23 février 1920). M. A. Denjoy m'ayant manifesté le désir d'étudier, pendant son séjour au Polygone de Gâvres, les cas nouveaux d'intégrabilité de l'équation de la Balistique qui résultaient de ma théorie, au point de vue des applications pratiques, une copie de ce Mémoire a été adressée en même temps à M. le général Charbonnier, directeur du Polygone de Gâvres, pour être communiquée à M. A. Denjoy, à toutes fins utiles.

toutes les équations $\frac{dy}{dx} = \frac{P(y)}{Q(y)}$, où P et Q sont des polynomes en y, de degré déterminé, à coefficients quelconques en x.

On s'est borné ici à l'examen des cas où l'intégration complète de (1) se fait par des *quadratures*. La fonction $\rho(u)$ peut alors être définie à l'aide d'opérations, en nombre limité, qui sont, dans le cas le plus général, des calculs d'intégrales de fonctions bien déterminées prises dans un champ complexe, le long de contours fermés.

On fait voir également comment cette définition de $\rho(u)$ est liée à la détermination du *groupe de rationalité* d'une certaine équation linéaire aux dérivées partielles et à la *réduction* de ce groupe.

Enfin l'examen de tous les cas d'intégration de l'équation (1) antérieurement connus (d'Alembert, Legendre, M. F. Siacci) permet de les situer parmi les classes étendues d'équations (1) que nous faisons connaître et d'indiquer les raisons précises de la réduction du problème.

Il convient d'ajouter que la recherche présente est essentiellement d'ordre mathématique : son intérêt tient surtout à ce que l'équation (1) est une des *formes réduites* de l'équation, en apparence plus générale, $\frac{dy}{dx} = \frac{P_3(y)}{P_1(y)}$, où P_3 et P_1 sont des polynomes du troisième degré et du premier degré en y; on peut adopter cette réduite quand on connaît trois solutions particulières, *isolées*, d'une telle équation.

Préliminaires. — J'ai montré ailleurs [1] que les seuls cas de réduction d'une équation différentielle du premier ordre

$$(a) \qquad \frac{dy}{dx} = A(x, y),$$

où A (x, y) appartient à un certain *domaine de rationalité*, sont ceux où, pour l'équation correspondante aux dérivées partielles

$$X(z) = \frac{\partial z}{\partial x} + A\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

[1] *Voir*, par exemple, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1908.

l'une des *résolvantes,* dont dépendent les éléments

$$z; \qquad K = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^p, \qquad p \text{ entier};$$

$$J = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}}; \qquad I = \frac{\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}} - \frac{3}{2}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial z}{\partial y}}\right)^2,$$

admet une solution appartenant à ce domaine de rationalité. Cette solution est unique, sauf si z est lui-même rationnel.

Dans le cas où I est rationnel, la détermination de z, c'est-à-dire l'intégration de (a), revient à celle d'un système *irréductible* de deux équations de Riccati et à des quadratures. Mais dans tous les autres, l'intégration complète de (a) se fait au plus par des quadratures (qu'on ne peut, bien entendu, effectuer en général).

Je me propose ici d'appliquer ma théorie à la *formation systématique de tous les cas où l'équation différentielle de la balistique extérieure peut s'intégrer complètement par des quadratures.*

L'examen du cas où I est *rationnel,* dans le domaine choisi, qui conduit à un système de Riccati *irréductible,* amènerait à considérer des transcendantes dont les plus simples sont les analogues de celles découvertes par M. Painlevé, qui intègrent l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + \alpha x$ ou ses généralisations; il n'a d'ailleurs évidemment qu'un intérêt théorique (¹).

Forme canonique adoptée. — L'équation fondamentale de la Balistique extérieure, dite aussi « équation de l'*hodographe* »,

$$\frac{d\mathrm{V}\cos\alpha}{d\alpha} = \frac{c\mathrm{V}\,\mathrm{F}(\mathrm{V})}{g},$$

où V désigne la vitesse du projectile, α l'angle de la tangente à la tra-

(¹) *Cf.* la Note des *Comptes rendus* (t. 158, 30 mars 1914, p. 926, où j'ai indiqué les principes qui permettent l'étude de (a) lorsque A est rationnel en y et quelconque en x.

jectoire avec l'horizon, prend, lorsqu'on pose

$$\sin\alpha = v, \qquad V = u, \qquad \frac{c\,F(V)}{g} = \rho(u) \quad ([1]),$$

la forme

$$\frac{dv}{du} = \frac{1 - v^2}{u(v + \rho)}.$$

Elle fait donc partie des équations

$$\frac{dv}{du} = \frac{P_3(v)}{P_1(v)},$$

où P_1, P_3 sont des polynomes en v de degrés respectifs 1 et 3, qui sont les plus simples après l'équation de Riccati et ont donné lieu à de nombreux travaux ([2]).

En introduisant, au lieu de u, la nouvelle variable indépendante $u_1 = \log u$, on peut l'écrire plus simplement encore

$$\frac{dv}{du_1} = \frac{1 - v^2}{v + \rho_1(u_1)},$$

et l'on repasse immédiatement de cette forme à la précédente.

Il est aisé de voir que *l'équation étudiée*, écrite en supprimant l'indice

$$(1) \qquad \frac{dv}{du} = \frac{1 - v^2}{v + \rho},$$

peut être prise, en raison de la présence de la fonction arbitraire ρ, *pour l'une des formes canoniques de l'équation générale*

$$(2) \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{p_0 + p_1 v + p_2 v^2 + p_3 v^3}{q_0 + q_1 v} \qquad (p_i,\ q_i \text{ fonctions de } x,\ q_1 \neq 0),$$

dans le cas où l'on connaît trois solutions particulières de cette dernière.

([1]) On englobe ainsi dans la fonction ρ une constante multiplicative $\frac{c}{g}$. Suivant une remarque que m'a fait ultérieurement M. A. Denjoy, il serait désirable de séparer dans les formes indiquées pour ρ celles qui renferment effectivement une telle constante; je reviendrai sur ce point à une autre occasion.

([2]) Cette remarque, indiquée dans la Note citée plus haut (*Comptes rendus*, 30 mars 1914), avait été faite antérieurement par M. Appell (*Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1905).

En effet, cette équation possède les solutions évidentes $v = 1$, $v = -1$ et $v = \infty$ $\left(\text{comme on le voit en posant } \frac{1}{v} = w\right)$.

Une transformation projective faite sur v, c'est-à-dire une transformation homographique, permet de changer l'équation (2) qui possède les trois solutions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$ en une autre, de même nature, admettant les trois solutions 1, -1, ∞ correspondant aux précédentes.

Cherchons la forme générale de cette dernière. Pour qu'une équation, telle que (2), possède les solutions $v = +1$, $v = -1$, il faut et il suffit que $p_0 + p_2 = 0$, $p_1 + p_3 = 0$; pour qu'elle admette la solution $\frac{1}{v} = 0$, il faut et il suffit que le terme en v^3 disparaisse. On a donc $p_1 = p_3 = 0$ et l'équation cherchée se réduit à

$$\frac{dv}{dx} = \frac{p_0(1 - v^2)}{q_0 + q_1 v}.$$

Il suffit d'y poser

$$\frac{p_0}{q_1} dx = du, \qquad \frac{q_0}{q_1} = \rho(u)$$

pour obtenir l'équation de la Balistique, sous la forme définitivement adoptée

$$\frac{dv}{du} = \frac{1 - v^2}{v + \rho(u)}. \tag{1}$$

Cette remarque justifierait le développement donné à notre étude, lors même que celle-ci serait, au point de vue balistique, sans aucune importance pratique.

Abordons maintenant l'examen des cas de réduction.

I. *Solution rationnelle.* — Le premier cas de réduction est celui où ρ est choisi de telle sorte que l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$U(z) = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1 - v^2}{v + \rho} \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

possède une solution z, *rationnelle en* v.

S'il existe, pour cette équation, une solution rationnelle en v,

$z = \frac{f(v)}{g(v)}$, on peut supposer, *sans restreindre la généralité*, que les facteurs linéaires de f et de g sont *simples* et en même nombre k; cela résulte de ce que $f - zg = 0$ n'a, pour z arbitraire, que des facteurs simples. Nous écrirons donc

$$\frac{f}{g} = \sigma \frac{(v - a_1)\ldots(v - a_k)}{(v - b_1)\ldots(v - b_k)}.$$

Il est clair que $\log\frac{f}{g} = \log z$ est, en même temps que z, une solution de $U(z) = 0$.

On aura donc, identiquement, en indiquant par un accent une dérivation relative à u,

$$(v+\rho)\left[\frac{\sigma'}{\sigma} - \sum \frac{a_i'}{v - a_i} + \sum \frac{b_i'}{v - b_i}\right] + (1 - v^2)\left[\sum \frac{1}{v - a_i} - \sum \frac{1}{v - b_i}\right] = 0.$$

Nous allons envisager le développement du premier membre en fractions simples de dénominateur $(v - a_i)$, $(v - b_i)$, ... et écrire qu'il est identiquement nul.

Pour que le terme en $\frac{1}{v - a_i}$ disparaisse, il faut et il suffit que

$$-(a_i + \rho)a_i' + 1 - a_i^2 = 0,$$

c'est-à-dire que a_i représente une solution particulière de

$$(1) \qquad \frac{dv}{du} = \frac{1 - v^2}{v + \rho}.$$

Le quotient de $-a_i'(v + \rho) + 1 - v^2$ par $(v - a_i)$ est $-(v + a_i + a_i')$.

Des conclusions analogues s'appliquent aux termes en $\frac{1}{v - b_i}$.

Il reste une partie entière, qu'on peut écrire

$$(v + \rho)\frac{\sigma'}{\sigma} - \Sigma(v + a_i + a_i') + \Sigma(v + b_i + b_i'),$$

et dont l'annulation identique donne immédiatement, puisque les a sont en nombre égal aux b,

$$\sigma' = 0, \quad \text{d'où } \sigma \text{ constant} \quad \text{et} \quad \Sigma(a_i + a_i') = \Sigma(b_i + b_i').$$

Le système qu'il s'agit d'intégrer est formé de ces deux équations auxquelles s'ajoutent

$$a'_i = \frac{1 - a_i^2}{a_i + \rho}, \qquad b'_i = \frac{1 - b_i^2}{b_i + \rho} \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

L'équation $\Sigma(a_i + a'_i) = \Sigma(b_i + b'_i)$ devient, quand on y remplace les a'_i, b'_i par leur valeur,

$$\sum \frac{1 + a_i\rho}{a_i + \rho} = \sum \frac{1 + b_i\rho}{b_i + \rho},$$

ou encore

$$\sum \left(\frac{1 - \rho^2}{a_i + \rho} + \rho\right) = \sum \left(\frac{1 - \rho^2}{b_i + \rho} + \rho\right),$$

ou enfin

$$(1 - \rho^2)\left[\sum \frac{1}{a_i + \rho} - \sum \frac{1}{b_i + \rho}\right] = 0.$$

L'hypothèse $\rho^2 = 1$ donne un cas banal, que nous écartons.

On voit donc que ρ est lié aux a_i, b_i par l'équation

$$\sum \frac{1}{a_i + \rho} - \sum \frac{1}{b_i + \rho} = 0$$

ou, en d'autres termes, que $(-\rho)$ *est une racine du multiplicateur*

$$K = \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v} = \sum \frac{1}{v - a_i} - \sum \frac{1}{v - b_i}.$$

Il reste à intégrer l'équation

$$\mathcal{V}(f) = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{(1 - a_1^2)}{(a_1 + \rho)} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial b_1}\frac{(1 - b_1^2)}{(b_1 + \rho)} + \ldots = 0,$$

où ρ est donné en a_i, b_i par

$$\sum \frac{1}{a_i + \rho} - \sum \frac{1}{b_i + \rho} = 0.$$

Nous observons d'abord que $+1$ et -1 sont deux solutions particulières de l'équation (1); on aura ainsi deux intégrales :

$$\frac{(1 - a_1)\ldots(1 - a_k)}{(1 - b_1)\ldots(1 - b_k)} = \Gamma_1, \qquad \frac{(1 + a_1)\ldots(1 + a_k)}{(1 + b_1)\ldots(1 + b_k)} = \Gamma_2\ [1].$$

---

[1] On ne peut supposer que $+1$ et -1 figurent parmi les a_i et les b_i sans laisser tomber l'hypothèse que les a_i et les b_i sont différents et en même nombre.

La solution $v=\infty$ redonne $\sigma=$ const.

L'observation faite plus haut que $K=\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial v}=\sum\frac{1}{v-a_i}-\sum\frac{1}{v-b_i}$ est un multiplicateur d'Euler pour $\left(dv-\frac{1-v^2}{v+\rho}du\right)$ nous apprend, en outre, que *toutes les racines de l'équation* $K=0$, sauf $(-\rho)$, *sont des solutions particulières de l'équation* (1) (Euler).

Si l'on désigne par c_j une de ces racines

$$\sum\frac{1}{c_j-a_i}-\sum\frac{1}{c_j-b_i}=0,$$

on aura donc une intégrale correspondante C_j de $\mho(f)=0$

$$C_j=\frac{(c_j-a_1)\ldots(c_j-a_k)}{(c_j-b_1)\ldots(c_j-b_k)},$$

et l'on obtient ainsi $(2k-3)$ nouvelles intégrales, car le degré du numérateur de $K(v)$ est seulement $(2k-2)$ et $(-\rho)$ est l'une des racines, lorsque les racines de $K(v)$ sont distinctes. [Chaque racine de $K(v)$ d'ordre α de multiplicité donne $(\alpha-1)$ relations déterminées entre les a_i et les b_i exprimant cela et une seule relation dépendant d'une constante.]

Il nous manque donc une intégrale de $\mho(f)=0$, celle qui renfermera u. Nous savons d'avance, d'après la forme de $\mho(f)$ qu'elle s'obtiendra par une quadrature, la constante d'intégration s'ajoutant à u.

On l'obtient aisément en remarquant que l'équation

$$\Sigma(a_i+a'_i)-\Sigma(b_i+b'_i)=0$$

s'intègre à vue sous la forme

$$\Sigma a_i-\Sigma b_i=C_0\,e^{-u}.$$

L'intégrale de $\mho(f)=0$ est $\log C_0=u+\log(\Sigma a_i-\Sigma b_i)$; la vérification est immédiate.

En résumé, les solutions particulières a_i, b_i, ... sont données au moyen *de u par le système d'équations*

$$R(1) = \Gamma_1, \qquad R(-1) = \Gamma_2,$$
$$R(c_j) = C_j \quad (j = 1, \ldots, 2k-3), \qquad \Sigma a_i - \Sigma b_i = C_0 e^{-u},$$

où l'on a posé

$$R(v) = \frac{(v-a_1)\ldots(v-a_k)}{(v-b_1)\ldots(v-b_k)},$$

et où $c_1, \ldots, c_{2k-3}$ *et* ρ *sont toutes les racines de l'équation*

$$K(v) = \sum \frac{1}{v-a_i} - \sum \frac{1}{v-b_i} = 0.$$

On conclut de là que *ces solutions, ainsi que* ρ, *sont algébriques en* e^u.

Autre méthode. — Il peut être commode, pour les applications, d'obtenir les résultats précédents sans mettre en évidence toutes les solutions particulières a_i, b_i.

Si l'on écrit

$$z = \frac{f}{g} = \sigma + \frac{B_1}{v-b_1} + \ldots + \frac{B_k}{v-b_k},$$

on trouve aisément, en exprimant que z satisfait à l'équation

$$(v+\rho)\frac{\partial z}{\partial u} + (1-v^2)\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

les conditions suivantes :

$$\sigma' = 0, \qquad \Sigma(B_i + B'_i) = 0, \qquad \frac{B'_i}{B_i} = 1 + \frac{1-\rho^2}{(b_i+\rho)^2}, \qquad b'_i = \frac{1-b_i^2}{b_i+\rho}$$
$$(i = 1, \ldots, k).$$

En observant que le multiplicateur K de $\left(dv - \frac{(1-v^2)}{(v+\rho)}du\right)$ s'écrit simplement

$$-K = \frac{B_1}{(v-b_1)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(v-b_k)^2},$$

on aura comme suit les intégrales de ce système :

Soient toujours $c_1, \ldots, c_{2k-3}$ les racines de $K(v) = 0$ autres que

$(-\rho)$, on a d'abord les $(2k-3)$ intégrales

$$C_j = \frac{B_1}{c_j - b_1} + \ldots + \frac{B_k}{c_j - b_k} \qquad (j = 1, \ldots, 2k-3),$$

si les racines de $K(v)$ sont distinctes, puis deux intégrales, correspondant aux solutions $+1$ et -1 :

$$\Gamma_1 = \frac{B_1}{1 - b_1} + \ldots + \frac{B_k}{1 - b_k},$$

$$\Gamma_2 = \frac{B_1}{1 + b_1} + \ldots + \frac{B_k}{1 + b_k}.$$

Enfin la dernière intégrale de l'équation

$$\mho(f) = \frac{\partial f}{\partial u} + \sum \frac{\partial f}{\partial b_i}\frac{(1 - b_i^2)}{(b_i + \rho)} + \sum \frac{\partial f}{\partial B_i}\left[1 + \frac{(1-\rho^2)}{(b_i+\rho)^2}\right] = 0$$

sera

$$C_0 = e^u \Sigma B_i.$$

Ces $2k$ relations définissent les b_i et les B_i au moyen des u et des $2k$ constantes arbitraires $C_0, C_1, \ldots, C_{2k-3}, \Gamma_1, \Gamma_2$.

L'expression de ρ peut s'obtenir *explicitement* en observant que $c_1, \ldots, c_{2k-3}$ et $(-\rho)$ sont toutes les racines de

$$-K(v) = \frac{B_1}{(v - b_1)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(v - b_k)^2} = 0.$$

On a, par exemple,

$$-\rho + c_1 + \ldots + c_{2k-3} = 2\,\frac{\Sigma B_1(b_2 + \ldots + b_k)}{\Sigma B_1}$$

II. *Un multiplicateur d'Euler est rationnel.* — Supposons qu'il existe pour la forme différentielle

$$dv - \frac{(1-v^2)}{(v+\rho)}\,du$$

un multiplicateur d'Euler rationnel en v, de telle sorte que

$$K\left[dv - \frac{(1-v^2)}{(v+\rho)}\,du\right] = dz;$$

la *résolvante* dont dépend K, déduite de la condition d'intégrabilité, s'écrit

$$\frac{\partial K}{\partial u} + A\frac{\partial K}{\partial v} + K\frac{\partial A}{\partial v} = 0, \quad \text{où} \quad A = \frac{(1-v^2)}{(v+\rho)} = \frac{1-\rho^2}{v+\rho} + \rho - v.$$

Nous étudierons d'abord les conséquences qu'entraîne l'expression de K sous la forme, décomposée en facteurs linéaires,

$$K = \sigma\frac{(v-a_1)^{\alpha_1}\ldots(v-a_m)^{\alpha_m}}{(v-b_1)^{\beta_1}\ldots(v-b_n)^{\beta_n}},$$

où les α et les β sont des entiers positifs.

En tenant compte de l'expression immédiate de $\log K$, on doit donc avoir l'identité en v :

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma'}{\sigma} - \frac{\alpha_1 a_1'}{v-a_1} - \ldots + \frac{\beta_1 b_1'}{v-b_1} + \ldots \\ &\quad + \frac{(1-v^2)}{(v+\rho)}\left[\frac{\alpha_1}{(v-a_1)} + \ldots - \frac{\beta_1}{(v-b_1)} - \ldots\right] - \frac{(1-\rho^2)}{(v+\rho)^2} - 1 = 0\end{aligned}$$

ou, en multipliant par $(v+\rho)^2$,

$$\begin{aligned}&(v+\rho)^2\left[\frac{\sigma'}{\sigma} - \frac{\alpha_1 a_1'}{v-a_1} - \ldots + \frac{\beta_1 b_1'}{v-b_1} + \ldots\right] \\ &\quad + (1-v^2)(v+\rho)\left[\frac{\alpha_1}{v-a_1} + \ldots - \frac{\beta_1}{v-b_1} - \ldots\right] - (1+v^2+2v\rho) = 0.\end{aligned}$$

Pour que le terme en $\frac{1}{v-a_1}$ disparaisse, il faut et il suffit que l'on ait

$$\alpha_1(a_1+\rho)[-a_1'(a_1+\rho) + 1 - a_1^2] = 0,$$

ce qui entraîne, si $\alpha_1(a_1+\rho) \neq 0$,

$$a_1'(a_1+\rho) = 1 - a_1^2,$$

c'est-à-dire que a_1 *est une solution particulière de l'équation* (1).

Le quotient de $\alpha_1(v+\rho)[-a_1'(v+\rho) + 1 - v^2]$ par $(v-a_1)$ est manifestement alors

$$-\alpha_1(v+\rho)(v+a_1+a_1').$$

Des remarques analogues s'appliquent aux termes tels que $\frac{1}{v-b_1}$.

Il reste au premier membre une partie entière, que l'on peut écrire

$$(\mathrm{E})\quad (v+\rho)\frac{\sigma'}{\sigma}-[\Sigma\,\alpha_i(v+a_i+a'_i)-\Sigma\,\beta_i(v+b_i)](v+\rho)-(v+\rho)^2+\rho^2-1=0.$$

Tous les groupements du premier membre admettent le facteur $(v+\rho)$, sauf le dernier (ρ^2-1) : il serait nécessaire que l'on eût $\rho^2=1$, *si toutes les hypothèses faites devaient être conservées.*

On doit donc supposer que le facteur $(v+\rho)$ figure parmi les facteurs $(v-b_i)$, ou parmi les facteurs $(v-a_i)$, c'est-à-dire que l'une des expressions $(a_i+\rho)$, $b_i+\rho)$ est nulle.

Faisons l'hypothèse $b_1=-\rho$, la partie entière correspondante sera $-\beta_1[\rho'(v+\rho)+1-v^2]$. Il restera, au premier membre de l'identité étudiée (E), en dehors des groupements divisibles par $(v+\rho)$, la somme

$$-\beta_1(1-v^2)+\rho^2-1$$

qui, pour $v=-\rho$, se réduit à

$$(\beta_1+1)(\rho^2-1).$$

Si $\rho^2-1\neq 0$, cette somme ne peut s'annuler, puisque β_1 est un entier positif.

Nous devons donc admettre que l'une des quantités a_i est égale à $-\rho$; soit, par exemple, $a_1=-\rho$. Le même raisonnement nous donnera alors la somme $\alpha_1(1-v^2)+\rho^2-1$, qui doit s'annuler pour $v=-\rho$, ce qui exige simplement $\alpha_1=1$.

Ainsi, le facteur $(v+\rho)$ figure toujours, au premier degré, au numérateur de K.

Nous savons, en outre, que l'équation différentielle (1) possède les solutions $v=+1$, $v=-1$; comme l'intégrale générale de (1) dans le cas actuel est transcendante et donnée par la quadrature de différentielle rationnelle en v,

$$z=\int \mathrm{K}\left(dv-\frac{1-v^2}{v+\rho}\,du\right),$$

toutes les intégrales algébriques sont nécessairement [1] des facteurs de K et les facteurs $v+1$ et $v-1$ doivent figurer soit au numérateur, soit au dénominateur de K.

---

(1) Sauf dans des cas singuliers.

Faisons donc l'hypothèse que

$$K = \sigma(v+\rho)\frac{(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}(v-a_1)^{\alpha_1}\ldots(v-a_m)^{\alpha_m}}{(v-b_1)^{\beta_1}\ldots(v-b_n)^{\beta_n}},$$

sans préciser, pour l'instant, le signe des entiers λ et μ.

En séparant dans l'identité (E) les termes entiers qui proviennent de la division par $(v-1)$ et par $v+1)$, on aura

$$(\mathrm{E}_1)\quad (v+\rho)^2\frac{\sigma'}{\sigma} - [\Sigma\,\alpha_i(v+a_i+a_i') - \Sigma\,\beta_i(v+b_i+b_i')](v+\rho)$$
$$-[\lambda(v+1)+\mu(v-1)](v+\rho)+(\rho'-2v)(v+\rho)=0$$

et, après division par $(v+\rho)$,

$$(\mathrm{E}_2)\quad (v+\rho)\frac{\sigma'}{\sigma} - \Sigma\alpha_1(v+a_i+a_i')$$
$$+\Sigma\beta_i(v+b_i+b_i') - [\lambda(v+1)+\mu(v-1)]+\rho'-2v=0.$$

Cette identité donne simplement deux conditions

$$\frac{\sigma'}{\sigma} - \Sigma\alpha_i + \Sigma\beta_i - (\lambda+\mu+2) = 0,$$
$$\rho\frac{\sigma'}{\sigma} - \Sigma\alpha_i(a_i+a_i') + \Sigma\beta_i(b_i+b_i') + \mu - \lambda + \rho' = 0$$

qui s'ajoutent à celles déjà obtenues

$$a_i' = \frac{1-a_i^2}{a_i+\rho}, \qquad b_j' = \frac{1+b_j^2}{b_j+\rho}$$

pour déterminer les $(m+n+2)$ quantités a_i, b_j, ρ, σ.

On conclut d'abord de là que $(v-1)$ et $(v+1)$ *peuvent figurer à des degrés quelconques, soit au numérateur de* K, *soit au dénominateur.*

Posons

$$\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_i + \lambda + \mu + 2 = s$$

et observons que

$$a_i + a_i' = \frac{1+a_i\rho}{a_i+\rho} = \frac{1-\rho^2}{a_i+\rho} + \rho,$$

nous aurons à intégrer le système (Σ):

$$(\Sigma)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\sigma'}{\sigma}=s,\quad \rho'+\rho(\lambda+\mu+2)+\mu-\lambda=(1-\rho^2)\left(\sum\dfrac{\alpha_i}{a_i+\rho}-\sum\dfrac{\beta_i}{b_i+\rho}\right)\\ a_i'=\dfrac{1-a_i^2}{a_i+\rho},\qquad b_j=\dfrac{1-b_j^2}{b_j+\rho},\qquad (i=1,\ldots,m;\, j=1,\ldots,n)\end{array}\right.$$

ou l'équation aux dérivées partielles correspondante

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}(f)=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{1-a_1^2}{a_1+\rho}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial b_1}\frac{1-b_1^2}{a_1+\rho}+\ldots\\ +\frac{\partial f}{\partial \rho}\Big\{(1-\rho^2)\left(\sum\frac{\alpha_i}{a_i+\rho}-\sum\frac{\beta_i}{b_i+\rho}\right)\\ +\lambda-\mu-\rho(\lambda+\mu+2)\Big\}+\frac{\partial f}{\partial \sigma}s\sigma=0.\end{aligned}$$

Pour faire cette intégration nous remarquerons que l'intégrale z de l'équation

$$\mathrm{U}(z)=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{(1-v^2)}{(v+\rho)}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}=0$$

peut s'obtenir explicitement, à l'aide d'une *quadrature partielle*, sous la forme

$$z=\int_{v_0}^{v}\mathrm{K}\,dv+\Phi(u),$$

où v_0 est une quantité finie, indépendante de v et de u. La fonction Φ sera déterminée par

$$\Phi'(u)+\int_{v_0}^{v}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial u}dv=-\mathrm{K}\frac{(1-v^2)}{(v+\rho)}$$

ou encore, en tenant compte de la résolvante en K, identique

$$\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\left[\mathrm{K}\frac{(1-v^2)}{(v+\rho)}\right]=0,$$

par la relation

$$\Phi'(u)=-\left[\mathrm{K}\frac{(1-v^2)}{(v+\rho)}\right]_{v=v_0}=\frac{(v_0-1)^{\lambda+1}(v_0+1)^{\mu+1}(v_0-a_1)^{\alpha_1}\ldots(v_0-a_m)^{\alpha_m}}{(v_0-b_1)^{\beta_1}\ldots(v_0-b_n)^{''}}$$

qui donnera Φ par une quadrature *quand les* a_i, b_j, ρ *et* σ *seront connus en* u.

Sous la forme adoptée pour z, il est clair que les diverses valeurs de cette fonction, non uniforme en général par rapport à u et à v, s'obtiennent en ajoutant à l'une d'elles les périodes de l'intégrale définie

$$\int_{v_0}^{v} \mathrm{K}\, dv$$

ou les périodes de $\Phi(u)$. Ces dernières sont de simples constantes.

Il faut que les premières soient également indépendantes de u. Comme elles ne dépendent que des σ, ρ, a_i, b_j, *elles seront donc des intégrales, indépendantes de la variable* u, *de l'équation*

$$\mathfrak{V}(f) = 0.$$

Mais l'intégrale définie envisagée est une intégrale de fraction rationnelle en v : supposons, pour fixer les idées, λ et μ positifs; ses périodes seront les produits par $2i\pi$ des divers *résidus* de Cauchy correspondant aux racines du dénominateur, c'est-à-dire ici : $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

En observant que l'on a, au voisinage de $v = b_i$,

$$\mathrm{K} = \frac{\psi(v)}{(v - b_i)^{\beta_i}} = \frac{\psi(b_i) + \dfrac{(v - b_i)}{1}\psi'(b_i) + \ldots + \dfrac{(v - b_i)^{\beta_i - 1}}{(\beta_i - 1)!}\psi^{(\beta_i - 1)}(b_i) + \ldots}{(v - b_i)^{\beta_i}},$$

on voit que le *résidu* $\mathrm{R}(b_i)$ relatif au pôle $v = b_i$ sera donné par

$$1.2\ldots(\beta_i - 1)\mathrm{R}(b_i) = \left[\frac{\partial^{(\beta_i - 1)}\mathrm{K}(v - b_i)^{\beta_i}}{\partial v^{\beta_i - 1}}\right]_{v = b_i}.$$

On aura donc ainsi, pour chaque pôle de K, une intégrale de l'équation $\mathfrak{V}(f) = 0$, sous la forme

$$\mathrm{R}(b_i) = \Gamma_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Remarquons maintenant que, *d'après la définition de* z, *cette fonction de* u *et de* v *doit se réduire à une constante toutes les fois qu'on y remplace* v *par une solution particulière de l'équation différentielle*

$$\frac{dv}{du} = \left(\frac{1 - v^2}{v + \rho}\right).$$

Dans l'hypothèse, λ et μ positifs, où nous nous trouvons, on aura donc, puisque $+1$ et -1 sont des solutions particulières,

$$z(1)=\int_{v_0}^{1} \mathrm{K}\,dv+\Phi(u), \qquad z(-1)=\int_{v_0}^{-1} \mathrm{K}\,dv+\Phi(u),$$
$$z(a_i)=\int_{v_0}^{a_i} \mathrm{K}\,dv+\Phi(u) \qquad (i=1,\ldots,m),$$

où les premiers membres sont des constantes absolues. On en déduit immédiatement les expressions suivantes, indépendantes de $\Phi(u)$, c'est-à-dire ne renfermant que a_i, b_j, σ, ρ,

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{K}\,dv=z(1)-z(-1), \qquad \int_{-1}^{\alpha_i} \mathrm{K}\,dv=z(a_i)-z(-1) \qquad (i=1,\ldots,m)$$

et qui sont manifestement des intégrales de $\mho(f)=0$.

Elles sont en nombre $(m+1)$ et fonctionnellement distinctes : l'examen d'un cas particulier simple le prouverait aisément.

On connaît donc $(m+n+1)$ intégrales de l'équation $\mho(f)=0$, à $(m+n+3)$ variables u, σ, a_i, b_j; ce sont toutes les intégrales indépendantes de u. La forme de l'équation elle-même prouve que la dernière intégrale donnera u par une quadrature.

Si l'on se reporte aux équations différentielles, ou à l'équation $\mho(f)=0$ elle-même, on voit que cette dernière intégrale est

$$\mathrm{C}=u-\frac{\log\sigma}{s},$$

ou encore $\sigma=e^{s(u-\mathrm{C})}$, lorsque $s\neq 0$.

Lorsque s est nul, σ est nécessairement constant et la dernière intégrale doit renfermer avec u un autre élément.

On peut remarquer que $v=\infty$ ou $\frac{1}{v}=0$ est une solution particulière de l'équation (1); ce point est un pôle d'ordre $(1-s)$ de la fonction K qui figure sous le signe d'intégration partielle. Pour $s=0$, c'est donc un pôle simple et le résidu correspondant est σ.

Les $(m+n+1)$ intégrales obtenues qui dépendent des a_i, b_j et de ρ ne sont plus ici fonctionnellement distinctes : en effet, la somme des résidus relatifs *aux zéros du dénominateur* de K est alors égale à σ. Lorsque σ est constant, auquel cas on peut le prendre égal à 1, *on a* *donc une relation linéaire à coefficients constants entre les n intégrales qui correspondent à ces résidus.*

Ainsi les $(m+n)$ intégrales distinctes définissent les a_i et les b_j au moyen de ρ, et si l'on porte ces expressions dans l'équation

$$\rho' + \rho(\lambda + \mu + 2) + \mu - \lambda = (1-\rho^2)\left(\sum \frac{\alpha_i}{a_i+\rho} - \sum \frac{\beta_j}{b_j+\rho}\right),$$

on voit que son intégrale s'obtiendra par une quadrature, la constante s'ajoutant à u. Il ne semble pas qu'on puisse l'expliciter dans le cas général. Le cas $s=1$ est aussi à signaler.

Remarque I. — Les deux classes d'intégrales de l'équation $\mathfrak{V}(f)=0$ indiquées plus haut : périodes de $\int \mathrm{K}\,dv$, différence des valeurs de z pour deux solutions particulières de l'équation $\frac{dv}{du} = \frac{1-v^2}{v+\rho}$, semblent avoir une origine différente. Il est facile de les obtenir à l'aide d'une seule expression.

Considérons l'intégrale définie

$$\omega = \int_{v_0}^{v_1} \mathrm{K}\,dv,$$

où v_0 et v_1 sont indépendants de v; c'est une fonction des seuls éléments σ, a_i, b_j, ρ.

On a évidemment

$$\mathfrak{V}(\omega) = \int_{v_0}^{v_1} \mathfrak{V}(\mathrm{K})\,dv,$$

et si l'on observe que $\mathfrak{V}(\mathrm{K})$ n'est pas autre chose que $\frac{d\mathrm{K}}{du}$ puisque u ne figure pas explicitement dans K, on pourra écrire, en vertu de l'identité

$$\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial u} + \mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v} + \mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} = 0, \qquad \text{où} \qquad \mathrm{A} = \frac{(1-v^2)}{(v+\rho)},$$

$$\mathfrak{V}(\omega) = -\int_{v_0}^{v_1} d\mathrm{AK} = [\mathrm{AK}]_{v_1}^{v_0}.$$

On peut conclure de là que ω *est une solution de l'équation* $\mathfrak{V}(f)=0$, *si* $v_0 = v_1$ *c'est-à-dire pour* $\omega = \int_\Gamma \mathrm{K}\,dv$, Γ *étant un contour fermé quel-*

conque ou bien *lorsque* AK *prend la même valeur pour* $v = v_0$ et $v = v_1$, ce qui arrive, *en particulier*, quand on prend v_0 et v_1 parmi les zéros de AK. Comme σ, a_i, b_j, ρ sont des *paramètres*, c'est même ici le seul choix possible pour v_0 et v_1.

Nous retrouvons ainsi, avec une même origine, les deux espèces d'intégrales : périodes de $\int K\,dv$, différences des valeurs de z pour deux solutions particulières de l'équation différentielle.

Remarque II. — Nous avons supposé λ et μ positifs, les valeurs $+1$ et -1 sont alors des zéros de K; dans l'hypothèse où ces valeurs sont des pôles de K, les résidus correspondant à ces pôles sont des intégrales de $\mho(f) = 0$.

Autre méthode. — La théorie précédente peut être présentée en partant de la décomposition de la fraction rationnelle, K, en *fractions simples;* on retrouve aisément les résultats précédents sous une forme équivalente. Il y a cependant intérêt à la développer parce que le choix d'une *forme générale* différente pour K conduit à d'autres vues sur le mécanisme de la formation de l'équation différentielle que l'on veut intégrer.

Examinons, par exemple, le cas où K ne possède que des pôles simples, parmi lesquels figurent $+1$ et -1, et soit

$$K = \frac{P}{v-1} + \frac{Q}{v+1} + \frac{A}{v-a} + \ldots + L.$$

En écrivant que K satisfait à la condition

$$\frac{\partial K}{\partial u} + \left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right)\frac{\partial K}{\partial v} - K\left[\frac{(1-\rho^2)}{(v+\rho)^2} + 1\right] = 0,$$

qui s'écrit, après multiplication par $(v+\rho)^2$,

$$\begin{aligned}(v+\rho)^2\left[\frac{P'}{v-1} + \frac{Q'}{v+1} + \frac{A'}{v-a} + \frac{a'A}{(v-a)^2} + \ldots + L'\right]&\\ -(1-v^2)(v+\rho)\left[\frac{P}{(v-1)^2} + \frac{Q}{(v+1)^2} + \frac{A}{(v-a)^2} + \ldots\right]&\\ -(1+v^2+2v\rho)\left[\frac{P}{v-1} + \frac{Q}{v+1} + \frac{A}{v-a} + \ldots + L\right] &= 0,\end{aligned}$$

on trouve pour déterminer les coefficients P, Q, A, ..., L et les éléments a, ... et ρ les conditions suivantes :

$$P' = Q' = A' = \ldots = 0, \qquad L' = L,$$
$$(a+\rho)a' = 1 - a^2, \ldots \quad P(1-\rho) - Q(1+\rho) + \rho^2 L' - L + (1-\rho^2)\sum \frac{A}{a+\rho} = 0.$$

Il suffit, comme on l'a fait plus haut, d'écrire que le premier membre est dépourvu de termes en $\frac{1}{(v-a)^2}$, en $\frac{1}{(v-a)}$, en $\frac{1}{v+1}$, en $\frac{1}{v-1}$ et enfin que la partie entière en v est identiquement nulle.

La dernière condition où l'on fait $L' = L$ devient, après division par $(1-\rho^2)$,

$$\frac{P}{\rho+1} + \frac{Q}{\rho-1} + \frac{A}{\rho+a} + \ldots - L = 0.$$

Elle montre que $v = -\rho$ *est un zéro du multiplicateur* K.

Les intégrales

$$P = \text{const.}, \qquad Q = \text{const.}, \qquad A = \text{const.}$$

sont celles qui expriment que les résidus des pôles simples de K (c'est-à-dire les *périodes* relatives à ces pôles) sont indépendants de la variable u.

Il reste à trouver les intégrales de l'équation

$$\mho(f) = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial L} L + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{1-a^2}{a+\rho}\right) + \ldots = 0,$$

où ρ est donné par $K(-\rho) = 0$.

Nous pouvons, par exemple, écrire, en mettant en évidence une forme particulière de $\int K\,dv$ (qu'on peut ici expliciter) :

$$z = P\log(v-1) + Q\log(v+1) + A\log(v-a) + \ldots + Lv + \Phi(u),$$

où $\Phi(u)$ sera donné par l'équation

$$\Phi'(u) - \frac{Aa'}{v-a} - \ldots + L'v = -\left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right)\left[\frac{P}{v-1} + \frac{Q}{v+1} + \frac{A}{v-a} + \ldots + L\right],$$

qui se réduit aisément à

$$\Phi'(u) + \rho L' = P + Q + \Sigma A.$$

Le multiplicateur $K = \frac{P}{v-1} + \frac{Q}{v+1} + \frac{A}{v-a} + \ldots + L$ s'annulera ($L \neq 0$) pour $(m+2)$ valeurs de v, donc $(m+1)$ valeurs autres que $(-\rho)$, si l'on suppose que les pôles simples de K sont en nombre m.

Supposons d'abord ces valeurs $c_1, \ldots c_{m+1}$ distinctes — ce qui est *le cas général* où les P, Q, A, ... sont des constantes *quelconques*. — Euler a montré que *ces zéros de* K *sont des solutions particulières de l'équation* (1)

$$\frac{dv}{du} = \left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right); \tag{1}$$

on en conclut donc que les $Z_i = z(c_i)$:

$$Z_i = P\log(c_i - 1) + Q\log(c_i + 1) + A\log(c_i - a) + \ldots + Lc_i + \Phi(u)$$
$$[i = 1, \ldots, (m+1)],$$

où les a et L sont des fonctions de u convenables, sont des constantes. Les différences $Z_2 - Z_1, Z_3 - Z_1, \ldots, Z_{m+1} - Z_1$ sont alors des intégrales, indépendantes de u, de l'équation

$$\varphi(f) = 0.$$

Quand on établit entre les éléments $a, \ldots$, A, ..., P, Q, L *certaines relations algébriques entières*, il peut arriver que plusieurs des zéros $c_1, \ldots, c_{m+1}$ coïncident; mais ces relations diminuent d'autant le nombre des éléments inconnus parmi les a.

Par exemple, si le zéro c_2 est double, on a la relation nouvelle

$$K'(c_2) = 0,$$

qui lie les a aux coefficients A, ..., P, Q, L *et ne renferme pas de constante arbitraire* et la relation qui exprime la constante de $z(c_2) - z(c_1)$ (en supposant que c_1 est un zéro autre que c_2)

$$z(c_2) - z(c_1) = Z_2 - Z_1,$$

qui renferme la constante arbitraire $Z_2 - Z_1$.

D'une manière générale, si les zéros de $K(v)$ se partagent, suivant leur degré de multiplicité, en divers groupes, les conditions algébriques qui expriment ce partage et qu'on peut écrire sous forme entière à l'aide des éléments P, Q, A, ..., L, a, ... donnent *autant de relations* *distinctes entre les* $a, \ldots$ *sans constante arbitraire*, qui remplacent un même nombre d'intégrales de $\varphi(f) = 0$.

On peut aisément montrer que ces relations constituent *un système d'équations invariant* par l'opération $\varphi(f)$ — en d'autres termes que la multiplicité algébrique qu'elles définissent dans le domaine des $a, \ldots$ est invariante par l'opération $\varphi(f)$. Nous mettrons ainsi en évidence la constitution de ces *multiplicités singulières* qui conduisent à des équations différentielles possédant un multiplicateur K dont les zéros ne sont pas des zéros simples. Ce que nous dirons s'applique d'ailleurs à une équation *quelconque* du premier ordre

$$\frac{dv}{du} = \mathrm{A}(u, v),$$

et en particulier, *pour fixer les idées et nous borner à une classe précise*, aux équations où A est rationnel en v, quelconque en u.

La résolvante dont dépend K $\left(\text{dans notre hypothèse, A se réduit à } \frac{1 - v^2}{v + \rho}\right)$

$$\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial u} + \mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v} + \mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} = 0$$

devient une identité en u, v quand on y remplace K par son expression.

Si nous l'écrivons, en posant

$$\mathrm{U}(f) = \frac{\partial f}{\partial u} + \mathrm{A}\frac{\partial f}{\partial v}$$

sous la forme

$$(i_1) \qquad \mathrm{U}(\mathrm{K}) + \mathrm{K}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} = 0,$$

cette identité donnera, en la dérivant par rapport à v, la suite *d'identités*

$$(i_2) \qquad \mathrm{U}\left(\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v}\right) + 2\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} + \mathrm{K}\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial v^2} = 0,$$

$$(i_3) \qquad \mathrm{U}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial v^2}\right) + 3\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial v^2}\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial v} + 3\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial v}\frac{\partial^2 \mathrm{A}}{\partial v^2} + \mathrm{K}\frac{\partial^3 \mathrm{A}}{\partial v^3} = 0,$$

$$\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dont la loi de formation est évidente.

Considérons d'abord l'identité (i_1); elle exprime que *la relation* $\mathrm{K} = 0$

est invariante par l'opération $U(f)$. Soit c un zéro de $K(v)$, cette même identité où nous faisons $v = c$

$$\frac{\partial}{\partial u}K(c) + A(u, c)\frac{\partial}{\partial c}K(c) = -K(c)\frac{\partial A(u, c)}{\partial c}$$

montre que l'on a

$$\frac{dc}{du} = A(u, c);$$

elle donne donc le *théorème d'Euler*, d'après lequel *les zéros du multiplicateur sont des solutions particulières de l'équation différentielle.*

On observe en outre que $\frac{\partial K(c)}{\partial u}$ est la dérivée de $K(c)$, en y supposant tous les éléments variables sauf c; c'est par suite dans le cas particulier qui nous occupe

$$\mho K(c) = \frac{\partial K}{\partial a}\frac{1-a^2}{a+\rho} + \ldots + \frac{\partial K}{\partial L}L.$$

Considérons maintenant les identités (i_1) et (i_2); elles expriment que *le système d'équations*

$$K = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial v} = 0$$

est invariant par l'opération $U(f)$. Les équations $K = 0$, $\frac{\partial K}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = 0$ forment de même, en raison des identités (i_1), (i_2), (i_3), un système invariant par cette opération, etc.

Il est clair que $U(K)$, lorsqu'on y remplace v par un zéro c de $K(v)$, c'est-à-dire par une fonction de u déterminée, n'est pas autre chose que *la dérivée totale* $\frac{dK}{du}$ ou encore $\mho(K)$; on voit donc que l'on peut écrire, en regardant c comme défini par

$$K(c) = \frac{P}{c-1} + \frac{Q}{c+1} + \frac{A}{c-a} + \ldots + L = 0,$$

au moyen des $a, \ldots$ et supposant

$$\mho(f) = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{1-a^2}{a+\rho}\right) + \ldots - \frac{\partial f}{\partial L}L,$$

les identités en u :

$$(i'_1) \qquad \mho[\mathrm{K}(c)] = \left[\frac{(1-\rho^2)}{(\rho+c)^2}+1\right]\mathrm{K}(c),$$

$$(i'_2) \qquad \mho\left[\frac{\partial\,\mathrm{K}(c)}{\partial c}\right] = 2\left[\frac{(1-\rho^2)}{(\rho+c)^2}+1\right]\frac{\partial\,\mathrm{K}(c)}{\partial c} - 2\frac{(1-\rho^2)}{(\rho+c)^3}\mathrm{K}(c),$$

$$(i'_3) \qquad \mho\left[\frac{\partial^2\mathrm{K}(c)}{\partial c^2}\right] = 3\left[\frac{(1-\rho^2)}{(\rho+c)^2}+1\right]\frac{\partial^2\mathrm{K}(c)}{\partial c^2} - 6\frac{(1-\rho^2)}{(\rho+c)^3}\frac{\partial\,\mathrm{K}(c)}{\partial c} + 6\frac{(1-\rho^2)}{(\rho+c)^4}\mathrm{K}(c),$$

$$\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces identités mettent en évidence le mécanisme du remplacement des intégrales de $\mho(f) = 0$ par des systèmes d'équations invariantes

$$\frac{\partial}{\partial c}\mathrm{K}(c) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial c}\mathrm{K}(c) = 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial c^2}\mathrm{K}(c) = 0, \qquad \ldots,$$

pour *les équations différentielles singulières*

$$\frac{dv}{du} = \left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right),$$

où ρ est choisi de telle sorte que le multiplicateur K possède en c un zéro double, un zéro triple, etc.

On peut écrire des identités analogues pour tous les zéros de $\mathrm{K}(v)$ que l'on veut multiples.

Il en résulte manifestement pour chaque zéro d'ordre de multiplicité α, $(\alpha - 1)$ conditions formant un système invariant vis-à-vis de $\mho(f)$ — c'est à dire un système qui ne donne, par dérivation en u, pas de nouvelle condition — auxquelles on peut ajouter une intégrale de la forme adoptée dans le cas des zéros simples.

Le nombre total des relations ainsi obtenues est dans tous les cas $(m-1)$, *avec seulement autant de constantes arbitraires qu'il y a de zéros distincts et différents de* $(-\rho)$ *pour* $\mathrm{K}(v)$.

Il ne reste donc à trouver dans tous les cas qu'une intégrale de $\mho(f) = 0$ renfermant u explicitement. C'est évidemment l'intégrale de l'équation $\mathrm{L}' = \mathrm{L}$, que nous écrirons

$$\mathrm{C} = u - \log \mathrm{L},$$

où C désigne la constante arbitraire.

Dans le cas exceptionnel, correspondant à celui qui a été signalé plus haut, *où* L *est nul*, les zéros de $K(v)$ sont en nombre $(m+1)$ seulement [1] y compris $(-\rho)$; les $(m-1)$ intégrales qui résultent de leur considération définissent, avec la relation $K(-\rho) = 0$, les éléments analogues à a et ρ au moyen de a. Il reste à intégrer par une quadrature l'équation

$$\frac{da}{du} = \left(\frac{1-a^2}{a+\rho}\right).$$

Remarque. — Pour *traiter tous les cas possibles*, *en partant de la décomposition de* K *en fractions simples*, il faudrait étudier, avec ceux où quelques-uns des pôles a sont multiples, ceux où les solutions particulières $+1$ et -1 de l'équation différentielle

$$\frac{dv}{du} = \frac{1-v^2}{v+\rho}$$

sont toutes deux des zéros ou des pôles multiples de $K(v)$ et aussi ceux où l'une d'elles est un pôle et l'autre un zéro. *La forme analytique des résultats varie suivant les cas*, mais la méthode est générale, car les solutions particulières $+1$ et -1 ne jouent pas un rôle essentiellement différent des autres.

Supposons, pour fixer les idées, que K possède au point $v = a$ un pôle d'ordre α :

$$K = \frac{P}{v-1} + \frac{Q}{v+1} + \frac{A}{v-a} + \frac{A_2}{(v-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(v-a)^\alpha} + \frac{B}{v-b} + \ldots + L,$$

le nombre des éléments $a, b, \ldots$ étant toujours m. Les coefficients P, Q, A, B, ... sont évidemment encore des constantes, puisque ce sont des *résidus* de Cauchy. On observera que le nombre des zéros c_i de K est maintenant $(m+1+\alpha)$; il y en aura $(m+\alpha)$ autres que $(-\rho)$ qui donneront des intégrales de la nouvelle équation $\mathfrak{v}(f) = 0$, de la

---

(1) Le nombre des zéros de $K(v)$ à distance finie peut encore diminuer quand le point $v = \infty$ est un zéro multiple de $K(v)$. Il s'introduit alors, comme pour les zéros multiples à distance finie, des relations particulières entre les éléments P, Q, A, ..., a, ... qui remplacent autant d'intégrales.

forme

$$\begin{gathered}
Z_i = P\log(c_i - 1) + Q\log(c_i + 1) + A\log(c_i - a) + \ldots + Lc_i \\
-\frac{A_2}{(c_i - a)} - \frac{A_3}{2(c_i - a)^2} - \ldots - \frac{A_\alpha}{(\alpha - 1)(c_i - a)^{\alpha - 1}} + \Phi(u) \\
(i = 1, \ldots, m + \alpha),
\end{gathered}$$

d'où l'on déduira, par différence, les intégrales $Z_i - Z_1$ indépendantes de $\Phi(u)$.

Il n'y a donc aucune difficulté à traiter le cas des pôles multiples de K, de cette manière.

Une observation est à faire, dans l'hypothèse où *le point à l'infini du plan φ est un pôle multiple de* K.

Supposons, pour fixer les idées,

$$K = \frac{P}{\varphi - 1} + \frac{Q}{\varphi + 1} + \frac{A}{\varphi - a} + \ldots + L + L_1\varphi + \ldots + L_n\varphi^n,$$

et reportons-nous à la résolvante en K, identique,

$$\begin{aligned}
&(\varphi + \rho)^2\left[\frac{P'}{\varphi - 1} + \frac{Q'}{\varphi + 1} + \ldots + L' + L'_1\varphi + \ldots + L'_n\varphi^n\right] \\
&\quad - (1 - \varphi^2)(\varphi + \rho)\left[\frac{P}{(\varphi - 1)^2} + \ldots - L_1 - 2L_2\varphi - \ldots - nL_n\varphi^{n-1}\right] \\
&\quad\quad - (1 + \varphi^2 + 2\varphi\rho)\left[\frac{P}{\varphi - 1} + \ldots + L + L_1\varphi + \ldots + L_n\varphi^n\right] = 0.
\end{aligned}$$

On en déduira aisément, en supprimant les termes fractionnaires, qui disparaissent en vertu des équations déjà obtenues, une identité *entière* en φ, qui donnerait ici les conditions que doivent remplir les éléments ρ, L, L_1, ..., L_n.

Nous nous bornerons à signaler ce que donne l'annulation du coefficient de φ^{n+2} :

$$L'_n - (n + 1)L_n = 0,$$

d'où l'on conclut

$$C = u - \frac{\log L_n}{(n + 1)}.$$

Cette *équation définit* L_n *au moyen de* u, toutes les autres intégrales de $\mho(f) = 0$ devant être regardées comme définissant $a, b, \ldots, L, \ldots, L_{n-1}$ au moyen de L_n; la fonction ρ est donnée par $K(-\rho) = 0$ et peut s'exprimer explicitement avec les c_i.

III. *La puissance p d'un multiplicateur est rationnelle.*

Supposons maintenant que la différentielle $\left[dv - \left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right) du\right]$ possède un multiplicateur dont la puissance entière, p, soit une fonction rationnelle de v; il n'existe donc pas ici de multiplicateur rationnel en v et le nombre p est choisi le plus petit possible.

En désignant par $K^{\frac{1}{p}}$ ce multiplicateur

$$dz = K^{\frac{1}{p}}\left[dv - \left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right) du\right],$$

on a

$$\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^p = K,$$

et l'on déduit aisément, de l'équation

$$U(z) = \frac{\partial z}{\partial u} + \left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right)\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

la *résolvante* dont dépend K,

$$\frac{\partial K}{\partial u} + \left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right)\frac{\partial K}{\partial v} - pK\left[\frac{(1-\rho^2)}{(\rho+v)^2} + 1\right] = 0,$$

qui n'est d'ailleurs que la condition d'intégrabilité exacte de dz.

Cette résolvante admet, dans le cas actuel, une solution K rationnelle en v et une seule.

Les résultats obtenus dans l'étude du cas précédent nous permettent d'écrire immédiatement

$$K = \sigma(v+\rho)^p \frac{(v-1)^\lambda (v+1)^\mu (v-a_1)^{\alpha_1}\dots(v-a_m)^{\alpha_m}}{(v-b_1)^{\beta_1}\dots(v-b_n)^{\beta_n}},$$

où λ et μ sont des entiers de signe quelconque, les α_i et les β_j des entiers positifs; ils nous donnent aussi le système des équations différentielles que doivent vérifier les éléments a_i, b_j, σ, ρ.

Ce système s'obtient en remplaçant dans les équations obtenues plus haut, respectivement λ, μ, α_i, β_j par $\frac{\lambda}{p}$, $\frac{\mu}{p}$, $\frac{\alpha_i}{p}$, $\frac{\beta_j}{p}$ et σ par $\sigma^{\frac{1}{p}}$.

Il s'écrit donc, en posant

$$\Sigma\alpha_i - \Sigma\beta_j + \lambda + \mu + 2p = s,$$

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = s, \qquad p\rho' + (\lambda + \mu + 2p)\rho + \mu - \lambda = (1 - \rho^2)\left(\sum \frac{\alpha_i}{a_i + \rho} - \sum \frac{\beta_j}{b_j + \rho}\right),$$

$$a_i' = \frac{1 - a_i^2}{a_i + \rho}, \qquad b_j' = \frac{1 - b_j^2}{b_j + \rho} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n),$$

et l'équation linéaire aux dérivées partielles correspondante est

$$\begin{aligned}\mho(f) = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{1 - a_1^2}{a_1 + \rho} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial b_1}\frac{1 - b_1^2}{b_1 + \rho} + \ldots \\ + \frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial \rho}\Big[(1 - \rho^2)\left(\sum \frac{\alpha_i}{a_i + \rho} - \sum \frac{\beta_j}{b_j + \rho}\right) \\ - (\lambda + \mu + 2p)\rho + \lambda - \mu\Big] + \frac{\partial f}{\partial \sigma}s\sigma = 0.\end{aligned}$$

Pour intégrer cette équation, nous observerons encore que l'on a

$$z = \int_{v_0}^{v} \sqrt[p]{K}\, dv + \Phi(u),$$

v_0 désignant une constante indépendante de u et de v, à condition de choisir $\Phi(u)$ de manière à vérifier

$$\Phi'(u) + [A\sqrt[p]{K}]_{v=v_0} = 0, \qquad \text{où} \qquad A = \left(\frac{1 - v^2}{v + \rho}\right).$$

Les diverses déterminations de z sont de la forme $\varepsilon z + P$, où $\varepsilon^p = 1$; il faut donc que les *périodes* P de l'intégrale $\int \sqrt[p]{K}\, dv$, qui est une intégrale de différentielle algébrique, soient des intégrales de $U(f) = 0$, et par suite des intégrales de $\mho(f) = 0$.

Les diverses déterminations de l'intégrale $\int_{v_0}^{v} \sqrt[p]{K}\, dv$ s'obtiennent, pour chaque ε, en faisant précéder le chemin déterminé qui va de v_0 à v d'un *chemin fermé quelconque partant de v_0 avec une certaine détermination de $\sqrt[p]{K}$ et y revenant avec la même détermination;* les périodes sont donc données par

$$\Omega = \int_\Gamma \sqrt[p]{K}\, dv,$$

où Γ est un tel chemin.

Dans le cas général, où l'on suppose qu'*aucun des entiers* λ, μ,

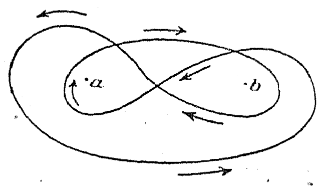
α_i, β_j, ... *n'est multiple de p*, on pourra ramener Γ à une succession de chemins élémentaires qu'on peut définir de la manière suivante :

Soient a et b deux des valeurs critiques 1, -1, a_i, b_j, ..., et A un chemin partant de v_0 et y revenant après avoir tourné une fois autour du seul point a dans le sens direct; soit B un chemin analogue relatif au point b; nous désignerons par $\Gamma_{a.b}$ le contour $\mathrm{A}\mathrm{B}\overset{-1}{\mathrm{A}}\overset{-1}{\mathrm{B}}$ obtenu en décrivant les contours A et B dans le sens direct puis en sens inverse. *L'intégrale*

$$\int_{\Gamma_{a,b}} \sqrt[p]{\mathrm{K}}\, dv$$

ne dépend pas, évidemment, *de la position de* v_0 et peut se remplacer par toute autre intégrale prise le long d'un *double contour* analogue, tel qu'en le décrivant on tourne successivement autour des points a

Fig. 1.



et b une fois dans le sens direct et une fois en sens inverse. Un tel *double contour* $\mathrm{C}_{a,b}$ ne se ramène pas à zéro par déformation continue et l'intégrale correspondante n'est pas nulle en général.

Si l'on désigne par ω_a la valeur de l'intégrale prise en partant de v_0 et y revenant après avoir décrit le contour A, pour une détermination initiale choisie une fois pour toutes de $\sqrt[p]{\mathrm{K}}$, on trouve aisément

$$\int_{\Gamma_{a,b}} \sqrt[p]{\mathrm{K}}\, dv = \left(1 - e^{2i\pi\frac{\beta}{p}}\right)\omega_a - \left(1 - e^{2i\pi\frac{\alpha}{p}}\right)\omega_b.$$

Comment peut-on obtenir ω_a?

Dans le *voisinage* du point a, on peut écrire

$$\sqrt[p]{\mathrm{K}} = \mathrm{F}(v)\,(v-a)^{\frac{\alpha}{p}},$$

où $\mathrm{F}(v)$ est uniforme en v, et nous pouvons toujours prendre, pour contour A, un *lacet* formé de deux chemins rectilignes joignant v_0 à deux points infiniment voisins situés sur le cercle de rayon r et de centre a et de la partie finie de ce cercle qui réunit ces deux points, lorsque r est suffisamment petit.

Il est aisé de voir que si $\frac{\alpha}{p}+1>0$ (ce qui a lieu en particulier pour α positif), l'intégrale prise le long du petit cercle tend vers zéro avec r; les deux intégrales rectilignes tendent vers des limites finies quand r tend vers zéro et l'on a, en définitive,

$$\omega_a=\left(1-e^{2i\pi\frac{\alpha}{p}}\right)\int_{v_0}^{a}\sqrt[p]{K}\,dv,$$

l'intégrale du second membre étant prise suivant la droite qui joint v_0 au point a.

Comme on a de même

$$\omega_b=\left(1-e^{2i\pi\frac{\beta}{p}}\right)\int_{v_0}^{b}\sqrt[p]{K}\,dv,$$

il en résulte simplement

$$\int_{\Gamma_{a,b}}\sqrt[p]{K}\,dv=\left(1-e^{2i\pi\frac{\alpha}{p}}\right)\left(1-e^{2i\pi\frac{\beta}{p}}\right)\int_{b}^{a}\sqrt[p]{K}\,dv,$$

puisque

$$\int_{v_0}^{a}\sqrt[p]{K}\,dv+\int_{b}^{v_0}\sqrt[p]{K}\,dv=\int_{b}^{a}\sqrt[p]{K}\,dv.$$

On peut donc substituer aux intégrales Ω *relatives à des contours* $\Gamma_{a,b}$ *pour lesquels les exposants* $\frac{\alpha}{p}$, $\frac{\beta}{p}$ *satisfont aux conditions*

$$\frac{\alpha}{p}+1>0,\qquad \frac{\beta}{p}+1>0,$$

les expressions

$$\Delta_{a,b}=\int_{a}^{b}\sqrt[p]{K}\,dv.$$

Il est à remarquer que *ces intégrales gardent leur sens, alors même que* $\frac{\alpha}{p}$ et $\frac{\beta}{p}$ *sont des entiers positifs*, tandis que l'intégrale

$$\int_{\Gamma_{a,b}}\sqrt[p]{K}\,dv$$

s'annule identiquement lorsqu'une de ces quantités $\frac{\alpha}{p}$, $\frac{\beta}{p}$ est un entier positif. On a en effet, si $\frac{\alpha}{p}$ est un entier positif,

$$e^{2i\pi\frac{\alpha}{p}} = 1 \quad \text{et} \quad \omega_a = 0.$$

Dans le cas où l'une des quantités $\frac{\alpha}{p}$, $\frac{\beta}{p}$ est inférieure à (-1), on ne peut plus négliger l'intégrale prise le long du petit cercle qui entoure le point correspondant a ou b, car elle ne tend plus vers zéro avec le rayon de ce cercle. Cependant l'intégrale ω_a, prise le long du *lacet élémentaire* ou de tout chemin équivalent, garde toujours un sens précis et il en est de même de

$$\int_{\Gamma_{a,b}} \sqrt[p]{K}\, dv = \left(1 - e^{2i\pi\frac{\beta}{p}}\right)\omega_a - \left(1 - e^{2i\pi\frac{\alpha}{p}}\right)\omega_b.$$

Il y a cependant à signaler le cas où l'une des quantités $\frac{\alpha}{p}$, $\frac{\beta}{p}$ serait un *entier négatif*.

Dans le cas où $\frac{\alpha}{p}$ est entier négatif, on peut choisir un contour qui entoure une seule fois u dans le sens direct en partant de v_0 et y revenant, puisque $\sqrt[p]{K}$ reprend sa valeur initiale après avoir décrit un tel contour. En ramenant ce contour à un lacet élémentaire, à l'intérieur duquel $\sqrt[p]{K}$ est uniforme, on voit que l'intégrale correspondante se réduira au produit de $2i\pi$ par un *résidu* de Cauchy, celui de $\sqrt[p]{K}$ pour $v = a$, c'est-à-dire ici le coefficient de $\frac{1}{(v-a)}$ dans le développement de $\sqrt[p]{K}$, suivant les puissances croissantes et décroissantes de $(v-a)$.

Il est possible, dans le cas général où l'exposant $\frac{\alpha}{p}$ est négatif et inférieur à (-1), sans être entier, de définir aussi un contour particulier qui nous donnera une intégrale nouvelle.

Il suffit d'observer que, si l'on part de v_0 pour y revenir après avoir tourné p fois dans le sens direct autour du point a, $\sqrt[p]{K}$ reprend sa valeur initiale quand on arrive en v_0.

Un tel contour peut se ramener à un cercle de rayon très petit décrit

p fois et à deux intégrales rectilignes allant de v_0 à un point voisin de a, dont les éléments se détruisent deux à deux; on a donc simplement ainsi l'intégrale

$$E_a = \int_{C_a} \sqrt[p]{K}\, dv,$$

où C_a représente un cercle de rayon très petit parcouru p fois de suite dans le sens direct. $\left(\text{On suppose ici } \frac{\alpha}{p} \text{ irréductible; si } \alpha \text{ et } p\right.$ admettaient pour plus grand commun diviseur d, il suffirait de parcourir ce cercle $\left.\frac{p}{d} \text{ fois.}\right)$

Mais, d'autre part, si l'on développe $\sqrt[p]{K}$ au voisinage de $v = a$ suivant les puissances de $(v - a)^{\frac{1}{p}}$, on obtient un développement convergent qui commence à la puissance négative α :

$$\sqrt[p]{K} = \frac{\varphi_\alpha}{(v-a)^{-\frac{\alpha}{p}}} + \ldots + \frac{R_a}{p(v-a)} + \ldots,$$

et l'on a manifestement

$$\int_{C_a} \sqrt[p]{K}\, dv = 2 i\pi R_a,$$

R_a désignant le *résidu* de la fonction $\sqrt[p]{K}$ à p valeurs, au point $(v = a)$.

En résumé, on obtient ainsi, pour les points critiques de $\sqrt[p]{K}$ *en nombre* l, *dont les exposants sont supérieurs à* (-1), $(l-1)$ *intégrales de la forme*

$$\Delta_{a,b} = \int_a^b \sqrt[p]{K}\, dv,$$

et pour les autres qui sont en nombre $(m+n+2-l)$ *autant d'intégrales distinctes que de points critiques, représentées par des* RÉSIDUS, *donc en tout* $(m+n+1)$ *intégrales de l'équation aux* $(m+n+3)$ *variables* u, σ, ρ, a_i, b_j, ...

Il reste à obtenir une nouvelle intégrale dépendant de u; elle est donnée, lorsque $s \neq 0$, par l'intégration de $\frac{\sigma'}{\sigma} = s$, sous la forme

$$C = u - \frac{1}{s} \log \sigma.$$

Lorsque $s=0$, σ est constant et $\sqrt[p]{K}$ pour les grandes valeurs de v est comparable à $\frac{1}{v}$. Le résidu relatif au point $\frac{1}{v}=0$ se réduit simplement à $-\sigma$ et la relation qui exprime que *la somme des résidus relatifs à tous les pôles de* $\sqrt[p]{K}$, *y compris le point à l'infini* et de la combinaison linéaire des périodes qui correspond au contour *limite totale* de la surface de Riemann pour $y^p = K(v)$, *est nulle*, établit une relation linéaire à coefficients constants entre les résidus relatifs aux pôles placés à distance finie et les périodes telles que $\Delta_{a,b}$, c'est-à-dire entre les $(m+n+2)$ intégrales correspondantes. Le nombre des intégrales distinctes est alors seulement $(m+n)$; elles définissent les a et les b au moyen de ρ et il reste à intégrer par une quadrature l'équation

$$p\rho' + (\lambda+\mu+2p)\rho + \mu - \lambda = (1-\rho^2)\left(\sum \frac{\alpha_i}{a_i+\rho} - \sum \frac{\beta_j}{b_j+\rho}\right)$$

pour obtenir les $(m+n+1)$ intégrales définissant a_i, b_j et ρ au moyen de u [1].

IV. *La dérivée logarithmique d'un multiplicateur est rationnelle.*

Soit toujours l'équation

$$U(z) = \frac{\partial z}{\partial u} + \left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right)\frac{\partial z}{\partial v} = 0;$$

nous supposons ici qu'il existe pour la *résolvante* dont dépend

$$J = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial z}{\partial v}}$$

une solution rationnelle en v. Il n'en peut alors exister qu'une seule, sans quoi on retomberait dans le cas précédent.

---

(1) On peut remarquer qu'en général la relation identique obtenue en égalant les deux expressions de $\int_\Gamma \sqrt[p]{K}\,dv$, où Γ est un contour fermé entourant le point $v=\infty$ seul et tel que $\sqrt[p]{K}$ reprenne, après avoir décrit ce contour, sa valeur initiale, donne l'*expression d'une certaine combinaison linéaire des périodes par une fonction algébrique* (somme de résidus).

Pour une équation

$$\frac{\partial z}{\partial u} + A\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

où A dépend de u et v, la résolvante en J est simplement

$$\frac{\partial J}{\partial u} + A\frac{\partial J}{\partial v} + J\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial^2 A}{\partial v^2} = 0;$$

elle sera donc ici

$$\frac{\partial J}{\partial u} + \left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right)\frac{\partial J}{\partial v} - \left[\frac{(1-\rho^2)}{(\rho+v)^2} + 1\right]J + 2\frac{(1-\rho^2)}{(\rho+v)^3} = 0.$$

D'après l'étude antérieure des formes possibles de K, nous pouvons tout de suite poser

$$J = \frac{1}{v+\rho} + J_1,$$

où J_1 ne devient plus infini pour $v = -\rho$, la nouvelle fonction J_1 devant satisfaire à l'équation

$$(v+\rho)^2\frac{\partial J_1}{\partial u} + (1-v^2)(v+\rho)\frac{\partial J_1}{\partial v} - J_1(1+v^2+2v\rho) = 2\rho + \rho'.$$

Examinons d'abord le cas où *tous les pôles de* J_1 *sont simples*. Nous savons que parmi ces pôles figurent $+1$ et -1 qui correspondent à des solutions particulières algébriques et nous écrirons

$$J_1 = \frac{\lambda}{v-1} + \frac{\mu}{v+1} + J_2,$$

ce qui donnera

$$\begin{aligned}(v+\rho)^2&\left[\frac{\lambda'}{v-1} + \frac{\mu'}{v+1} + \frac{\partial J_2}{\partial u}\right]\\ &+ (1-v^2)(v+\rho)\left[\frac{-\lambda}{(v-1)^2} - \frac{\mu}{(v+1)^2} + \frac{\partial J_2}{\partial v}\right]\\ &\quad - \left(\frac{\lambda}{v-1} + \frac{\mu}{v+1} + J_2\right)(1+v^2+2v\rho) = 2\rho + \rho'.\end{aligned}$$

Le terme en $\frac{1}{(v-1)}$ doit disparaître du premier membre. On observera tout de suite que le coefficient de $\frac{1}{(v-1)}$ est

$$(v+\rho)(v+1) - (1+v^2+2v\rho)$$

et se réduit à $(1-\rho)(v-1)$; le seul terme en $\frac{1}{(v-1)}$ est donc

$$\frac{(v+\rho)^2\lambda'}{(v-1)}$$

et λ' *est nécessairement nul.* De même le coefficient de μ est $-(1+\rho)$ et μ' est également nul.

Ainsi, λ *et* μ *sont des constantes* et J_2 doit satisfaire à l'équation

$$(v+\rho)^2\frac{\partial J_2}{\partial u}+(1-v^2)(v+\rho)\frac{\partial J_2}{\partial v}-(1+v^2+2v\rho)J_2=(\lambda+\mu+2)\rho+\rho'+\mu-\lambda.$$

Soit maintenant

$$J_2=\frac{\alpha}{v-a}+\frac{\beta}{v-b}+\ldots+L,$$

où $\alpha, \beta, \ldots, a, b, \ldots$, L sont des fonctions de u à déterminer; on a pour cela l'identité en v:

$$\begin{aligned}(v+\rho)^2&\left[\frac{\alpha'}{v-a}+\frac{\alpha a'}{(v-a)^2}+\ldots+L'\right]+(1-v^2)(v+\rho)\left[\frac{-\alpha}{(v-a)^2}-\ldots\right]\\&-(1+v^2+2v\rho)\left[\frac{\alpha}{v-a}+\frac{\beta}{v-b}+\ldots+L\right]\\&=(\lambda+\mu+2)\rho+\rho'+\mu-\lambda.\end{aligned}$$

Pour que le terme en $\frac{1}{(v-a)^2}$ disparaisse, il faut et il suffit que a soit une solution particulière de (1) :

$$a'=\frac{1-a^2}{a+\rho}.$$

Le quotient de

$$\alpha[v+\rho)a'-(1-v^2)](v+\rho)$$

par $(v-a)$ est

$$\alpha(v+\rho)(v+a+a').$$

Pour que le terme en $\frac{1}{(v-a)}$ disparaisse, il faudra que

$$(v+\rho)^2\alpha'+\alpha(v+\rho)(v+a+a')-\alpha(1+v^2+2v\rho)$$

soit divisible par $(v-a)$. Considérons le coefficient de α, en tenant compte de l'expression de a',

$$a'=\frac{1-a^2}{a+\rho};$$

il s'écrit aisément

$$(v-a)\frac{(1-\rho^2)}{(a+\rho)},$$

c'est-à-dire qu'il est divisible par $(v-a)$.

Il faut donc, puisque $(a+\rho)\neq 0$, que l'on ait $\alpha'=0$, c'est-à-dire *que* α *soit une constante*.

Il restera une identité entière en v :

$$(v+\rho)^2L'+(1-\rho^2)\left(\frac{\alpha}{a+\rho}+\ldots\right)-(1+v^2+2v\rho)L$$
$$=(\lambda+\mu+2)\rho+\rho'+\mu-\lambda,$$

qui donne immédiatement les conditions $L'-L=0$ (obtenue deux fois) :

$$(1-\rho^2)\left(\frac{\alpha}{a+\rho}+\ldots-L\right)=\rho(\lambda+\mu+2)+\rho'+\mu-\lambda.$$

Le système des équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les fonctions a, b, ..., L et ρ est donc

$$a'=\frac{1-a^2}{a+\rho},\quad \ldots,\quad L'=L,$$
$$\rho'+(\lambda+\mu+2)\rho+\mu-\lambda=(\rho^2-1)J_2(-\rho)\quad (^1);$$

nous écrirons, comme plus haut, l'équation linéaire aux dérivées partielles correspondante :

$$\mho(f)=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial L}L+\frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{1-a^2}{a+\rho}\right)+\ldots+\frac{\partial f}{\partial \rho}[(\rho^2-1)J_1(-\rho)-2\rho]=0.$$

Intégration de $\mho(f)=0$. — Pour intégrer cette équation, nous allons chercher à obtenir, au moyen de quadratures, l'expression de z, c'est-à-dire de la solution de l'équation

$$U(z)=\frac{\partial z}{\partial u}+\left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right)\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

Si l'on pose

$$K=\frac{\partial z}{\partial v},$$

---

(1) Cette dernière équation s'écrit plus simplement

$$\rho'+2\rho=(\rho^2-1)J_1(-\rho).$$

on a

$$\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial v} = J,$$

d'où

$$K = \Phi(u)(v+\rho)\,e^{\lambda \log(v-1) + \mu \log(v+1) + \alpha \log(u-a) + \ldots + Lv},$$

ce qui pourrait aussi s'écrire, en définissant les *puissances complexes* par la formule classique $x^\alpha = e^{\alpha \log x}$,

$$K = \Phi(u)(v+\rho)(v-1)^\lambda (v+1)^\mu (v-a)^\alpha \ldots e^{Lv}.$$

En écrivant que K satisfait à la résolvante

$$\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial u} + \left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right)\frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial v} - \left[\frac{1-\rho^2}{(\rho+v)^2} + 1\right] = 0,$$

on trouve aisément, pour déterminer $\Phi(u)$, l'équation

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \lambda + \mu + 2 + \Sigma\alpha - \rho L$$

qui donnera Φ par une quadrature, quand ρ et L seront connus.

[Il convient d'observer, en passant, qu'on aurait pu écrire, plus généralement,

$$\log K = \log \Phi(u) + \int_{v_0}^{v} J\,dv,$$

v_0 étant indépendant de v et de u, et obtenir, en exprimant que K satisfait à la résolvante correspondante,

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = -\left[AJ + \frac{\partial A}{\partial v}\right]_{v=v_0} \qquad \text{où } A = \left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right).\Big]$$

Supposons $K = \dfrac{\partial z}{\partial v}$ connu, on aura z par une nouvelle quadrature partielle

$$z = \int_{v_0}^{v} K\,dv + \Psi(u),$$

où la fonction Ψ est définie par $\Psi'(u) = -[AK]_{v=v_0}$, ainsi qu'on le voit, en exprimant que z satisfait à la relation $\dfrac{\partial z}{\partial u} + A\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$ et tenant compte de l'identité

$$\frac{\partial K}{\partial u} + A\frac{\partial K}{\partial v} + K\frac{\partial A}{\partial v} = 0.$$

En résumé, l'intégrale z est donnée sous la forme

$$z = \Phi(u)\int_{v_0}^{v} (v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}(v-a)^{\alpha}\dots e^{Lv}\,dv + \Psi(u),$$

où Φ et Ψ seront obtenues par des quadratures ultérieures.

Les diverses déterminations de la fonction z, non uniforme, sont comprises sous la forme $Mz + N$ où M et N sont des constantes absolues.

Les périodes de $\Psi(u)$ sont des constantes; les diverses déterminations de $\Phi(u)$ ne diffèrent que par un facteur constant. Les seules périodes de z qui ne sont pas, *a priori*, des constantes sont le produit de $\Phi(u)$ par les périodes de l'intégrale

$$\Omega = \int_{v_0}^{v} (v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}(v-a)^{\alpha}\dots e^{Lv}\,dv;$$

si nous désignons par P l'une de ces périodes, on aura donc

$$\Phi(u)\,P = C,$$

C désignant une constante. Il en résulte que la connaissance de deux périodes distinctes de l'intégrale Ω, P_0 et P_1, nous donnera

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{C_1}{C_0},$$

c'est-à-dire une intégrale $\frac{P_1}{P_0}$ de l'équation $\varpi(f)$, indépendante de la variable u.

Combien obtiendra-t-on d'intégrales distinctes de cette manière?

Plaçons-nous d'abord *dans le cas le plus général* où les exposants λ, μ, α, ... sont des quantités complexes quelconques; il est clair que toute période de Ω s'obtiendra en formant l'intégrale

$$\int_{\Gamma} (v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}(v-a)^{\alpha}\dots e^{Lv}\,dv,$$

prise de v_0 à v_0, c'est-à-dire *le long d'un contour fermé* Γ, *pourvu que la fonction à intégrer reprenne en revenant au point* v_0 *sa valeur initiale.*

Les plus simples de ces contours sont, comme plus haut, les *contours doubles* d'Hermite et de M. Jordan, qu'on peut définir de la manière suivante :

Soient a et b deux points *de ramification*, ou points *critiques*, de la fonction à intégrer; désignons par A un *lacet élémentaire* formé d'une boucle partant de v_0 et y revenant après avoir tourné une fois dans le sens direct autour du point a (lacet qu'on peut remplacer par deux chemins rectilignes allant de v_0 à un point voisin de a et un petit cercle entourant ce dernier point); désignons aussi par $\overline{A}^1$ le chemin inverse du précédent. Le contour double élémentaire $\Gamma_{a,b}$ sera la succession des chemins $AB\overline{A}^1\overline{B}^1$.

Comme après avoir décrit le contour A, la fonction à intégrer est multipliée par $e^{2i\pi\alpha}$, elle reprend manifestement sa valeur quand on décrit le contour $\Gamma_{a,b}$.

En observant que $+1$ et -1 sont des points critiques et posant

$$K_1 = (v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}(v-a)^{\alpha}\ldots e^{Lv},$$

on obtiendra donc, si p est le nombre des points critiques a, b, ... et si l'on écrit

$$\Omega_{a,b} = \int_{\Gamma_{a,b}} K_1\,dv,$$

exactement p intégrales distinctes C_a, C_b, ..., sous la forme

$$\frac{\Omega_{1,-1}}{1} = \frac{\Omega_{1,a}}{C_a} = \frac{\Omega_{1,b}}{C_b} = \ldots$$

Les variables de $\mho(f)$ sont a, b, ..., L, ρ et u; il manque donc encore deux intégrales. L'une d'elles s'obtient immédiatement, c'est l'intégrale de l'équation $L' = L$, que nous écrivons

$$C = u - \log L;$$

mais il reste à en trouver une, indépendante de u, qui, jointe aux p précédentes, permettra de définir ρ, a, b, ... au moyen de L.

On l'obtiendra en choisissant pour Γ *un contour fermé qui s'étend de* *manière à passer par le point* $v=\infty$: le plus simple pourra être défini par la condition d'entourer le point $v=1$ seul et de comporter deux branches s'éloignant indéfiniment, mais de manière que l'intégrale

$$\int_{\Gamma} K_1 \, dv$$

ait un sens précis, ce qui exige que le module de e^{Lv} tende vers zéro lorsque mod v augmente indéfiniment. Cette condition est d'ailleurs suffisante, puisque le module de l'élément de l'intégrale tendra alors vers zéro *plus vite que toute puissance négative de* mod v.

Elle donne simplement si $L = l(\cos\theta + i \sin\theta)$, $v = r(\cos\omega + i \sin\omega)$, l'inégalité $\cos(\theta + \omega) < 0$, qui doit être satisfaite, pourvu qu'on soit assez loin de l'origine des rayons vecteurs, sur le contour Γ.

L'intégrale, ainsi obtenue,

$$\Omega_{1,\infty} = \int_{\Gamma_{1,\infty}} K_1 \, dv$$

n'est pas nulle en général et le quotient $\frac{\Omega_{1,\infty}}{\Omega_{1,-}} = C_\infty$, est la dernière intégrale de $\mathfrak{V}(f) = 0$.

Remarque. — On a l'exemple le plus simple d'une intégrale analogue prise suivant un contour s'étendant ainsi à l'infini, en prenant la définition générale de l'*Intégrale Eulérienne* $\Gamma(z)$ dans le plan complexe z :

$$\int_{\mathfrak{L}} v^{z-1} e^{-v} \, dv = (e^{2i\pi z} - 1)\,\Gamma(z),$$

où $\mathfrak{L}$ est un chemin partant de l'infini dans la direction des valeurs réelles et positives de v, tournant une fois autour du point $v = 0$ dans le sens direct et s'éloignant de nouveau à l'infini vers les v réels et positifs [1].

---

[1] Un autre exemple classique est la définition générale de $\zeta(s)$ donnée par Riemann dans son Mémoire sur les nombres premiers :

$$2 \sin \pi s . \Gamma(s) . \zeta(s) = i \int_{\mathfrak{L}} \frac{(-x)^{s-1} \, dx}{e^x - 1},$$

où $\mathfrak{L}$ est encore le contour indiqué plus haut.

Autres formes des intégrales. — La remarque précédente nous amène à observer que les périodes de l'intégrale

$$\Omega = \int_{v_0}^{v} (v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}(v-a)^{\alpha}\dots e^{Lv}\,dv$$

peuvent s'obtenir toutes par un *procédé uniforme*, indiqué par M. E. Picard pour une question différente (¹).

On a vu que $\frac{1}{v}=0$ est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{dv}{du} = \left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right).$$

Si l'on veut que la valeur constante de z, qui correspond à cette solution, soit finie, on devra choisir le chemin qui va de v_0 à ∞ dans la formule

$$z(\infty) = \Phi(u)\int_{v_0}^{\infty} (v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}(v-a)^{\alpha}\dots e^{Lv}\,dv + \Psi(u),$$

de manière que l'intégrale demeure finie, ce qui exige simplement que *pour* mod$v$ *assez grand la partie réelle du produit* Lv *soit négative.*

Soit, par exemple, comme plus haut,

$$L = l(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad v = r(\cos\omega + i\sin\omega),$$

il faudra simplement $\cos(\theta+\omega) < 0$.

Si nous admettons que, *sur le chemin choisi*, $\sin\omega$ *tend vers zéro*, la partie réelle du produit Lv aura finalement le signe de $\cos\omega$, lorsque $\cos\theta > 0$. On pourra donc prendre alors pour chemin de v_0 à ∞ un chemin rectiligne parallèle à l'axe réel du plan v et s'éloignant indéfiniment du côté des v négatifs.

Pour obtenir les périodes, on pourra donc faire précéder le chemin déterminé qui va de v_0 en v, de divers contours fermés qui entourent une seule fois, dans le sens direct, un seul des points critiques 1, -1, a, ... placés à distance finie et qui passent par le point $\frac{1}{v}=0$, mais *de manière que, dans la portion du contour qui est au voisinage de ce dernier point, le produit* Lv *ait sa partie réelle négative.*

(¹) E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, 1896, p. 375.

Par exemple, on pourra constituer l'un de ces contours fermés élémentaires par un petit cercle entourant le point critique et deux droites infiniment voisines, parallèles à l'axe réel du plan et s'éloignant indéfiniment du côté des v négatifs.

Désignons par Λ_a un tel contour relatif au point a; les diverses expressions

$$\Sigma_a = \int_{\Lambda_a} (v + \rho)(v - 1)^{\lambda}(v + 1)^{\mu}(v - a)^{\alpha} \ldots e^{Lv}\, dv,$$

relatives aux points $+1$, -1, a, ..., donnent $(p+2)$ périodes, d'où l'on déduira $(p+1)$ intégrales de l'équation aux dérivées partielles

$$\mathfrak{V}(f) = 0.$$

On observe que si la partie réelle de l'exposant α est supérieure à (-1), l'intégrale prise le long du petit cercle tend vers zéro avec le rayon de ce cercle. Car si l'on pose, sur le cercle,

$$v - a = r\, e^{it},$$

on a

$$dv = r\, e^{it}\, i\, dt,$$

et l'élément de l'intégrale, à part un facteur fini et différent de zéro, renfermera le produit

$$(v - a)^{\alpha}\, dv = e^{(\alpha_1 + i\alpha_2)(\log r + it)}\, r\, e^{it}\, i\, dt$$

dont le module $e^{(\alpha_1+1)\log r - \alpha_2 t}\, dt$ comprend le facteur $e^{(\alpha_1+1)\log r}$ qui tend vers zéro avec r, si $(\alpha_1 + 1)$ est positif.

Dans ce cas, l'intégrale correspondante Σ_a peut se remplacer par une *intégrale rectiligne*, prise de a au point à l'infini du plan v parallèlement à l'axe réel négatif de ce plan.

Il resterait à établir que *les* $(p+1)$ *intégrales de* $\mathfrak{V}(f) = 0$, représentées par les rapports des quantités Σ_{-1}, Σ_1, Σ_a, ... à l'une d'entre elles, *sont bien fonctionnellement distinctes*.

S'il existait, pour l'intégrale précédente Σ, une relation entre les quotients $\frac{\Sigma_{-1}}{\Sigma_1}$, $\frac{\Sigma_a}{\Sigma_1}$, ... de ses périodes, cette relation subsisterait quel que soit le nombre des a, ... et quels que soient les exposants λ, μ, α, ...

Examinons un cas extrêmement simple, celui d'un seul point critique a, en supposant, en outre, tous les exposants λ, μ, α égaux à (-1).

Dans ce cas très particulier, les intégrales Σ_1, Σ_{-1}, Σ_a sont relatives à une fonction *uniforme*, ayant aux points 1, -1, a des pôles simples. On pourra supprimer dans les contours correspondants les parties rectilignes qui s'étendent à l'infini, mais il faudra conserver les cercles, et les intégrales se réduiront à des *résidus* de Cauchy :

$$\frac{1}{2i\pi}\Sigma_1 = \frac{(1+\rho)\,e^{L}}{2(1-a)}, \qquad \frac{1}{2i\pi}\Sigma_{-1} = \frac{(\rho-1)\,e^{-L}}{2(1+a)}, \qquad \frac{1}{2i\pi}\Sigma_a = \frac{(a+\rho)\,e^{La}}{(a-1)(a+1)}.$$

Les quotients $\frac{\Sigma_a}{\Sigma_1}$, $\frac{\Sigma_{-1}}{\Sigma_1}$ sont simplement

$$\frac{\Sigma_a}{\Sigma_1} = -\frac{2(a+\rho)\,e^{L(a-1)}}{(a+1)}, \qquad \frac{\Sigma_{-1}}{\Sigma_1} = \frac{(\rho-1)(1-a)\,e^{-2L}}{(\rho+1)(1+a)};$$

ce sont bien deux fonctions distinctes des trois variables a, ρ, L, puisqu'une combinaison évidente

$$\left(\frac{\Sigma_a}{\Sigma_1}\right)^2 \left(\frac{\Sigma_{-1}}{\Sigma_1}\right)^{a-1}$$

ne renferme plus la variable L et ne se réduit pas à une constante.

La proposition vraie dans un cas très particulier subsiste *a fortiori* dans le cas général.

Remarque. — Nous avons donné, *dans le cas général*, le moyen de former toutes les intégrales de l'équation

$$\mho(f) = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial L}\,L + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{1-a^2}{a+\rho}\right) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial \rho}\left[(\rho^2-1)\,J_1(-\rho) - 2\rho\right];$$

qui correspond à l'hypothèse

$$J = \frac{1}{v+\rho} + \frac{\lambda}{v-1} + \frac{\mu}{v+1} + J_2(v) \qquad \text{avec} \qquad J_2(v) = \frac{\alpha}{v-a} + \ldots + L,$$

à l'aide d'intégrales prises dans le champ complexe, suivant des *contours fermés* convenables, et indiqué quelques-uns des cas où ces intégrales peuvent s'exprimer par des *intégrales définies rectilignes*. Il est clair que lorsque certains des coefficients λ, μ, α, ... sont des *entiers négatifs*, certains des contours précédents peuvent se remplacer par des cercles dont le rayon tend vers zéro et donneront des *résidus de Cauchy*, relatifs aux points critiques correspondants. L'examen de ces circonstances particulières ne présente pas de difficultés.

Il convient de signaler le cas où L est nul : le point $v = \infty$ ne joue plus alors le rôle exceptionnel qui a permis d'obtenir sous une même forme $(p+1)$ intégrales distinctes de $\mathfrak{v}(f) = 0$. Mais les éléments a, b, ..., en nombre p, sont donnés au moyen de ρ par les équations signalées plus haut (où figurent des intégrales de doubles contours) :

$$\frac{\Omega_{1,-1}}{1} = \frac{\Omega_{1,a}}{c_a} = \frac{\Omega_{1,b}}{c_b} = \dots$$

et ρ est relié à la variable u par l'équation

$$\rho' = (\rho^2 - 1)\,J_1(-\rho) - 2\rho = -(\rho^2-1)\left(\frac{\alpha}{a+\rho} + \dots\right) - (\lambda + \mu + 2)\rho + \lambda - \mu,$$

qui donne u par une quadrature portant sur une fonction de ρ seul.

Pôles multiples de J. — Nous avons supposé *simples* les pôles de la fraction rationnelle J ; il serait nécessaire d'étudier le cas général où J a la forme

$$J = \frac{1}{v+\rho} + \frac{\lambda}{v-1} + \frac{\lambda_2}{(v-1)^2} + \dots + \frac{\mu}{(v+1)} + \frac{\mu_2}{(v+1)^2} + \dots$$
$$+ \frac{\alpha}{(v-a)} + \frac{\alpha_2}{(v-a)^2} + \dots + L + L_1 v + \dots,$$

c'est-à-dire où les divers pôles $+1$, -1, a, ... et ∞ ont des ordres de multiplicité quelconques.

Pour ne pas étendre inutilement ce travail, nous examinerons simplement ce qui se passe quand un pôle a est multiple, ou bien quand l'infini est un pôle multiple. La méthode générale en résultera.

Soit, par exemple,

$$J = \frac{1}{v+\rho} + \frac{\lambda}{v-1} + \frac{\mu}{v+1} + \frac{\alpha_1}{v-a} + \frac{\alpha_2}{(v-a)^2} + \dots + \frac{\alpha_m}{(v-a)^m} + \dots + L,$$

on formera aisément le système différentiel que doivent vérifier les éléments a, b, ..., α_1, α_2, ..., α_m, ρ et L. Mettons en évidence les termes de J qui dépendent de a, en posant

$$J = \frac{1}{v+\rho} + J_1 = \frac{1}{v+\rho} + \frac{\alpha_1}{(v-a)} + \ldots + \frac{\alpha_m}{(v-a)^m} + J_3,$$

nous aurons à satisfaire à l'identité

$$\begin{aligned}(v+\rho)^2&\left[\frac{\alpha'_1}{v-a} + \frac{\alpha'_2 + a'\alpha_1}{(v-a)^2} + \frac{\alpha'_3 + 2a'\alpha_2}{(v-a)^3} + \ldots + \frac{ma'\alpha_m}{(v-a)^{m+1}} + \frac{\partial J_3}{\partial u}\right] \\ &- (1-v^2)(v+\rho)\left[\frac{\alpha_1}{(v-a)^2} + \frac{2\alpha_2}{(v-a)^3} + \ldots + \frac{m\alpha_m}{(v-a)^{m+1}} - \frac{\partial J_3}{\partial v}\right] \\ &\quad - (1+v^2+2v\rho)\left[\frac{\alpha_1}{v-a} + \frac{\alpha_2}{(v-a)^2} + \ldots + \frac{\alpha_m}{(v-a)^m} + J_3\right] = 2\rho + \rho'.\end{aligned}$$

En écrivant que le terme en $\frac{1}{(v-a)^{m+1}}$ disparaît, c'est-à-dire que le facteur qui le multiplie est divisible par $(v-a)$, on trouve d'abord la condition

$$(a+\rho)a' = 1 - a^2$$

qui exprime que a est solution particulière de l'équation (1). Les termes qui avaient $(v-a)^{m+1}$ comme dénominateur se réduisent alors à

$$\frac{m\alpha_m(v+\rho)(v+a+a')}{(v-a)^m}.$$

Si l'on veut que le facteur qui multiplie $\frac{1}{(v-a)^m}$ soit divisible par $(v-a)$, on trouve une condition pour α_m :

$$(a+\rho)^2\alpha'_m - (m+1)\alpha_m(1+a^2+2a\rho) = 0,$$

et ces termes en $\frac{1}{(v-a)^m}$ se réduisent, après division par $(v-a)$, à des termes en $\frac{1}{(v-a)^{m+1}}$.

En continuant le même raisonnement, on obtiendra successivement des conditions pour déterminer α_{m-1}, α_{m-2}, $\ldots$, α_1 au moyen de a, ρ et des α_i d'indice plus grand.

La partie entière, qui subsistera après la dernière division par $(v-a)$, devra être jointe aux parties entières qui proviendront de l'examen des pôles simples de J_3, et leur somme doit se réduire identiquement à $2\rho + \rho'$.

Il n'est pas nécessaire de former explicitement les conditions précédentes pour montrer comment on y satisfera, en tenant compte des résultats obtenus dans le cas des pôles simples.

L'expression de $K = \frac{\partial z}{\partial v}$ aura ici la forme

$$K = \Phi(u)(v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}(v-a)^{\alpha_1}(v-b)^{\beta}\ldots \\ \times e^{Lv - \frac{\alpha_2}{v-a} - \frac{\alpha_3}{2(v-a)^2} - \ldots - \frac{\alpha_m}{(m-1)(v-a)^{m-1}}},$$

et l'on trouverait aisément l'équation qui donne $\frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)}$.

On aura de même, en posant $K = \Phi(u) K_1$,

$$z = \Phi(u) \int_{v_0}^{v} K_1 \, dv + \Psi(u),$$

et tout revient à exprimer que *les quotients des périodes de l'intégrale* $\int_{v_0}^{v} K_1 \, dv$ *par l'une d'elles sont des constantes*. Nous avons vu qu'aux périodes relatives à des contours fermés situés à distance finie, il fallait ajouter une intégrale prise le long d'un contour fermé partant de l'infini et y revenant : cette dernière peut être aussi regardée comme *différence des valeurs de z relatives à un même zéro du multiplicateur* K (le point $v = \infty$), valeurs qui sont différentes suivant le chemin que l'on suit pour arriver à ce point.

Dans le cas actuel, en outre du point $v = \infty$, qui peut être appelé un *zéro « essentiel »* de K (puisque c'est un *point essentiel*), nous avons un nouveau zéro de K, c'est le point $v = a$ (également *point essentiel* de K).

Au voisinage de ce point, $v = a + re^{i\theta}$, et si l'on pose

$$-\frac{\alpha_m}{(m-1)} = q\, e^{i\varpi},$$

on peut écrire K sous la forme

$$K = K_2\, r^{\alpha_1}(\cos\alpha_1\theta + i\sin\alpha_1\theta)\, e^{q r^{1-m}\{\cos[\varpi-(m-1)\theta] + i\sin[\varpi-(m-1)\theta]\}},$$

où K_2 tend, *lorsque r tend vers zéro*, vers la limite finie :

$$\Phi(u)(a+\rho)(a-1)^{\lambda}(a+1)^{\mu}(a-b)^{\beta}\ldots e^{La}.$$

On conclut de là que K tendra vers zéro ou vers l'infini, suivant que la variable v tendra vers a dans un secteur où

$$\cos[\varpi - (m-1)\theta]$$

est négatif ou positif. L'équation $\cos[\varpi - (m-1)\theta] = 0$ donne pour θ un système de $2(m-1)$ valeurs comprises entre 0 et 2π; le point a appartient donc à un système de $2(m-1)$ secteurs opposés deux à deux et lorsque v tend vers a dans un secteur de rang 1, 3, 5, ... à partir de la ligne de séparation

$$\varpi - (m-1)\theta = \frac{\pi}{2},$$

le multiplicateur K tend vers zéro.

Soient, par exemple, $\gamma_{1,3}, \gamma_{1,5}, \ldots, \gamma_{1,2m-1}$ des contours fermés partant de a dans le secteur 1 et y revenant dans les secteurs 3, 5, ..., $(2m-1)$, sans avoir entouré aucun point critique de K, les expressions

$$\omega_{1,3} = \int_{\gamma_{1,3}} K_1\, dv, \qquad \ldots, \qquad \omega_{1,2m-1} = \int_{\gamma_{1,2m-1}} K_1\, dv$$

ne sont pas nulles en général et doivent être regardées comme des *périodes* de l'intégrale de fonction non uniforme $\int_{v_0}^{v} K_1\, dv$. Elles joueront donc dans la détermination des éléments $a, b, \ldots, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$, ρ et L le même rôle que les $\Omega_{1,-1}$, $\Omega_{1,a}$, ... Comme elles sont en nombre $(m-1)$, elles détermineront avec ces dernières, qui sont en nombre $(p+2)$, et avec l'*intégrale définie de* K_1, prise de a à ∞ dans une région telle que K_1 s'annule en ces deux points, tous les éléments $\rho, a, b, \ldots, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ au moyen de L. Ce dernier sera déterminé en u par une quadrature.

On peut d'ailleurs aussi les obtenir comme différence des valeurs constantes de z pour la solution particulière $v = a$, au voisinage de laquelle z est une fonction non uniforme susceptible de m déterminations suivant l'orientation dernière des chemins qui aboutissent en a.

Ces observations résultent également de la remarque, déjà faite, que si l'on pose

$$\omega = \int_{v_0}^{v_1} \mathrm{K}\, dv = \Phi(u) \int_{v_0}^{v_1} \mathrm{K}_1\, dv,$$

on aura

$$\mho(\omega) = \int_{v_0}^{v_1} \mho(\mathrm{K})\, dv = -\int_{v_0}^{v_1} d\mathrm{AK} = \Phi(u) [\mathrm{AK}_1]_{v_1}^{v_0},$$

d'où l'on conclut

$$\mho(\omega) = 0,$$

pourvu que

$$\mathrm{AK} = \Phi(u)(v-1)^{\lambda+1}(v+1)^{\mu+1}(v-a)^{\alpha_1}\ldots e^{\mathrm{L}v - \frac{\alpha_2}{(v-a)^2} - \ldots - \frac{\alpha_m}{(m-1)(v-a)^{m-1}}}$$

reprenne la même valeur aux extrémités v_0 et v_1 du chemin d'intégration.

Ceci a lieu, en particulier, aux points a et ∞ où AK s'annule et le point a, suivant la direction du chemin qui y aboutit, donne, comme on l'a vu, $(m-1)$ intégrales distinctes.

Des raisonnements entièrement analogues peuvent être faits dans l'hypothèse où *le point à l'infini du plan v est un pôle multiple de* J, c'est-à-dire un *point essentiel* de K.

Si l'on a

$$\mathrm{J} = \frac{1}{v+\rho} + \frac{\lambda}{v-1} + \frac{\mu}{v+1} + \frac{\alpha}{v-a} + \ldots + \mathrm{L} + \mathrm{L}_1 v + \ldots + \mathrm{L}_n v^n,$$

ce qui donne

$$\mathrm{K} = \Phi(u)(v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}(v-a)^{\alpha}\ldots e^{\mathrm{L}v + \mathrm{L}_1 \frac{v^2}{2} + \ldots + \mathrm{L}_n \frac{v^{n+1}}{(n+1)}};$$

on peut observer, pour

$$\mathrm{L}_n = q\, e^{i\varphi},$$

qu'en posant

$$v = r(\cos\theta + i \sin\theta),$$

K tend vers zéro ou vers l'infini lorsque r augmente indéfiniment, suivant que $\cos[(n+1)\theta + \varphi]$ est négatif ou positif.

On obtient ici, autour du point à l'infini du plan v, $2(n+1)$ secteurs égaux et l'intégrale $\omega = \int_\gamma \mathrm{K}\, dv$ prise le long d'un chemin fermé qui part de l'infini, dans un secteur où K tend vers zéro, pour revenir à ce point dans un autre secteur où K tend encore vers zéro, n'est pas nulle et satisfait à $\mho(\omega) = 0$.

Le point à l'infini donnera ainsi n intégrales, indépendantes de $\Phi(u)$, de cette équation.

Il est facile ici d'indiquer les nouvelles conditions auxquelles doivent satisfaire $L, L_1, \ldots, L_n$.

Dans l'identité que doit vérifier J, on a immédiatement la partie entière

$$\begin{aligned}(v+\rho)^2(L'+L'_1 v+\ldots+L'_n v^n)+(1-\rho^2)\left(\frac{\alpha}{a+\rho}+\ldots\right)\\ +(1-v^2)(v+\rho)(L_1+2L_2 v+\ldots+nL_n v^{n-1})\\ -(1+v^2+2v\rho)(L+L_1 v+\ldots+L_n v^n)\\ =(\lambda+\mu+2)\rho+\mu-\lambda+\rho',\end{aligned}$$

qui donne les conditions cherchées

$$\begin{gathered}L'_n-(n+1)L_n=0,\\ L'_{n-1}-nL_{n-1}+\rho[2L'_n-(n+2)L_n]=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{gathered}$$

Ce qui nous intéresse ici, c'est la première de ces équations, que l'on intègre à vue sous la forme

$$C = u - \frac{1}{(n+1)}\log L_n.$$

Les intégrales de $\mho(f)=0$, formées précédemment à l'aide de quotients des périodes de $\int K_1\,dv$, donnent tous les éléments $a, b, \ldots, \rho, L, \ldots, L_{n-1}$ au moyen de L_n et ce dernier est défini au moyen de u par l'équation précédente.

L'intégration est donc terminée, au point de vue théorique.

Réduction du groupe de rationalité de l'équation $\mho(f)=0$.

Groupe de rationalité de $U(f) = 0$. — Le problème essentiel que nous avons résolu dans les pages précédentes consiste en la *détermination* *des intégrales de certaines équations linéaires aux dérivées partielles*

$$\mathfrak{V}(f) = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial a}\frac{1-a^2}{a+\rho} + \ldots = 0,$$

qui dépendent *rationnellement* des variables $a, \ldots, \rho, \ldots$ et en outre de certaines constantes $\lambda, \mu, \alpha, \ldots$ dont la nature arithmétique peut être diverse : entiers positifs ou négatifs, nombres rationnels, constantes complexes quelconques.

Parmi ces intégrales, certaines (exceptionnellement) sont rationnelles ou algébriques; celles qui sont transcendantes sont toutes les solutions d'un certain système d'équations rationnelles aux dérivées partielles (S) (*linéaire* lorsque K est rationnel; *projectif*, c'est-à-dire constituant une généralisation des systèmes de Riccati, lorsque J est rationnel) dont la solution générale ne dépend que d'un nombre limité de constantes arbitraires.

Ce système (S), dont la formation n'offre pas de difficultés, généralise ceux qui se présentent dans l'étude des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur; il définit le *groupe de rationalité de* l'équation $\mathfrak{V}(f) = 0$, au sens que nous avons adopté ailleurs.

La considération effective de ce système n'a pas été nécessaire jusqu'ici; elle peut être commode lorsqu'il s'agit d'*indiquer à l'avance pour quelles relations particulières entre les constantes* $\lambda, \mu, \alpha, \ldots$ *il se présentera une réduction nouvelle dans le problème de l'intégration de* $\mathfrak{V}(f) = 0$, c'est-à-dire une *réduction du groupe de rationalité*.

On peut aussi regarder cette recherche comme un premier pas dans l'étude des intégrales de $\mathfrak{V}(f) = 0$ envisagées comme fonction des paramètres $\lambda, \mu, \alpha, \ldots$.

En observant que les intégrales dont il s'agit sont des *transcendantes* (*ou des quotients de transcendantes*) *attachées à un groupe linéaire*, c'est-à-dire que la solution générale de S renferme linéairement les constantes d'intégration, on peut étudier la réduction de S : 1° en considérant le groupe de *monodromie* de M. Jordan, qui peut être formé en partant des intégrales elles-mêmes; 2° en appliquant la théorie de la réduction du *groupe de rationalité* de M. Picard pour les équations différentielles linéaires et les systèmes analogues à plusieurs variables, ce qui entraîne la considération des divers *types* de groupes linéaires [compris dans le groupe général (Γ) qui correspond à (S)] et la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que les invariants différentiels caractéristiques de chacun de ces types s'expriment rationnellement avec les variables $a, b, \ldots, \rho, \ldots$.

Exemples de formation effective de S. — Examinons dans quelques cas simples la *formation effective du système* (S).

a. Si nous supposons, par exemple, que le multiplicateur $\frac{\partial z}{\partial v} = \mathrm{K}$, de l'équation $\frac{dv}{du} = \frac{1 - v^2}{v + \rho}$, possède l'expression simple

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{P}}{v - 1} + \frac{\mathrm{Q}}{v + 1} + \frac{\mathrm{A}}{v - a} + \ldots + \mathrm{L},$$

on a vu que les intégrales transcendantes de l'équation $\mho(f) = 0$ sont

$$Z_i = \mathrm{P}\log(c_i - 1) + \mathrm{Q}\log(c_i + 1) + \mathrm{A}\log(c_i - a) + \ldots + \mathrm{L}c_i + \Phi(u)$$
$$[i = 1, \ldots (m + 1)],$$

où les c_i sont les racines, autres que $(-\rho)$, de l'équation $\mathrm{K}(v) = 0$.

Si l'on différentie totalement Z_i, en observant que c_i satisfait à la condition $\mathrm{K}(c_i) = 0$, on trouve simplement

$$dZ_i = -\frac{\mathrm{A}\,da}{(c_i - a)} - \ldots - c_i\,d\mathrm{L} + d\Phi,$$

car le coefficient de dc_i s'annule et l'on peut conclure de là le système (S) :

$$(\mathrm{S}) \qquad d(Z_i - Z_1) = \left[\frac{\mathrm{A}\,da}{(c_i - a)(c_1 - a)} + \ldots - d\mathrm{L}\right](c_i - c_1)$$
$$[i = 2, \ldots (m + 1)],$$

qui montre que *les différentielles des diverses intégrales de* $\mho(f) = 0$, indépendantes de u, *s'expriment rationnellement, si l'on adjoint les racines de* $\mathrm{K}(v) = 0$.

b. Supposons que l'on ait

$$\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^p = \mathrm{K} = \sigma^p (v + \rho)^p (v - 1)^\lambda (v + 1)^\mu (v - a)^\alpha (v - b)^\beta \ldots,$$

$\lambda, \mu, \alpha, \beta, \ldots$ étant des entiers positifs ou négatifs, ce qui donne

$$z = \int_{v_0}^{v} \sqrt[p]{\mathrm{K}}\, dv + \Phi(u) \qquad \text{avec} \qquad \Phi'(u) + \left[\mathrm{A}\sqrt[p]{\mathrm{K}}\right]_{v=v_0} = 0.$$

On a vu que, dans ce cas, les intégrales de $\mho(f) = 0$, indépendantes de u, sont les périodes de l'intégrale de différentielle algébrique

$$\int_{v_0}^{v} \sqrt[p]{\mathrm{K}}\, dv,$$

c'est-à-dire des intégrales $\int_\Gamma \sqrt[p]{\mathrm{K}}\, dv$ où Γ est un contour fermé tel que $\sqrt[p]{\mathrm{K}}$ reprenne sa valeur initiale quand v l'a parcouru. Or si l'on pose

$$\mathrm{P} = \int_\Gamma \sqrt[p]{\mathrm{K}}\, dv = \mathrm{F}\left(\frac{\lambda}{p}, \frac{\mu}{p}, \frac{\alpha}{p}, \frac{\beta}{p}, \ldots\right),$$

on aura, quel que soit le contour fermé Γ,

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial a} = -\frac{\alpha}{p}\mathrm{F}\left(\frac{\lambda}{p}, \frac{\mu}{p}, \frac{\alpha - p}{p}, \frac{\beta}{p}, \ldots\right),$$
$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial b} = -\frac{\beta}{p}\mathrm{F}\left(\frac{\alpha}{p}, \frac{\mu}{p}, \frac{\alpha}{p}, \frac{\beta - p}{p}, \ldots\right),$$

d'où l'on conclut, en observant que $b - a = v - a - (v - b)$,

$$(b - a)\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial a\, \partial b} = \frac{\alpha}{p}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial b} - \frac{\beta}{p}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial a}$$

pour tout système (a, b) de deux points critiques.

On aurait de même

$$(a + \rho)\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial a\, \partial \rho} = \frac{\alpha}{p}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial a}$$

pour tout point critique tel que a.

Si l'on veut tenir compte de la variable σ, qui entre en facteur dans chaque P, on devra ajouter l'équation du premier ordre

$$\sigma\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \sigma} = \mathrm{P}.$$

Les équations ainsi formées constituent, avec $\mathfrak{V}(P) = 0$, le système (S). Il est aisé de voir qu'en différentiant l'équation linéaire $\mathfrak{V}(P) = 0$ par rapport à l'une des variables $a, \ldots, \rho$, on obtient des équations qui permettent d'exprimer *toutes* les dérivées $\frac{\partial^2 P}{\partial a^2}, \ldots,$ au moyen des dérivées premières de P.

$\left(\text{En particulier on a } \frac{\partial^2 P}{\partial \rho^2} = 0.\right)$ L'expression la plus générale de P ne dépend donc que de constantes arbitraires, en nombre égal aux dérivées $\frac{\partial P}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial P}{\partial \rho}$.

Toutes les périodes de P sont des solutions du système différentiel linéaire (S), mais certaines d'entre elles sont algébriques, au moins lorsque $\sqrt[p]{K}$ possède des pôles qui sont des pôles de l'intégrale.

Ce sont les *résidus* relatifs à ces pôles, parmi lesquels peut se trouver le point $\frac{1}{v} = 0$.

Ainsi, dès qu'un ou plusieurs des exposants $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \ldots$ sont des entiers négatifs, de valeur absolue supérieure à p, ou bien lorsque

$$\lambda + \mu + 2p + \alpha + \beta + \ldots < 0,$$

le système différentiel (S) possède des intégrales algébriques. Il se réduit donc, par *adjonction* de ces intégrales algébriques, à un système de même nature et d'ordre moins élevé qui n'est vérifié que par les périodes P transcendantes.

On a déjà remarqué que, suivant les cas, *il existe une combinaison linéaire de ces périodes* qui *s'annule* ou *s'exprime avec les résidus de* $\sqrt[p]{K}$, y compris, s'il y a lieu, celui relatif à $\frac{1}{v} = 0$.

c. Des observations analogues peuvent être faites lorsque J est rationnel. Si l'on suppose

$$J = \frac{1}{v+\rho} + \frac{\lambda}{v-1} + \frac{\mu}{v+1} + \frac{\alpha}{v-a} + \frac{\beta}{v-b} + \ldots + L,$$

on a vu que z est donné par

$$z = \Phi(u)\int_{v_0}^{v} K_1\,dv + \Psi(u),$$

où $\frac{\Phi'}{\Phi}$ et Ψ' sont connus en $a, b, \ldots, \rho, \ldots$ et où

$$K_1 = (v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}(v-a)^{\alpha}(v-b)^{\beta}\ldots e^{Lv};$$

les intégrales transcendantes de $\mho(f) = 0$ sont des *quotients de périodes de* $\int K_1\,dv$.

Désignons par P une période quelconque de cette intégrale, c'est-à-dire une intégrale

$$P = \int_\Gamma K_1\,dv,$$

où Γ est un contour fermé tel que K_1 reprenne, quand on l'a parcouru, sa valeur initiale; on forme aisément un *système différentiel linéaire* (T) *dont* P *est la solution générale.*

On a d'abord manifestement, comme plus haut, pour tout couple (a, b) de points critiques

$$(b-a)\frac{\partial^2 P}{\partial a\,\partial b} = \alpha\frac{\partial P}{\partial b} - \beta\frac{\partial P}{\partial a},$$

et pour tout couple (a, ρ)

$$(a+\rho)\frac{\partial^2 P}{\partial a\,\partial \rho} = \alpha\frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{\partial P}{\partial a}.$$

Il y a ici à considérer la nouvelle variable L : en dérivant par rapport à L on a

$$\frac{\partial P}{\partial L} = \int_\Gamma v K_1\,dv,$$

et il suffit d'observer que $v = v - a + a$, pour obtenir la relation

$$\frac{\partial^2 P}{\partial a\,\partial L} = a\frac{\partial P}{\partial a} - \alpha P$$

pour tout point critique a.

On aurait de même

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \rho\,\partial L} = P - \rho\frac{\partial P}{\partial \rho}.$$

Nous avons vu qu'en désignant par P_0 une période particulière, le quotient $\frac{P}{P_0}$ est une intégrale de $\mho(f) = 0$; on peut donc en conclure

$$\frac{\mho(P)}{P} = \frac{\mho(P_0)}{P_0}.$$

Cherchons la valeur commune de ces rapports en tenant compte de l'expression explicite de $\mho(f)$:

$$\mho(f) = \frac{\partial f}{\partial L} L + \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{1-a^2}{a+\rho}\right) + \ldots$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial \rho}\left[(1-\rho^2)\left(\frac{\alpha}{a+\rho} + \ldots - L\right) - \rho(\lambda+\mu+2) + \lambda - \mu\right],$$

ou de sa signification.

On trouve d'abord

$$\mho(P) = \int_\Gamma \mho(K_1)\, dv = \int_\Gamma \frac{\partial K_1}{\partial u}\, dv,$$

et si l'on a égard à la résolvante, identique, en $K = \Phi(u) K_1$,

$$\frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)} + \frac{1}{K_1}\frac{\partial K_1}{\partial u} + A\frac{1}{K_1}\frac{\partial K_1}{\partial v} + \frac{\partial A}{\partial v} = 0,$$

et au fait que

$$\int_\Gamma dAK_1 = 0,$$

on en déduira

$$\mho(P) = -\frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)}\int_\Gamma K_1\, dv = -\frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)} P.$$

Mais nous avons trouvé pour $\frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)}$ l'expression explicite

$$\frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)} = \lambda + \mu + 2 + \Sigma\alpha - \rho L,$$

les périodes P satisfont donc à l'équation du premier ordre

$$\mho(P) = [\rho L - (\lambda + \mu + 2 + \Sigma\alpha)] P.$$

Ainsi nous avons, comme dans le cas précédent, *un système différentiel linéaire* (T), formé d'une équation du premier ordre et des équations du second ordre qui donnent les dérivées prises par rapport à deux variables différentes, pour définir les périodes P. On en déduira sans difficulté l'expression des dérivées $\frac{\partial^2 P}{\partial a^2}, \ldots, \frac{\partial^2 P}{\partial L^2}, \ldots$, au moyen des dérivées premières de P.

Le système (S) *est celui qui définit les rapports des solutions de* (T) *à l'une d'elles.* Comme la solution générale de (T) renferme linéairement $(p+2)$ constantes, si p est le nombre des points critiques a, b, ..., la solution générale de (S) en renfermerait sous forme projective $(2p+3)$ et le système (S) paraît moins commode à étudier que le système (T).

D'ailleurs, la solution générale de (S) est construite avec seulement $(p+1)$ intégrales de $\mathfrak{v}(f) = 0$, quotients de $(p+1)$ solutions indépendantes du système (T) par la dernière solution.

Nous concluons de là que la réduction du groupe de rationalité de $\mathfrak{v}(f) = 0$ doit se chercher en représentant les intégrales comme quotients de deux solutions du système (T) et en étudiant la réduction de ce système linéaire (T).

On verrait sans difficulté les modifications à apporter aux résultats qui précèdent lorsque J a des pôles multiples à distance finie ou un pôle multiple à l'infini.

En résumé, l'*étude des cas de réduction du groupe de rationalité des équations linéaires aux dérivées partielles* $\mathfrak{v}(f) = 0$ peut se faire *par des méthodes régulières*, qui n'exigent que la connaissance de la théorie classique de M. Picard, sur la réduction des équations différentielles linéaires, étendue à plusieurs variables. A titre d'exemple, nous traiterons plus en détail de cette réduction dans le cas où J ne possède, en dehors de $+1$ et -1, que *un* ou *deux* pôles simples a, b : on verra que ce cas particulier comprend tous ceux signalés jusqu'à présent soit par d'Alembert, soit plus récemment par M. F. Siacci. C'est par cette étude que nous terminerons notre travail.

Remarque. — Nous avons cependant, avant de passer à cet examen historique, une remarque d'*ordre général* à faire.

Nous venons de voir, par exemple, que dans l'hypothèse

$$J = \frac{1}{v+\rho} + \frac{\lambda}{v-1} + \frac{\mu}{v+1} + \frac{\alpha}{v-a} + \frac{\beta}{v-b} + \ldots + L,$$

les périodes P de l'intégrale

$$\int (v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}(v-a)^{\alpha}(v-b)^{\beta}\dots e^{\mathrm{L}v}\,dv,$$

qui donnent par leurs quotients les intégrales de l'équation $\mho(f)=0$, satisfont à l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$\mho(\mathrm{P})=[\rho\mathrm{L}-(\lambda+\mu+2+\Sigma\alpha)]\mathrm{P},$$

où

$$\mho(f)=\frac{\partial f}{\partial \mathrm{L}}\mathrm{L}+\frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{1-a^2}{a+\rho}\right)+\dots$$
$$+\frac{\partial f}{\partial \rho}\left\{(1-\rho^2)\left(\frac{\alpha}{a+\rho}+\dots-\mathrm{L}\right)-(\lambda+\mu+2)\rho+\lambda-\mu\right\},$$

et de plus aux équations, formant le système (T),

$$(b-a)\frac{\partial^2\mathrm{P}}{\partial a\,\partial b}=\alpha\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial b}-\beta\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial a},\qquad (a+\rho)\frac{\partial^2\mathrm{P}}{\partial a\,\partial\rho}=\alpha\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\rho}+\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial a},$$
$$\frac{\partial^2\mathrm{P}}{\partial a\,\partial\mathrm{L}}=\alpha\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial a}-\alpha\mathrm{P},\qquad \frac{\partial^2\mathrm{P}}{\partial\rho\,\partial\mathrm{L}}=\mathrm{P}-\rho\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\rho}.$$

Dérivons, par rapport à α, ces diverses relations; nous aurons le système

$$(\mathrm{T}_\alpha)\quad\left\{\begin{aligned}
&\mho\left(\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\alpha}\right)+\frac{1-\rho^2}{a+\rho}\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\rho}=[\rho\mathrm{L}-(\lambda+\mu+\Sigma\alpha)]\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\alpha}-\mathrm{P};\\
&(b-a)\frac{\partial^2\left(\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\alpha}\right)}{\partial a\,\partial b}=\alpha\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\alpha}\right)-\beta\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial b};\\
&(a+\rho)\frac{\partial^2\left(\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\alpha}\right)}{\partial a\,\partial\rho}=\alpha\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\rho};\\
&\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial\mathrm{L}}\left(\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\alpha}\right)=a\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\alpha}\right)-\alpha\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\alpha}-\mathrm{P};\\
&\frac{\partial^2}{\partial\rho\,\partial\mathrm{L}}\left(\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\alpha}\right)=\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\alpha}-\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial\alpha}\right).
\end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant que l'un des exposants $\alpha, \beta, \dots$ variant de manière continue devienne un *nombre entier positif*, par exemple l'exposant α. La période P représentée par l'intégrale Σ_a, envisagée plus haut, $\Sigma_a=\int_{\Lambda_a}\mathrm{K}_1\,dv$, où Λ_a entoure a seul et comprend le point à l'infini, se réduit à zéro. Il en est de même des intégrales de double contour où le point a figure : $\int_{\Gamma_{a,b}} K_1\,dv$.

Avec cette période particulière P, s'annulent également les dérivées $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial P}{\partial b}$ relatives aux affixes $b, \ldots$ des autres points critiques. Il suffit de considérer le système ($T\alpha$) pour reconnaître que *la dérivée* $\frac{\partial P}{\partial \alpha}$ *vérifie alors le système* (T). Nous pouvons, par suite, dans le cas où α est un entier positif, remplacer la période Σ_a par l'intégrale analogue

$$\frac{\partial \Sigma_a}{\partial \alpha} = \int_{\Lambda_a} K_1 \log(v - a)\,dv,$$

puisque

$$\frac{d}{d\alpha}(v - a)^\alpha = (v - a)^\alpha \log(v - a)$$

et cette intégrale n'est pas nulle en général, puisque la fonction à intégrer $K_1 \log(v - a)$ n'est plus uniforme au voisinage de $v = a$.

On peut remplacer de même une *intégrale de double contour*, telle que $\int_{\Gamma_{a,b}} K_1\,dv$ par $\int_{\Gamma_{a,b}} K_1 \log(v - a)\,dv$.

Les constantes λ, μ jouent un rôle analogue à celui des constantes α, $\beta, \ldots$.

On a immédiatement

$$\mho\left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right) + (1 - \rho)\frac{\partial P}{\partial \rho} = [\rho L - (\lambda + \mu + \Sigma\alpha)]\frac{\partial P}{\partial \lambda} - P,$$

et comme λ ne figure pas dans les autres équations de (T), il est clair que $\frac{\partial P}{\partial \lambda}$ est une solution de ce système lorsque P et $\frac{\partial P}{\partial \rho}$ sont nuls. On aura donc, si λ est entier positif, à remplacer par exemple Σ_1 par $\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \lambda}$:

$$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial \lambda} = \int_{\Lambda_1} K_1 \log(v - 1)\,dv.$$

Il n'est pas nécessaire de modifier les contours qui définissent les périodes, ni la fonction à intégrer lorsque certains des exposants λ, μ, α, $\beta, \ldots$ sont des entiers *négatifs*, puisque alors K_1 et son intégrale deviennent discontinus au point critique correspondant. On peut cependant observer qu'il existe alors des contours fermés *restant au voisinage de ce point* qui donnent des périodes : les *résidus* de Cauchy.

L'observation faite pour J se répète pour K, dans le cas où certains des exposants $\frac{\lambda}{p}, \frac{\mu}{p}, \frac{\alpha}{p}, \frac{\beta}{p}, \dots$ sont des entiers positifs.

Examen historique.

Il s'agit ici de montrer comment se situent, dans la théorie générale qui vient d'être exposée, les résultats particuliers dus à l'ingéniosité des géomètres qui se sont occupés, *au point de vue théorique*, de l'équation de la Balistique extérieure.

Formes de d'Alembert. — D'Alembert a indiqué [1] quatre formes de la fonction $\frac{cF}{g} = \rho$ permettant d'intégrer l'équation de l'hodographe, formes qui s'écrivent avec les notations adoptées : $u = \log V$, $v = \sin \alpha$,

$$\text{(I)} \qquad \rho(u) = a + be^{nu},$$
$$\text{(II)} \qquad \rho(u) = a + bu,$$
$$\text{(III)} \qquad \rho(u) = Ae^{nu} + Be^{-nu} + R,$$
$$\text{(IV)} \qquad \rho(u) = Au^2 + Ru + B\,;$$

les deux derniers cas ne sont traités que *pour une relation particulière entre les constantes* A, B, R. On remarquera que le changement de u en $u - u_0$ fait disparaître de toutes ces expressions une constante A, B, R.

I. Pour la forme (I), l'équation

$$(1) \qquad \frac{dv}{du} = \frac{1 - v^2}{v + \rho}$$

peut s'écrire

$$du = (be^{nu} + a + v)\frac{dv}{(1 - v^2)},$$

[1] D'Alembert, *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, Paris, 1744, p. 359. Des cas particuliers des formes de d'Alembert ont été étudiés à nouveau par Legendre et par Jacobi.

ou encore, en la multipliant par $-ne^{-nu}$,

$$(2) \qquad de^{-nu} = -\frac{n}{(1-v^2)}[b + (a+v)e^{-nu}]\,dv.$$

C'est donc une équation linéaire en e^{-nu}, la variable étant v, quelle que soit la constante n.

On sait que l'équation linéaire :

$$dy - (Ay + B)\,dx = 0$$

possède un multiplicateur dépendant de x seul, $e^{-\int A\,dx}$:

$$e^{-\int A\,dx}[dy - (Ay + B)\,dx] = d\left[ye^{-\int A\,dx} - \int Be^{-\int A\,dx}\,dx\right].$$

Dans le cas actuel, nous aurons donc comme multiplicateur de (2) le facteur

$$M = e^{\int \frac{n(a+v)}{1-v^2}dv} = (1+v)^{\frac{n}{2}(a-1)}(1-v)^{-\frac{n}{2}(a+1)},$$

c'est-à-dire comme multiplicateur de (1), $\dfrac{-(v+\rho)ne^{-nu}}{(1-v^2)}M$. Nous sommes ici en présence d'un multiplicateur de la forme

$$K = \sigma(v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu},$$

les exposants λ et μ étant donnés par

$$\lambda = -\frac{n}{2}(a+1) - 1, \qquad \mu = \frac{n}{2}(a-1) - 1.$$

Si l'on suppose a quelconque, l'*invariant rationnel* en v est donc

$$J = \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial v} = \frac{1}{v+\rho} + \frac{\lambda}{v-1} + \frac{\mu}{v+1}.$$

Nous avons vu que lorsque λ et μ sont *quelconques*, le système à intégrer pour déterminer σ et ρ peut s'écrire

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \lambda + \mu + 2, \qquad \rho' + \rho(\lambda + \mu + 2) + \mu - \lambda = 0;$$

il donne immédiatement

$$\sigma = Ce^{(\lambda+\mu+2)u}, \qquad \rho = \frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu+2} + C_1e^{-(\lambda+\mu+2)u},$$

et l'intégrale de l'hodographe s'obtient par la quadrature

$$dz = \sigma e^{\lambda \log(v-1)+\mu \log(v+1)}[(v+\rho)\,dv - (1-v^2)\,du].$$

Remarque. — L'hypothèse $\lambda+\mu+2=0$ donne $\tau=$ const. et $\rho=(\lambda-\mu)u+C_1$, c'est-à-dire le *deuxième cas* indiqué par d'Alembert. Il n'y a pas lieu d'y insister.

III. Étudions maintenant la forme (III) où $\rho = Ae^{nu}+Be^{-nu}+R$. L'équation à intégrer s'écrit

$$(1-v^2)\frac{du}{dv} = v + A\,e^{nu} + B\,e^{-nu} + R,$$

et, si l'on multiplie ses deux membres par e^{nu},

$$(1-v^2)\,e^{nu}\frac{du}{dv} = A\,e^{2nu} + (v+R)\,e^{nu} + B;$$

on reconnaît immédiatement, en posant $\omega = e^{nu}$, une équation de Riccati :

$$\frac{(1-v^2)}{n}\frac{d\omega}{dv} = A\,\omega^2 + (v+R)\,\omega + B.$$

Cette équation s'intègre par quadratures lorsqu'on en connaît une solution particulière ([1]). La méthode de d'Alembert consiste à chercher les conditions pour que cette solution soit linéaire en v :

$$\omega = pv + q;$$

on obtient ainsi

$$Anp + n + 1 = 0, \qquad q(2Ap+1) + Rp = 0, \qquad p = n(Aq^2 + Rq + B),$$

ce qui exige entre A, B, R la relation

$$\frac{1}{n^2} + \frac{AB}{(n+1)} = \frac{R^2}{(n+2)^2}.$$

On sait qu'en posant $\omega = \sigma + pv + q$, l'équation transformée est,

---

([1]) D'après la théorie générale, il n'y a de *réduction que si une solution particulière est rationnelle en v, ou si plusieurs solutions sont algébriques en v.*

après division par σ^2, une équation *linéaire* en $\frac{1}{\sigma}$:

$$(1-v^2)\frac{d\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{dv} = \frac{(n+2)^2 v + Rn^2}{(n+2)}\frac{1}{\sigma} - An;$$

elle admet donc, sous la forme précédente, le multiplicateur d'Euler

$$\frac{1}{(1-v^2)} e^{-\int \frac{(n+2)v+S}{(1-v^2)} dv}, \qquad \text{où} \qquad S = \frac{Rn^2}{(n+2)}.$$

On aura, par suite, pour l'équation initiale

$$\left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right) du - dv = 0,$$

le multiplicateur

$$K = \frac{e^{nu}(v+\rho)}{(pv+q-e^{nu})^2} e^{\int \frac{nv+S}{(v^2-1)} dv},$$

d'où l'on déduit pour J une expression rationnelle en v,

$$\frac{1}{K}\frac{dK}{dv} = J = \frac{1}{v+\rho} + \frac{\lambda}{v-1} + \frac{\mu}{v+1} - \frac{2}{v-\theta},$$

si l'on pose

$$\lambda + \mu = n, \qquad \lambda - \mu = S, \qquad \theta = \frac{e^{nu} - q}{p} = -\frac{n}{(n+1)}\left[Ae^{nu} + R\frac{(n+1)}{(n+2)}\right].$$

En observant que le remplacement de u par $u - u_0$ permet de prendre $A = 1$ et *ne change pas le produit* AB, on voit que tout est déterminé par les valeurs de λ et μ; *il n'y a donc pas dans* ρ *de constante arbitraire* en dehors de λ et μ.

Examinons, d'après les résultats généraux indiqués plus haut, à quelles conditions on pourra choisir, pour l'équation

$$\frac{dv}{du} = \frac{1-v^2}{v+\rho},$$

une expression de J, analogue à la précédente,

$$J = \frac{1}{v+\rho} + \frac{\lambda}{v-1} + \frac{\mu}{v+1} + \frac{\alpha}{v-a}.$$

On aura pour déterminer a et ρ en fonction de u les équations

$$a' = \frac{1-a^2}{a+\rho}, \qquad \rho' + (\lambda+\mu+2)\rho + \mu - \lambda = \frac{\alpha(1-\rho^2)}{a+\rho}.$$

L'équation qui lie ρ et a est une équation de Riccati :

$$\frac{d\rho}{da} = \frac{[\lambda-\mu-(\lambda+\mu+2)\rho](a+\rho)+\alpha(1-\rho^2)}{1-a^2}.$$

D'après la théorie générale, si l'on pose

$$K_1 = (v+\rho)(v-1)^\lambda(v+1)^\mu(v-a)^\alpha,$$

les périodes P de l'intégrale $\int K_1\,dv$ satisferont à l'équation

$$\begin{aligned}\mathfrak{O}(P) &= \frac{\partial P}{\partial a}\frac{1-a^2}{a+\rho} + \frac{\partial P}{\partial \rho}\left\{(1-\rho^2)\frac{\alpha}{a+\rho} - (\lambda+\mu+2)\rho + \lambda - \mu\right\}\\ &= -(\lambda+\mu+2+\alpha)P\end{aligned}$$

et le quotient de deux d'entre elles égalé à une constante définira la solution générale de l'équation de Riccati considérée. On aura ensuite u par une quadrature, en partant de l'équation

$$du = \frac{(a+\rho)\,da}{1-a^2},$$

où ρ est exprimé au moyen de a.

Nous remarquerons qu'en écrivant, par exemple,

$$v+\rho = v-1+\rho+1,$$

nous avons

$$\int K_1\,dv = \int (v-1)^{\lambda+1}(v+1)^\mu(v-a)^\alpha\,dv + (\rho+1)\int (v-1)^\lambda(v+1)^\mu(v-a)^\alpha\,dv,$$

d'où il résulte que les *périodes de* $\int K_1\,dv$ *sont des fonctions linéaires de* $(\rho+1)$ *dont les coefficients sont des fonctions de* a *qui sont des périodes d'intégrales hypergéométriques ordinaires* (1). Ceci donnera *la clef nécessaire pour trouver tous les cas de réduction* du problème.

Les périodes P considérées comme fonctions de ρ et de a vérifient

(1) *Cf.* par exemple, ÉM. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, 1896, p. 301.

avec l'équation

$$\mho(\mathrm{P}) = -(\lambda + \mu + 2 + \alpha)\mathrm{P}$$

du premier ordre, l'équation du second ordre

$$(a + \rho)\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial a\, \partial \rho} = \alpha \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial a}.$$

Il est aisé d'en déduire les équations vérifiées par les périodes des deux intégrales hypergéométriques *contiguës,* regardées comme fonctions de la seule variable a. Si l'on pose

$$\mathrm{P} = \mathrm{M} + (\rho + 1)\mathrm{N},$$

en désignant ainsi par M et par N des périodes *relatives au même contour fermé*, on aura, au lieu de l'équation du second ordre,

$$(a - 1)\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial a} = \alpha \mathrm{N} + \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial a}$$

et l'équation linéaire du premier ordre donnera la seule équation nouvelle

$$(1 - a^2)\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial a} + (\alpha a + \lambda - \mu)\mathrm{N} = -(\lambda + \mu + 2 + \alpha)\mathrm{M}.$$

En la différentiant par rapport à a et remplaçant $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial a}$ par son expression en N, on obtient l'équation du second ordre vérifiée par N :

$$(1 - a^2)\frac{\partial^2 \mathrm{N}}{\partial a^2} + [a(\lambda + \mu + 2\alpha) - (2\mu + 2 + \alpha)]\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial a} - \alpha(\lambda + \mu + \alpha + 1)\mathrm{N} = 0.$$

Dans le cas général, les périodes P ne peuvent s'exprimer que par des intégrales de double contour relatives à deux des trois points 1, -1, a. Mais il y a de nombreux cas de réduction.

Si, par exemple, les intégrales envisagées M et N demeurent finies pour $v = 1$, $v = -1$, $v = a$, ce qui exige que *les parties réelles de* $\lambda - 1$, $\mu - 1$, $\alpha - 1$ *soient positives*, on pourra prendre pour périodes distinctes deux expressions

$$\mathrm{P}_1 = \Omega_a - \Omega_1, \qquad \mathrm{P}_2 = \Omega_a - \Omega_{-1},$$

où les Ω sont des intégrales prises suivant des chemins rectilignes d'un point v_0 aux points correspondant aux indices a, 1, -1, à condition que la détermination initiale de K_1 soit choisie en v_0 une fois pour toutes.

Le *groupe de monodromie* de l'équation du second ordre en N (ou du système différentiel en P) sera dans ce cas [1] engendré par les deux transformations linéaires (S_1), (S_2) qui correspondent à une circulation de a autour de 1 dans le sens positif et à une circulation de a autour de (-1) dans le sens négatif :

$$(S_1) \qquad \begin{cases} P'_1 = e^{-2i\pi(\lambda+\alpha)} P_1, \\ P'_2 = P_2 + [e^{-2i\pi(\lambda+\alpha)} - e^{-2i\pi\alpha}] P_1 ; \end{cases}$$

$$(S_2) \qquad \begin{cases} P''_1 = P_1 + [e^{2i\pi(\mu+\alpha)} - e^{2i\pi\alpha}] P_2, \\ P''_2 = e^{2i\pi(\mu+\alpha)} P_2. \end{cases}$$

En posant

$$\frac{P_1}{P_2} = C,$$

où C désigne la constante intégrale de l'équation de Riccati, signalée plus haut, le groupe projectif relatif à C est formé par les deux transformations fondamentales

$$(\Sigma_1) \qquad C' = \frac{e^{-2i\pi(\lambda+\alpha)} C}{1 + e^{-2i\pi\alpha}(e^{-2i\pi\lambda} - 1) C} = \frac{1}{\frac{1}{C} e^{2i\pi(\lambda+\alpha)} + 1 - e^{2i\pi\lambda}},$$

$$(\Sigma_2) \qquad C'' = e^{-2i\pi(\mu+\alpha)} C + 1 - e^{-2i\pi\mu},$$

dont l'étude permettrait d'obtenir tous les cas de réduction du problème ; c'est là une question classique sur laquelle il n'y a pas lieu d'insister ici.

Nous nous bornerons à signaler les cas immédiats où λ, μ, α sont rationnels tous trois, ou bien $\lambda + \alpha$ et α rationnels.

Si l'on veut retrouver le cas signalé par d'Alembert, on doit faire $\alpha = -2$ et il semble, d'après les relations obtenues, que λ et μ *demeurent arbitraires*.

---

[1] *Cf.* ÉM. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, 1896, p. 304.

Dans ce cas, une période de $\int K_1\,dv$ est en évidence ; c'est le produit par $2i\pi$ du résidu de $\frac{(v+\rho)(v-1)^\lambda(v+1)^\mu}{(v-a)^2}$ relatif à $v=a$.

En posant

$$f(v)=(v+\rho)(v-1)^\lambda(v+1)^\mu,$$

ce résidu est simplement $f'(a)$:

$$f'(a)=(a-1)^{\lambda-1}(a+1)^{\mu-1}\{a^2-1+(a+\rho)[\lambda(a+1)+\mu(a-1)]\}.$$

La période $P=2i\pi f'(a)$ vérifie l'identité

$$\mathcal{V}(P)=-(\lambda+\mu)P;$$

mais, *en laissant* λ *et* μ *arbitraires*, une autre période ne peut s'obtenir que par une intégrale de double contour, celle relative à -1 et $+1$ par exemple.

Le succès de d'Alembert tient à ce qu'au lieu d'intégrer l'équation de Riccati que nous avons rencontrée, il a simplement envisagé la *relation invariante*

$$P_1=(a^2-1)+(a+\rho)[\lambda(a+1)+\mu(a-1)]=0,$$

qui donne immédiatement

$$a'=\frac{1-a^2}{a+\rho}=\lambda(a+1)+\mu(a-1),$$

et s'intégre par la formule

$$a=A\,e^{(\lambda+\mu)u}+\frac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu},$$

d'où l'on conclut ensuite l'expression de ρ.

Une circonstance analogue se présentera toutes les fois où l'on pourra déterminer l'une des périodes P *de* $\int K_1\,dv$; en particulier toutes les fois où l'un des exposants λ, μ, α est entier négatif. Ce sont là des *cas de réduction exceptionnels*, où le nombre des constantes arbitraires est diminué d'une unité.

Remarque. — Il est nécessaire de signaler ici le cas singulier où $\lambda + \mu = 0$. En considérant l'équation $P = 0$, elle nous donne alors

$$a^2 - 1 + 2\lambda(a + \rho) = 0,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{da}{du} = 2\lambda \qquad \text{ou bien} \qquad a = 2\lambda u + c$$

et ensuite

$$\rho = \frac{1 - a^2}{2\lambda} - a = -2\lambda u^2 - 2(c + \lambda)u - \left(c + \frac{c^2 - 1}{2\lambda}\right).$$

L'expression de ρ est donc une fonction du second degré de u

$$\rho = A u^2 + R u + B,$$

où les coefficients sont liés par la relation

$$R^2 = A^2 + 4AB + 4.$$

Or si nous partons de cette expression générale de ρ où A, R, B sont des coefficients *arbitraires*, l'équation de l'hodographe

$$\frac{dv}{du} = \frac{1 - v^2}{v + \rho}$$

peut s'écrire

$$(1 - v^2)\frac{du}{dv} = A u^2 + R u + B + v;$$

c'est une équation de Riccati en u et d'Alembert l'a intégrée lorsqu'elle admet une solution particulière linéaire en v. En exprimant que l'on peut prendre pour solution $pv + q$, on trouve aisément

$$p = -\frac{1}{A}, \qquad q = \frac{A - R}{2A}$$

avec la condition

$$R^2 = A^2 + 4AB + 4,$$

qui est précisément celle trouvée plus haut. *Nous rencontrons ainsi le cas* (IV), *signalé par d'Alembert.*

On verrait, comme dans l'étude du cas (III), que l'équation

$$\frac{dv}{du} - \frac{1 - v^2}{v + \rho} = 0$$

possède alors un multiplicateur d'Euler

$$K = \sigma \frac{(v+\rho)}{(v-a)^2}\left(\frac{v-1}{v+1}\right)^{\lambda}.$$

Comme, dans cette hypothèse, K est comparable pour $|v|$ très grand à $\frac{1}{v}$, le coefficient σ est constant.

Il convient de remarquer que l'expression de ρ ne dépend que d'*une constante essentielle*, puisqu'on peut, par exemple, en ajoutant à u une constante $-u_0$, annuler B ou R. On peut aussi faire $c = 0$, ce qui donne

$$\rho = 2\mu u^2 + 2\mu u - \frac{1}{2\mu}, \qquad a = -2\mu u, \qquad K = \frac{v+\rho}{(v-a)^2}\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^{\mu},$$

où il apparaît nettement que la seule constante qui figure dans ρ est l'exposant μ.

Nous verrons tout à l'heure qu'il est possible d'obtenir l'expression générale de ρ qui correspond à la forme adoptée pour K.

Cas de l'équation linéaire en ρ. — Un cas particulier important(¹) est celui où l'équation de Riccati, qui définit ρ au moyen de a, se réduit à une équation linéaire. Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\lambda + \mu + 2 + \alpha = 0.$$

L'équation linéaire

$$\frac{d\rho}{da} = \rho\,\frac{(\lambda-\mu) - a(\lambda+\mu+2)}{1-a^2} + \frac{a(\lambda-\mu) - (\lambda+\mu+2)}{1-a^2}$$

s'intègre aisément sous l'une ou l'autre des formes

$$(\rho - 1) = (a-1)^{\mu+1}(a+1)^{\lambda+1}\left[C + 2(\mu+1)\int \frac{da}{(a-1)^{\mu+2}(a+1)^{\lambda+1}}\right],$$

$$(\rho + 1) = (a-1)^{\mu+1}(a+1)^{\lambda+1}\left[C - 2(\lambda+1)\int \frac{da}{(a-1)^{\mu+1}(a+1)^{\lambda+2}}\right],$$

où n'intervient qu'une intégrale de *différentielle binome* dont on peut

---

(¹) Ce cas est le premier des deux cas indiqués par M. F. Siacci, dans sa dernière Note (*C. R. Acad. Sc.*, t. CXXXIII, 19 août 1901); nous ne reviendrons pas sur son examen.

indiquer aisément tous les cas de réduction, c'est-à-dire tous les cas où elle s'exprime par la combinaison d'un nombre limité d'opérations algébriques, d'exponentielles ou de logarithmes portant sur des arguments algébriques ; ces cas sont manifestement : λ entier ou μ entier, ou $\lambda+\mu$ entier, lorsque λ, μ sont rationnels et de signe quelconque.

On obtiendra ensuite u au moyen de a par la quadrature

$$u-u_0=-\int\frac{(a+\rho)\,da}{a^2-1}=-\log(a+1)-\int\frac{(\rho+1)\,da}{a^2-1}=\ldots,$$

dans laquelle, en dehors d'une intégrale de différentielle binome avec les mêmes cas de réduction que la précédente, figure l'expression

$$\Phi(a)=\int(a-1)^{\mu}(a+1)^{\lambda}\left[\int\frac{da}{(a-1)^{\mu+1}(a+1)^{\lambda+2}}\right]da.$$

Si l'on se reporte à ce qui a été dit plus haut, les périodes P de l'intégrale

$$\int K_1\,dv,$$

où

$$K_1=\frac{(v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}}{(v-a)^{\lambda+\mu+2}}$$

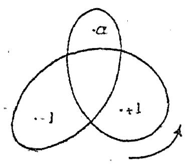
sont ici des solutions de l'équation

$$\mho(P)=0;$$

elles sont donc fonction de l'une d'elles. La constante C est par suite fonction d'une de ces périodes et comme elle est linéaire en ρ, c'est, à un facteur constant près, l'une de ces périodes.

D'après la forme de K_1 on peut choisir pour période $\int_\Gamma K_1\,dv$, le contour fermé Γ entourant une seule fois dans le sens direct chacun des points 1, -1, a, puisque K_1 reprend sa valeur initiale quand on décrit un tel contour. Si l'on prend pour Γ un contour *convexe* qui se ramène par déformation à un cercle entourant ces trois points, on aura une période constante $2i\pi$ qui correspond à un cercle de rayon très grand. Mais on peut prendre un contour Γ *à trois boucles*, tel que celui que nous figurons, et l'intégrale correspondante dépendra de a ; on le reconnait aisément en prenant un cas particulier, par exemple $\lambda = 1$, $\mu = -2$, où K_1 est uniforme et où l'intégrale est une somme de résidus.

Fig. 2.



Il y aurait lieu de rechercher quel est le contour Γ qui donne C dans le cas général; nous nous bornons à poser la question.

Examinons, plus en détail, le cas où $\alpha = -2$, ce qui entraîne $\lambda + \mu = 0$. Nous avons vu que le résidu de K, relatif au pôle double a, donne une période

$$P = 2i\pi(a-1)^{\lambda-1}(a+1)^{-(\lambda+1)}[a^2 - 1 + 2\lambda(a+\rho)].$$

On sait donc ici calculer explicitement l'intégrale

$$\theta(a) = 2(\lambda+1)\int \frac{(a-1)^{\lambda-1}}{(a+1)^{\lambda+2}}\,da$$

qui figure dans l'expression de $(\rho+1)$ et l'on a

$$\theta(a) = \frac{(a-1)^\lambda}{(a+1)^\lambda}\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{2\lambda}\right).$$

La relation entre la période P et la constante C donnée par l'intégration de l'équation linéaire en ρ est alors

$$\frac{1}{2i\pi}P = 2\lambda C,$$

ce qui montre que l'on peut prendre ici pour contour Γ un cercle entourant le point a seul.

Pour avoir la relation entre u et a, il suffit de tenir compte dans la formule

$$u - u_0 = -\int \frac{(a+\rho)\,da}{a^2 - 1}$$

de l'expression de $a + \rho$

$$(a+\rho) = \frac{1-a^2}{2\lambda} + C\frac{(a+1)^{\lambda+1}}{(a-1)^{\lambda-1}};$$

on obtient ainsi

$$u - u_0 = \frac{a}{2\lambda} - C\int\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^{\lambda} da.$$

L'intégrale du second membre ne peut s'obtenir explicitement lorsque λ est une quantité réelle ou complexe *quelconque;* elle s'exprime évidemment à l'aide des fonctions élémentaires quand λ est rationnel, on peut donc achever l'étude théorique dans ce dernier cas.

Des observations analogues peuvent se faire toutes les fois où α, exposant de $(v - a)$, est un nombre entier négatif. Le résidu correspondant de K_1 donnera une période P et permettra par suite l'intégration explicite de l'équation linéaire en ρ, c'est-à-dire, au fond, l'expression explicite de $\int \frac{da}{(a-1)^{\mu+1}(a+1)^{\lambda+2}}$ lorsque $\lambda + \mu$ est un entier positif.

Formes de Siacci. — Dans deux Notes très riches en résultats particuliers, M. François Siacci a fait connaître récemment (¹) un assez grand nombre de cas nouveaux d'intégration par quadratures de l'équation de l'hodographe. Il est aisé de les classer dans les cas généraux et de les obtenir ainsi par une méthode régulière et uniforme.

L'équation de l'hodographe étant écrite (avec nos notations primitives)

$$\sqrt{1 - v^2}\, du - (v + \rho)\frac{u\, dv}{\sqrt{1 - v^2}} = 0.$$

M. F. Siacci cherche à quelle condition l'expression

$$M = e^{\mu}(u\sqrt{1 - v^2})^{-n},$$

où

$$\mu = a\int \rho\, du - auv - b\int \frac{dv}{1 - v^2},$$

est un multiplicateur d'Euler pour le premier membre de l'équation.

Il trouve ainsi l'équation

$$\frac{d\rho\, u^{1-n}}{du} + au^{1-n}(\rho^2 - 1) = bu^{-n},$$

(¹) F. Siacci, *C. R. Acad. Sc.*, t. CXXXI, 13 mai 1900, et t. CXXXIII, 19 août 1901.

qui, pour $a=0$, redonne, suivant que $n \neq 1$ ou $n=1$, la première ou la seconde formule de d'Alembert.

Dans le cas général, en posant

$$n=\frac{1}{q}, \qquad au=\frac{1}{q}x^q, \qquad \rho=yx^{1-q},$$

on obtient, pour déterminer y en x, l'équation (un peu plus générale que l'équation originelle étudiée par Riccati)

$$\frac{dy}{dx}+y^2=x^{2q-2}+bqx^{q-2},$$

équation que M. F. Siacci intègre *par des séries* dans des cas particuliers.

Nous observerons qu'en partant de l'équation de l'hodographe écrite

$$\frac{dv}{du}-\left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right)=0,$$

le multiplicateur d'Euler, K, a la forme

$$K=(v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}e^{Lv}.$$

Nous nous trouvons donc dans le cas où J, rationnel, se réduit à

$$J=\frac{1}{v+\rho}+\frac{\lambda}{v-1}+\frac{\mu}{v+1}+L$$

avec

$$\lambda+\mu=-(n+1), \qquad \lambda-\mu=b.$$

En laissant λ, μ arbitraires, on a pour déterminer ρ et Γ les deux conditions

$$L'-L=0, \qquad \rho'+(\lambda+\mu+2)\rho+\mu-\lambda=L(\rho^2-1).$$

La relation entre ρ et L est définie par l'équation différentielle

$$L\frac{d\rho}{dL}+(\lambda+\mu+2)\rho+\mu-\lambda=L(\rho^2-1),$$

dont nous savons former l'intégrale par le quotient de deux périodes de l'intégrale définie

$$\int (v+\rho)\, e^{\lambda \log(v-1)+\mu \log(v+1)+Lv}\, dv.$$

Nous avons vu que si l'on pose

$$L = l(\cos\theta + i \sin\theta), \qquad v = r(\cos\omega + i \sin\omega);$$

on peut choisir, pour définir ces périodes, deux *lacets élémentaires* entourant respectivement les points 1 et -1 et dont la partie rectiligne s'éloigne indéfiniment dans une direction ω_0 pour laquelle $\cos(\omega_0+\theta) < 0$.

Par exemple, on peut prendre $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$ si θ est positif et inférieur à π, $\omega_0 = -\frac{\pi}{2}$ si θ est compris entre π et 2π.

Désignons par Γ_1, Γ_{-1} ces lacets élémentaires parcourus dans le sens positif, on aura

$$\int_{\Gamma_1} (v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu} e^{Lv}\, dv = A(L) + \rho\, B(L),$$

$$\int_{\Gamma_{-1}} (v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu} e^{Lv}\, dv = C(L) + \rho\, D(L);$$

d'où l'on déduit l'intégrale de l'équation de Riccati considérée

$$\frac{A(L)+\rho\, B(L)}{C(L)+\rho\, D(L)} = \text{const.}$$

Il y aurait lieu d'étudier en détail les intégrales $A(L), \ldots$ comme fonction de L et des arguments λ, μ.

Supposons par exemple λ et μ entiers positifs; on obtient la relation entre ρ et L en égalant à une constante le rapport des périodes de l'intégrale

$$\int (v+\rho)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu} e^{Lv}\, dv.$$

Si, par exemple, la partie réelle de L est négative, on obtient une de ces périodes en prenant pour contour d'intégration un lacet entourant le point $v=1$ et dont la partie rectiligne coïncide avec la partie positive de l'axe réel du plan v. L'intégrale correspondante de l'équation $\mho(P) = [-(\lambda + \mu + 2) + \rho L] P$ pourra être prise égale à

$$I_1 = \int_1^\infty (v + \rho)(v - 1)^\lambda (v + 1)^\mu e^{Lv}\, dv.$$

Mais si l'on observe que, $f(v)$ désignant un polynome entier, on a

$$\int e^{Lv} f(v)\, dv = e^{Lv}\left(\frac{1}{L} f(v) - \frac{1}{L^2} f'(v) + \frac{1}{L^3} f''(v) - \dots\right) + \text{const.},$$

on en pourra conclure

$$\int_1^\infty e^{Lv} f(v)\, dv = -e^L\left[\frac{1}{L} f(1) - \frac{1}{L^2} f'(1) + \frac{1}{L^3} f''(1) - \dots\right].$$

Dans le cas actuel

$$f(v) = (v + \rho)(v - 1)^\lambda (v + 1)^\mu,$$

et ce polynome s'annule ainsi que ses dérivées jusqu'à celle d'ordre $(\lambda - 1)$ pour $v = 1$. Il en résulte que si l'on pose

$$\varphi(v) = (v + \rho)(v + 1)^\mu,$$

on aura les expressions

$$\begin{aligned}
f^{(\lambda)}\ \ (1) &= \lambda!\,\varphi\ \ (1) = \lambda!\,2^\mu(1 + \rho),\\
f^{(\lambda+1)}(1) &= \lambda!\,\varphi'\ (1) = \lambda!\,[\mu\,2^{\mu-1}(1 + \rho) + 2^\mu],\\
f^{(\lambda+2)}(1) &= \lambda!\,\varphi''\,(1) = \lambda!\,[\mu(\mu - 1)\,2^{\mu-2}(1 + \rho) + 2\mu\,2^{\mu-1}],\\
f^{(\lambda+3)}(1) &= \lambda!\,\varphi'''(1) = \lambda!\,[\mu(\mu - 1)(\mu - 2)\,2^{\mu-3}(1 + \rho) + 3\mu(\mu - 1)\,2^{\mu-2}],\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

dont la loi de formation apparaît clairement.

Une autre intégrale de la même équation sera donnée par l'intégrale

$$I_2 = \int_{-1}^\infty (v + \rho)(v - 1)^\lambda (v + 1)^\mu e^{Lv}\, dv,$$

dans le calcul de laquelle il n'y a pas lieu, *ici*, d'éviter le point $+1$. Cette intégrale est donc simplement

$$I_2 = -e^{-L}\left[\frac{1}{L} f(-1) - \frac{1}{L^2} f'(-1) + \frac{1}{L^3} f''(-1) - \dots\right],$$

et les observations qu'on vient de faire pour I_1 peuvent se répéter.

L'intégrale de l'équation de Riccati entre ρ et L est alors

$$I_1 : I_2 = \text{const.}$$

et l'on en déduit immédiatement la relation entre ρ et u puisque l'on peut prendre $L = e^u$.

Dans le cas où λ et μ sont des *entiers négatifs*, les périodes de l'intégrale

$$\int (v + \rho)(v - 1)^\lambda (v + 1)^\mu e^{Lv}\, dv$$

sont, au facteur $2i\pi$ près, les résidus de Cauchy de la fonction à intégrer pour $v = 1$ et $v = -1$.

Pour $v = 1$, le résidu de $(v + \rho)(v - 1)^\lambda (v + 1)^\mu e^{Lv}$ s'obtiendra immédiatement en posant $v = 1 + x$ et cherchant le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement

$$x^\lambda (1 + \rho + x)(2 + x)^\mu e^{L + Lx}.$$

Comme on a, pour $|x|$ inférieur à 2,

$$(2 + x)^\mu = 2^\mu \left(1 + \frac{x}{2}\right)^\mu = 2^\mu \left[1 + \frac{\mu}{1}\frac{x}{2} + \frac{\mu(\mu - 1)}{1.2}\frac{x^2}{2^2} + \dots\right]$$

et aussi

$$e^{Lx} = 1 + L\frac{x}{1} + L^2 \frac{x^2}{1.2} + \dots,$$

le résidu cherché sera représenté par la somme

$$\begin{aligned} e^L 2^\mu (1 + \rho) \Bigg[& \frac{L^{-(\lambda+1)}}{1.2\dots(-\lambda + 1)} + \frac{L^{-(\lambda+2)}}{1.2\dots(-\lambda - 2)} \frac{\mu}{1}\frac{1}{2} \\ & + \frac{L^{-(\lambda+3)}}{1.2\dots(-\lambda - 3)} \frac{\mu(\mu - 1)}{1.2}\frac{1}{2^2} + \dots \Bigg] \\ + e^L 2^\mu \Bigg[& \frac{L^{-(\lambda+2)}}{1.2\dots(-\lambda - 2)} + \frac{L^{-(\lambda+3)}}{1.2\dots(-\lambda - 3)} \frac{\mu}{1}\frac{1}{2} \\ & + \frac{L^{-(\lambda+4)}}{1.2\dots(-\lambda - 4)} \frac{\mu(\mu - 1)}{1.2}\frac{1}{2^2} + \dots \Bigg], \end{aligned}$$

où les développements s'arrêtent aux puissances négatives de L.

Le résidu relatif à $v = -1$ aura une expression analogue, et le quotient de ces résidus, c'est-à-dire l'intégrale de l'équation de Riccati qui définit ρ en fonction de L, aura une forme explicite voisine de celle qui se présente pour λ, μ entiers positifs.

Lorsque λ et μ sont *des quantités réelles quelconques*, on parvient à des développements en série convergente de l'intégrale I_1 en cherchant, pour $|\bmod v|$ supérieur à 1, un développement convergent pour le produit $(v-1)^\lambda (v+1)^\mu$. Ce développement résultera immédiatement de l'identité

$$(v-1)^\lambda (v+1)^\mu = v^{\lambda+\mu}\left(1-\frac{1}{v}\right)^\lambda \left(1+\frac{1}{v}\right)^\mu$$

et de la formule de Newton.

On obtiendra de même le développement de I_2 en remarquant que l'on a

$$I_2 = I_1 + I_3 \qquad \text{avec} \qquad I_3 = \int_{-1}^{+1} (v+\rho)(v-1)^\lambda (v+1)^\mu e^{Lv}\, dv,$$

et que pour cette dernière intégrale $(v-1)^\lambda (v+1)^\mu$ se développe sans difficulté en série convergente suivant les puissances positives de v.

Ces développements convergents de I_1 et de I_2 sont des fonctions analytiques de la variable réelle λ, par exemple, fonctions qu'on peut chercher à étendre au champ complexe. L'extension naturelle est faite, précisément par la définition de I_1 au moyen d'une intégrale prise le long d'un contour fermé, adoptée dans le cas général où λ et μ sont des quantités complexes quelconques.

Deuxième forme. — M. Siacci a étudié divers cas particuliers où l'on peut donner au multiplicateur K, de l'expression $dv - \left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right) du$, la forme

$$K = \sigma(v+\rho)(v-a)^\alpha (v-1)^\lambda (v+1)^\mu.$$

Nous avons déjà rencontré le cas général où λ, μ, α sont des constantes complexes quelconques à propos de la forme (III) de ρ, donnée par d'Alembert; il nous a conduit aux intégrales hypergéométriques classiques.

Examinons rapidement les réductions qui se présentent dans les cas signalés par M. Siacci.

a. $\lambda = \mu = -1$: Les points 1 et -1 sont des pôles simples de K; on a donc pour déterminer a et ρ, au moyen de σ, les équations

$$\sigma(1+\rho)(1-a)^{\alpha} = \Gamma_1,$$
$$\sigma(-1+\rho)(1+a)^{\alpha} = \Gamma_2,$$

d'où l'on conclut

$$\left(\frac{\Gamma_1}{\rho+1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} + \left(\frac{\Gamma_2}{\rho-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = 2\sigma^{\frac{1}{\alpha}}$$

avec, d'ailleurs,

$$\sigma = C e^{\alpha u}.$$

Des conclusions analogues vaudraient toutes les fois où λ, μ *sont entiers et négatifs.*

b. $\alpha = 1$: M. Siacci observe qu'en écrivant l'expression de K

$$K = (\nu+\rho)[l(1+\nu) + m(1-\nu)]^{\alpha}(\nu-1)^{\lambda}(\nu+1)^{\mu},$$

ce qui, avec nos notations, entraîne

$$\sigma = (l-m)^{\alpha}, \qquad a = \frac{l+m}{m-l},$$

on a pour déterminer l, m, ρ les trois relations

$$\alpha(\rho+1)l' + \rho' l = 2(\lambda+1)l,$$
$$\alpha(\rho-1)m' + \rho' m = -2(\mu+1)m,$$
$$(l-m)^{\alpha} = C e^{(\alpha+\lambda+\mu+2)u}.$$

Pour $\alpha = 1$, on peut déduire des deux premières une combinaison intégrable en tenant compte de l'expression de $(l-m)$; l'intégrale correspondante sera

$$\frac{l(\rho+1)}{\lambda+1} + \frac{m(\rho-1)}{\mu+1} = \frac{2C}{\lambda+\mu+3} e^{(\lambda+\mu+3)u} + C_1$$

ou encore

$$C_1 = \frac{l(\rho+1)}{\lambda+1} + \frac{m(\rho-1)}{\mu+1} - \frac{2}{\lambda+\mu+3}(l-m).$$

En supposant $C_1 = 0$, M. Siacci achève l'intégration. On aura dans cette hypothèse

$$\frac{m}{\dfrac{1+\rho}{\lambda+1}-\dfrac{2}{\lambda+\mu+3}}=\frac{l}{\dfrac{1-\rho}{\mu+1}-\dfrac{2}{\lambda+\mu+3}}=\frac{C\,e^{(\lambda+\mu+3)u}}{\dfrac{1-\rho}{\mu+1}-\dfrac{1+\rho}{\lambda+1}},$$

et la première équation entre ρ et λ donnera

$$\frac{l'}{l}=\frac{2(\lambda+1)-\rho'}{1+\rho}=\frac{-\dfrac{\rho'}{\mu+1}}{\dfrac{1-\rho}{\mu+1}-\dfrac{2}{\lambda+\mu+3}}+\frac{\dfrac{\rho'}{\mu+1}+\dfrac{\rho'}{\lambda+1}}{\dfrac{1-\rho}{\mu+1}-\dfrac{1+\rho}{\lambda+1}}+\lambda+\mu+3,$$

d'où l'on peut conclure

$$du=d\rho\left[\frac{\left(\dfrac{\lambda+2}{\lambda+\mu+3}\right)}{\rho+1-2\left(\dfrac{\lambda+2}{\lambda+\mu+3}\right)}+\frac{\left(\dfrac{\mu+2}{\lambda+\mu+3}\right)}{\rho-1+2\left(\dfrac{\mu+2}{\lambda+\mu+3}\right)}-\frac{1}{\rho-\left(\dfrac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu+2}\right)}\right],$$

ce qui s'intégre à vue.

Étudions d'un peu plus près les résultats précédents.

Avec nos notations, l'intégrale C_1 peut s'écrire (puisque l'on a $2l=\sigma(1-a)$, $2m=-\sigma(1+a)$ sous la forme

$$2C_1=\sigma\left[\frac{(1+\rho)(1-a)}{\lambda+1}+\frac{(1-\rho)(1+a)}{\mu+1}-\frac{4}{\lambda+\mu+3}\right].$$

Cette intégrale C_1 est, à un facteur constant près, une période de l'intégrale $\int K\,dv$, où $K=\sigma(v+\rho)\,(v-a)\,(v-1)^\lambda\,(v+1)^\mu$ et cela *quelles que soient les constantes* λ *et* μ. Proposons-nous de chercher à quel contour fermé Γ elle correspond et pourquoi on a pu l'obtenir.

Nous observerons que le produit $(v+\rho)(v-a)$ peut se développer suivant les puissances de $(v-1)$ par exemple; en écrivant

$$\begin{aligned}(v+\rho)(v-a)&=(v-1+1+\rho)(v-1+1+a)\\&=(v-1)^2+(v-1)(2+\rho-a)+(1+\rho)(1-a),\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned}\int K\,dv=\sigma\Big[&\int(v-1)^{\lambda+2}(v+1)^\mu\,dv\\&+(2+\rho-a)\int(v-1)^{\lambda+1}(v+1)^\mu\,dv\\&+(1+\rho)(1-a)\int(v-1)^\lambda(v+1)^\mu\,dv\Big].\end{aligned}$$

Soit, pour abréger l'écriture,

$$D(\lambda, \mu) = \int (v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}\,dv,$$

où Γ est un contour fermé tel que $(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu}$ reprenne sa valeur initiale quand v le décrit; on aura donc aussi

$$\int_{\Gamma} K\,dv = \sigma[D(\lambda+2, \mu) + (2+\rho-a)\,D(\lambda+1, \mu) + (1+\rho)(1-a)\,D(\lambda, \mu)].$$

Mais l'identité évidente

$$\begin{aligned}(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu} = {} & \frac{1}{\mu+1}\frac{d}{dv}[(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu+1}] \\ & - \frac{\lambda}{\mu+1}[(v-1)^{\mu}(v+1)^{\mu} + 2(v-1)^{\lambda-1}(v+1)^{\mu}]\end{aligned}$$

donne immédiatement

$$(\lambda+\mu+1)(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu} = \frac{d}{dv}(v-1)^{\lambda}(v+1)^{\mu+1} - 2\lambda(v-1)^{\lambda-1}(v+1)^{\mu},$$

d'où l'on conclut, eu égard aux conditions imposées au contour Γ,

$$D(\lambda, \mu) = \frac{-2\lambda}{\lambda+\mu+1}\,D(\lambda-1, \mu).$$

Nous aurons par suite, pour tout contour Γ,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} K\,dv = \sigma D(\lambda, \mu)\Big[& (1+\rho)(1-a) - \frac{2(\lambda+1)}{\lambda+\mu+2}(2+\rho-a) \\ & + \frac{4(\lambda+1)(\lambda+2)}{(\lambda+\mu+2)(\lambda+\mu+3)}\Big].\end{aligned}$$

Il n'est pas nécessaire de connaître $D(\lambda, \mu)$, qui est constant, pour obtenir l'intégrale

$$C_2 = \sigma\left[(1+\rho)(1-a) - \frac{2(\lambda+1)}{\lambda+\mu+2}(2+\rho-a) + \frac{4(\lambda+1)(\lambda+2)}{(\lambda+\mu+2)(\lambda+\mu+3)}\right]$$

et l'on vérifie aisément l'identité entre C_2 et C_1 :

$$2(\lambda+1)(\mu+1)C_1 = (\lambda+\mu+2)C_2.$$

Cette intégrale C_2 peut évidemment s'obtenir de même en partant du développement de $(v+\rho)(v-a)$ suivant les puissances de $(v+1)$ et faisant usage de la relation

$$D(\lambda, \mu) = \frac{2\mu}{\lambda+\mu+1} D(\lambda, \mu-1).$$

Si l'on prend pour Γ le double contour $ABA^{-1}B^{-1}$ relatif aux deux points -1 et $+1$, la fonction $D(\lambda, \mu)$ s'exprime aisément à l'aide de l'Intégrale eulérienne de première espèce et les propriétés précédentes résultent de celles de la fonction $\Gamma(z)$, Intégrale eulérienne de seconde espèce.

En posant $v+1=2t$, on a en effet

$$(v-1)^\lambda (v+1)^\mu dv = (-1)^\lambda 2^{\lambda+\mu+1} t^\mu (1-t)^\lambda dt,$$

d'où l'on conclut

$$\int_{ABA^{-1}B^{-1}} (v-1)^\lambda (v+1)^\mu dv = 2^{\lambda+\mu+1} e^{i\pi\lambda} B(\mu+1, \lambda+1)$$

avec

$$B(\mu, \lambda) = \int_{ABA^{-1}B^{-1}} t^{\mu-1}(1-t)^{\lambda-1} dt = (1-e^{2i\pi\lambda})(1-e^{2i\pi\mu}) \frac{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}.$$

Ce qu'il faut remarquer ici c'est que *des circonstances analogues se présenteront pour toutes les valeurs entières et positives de l'exposant α.*

Bien plus, si l'on a

$$K = (v+\rho)(v-a)^\alpha (v-b)^\beta \ldots (v-1)^\lambda (v+1)^\mu,$$

et si tous les exposants relatifs aux facteurs $a, b, \ldots$ autres que -1 et $+1$ sont des *entiers positifs*, on pourra encore former une intégrale qui sera un polynome en $a, b, \ldots, \rho$, les degrés en chacune de ces lettres étant égaux aux exposants.

S'il existe des exposants non entiers positifs, la présence d'exposants entiers positifs amène toujours une décomposition linéaire de toutes les périodes suivant les puissances de la ou des variables correspondantes.

c. $\lambda = -1$, $\alpha = -(\mu+1)$: Dans ce cas, on a

$$K = \sigma \frac{(v+\rho)(v+1)^\mu}{(v-1)(v-a)^{\mu+1}};$$

les points $v = 1$ et $\frac{1}{v} = 0$ sont tous deux des pôles simples de K.

Nous pouvons donc en conclure que σ est constant et faire $\sigma = 1$; le résidu relatif au pôle 1 donne alors

$$\frac{1 + \rho}{(1 - a)^{\mu+1}} = \Gamma_1,$$

d'où

$$(a + \rho) = \Gamma_1 (1 - a)^{\mu+1} - (1 - a).$$

Il reste à intégrer l'équation

$$du = \frac{(a + \rho)\, da}{(1 - a^2)} = \left[\Gamma_1 \frac{(1 - a)^{\mu}}{(1 + a)} - \frac{1}{(1 + a)}\right] da,$$

ce qui peut se faire explicitement quand μ est rationnel, au moyen des fonctions élémentaires

$$u - u_0 = -\log(1 + a) + \Gamma_1 \int (1 - a)^{\mu} \frac{da}{1 + a}.$$

On peut traiter de même tous les cas où λ est un entier négatif et où la somme $\alpha + \mu$ est un entier positif, c'est-à-dire où *le point* 1 *est un pôle de* K *et le point* $\frac{1}{v} = 0$ un pôle aussi, *puisque la fonction est uniforme à son voisinage*.

Examinons d'abord le cas limite $\alpha + \mu = 0$ avec $\lambda = 1$.

On a

$$K = \sigma\left(\frac{v + \rho}{v - 1}\right)\left(\frac{v + 1}{v - a}\right)^{\mu},$$

et le résidu relatif à $v = 1$ donne l'intégrale

$$\frac{\sigma(1 + \rho)}{(1 - a)^{\mu}} = \Gamma_1.$$

On remarque en outre que, pour $|v|$ très grand, on peut écrire

$$K = \frac{\sigma\left[1 + \frac{1}{v}(\rho + \mu) + \ldots\right]}{\left[1 - \frac{1}{v}(1 + \mu a) + \ldots\right]} = \sigma + \frac{\sigma}{v}[1 + \rho + \mu(1 + a)] + \ldots;$$

un contour fermé analogue à un cercle de rayon très grand nous donne donc une période de $\int K\,dv$ représentée par

$$2i\pi\sigma[1+\rho+\mu(1+a)],$$

d'où une seconde intégrale

$$\sigma[1+\rho+\mu(1+a)]=\Gamma_2.$$

Cette intégrale Γ_2, où l'on tiendrait compte de l'expression actuelle de σ, $\sigma = C e^u$, s'obtiendrait aussi directement en partant de l'équation

$$\rho\frac{\sigma'}{\sigma}-\alpha(a+a')+\mu-\lambda+\rho'=0.$$

La relation entre ρ et u est donc

$$\frac{\sigma(1+\rho)}{\Gamma_1}=\left[2-\frac{\Gamma_2-\sigma(1+\rho)}{\mu\sigma}\right]^{\mu},$$

où $\sigma = C e^u$.

Supposons maintenant $\lambda=-1$ et $\alpha=-\mu+1$ par exemple, ce qui donne

$$K=\sigma\frac{(v+\rho)}{(v-1)}(v-a)^{1-\mu}(v+1)^{\mu}.$$

Nous aurons d'abord, comme plus haut, l'intégrale relative au pôle $v=1$,

$$\sigma(1+\rho)(1-a)^{1-\mu}=\Gamma_1.$$

Ensuite, au voisinage de $\frac{1}{v}=0$, on peut écrire

$$K=\sigma(v+\rho)\left(1-\frac{a}{v}\right)^{1-\mu}\left(1+\frac{1}{v}\right)^{\mu}\left(1-\frac{1}{v}\right)^{-1},$$

et l'on a

$$\left(1-\frac{a}{v}\right)^{1-\mu}=1+(\mu-1)\frac{a}{v}+\frac{\mu(\mu-1)}{2}\frac{a^2}{v^2}+\ldots,$$

$$\left(1+\frac{1}{v}\right)^{\mu}=1+\mu\frac{1}{v}+\frac{\mu(\mu-1)}{2}\frac{1}{v^2}+\ldots,$$

$$\left(1-\frac{1}{v}\right)^{-1}=1+\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}+\ldots;$$

d'où l'on conclut enfin

$$\begin{aligned}K = \sigma v + \sigma \text{ const.} + \frac{\sigma}{v}\Big\{ \rho[(\mu+1)+(\mu-1)a] \\ + \frac{\mu(\mu-1)}{2}a^2 + (\mu^2-1)a + \frac{\mu^2+\mu+2}{2}\Big\} + \ldots.\end{aligned}$$

Il existe donc une deuxième intégrale entière

$$\sigma\Big\{\rho[\mu+1)+(\mu-1)a] + \frac{\mu(\mu-1)}{2}a^2 + (\mu^2-1)a + \frac{\mu^2+\mu+2}{2}\Big\} = \Gamma_2.$$

Comme d'autre part $\sigma = Ce^{2u}$, on peut regarder la détermination de ρ et de a comme achevée.

La méthode s'applique manifestement aussi *toutes les fois où* $\alpha+\mu+\lambda$ *est un entier positif*. Il n'y a pas lieu d'y insister davantage.

Troisième forme. — Une troisième forme indiquée par M. Siacci comporte deux cas différents : A et B.

A. Dans le cas A, un facteur intégrant de la différentielle

$$dv - \left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right)du$$

a la forme

$$\frac{\sigma(v+\rho)(v-a_1)^{\frac{1}{2}}(v-a_2)^{\frac{1}{2}}}{(v^2-1)}.$$

Nous sommes donc dans l'hypothèse où $\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = K$ est rationnel en v et où l'on a

$$K = \sigma^2(v+\rho)^2\frac{(v-a_1)(v-a_2)}{(v^2-1)^2}.$$

En observant que z est donné par la quadrature

$$z = \int_{v_0}^{v}\frac{\sigma(v+\rho)}{(v^2-1)}\sqrt{(v-a_1)(v-a_2)}\,dv + \Phi(u),$$

on définit les éléments a_1, a_2, ρ et σ au moyen de u de la manière suivante :

La somme $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1-1+2$ se réduisant à l'unité, on aura

$$\sigma' = \sigma, \qquad \text{d'où} \qquad \sigma = C_0 e^u.$$

Les résidus de $\int \sqrt{K}\,dv$ pour $v = 1$ et $v = -1$ sont des constantes

$$\sigma(\rho + 1)\sqrt{(1 - a_1)(1 - a_2)} = \Gamma_1,$$
$$\sigma(\rho - 1)\sqrt{(1 + a_1)(1 + a_2)} = \Gamma_2.$$

Nous sommes ici dans un cas exceptionnel déjà signalé : le point $\frac{1}{v} = 0$ est un point *ordinaire* pour K, et si l'on prend l'intégrale $\int \sqrt{K}\,dv$ le long d'un cercle de rayon très grand, on aura un résultat nul. D'où l'on conclut en particulier

$$0 = 2i\pi\left[\frac{\sigma(\rho + 1)\sqrt{(1 - a_1)(1 - a_2)}}{2} + \frac{\sigma(1 - \rho)\sqrt{(1 + a_1)(1 + a_2)}}{2}\right]$$
$$+ 2\int_{a_1}^{a_2} \frac{\sigma(v + \rho)}{(v^2 - 1)}\sqrt{(v - a_1)(v - a_2)}\,dv.$$

La dernière intégrale est donc une combinaison linéaire des deux intégrales Γ_1 et Γ_2, à coefficients constants.

Nous avons vu que, dans ce cas, il fallait remonter à l'équation

$$\rho\frac{\sigma'}{\sigma} - \Sigma\alpha_i(a_i + a'_i) + \Sigma\beta_i(b_i + b'_i) + \mu - \lambda + \rho' = 0,$$

qui nous donne ici

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}, \qquad \beta_i = 0, \qquad \lambda = \mu = 1,$$

c'est-à-dire

$$\rho + \rho' - \frac{1}{2}(a_1 + a'_1 + a_2 + a'_2) = 0,$$

d'où l'on conclut

$$\rho - \frac{(a_1 + a_2)}{2} = C\,e^{-u}.$$

En résumé, si l'on prend simplement $\sigma = e^u$, on aura, pour déterminer a_1, a_2, ρ, les équations

$$1 + a_1 a_2 - (a_1 + a_2) = \frac{\Gamma_1^2\,e^{-2u}}{(\rho + 1)^2},$$
$$1 + a_1 a_2 + (a_1 + a_2) = \frac{\Gamma_2^2\,e^{-2u}}{(\rho - 1)^2},$$
$$2\rho - (a_1 + a_2) = 2C\,e^{-u};$$

d'où l'on conclut, en égalant les deux expressions de $(a_1 + a_2)$,

$$\frac{\Gamma_2^2}{(\rho - 1)^2} - \frac{\Gamma_1^2}{(\rho + 1)^2} = 4\rho e^{2u} - 4C e^u.$$

C'est l'équation qui définit ρ au moyen de e^u.

B. Dans le cas (B), le facteur intégrant de la différentielle

$$dv - \left(\frac{1 - v^2}{v + \rho}\right) du$$

a la forme

$$\frac{\sigma(v + \rho)}{(v^2 - 1)} \left(\frac{v - a}{v - b}\right)^\alpha.$$

Si l'on a, par exemple, $\alpha = \frac{q}{p}$, où q et p sont des entiers qu'on peut supposer sans diviseur commun, nous sommes dans l'hypothèse où $\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^p = K$ est rationnel en v.

On déterminera σ, a, b, ρ en u de la manière suivante :

Le degré de $\sqrt[p]{K}$ en v est ici -1 ; le point $\frac{1}{v} = 0$ est donc zéro simple de $\sqrt[p]{K}$, c'est-à-dire que $s = 0$ et σ est constant.

On aura deux relations entre a, b, ρ en exprimant que les résidus de $\sqrt[p]{K}$ pour $v = 1$ et $v = -1$ sont constants

$$(\rho + 1)\left(\frac{1 - a}{1 - b}\right)^{\frac{q}{p}} = \Gamma_1, \qquad (\rho - 1)\left(\frac{1 + a}{1 + b}\right)^{\frac{q}{p}} = \Gamma_2;$$

elles définiront a et b en fonction de ρ.

Il restera à intégrer l'équation

$$\rho' = (1 - \rho^2)\frac{q}{p}\left(\frac{1}{a + \rho} - \frac{1}{b + \rho}\right)$$

ou encore l'équation équivalente

$$\rho' + \frac{q}{p}[b + b' - (a + a')] = 0,$$

pour obtenir u au moyen de ρ.

Si l'on pose

$$A = \left(\frac{\Gamma_1}{\rho + 1}\right)^{\frac{p}{q}}, \qquad B = \left(\frac{\Gamma_2}{\rho - 1}\right)^{\frac{p}{q}},$$

on trouve sans difficulté

$$u + \text{const.} = \log \frac{(1 - A)(1 - B)}{A - B} + \frac{p}{2q}\left[\int \frac{d\rho}{1 - B} - \int \frac{d\rho}{1 - A}\right].$$

Tout revient au calcul d'une intégrale de la forme $\int \frac{dx}{x^{\frac{p}{q}} + 1}$, où il suffit de poser $x = y^q$ pour obtenir une intégrale de fraction rationnelle

$$\int \frac{q y^{q-1}\, dy}{y^p + 1}.$$

Dans le cas général où α est quelconque, les formules précédentes subsistent. Le calcul de u au moyen de ρ se ramène à l'intégration de $\int \frac{dx}{1 + x^\alpha}$ ou encore de $\int (1 - y)^{\frac{1}{\alpha} - 1} \frac{dy}{y}$.

Quatrième forme. — Pour une quatrième forme indiquée par M. F. Siacci, le multiplicateur K de la différentielle, $dv - \left(\frac{1 - v^2}{v + \rho}\right) du$, peut s'écrire

$$K = \frac{e^{\mu}(v + \rho)}{(v^2 - 1)},$$

où μ est du second degré en v.

Nous avons donc

$$J = \frac{1}{v + \rho} - \frac{1}{v - 1} - \frac{1}{v + 1} + L + L_1 v.$$

Examinons le cas, un peu plus général, où

$$J = \frac{1}{v + \rho} + \frac{\lambda}{v - 1} + \frac{\mu}{v + 1} + L + L_1 v.$$

On trouve aisément (soit par une étude directe, soit en se reportant aux résultats antérieurs) pour déterminer L, L_1, ρ les équations

$$L_1' - 2L_1 = 0,$$
$$L' - L + \rho L_1 = 0,$$
$$\rho' + \mu - \lambda + (\lambda + \mu + 2)\rho + (1 - \rho^2)(L - \rho L_1) = 0.$$

On a, d'ailleurs, alors

$$K = \Phi(u)(v + \rho)(v - 1)^\lambda (v + 1)^\mu e^{Lv + L_1 \frac{v^2}{2}},$$

où $\Phi(u)$ est donné par

$$\frac{\Phi'}{\Phi} = \lambda + \mu + 2 - \rho L - (1 - \rho^2) L_1.$$

Les périodes P de l'intégrale

$$\int (v + \rho)(v - 1)^\lambda (v + 1)^\mu e^{Lv + L_1 \frac{v^2}{2}} dv$$

satisfont à l'équation

$$\begin{aligned} U(P) = \frac{\partial P}{\partial L_1} 2L_1 + \frac{\partial P}{\partial L}(L - \rho L_1) \\ + \frac{\partial P}{\partial \rho}[\lambda - \mu - (\lambda + \mu + 2)\rho + (1 - \rho^2)(L - \rho L_1)] = \Sigma P \end{aligned}$$

avec

$$\Sigma = (1 - \rho^2) L_1 + \rho L - (\lambda + \mu + 2),$$

et le quotient de deux d'entre elles donne une intégrale de $U(P) = 0$.

Suivant la nature arithmétique des constantes λ et μ, ces intégrales ont des formes très différentes, ainsi qu'on l'a déjà observé en général; nous nous bornerons à en indiquer quelques-unes.

Si λ et μ ont leur partie réelle positive *ou négative mais supérieure à* (-1), on pourra prendre, pour trois solutions P distinctes, les intégrales rectilignes

$$\int_{-1}^{+1} K_1\, dv, \quad \int_{-1}^{\infty} K_1\, dv, \quad \int_{+1}^{\infty} K_1\, dv,$$

les deux dernières étant prises le long de droites qui partent de -1 et de $+1$ et s'éloignent indéfiniment dans des directions telles que $L_1 v^2$ a sa partie réelle négative, à la condition que ces directions appartiennent à *deux secteurs différents*, issus du point $\frac{1}{v} = 0$, où cette condition est remplie.

Si λ et μ ont leurs parties réelles négatives, inférieures ou égales à (-1), de telle sorte que les points $+1$ et -1 soient des infinis de l'intégrale $\int K_1\,dv$, on sera obligé, en général, de prendre pour obtenir les périodes P des intégrales suivant des contours qui comprennent deux fois les chemins rectilignes précédemment indiqués et un petit cercle entourant soit le point $(+1)$, soit le point (-1).

La troisième période P correspondra, soit à un contour partant de l'infini dans un des secteurs où la partie réelle de $L_1 v^2$ est négative et y revenant dans l'autre secteur analogue, soit à un *double contour* formé avec les points 1 et (-1). Si λ et μ sont des entiers négatifs, deux des périodes pourront être des *résidus* de la fonction K, uniforme au *voisinage* de $+1$ et de -1 (et même, ici, partout); la troisième sera l'intégrale prise de ∞ à ∞ suivant le chemin indiqué plus haut.

Dans le cas particulier indiqué par M. Siacci, $\lambda = \mu = -1$; on a pour ces résidus, à des facteurs constants près,

$$(\rho+1)\,e^{L+\frac{1}{2}L_1}, \qquad (\rho-1)\,e^{-L+\frac{1}{2}L_1},$$

d'où l'on déduit l'intégrale

$$\frac{\rho-1}{\rho+1}\,e^{-2L} = C.$$

Cette intégrale est aussi celle de l'équation en ρ', écrite

$$\rho' + (1-\rho^2)L' = 0.$$

La relation entre L et L_1 se déduira alors de l'équation différentielle

$$2L_1\frac{dL}{dL_1} = L - \rho L_1,$$

où l'on doit remplacer ρ par son expression $\frac{1+Ce^{2L}}{1-Ce^{2L}}$, c'est-à-dire de l'équation

$$2\frac{dL}{dL_1} = \frac{L}{L_1} - \frac{1+C\,e^{2L}}{1-C\,e^{2L}}.$$

Nous ne savons sous quelle forme M. F. Siacci a intégré cette équation, si tant est qu'il l'ait intégrée. D'après notre théorie, on parviendra à la solution de la manière suivante.

Supposons la partie réelle de L_1 positive; le produit $L_1 v^2$ a sa partie réelle négative quand on suppose v très grand en module, *son argument étant égal à* $\pm \frac{\pi}{2}$ On aura donc une période P de l'intégrale $\int K_1\, dv$ en prenant

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(it+\rho)}{(t^2+1)} e^{Lti - \frac{1}{2}L_1 t^2}\, dt,$$

où la partie sous le signe $\int$ se déduit de K_1 en posant $v = it$ et où l'intégrale est une intégrale rectiligne ordinaire.

Le quotient de P par un des résidus déjà obtenus, où l'on remplacera ρ par son expression en L, égalé à une constante arbitraire, donnera la relation entre L et L_1.

La nature transcendante de P apparaîtra par l'étude du cas où L et L_1 sont *réels*, L_1 étant toujours positif.

On trouve alors immédiatement

$$\frac{1}{2} P = \rho \int_0^{\infty} \cos Lt\, e^{-\frac{1}{2}L_1 t^2} \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^{\infty} t \sin Lt\, e^{-\frac{1}{2}L_1 t^2} \frac{dt}{1+t^2},$$

et les deux intégrales du second membre peuvent se développer en série convergente suivant les puissances croissantes de L (¹).

Nous obtenons ainsi

$$\frac{1}{2} P = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{L^{2n}}{2n!} \left(\rho + \frac{2n}{L}\right) \Phi_n,$$

en posant

$$\Phi_n = \int_0^{\infty} t^{2n} e^{-\frac{1}{2}L_1 t^2} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Passons au calcul de Φ_n : On a, sans difficulté,

$$\Phi_n + \Phi_{n-1} = \int_0^{\infty} t^{2(n-1)} e^{-\frac{1}{2}L_1 t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2 L_1}} \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{L_1}\right)^{n-1},$$

et l'on conclut de la suite d'égalités analogues, en tenant compte de la

(¹) La convergence aura lieu pour $\left|\frac{L}{L_1}\right| < 1$, ainsi qu'on le voit en cherchant la limite de $\Phi_n : \Phi_{n-1}$.

relation fondamentale

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \quad \text{et de} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}:$$

$$(-1)^{n-1}\Phi_n + \Phi_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2\mathrm{L}_1}}\left[1 - \frac{1}{\mathrm{L}_1} + \frac{1.3}{\mathrm{L}_1^2} - \frac{1.3.5}{\mathrm{L}_1^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1.3\ldots(2n-3)}{\mathrm{L}_1^{n-1}}\right]$$

avec

$$\Phi_0 = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\mathrm{L}_1 t^2}\frac{dt}{1+t^2}.$$

Pour calculer Φ_0, on observera que

$$\Psi_0 = \Phi_0\, e^{-\frac{1}{2}\mathrm{L}_1} = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\mathrm{L}_1(1+t^2)}\frac{dt}{1+t^2}$$

donne

$$\frac{\partial\Psi_0}{\partial\mathrm{L}_1} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\mathrm{L}_1(1+t^2)}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{L}_1}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\mathrm{L}_1 t^2}\,dt,$$

et comme

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\mathrm{L}_1 t^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{L}_1}}\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}e^{-u}\,du = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2\mathrm{L}_1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2\mathrm{L}_1}},$$

on a simplement

$$\frac{\partial\Psi_0}{\partial\mathrm{L}_1} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\mathrm{L}_1}\sqrt{\frac{\pi}{2\mathrm{L}_1}}.$$

Mais la fonction Ψ_0 se réduit pour $\mathrm{L}_1 = 0$ à

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2},$$

on a donc explicitement

$$\Psi_0 = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\mathrm{L}_1} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{L}_1}\frac{d\mathrm{L}_1}{2\sqrt{\mathrm{L}_1}}.$$

L'intégrale qui subsiste ne peut s'exprimer à l'aide d'éléments plus simples. Il suffit en effet de poser $\mathrm{L}_1 = 2x^2$ pour obtenir

$$\int_0^{\mathrm{L}_1} e^{-\frac{1}{2}\mathrm{L}_1}\frac{d\mathrm{L}_1}{2\sqrt{\mathrm{L}_1}} = \sqrt{2}\int_0^x e^{-x^2}\,dx = \sqrt{2}\,\Delta(x),$$

où $\Delta(x)$ est manifestement une transcendante nouvelle.

Ainsi, on peut écrire

$$\Phi_0 = \frac{\pi}{2} e^{\frac{1}{2}L_1} - \sqrt{\pi}\, e^{\frac{1}{2}L_1} \Delta\left(\sqrt{\frac{L_1}{2}}\right).$$

L'expression de la période P sera par suite

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}P = \Phi_0 \sum_0^\infty \frac{L^{2n}}{2n!}\left(\rho + \frac{2n}{L}\right) \\ - \sum_0^\infty \frac{L^{2n}}{2n!}\left(\rho + \frac{2n}{L}\right)\left[1 - \frac{1}{L_1} + \frac{1.3}{L_1^2} \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1.3\ldots(2n-3)}{L_1^{n-1}}\right],\end{aligned}$$

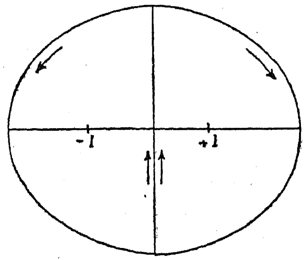
et l'on peut remplacer le coefficient de Φ_0 par une expression finie

$$\frac{1}{2}\rho(e^L + e^{-L}) + (e^L - e^{-L}).$$

On a donc, dans l'expression de P, une partie

$$\pi e^{\frac{1}{2}L_1}\left(\frac{1+\rho}{2}e^L + \frac{\rho - 1}{2}e^{-L}\right),$$

Fig. 3.



où l'on reconnaît le produit par π de la différence des résidus de la fonction

$$\frac{(v+\rho)}{(v^2-1)} e^{Lv + \frac{1}{2}L_1 v^2}$$

pour les pôles $+1$ et -1.

En considérant l'origine première de la période P comme intégrale définie, on voit aisément que la partie restante représentera une somme de deux intégrales analogues prises suivant deux lignes allant de l'infini à l'infini dans une direction convenable qu'on pourrait peut-être obtenir directement.

Dernière Note de M. Siacci. — Dans sa dernière Note, M. F. Siacci indique deux nouveaux cas, qu'on place aisément parmi ceux que nous avons signalés.

Le dernier, où le multiplicateur K de $dv - \left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right) du$ a la forme

$$(1-v)^{-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}(1+v)^{\beta-\frac{1}{2}}(v-a)^{\alpha-\beta},$$

a déjà été étudié à propos de la forme III de d'Alembert.

Si nous écrivons l'équation de l'hodographe

$$\frac{dv}{du} = \frac{(1-v^2)}{u(v+\rho)},$$

on a dans *le premier* de ces cas

$$\rho = \mathrm{A}u\sqrt{2c+u^2} + \mathrm{B}(c+u^2),$$

et l'on peut observer tout de suite que le changement de u en $u\sqrt{c}$ permet de prendre $c = 1$, puisque A désigne une constante arbitraire.

En posant alors, avec M. Siacci,

$$y = \frac{\sqrt{2+u^2}}{u(\mathrm{B}-v)},$$

on peut donner à l'équation à intégrer la forme différentielle exacte

$$\frac{y\,dy}{y^2(\mathrm{B}^2-1)+2\mathrm{A}y+1} + \frac{dv}{(1-v^2)(\mathrm{B}-v)} = 0,$$

dont l'intégration est évidente.

Nous remarquons qu'avec

$$y^2 = \left(\frac{2}{u^2}+1\right)\frac{1}{(\mathrm{B}-v)^2}$$

on a

$$y\,dy = \frac{-2\,du}{u^3(\mathrm{B}-v)^2} + \left(\frac{2}{u^2}+1\right)\frac{dv}{(\mathrm{B}-v)^3};$$

le coefficient de dv dans la forme intégrable de l'équation à variables séparées est donc, en tenant compte de l'expression de ρ,

$$\frac{1}{(B-v)}\left[\frac{1}{(1-v^2)}+\frac{\left(\frac{2}{u^2}+1\right)}{(B-v)^2+2A\sqrt{\frac{2}{u^2}+1}+\left(\frac{2}{u^2}+1\right)(B^2-1)}\right]$$

$$=\frac{2}{u^2}\frac{(v+\rho)}{(1-v^2)}\frac{1}{\left[v^2-2v\frac{(\rho-B)}{u^2}+\frac{2}{u^2}(B\rho-1)-1\right]}.$$

On conclut de là que le multiplicateur K qui rend

$$K\left[dv-\left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right)\frac{du}{u}\right]$$

différentielle exacte est de la forme

$$K=\frac{\sigma(v+\rho)}{(v^2-1)(v-b_1)(v-b_2)}.$$

Il gardera également cette forme pour l'équation canonique

$$dv-\left(\frac{1-v^2}{v+\rho}\right)du=0,$$

et nous avons vu que, dans ce cas, les éléments σ, ρ, b_1, b_2 sont donnés par les équations

$$\frac{\sigma'}{\sigma}=-2,\qquad \rho'-(\rho^2-1)\left(\frac{1}{b_1+\rho}+\frac{1}{b_2+\rho}\right),$$
$$b'_1=\frac{1-b_1^2}{b_1+\rho},\qquad b'_2=\frac{1-b_2^2}{b_2+\rho}.$$

D'après notre théorie, on les intègre par les formules

$$P=\frac{\sigma}{2}\frac{(1+\rho)}{(1-b_1)(1-b_2)},\qquad Q=\frac{\sigma}{2}\frac{(1-\rho)}{(1+b_1)(1+b_2)},$$
$$B_1=\sigma\frac{(b_1+\rho)}{(b_1^2-1)(b_1-b_2)},\qquad B_2=\sigma\frac{(b_2+\rho)}{(b_2^2-1)(b_2-b_1)},$$
$$\sigma=Ce^{-2u},$$

où les constantes P, Q, B_1, B_2 sont liées par la relation

$$P+Q+B_1+B_2=0$$

qui exprime que, dans l'expression

$$K = \frac{P}{v-1} + \frac{Q}{v+1} + \frac{B_1}{v-b_1} + \frac{B_2}{v-b_2},$$

le coefficient de v^3 disparaît au numérateur, ou encore que la somme des résidus de K est nulle.

En ajoutant une constante à u, on modifie C et, d'après la manière dont σ intervient dans les formules précédentes, les rapports de P, Q, B_1 à l'une de ces quantités sont seuls essentiels. Ainsi l'expression de ρ ne dépendra que de deux constantes essentielles.

Les deux premières équations, mises sous forme entière en b_1, b_2, donnent immédiatement

$$b_1 + b_2 = \frac{\sigma}{4}\left(\frac{1-\rho}{Q} - \frac{1+\rho}{P}\right),$$

$$1 + b_1 b_2 = \frac{\sigma}{4}\left(\frac{1-\rho}{Q} + \frac{1+\rho}{P}\right).$$

Nous poserons, en tenant compte des remarques faites,

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{P}\right) = 2, \qquad \frac{1}{4}\left(\frac{1}{Q} - \frac{1}{P}\right) = -2B,$$

de façon à écrire simplement

$$b_1 + b_2 = 2\sigma(\rho - B), \qquad 1 + b_1 b_2 = 2\sigma(B\rho - 1).$$

On a d'autre part, en ajoutant les deux dernières relations,

$$(b_2 - b_1)(B_2 - B_1) = \sigma\left[\frac{b_2+\rho}{b_2^2-1} + \frac{b_1+\rho}{b_1^2-1}\right],$$

qui s'écrit encore

$$(b_2 - b_1)(B_2 - B_1) = \sigma \frac{\{(b_1+b_2)(b_1 b_2 - 1) + \rho[(b_1+b_2)^2 - 2(b_1 b_2 + 1)]\}}{(b_1 b_2 + 1)^2 - (b_1 + b_2)^2}.$$

Le dénominateur du second membre se réduit à

$$4\sigma^2(B^2 - 1)(\rho^2 - 1);$$

le numérateur correspondant est

$$(1-\rho^2)[4\sigma^2(B-\rho) + 4\sigma B];$$

on a donc simplement

$$(b_2 - b_1) = \frac{\sigma(\rho - B) - B}{(B^2 - 1)(B_2 - B_1)} = \frac{\sigma(\rho - B) - B}{D},$$

d'où l'on conclut entre σ et ρ la relation entière

$$\begin{aligned} 4\sigma^2(\rho - B)^2 - \frac{1}{D^2}[\sigma(\rho - B) - B]^2 &= 8\sigma(B\rho - 1) - 4 \\ &= 8\sigma B(\rho - B) + 8\sigma(B^2 - 1) - 4 \end{aligned}$$

ou encore

$$\left(4 - \frac{1}{D^2}\right)[\sigma(\rho - B) - B]^2 + B^2(8\sigma + 4) = 0.$$

Ainsi on a, définitivement,

$$\sigma(\rho - B) - B = \frac{2DB}{\sqrt{1 - 4D^2}}\sqrt{2\sigma + 1}.$$

C'est bien l'expression de M. F. Siacci où $A = \dfrac{2BD}{\sqrt{1 - 4D^2}}$.

Paris, 14 février 1917.