GASTON JULIA

Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes (premier mémoire)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 36 (1919), p. 93-125
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1919_3_36__93_0>

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS NOUVELLES

DES

FONCTIONS ENTIÈRES OU MÉROMORPHES

(PREMIER MÉMOIRE)

PAR M. GASTON JULIA.

Historique.

1. Le théorème général sur les fonctions entières et sur les fonctions uniformes à point singulier isolé exposé par M. Picard en 1879 dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, puis développé en 1880 dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, est aujourd'hui classique. On sait que M. Picard le démontra en utilisant les propriétés de la fonction modulaire elliptique. Mais l'élégance et la simplicité du résultat faisaient désirer une démonstration élémentaire, qui conduisît directement à la conclusion par la voie des propriétés les plus usuelles des fonctions analytiques. C'est à M. Borel que revint le mérite de construire cette démonstration pour les fonctions entières : on la trouvera dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de 1896. On peut dire que toutes les démonstrations ultérieures du théorème de M. Picard se rattachent d'une manière plus ou moins apparente aux démonstrations données par M. Picard lui-même et par M. Borel, car toutes mettent à la base soit la fonction modulaire, soit la notion de croissance. Ce n'est pas ici le lieu de donner une bibliographie complète des très nombreux travaux où l'on démontre le théorème de M. Picard (¹).

En 1904, M. Landau publiait une généralisation du théorème de

(¹) *Voir* par exemple Ernst LINDELÖF, *Congrès des Mathématiques à Stockholm*, 1909.

M. Picard qu'il venait d'obtenir en serrant de près certaines inégalités de M. Borel : toute fonction analytique uniforme dont on donne les deux premiers coefficients de Taylor prend la valeur *zéro* ou la valeur *un* dans un cercle dont le rayon n'est fonction que des deux premiers coefficients, ou bien possède dans ce cercle une singularité. M. Carathéodory montra ensuite que les fonctions modulaires jouaient dans ces questions un rôle essentiel et n'étaient pas un pur artifice de démonstration.

2. Plus tard, M. Lindelöf (¹), M. Phragmén, M. Iversen, entreprenant d'étudier l'allure d'une fonction monogène uniforme autour d'un point singulier essentiel isolé, obtinrent moyennant diverses hypothèses, des propriétés intéressantes sur les valeurs que prend à l'intérieur d'un contour C une fonction holomorphe en tous points intérieur à C et en tout point de C, sauf un point isolé qui est point singulier essentiel pour la fonction. Les hypothèses faites étaient de nature assez générale et les résultats simples. De son côté, M. Montel (²) appliquait la notion de famille normale de fonctions analytiques à ces mêmes questions, retrouvait les résultats de M. Lindelöf, en précisait quelques-uns, en généralisait d'autres.

Exposé de la question.

3. La plupart de ces hypothèses portaient sur les valeurs que *ne prend pas* la fonction $f(z)$ à étudier, dans un angle dont le sommet O est le point singulier : on suppose que dans cet angle $f(z)$ est bornée ou qu'elle admet deux valeurs exceptionnelles, et l'on tire certaines conclusions relatives aux valeurs limites de $f(z)$ sur les rayons issus du sommet ou sur des courbes ayant une tangente en O intérieure à l'angle.

On ne s'est pas demandé si, pour une fonction uniforme autour d'un

(¹) *Voir* la bibliographie dans *Acta Soc. Sc. Fennicæ*, t. XLVI, n° 4 : *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la théorie de la représentation conforme*, par Ernst Lindelöf.

(²) *Voir* MONTEL, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1912 et 1916.

point singulier essentiel isolé O, les mêmes hypothèses étaient *permises dans tout angle de sommet* O. Par exemple, dans un angle quelconque ayant son sommet à l'origine, une fonction entière a-t-elle toujours deux valeurs exceptionnelles au moins (dépendant naturellement de l'angle); ou bien existe-t-il certaines directions telles que, si petit que soit un angle contenant une de ces directions, la fonction entière prenne dans cet angle toute valeur finie, sauf peut-être *une*. On est conduit assez naturellement à se poser ces questions par un raisonnement bien simple. Divisons le plan en deux demi-plans par une droite quelconque : peut-il se faire qu'une fonction entière $f(z)$ ne prenne pas deux certaines valeurs finies au moins dans le premier demi-plan, valeurs qui (sauf peut-être une) seraient prises par $f(z)$ dans le deuxième demi-plan, alors que, dans ce deuxième demi-plan, $f(z)$ admettrait aussi deux valeurs exceptionnelles au moins, distinctes de celles du premier demi-plan (afin que l'hypothèse fût conforme au théorème de M. Picard)? On répétera ensuite indéfiniment cette division en $2, 2^2, 2^3, \ldots$ pour arriver à la question précédente.

4. Le Mémoire qu'on va lire est consacré à l'étude de ces questions. Son but est en quelque sorte d'analyser le contenu du théorème de M. Picard en précisant davantage le domaine où il est possible d'affirmer qu'une fonction uniforme autour d'un point singulier essentiel O prend toute valeur finie ou infinie, sauf deux valeurs exceptionnelles au plus. M. Picard choisit pour ce domaine un *cercle de rayon arbitrairement petit* ayant son centre en O; je montrerai ici qu'on peut le plus souvent se contenter d'un *angle ayant son sommet en* O, *et d'ouverture arbitrairement petite, pourvu qu'il contienne à son intérieur l'une ou l'autre de certaines directions privilégiées :* il en sera ainsi *pour toute fonction entière et pour toute fonction uniforme autour de* O *qui tend vers une limite déterminée* ω *lorsque* z *tend vers* O *sur un certain chemin continu aboutissant en* O (¹). Je montrerai aussi que l'*on peut*

(¹) Lorsqu'il n'y aura pas de *valeurs asymptotiques*, ce qui a lieu pour certaines fonctions méromorphes telles que les fonctions elliptiques, *on réduira d'une autre manière le domaine dans lequel la fonction prend toute valeur finie ou infinie* (*voir* Chapitre II, § III, n° 29).

substituer aux droites passant par O *des courbes semblables aboutissant en* O, quitte à définir convenablement ce qu'est un angle arbitrairement petit, contenant à son intérieur une de ces courbes, bien déterminée.

On obtiendra ainsi, en particulier, des propositions nouvelles sur la *répartition, dans le plan, des racines des équations* $f(z) = a$, quel que soit a, $f(z)$ étant une fonction entière quelconque. Les renseignements trouvés seront relatifs aux *arguments de ces racines* (on possède déjà des renseignements variés sur l'ordre de croissance des modules de ces racines). Ils seront valables pour toute fonction méromorphe ayant *une valeur asymptotique* et, pour celles qui n'en ont pas, on indiquera une autre propriété.

Indication des méthodes et lien avec les travaux antérieurs.

5. Je montrerai d'abord (Chap. I) qu'en poussant jusqu'au bout les conclusions obtenues par M. Lindelöf et ses collaborateurs, en utilisant les méthodes par lesquelles se caractérise l'école scandinave dans l'étude des fonctions, on peut, sinon toujours, du moins dans un grand nombre de cas, en particulier lorsque les hypothèses faites sont celles que l'on retrouve souvent dans les travaux précédents, directement apporter au théorème de M. Picard cette analyse et cette précision qui sont l'objet du présent travail.

Puis j'appliquerai à la question la méthode des familles normales de fonctions analytiques (Chap. II) dont je me suis déjà beaucoup servi dans mon Mémoire *Sur l'itération des fonctions rationnelles* en cours d'impression dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (7ᵉ série, t. IV, 1918) et auquel je renvoie pour la bibliographie (Préliminaires, nº 2). J'obtiendrai ainsi les propositions nouvelles annoncées au nº 4.

6. Le Mémoire actuel est le premier d'une série qui développera les résultats récemment publiés dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 168, p. 502, 598, 718, 812, 882, 990, 1087). Mon but est d'y étudier par diverses méthodes l'allure d'une fonction uniforme autour d'un point singulier essentiel, et, à cet effet, d'employer

l'approximation de ce point singulier par des modes continus ou discontinus déterminés à priori [1]. Les conclusions obtenues, dépendant évidemment du mode choisi, renferment cependant un caractère commun que le lecteur observera facilement. Au cours de cette recherche, des circonstances nouvelles ont surgi également lorsque j'ai confronté les résultats obtenus et les méthodes utilisées avec d'autres méthodes déjà classiques comme celle de la croissance des fonctions entières : par là, les présentes recherches se relient aux travaux déjà parus sur les fonctions entières.

Remarque. — Je supposerai souvent que le point singulier essentiel est à l'infini et je parlerai de fonctions entières ou de fonctions méromorphes : on verra bien aisément que les conclusions s'appliquent aux fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé qui possèdent autour de ce point le caractère de fonctions entières ou méromorphes.

CHAPITRE PREMIER.

I. — Rappel de résultats antérieurs.

7. Les résultats dont j'aurai surtout à faire usage sont résumés dans les propositions suivantes :

1° « Supposons que la fonction monogène $f(z)$ soit régulière ou méromorphe dans le domaine défini par les inégalités (1) $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, $r < R$ [2], qu'il existe au moins trois valeurs distinctes, dont l'une pourra être ∞, que la fonction ne prend pas dans ce domaine, et désignons par a l'une quelconque de ces valeurs.

» Si la fonction $f(z)$ tend vers a lorsque z tend vers O suivant une certaine courbe L qui, pour r suffisamment petit, reste comprise dans l'angle $\varphi_1 + \delta < \varphi < \varphi_2 - \delta$, où $\delta > 0$, elle tendra uniformément

(1) Je n'étudie dans le présent Mémoire que l'approximation *continue*, par des courbes d'un type déterminé, mais d'ailleurs quelconque.

(2) Le point singulier essentiel est ici supposé à l'origine : $z = re^{i\varphi}$.

vers a dans l'angle (2) $\varphi_1 + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \varphi_2 - \varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε.

» Si, au contraire, sur une courbe telle que L, l'expression $|f(z) - a|$ ou, lorsque $a = \infty$, l'expression $\frac{1}{|f(z)|}$ reste, pour r assez petit, supérieure à une limite positive, il en sera de même dans l'angle (2), quelque petit que soit ε.

» D'autre part, si la fonction $f(z)$ tend vers une limite déterminée quelconque C, lorsque z tend vers O suivant un certain rayon compris dans l'angle (1), elle ne saurait tendre vers une limite différente de C sur aucun rayon intérieur à cet angle. Si $f(z)$ tend vers C sur deux rayons différents, elle tendra uniformément vers C dans l'angle formé par ces rayons. Si $f(z)$ tend vers C sur un certain rayon dont l'argument φ_0 est compris entre φ_1 et φ_2, et s'il existe des rayons d'arguments aussi peu différents de φ_0 qu'on voudra sur lesquels $f(z)$ ne tend pas vers C, l'équation $f(z) = C$ admettra nécessairement une infinité de racines tendant vers O et dont les arguments tendent vers φ_0.

» Enfin sur deux courbes quelconques tendant vers O et ayant en ce point une tangente commune dont l'argument est compris entre φ_1 et φ_2, les valeurs limites de $f(z)$ seront les mêmes. »

Cette proposition, énoncée par M. Lindelöf dans son Mémoire *Sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions homogènes*... (Helsingfors, 1908), fut reprise, précisée et étendue grâce à la représentation conforme par son élève, M. Iversen, dans sa thèse (Helsingfors, 1914) *Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes*, dont j'extrais (p. 29) la proposition suivante :

2° « Soit T un domaine infini du plan des z limité par un seul contour sans points multiples, et désignons par Γ' et Γ'' les deux branches infinies de ce contour. Soit, d'autre part, $f(z)$ une fonction monogène n'admettant à l'intérieur et sur le contour du domaine T d'autres singularités à distance finie que des pôles.

» Si cette fonction tend sur Γ' et Γ'' vers la même limite, ou bien elle tend uniformément vers cette limite dans T, lorsque z augmente indéfiniment, ou bien elle prend toute valeur, sauf deux au plus, en une infinité de points compris dans T.

» Si la fonction $f(z)$ tend sur Γ' et Γ'' vers des limites distinctes, elle prend toute valeur, sauf deux au plus, en une infinité de points intérieurs à T. »

II. — Application à la question actuelle.

8. On peut appliquer ces deux propositions à l'étude des valeurs que prend une fonction entière (¹) ou méromorphe dans les divers secteurs aboutissant au point à l'infini : pour simplifier l'exposition, on supposera que ces secteurs sont limités par des rayons issus de l'origine.

En remarquant d'abord que la fonction e^x tend vers l'infini sur tout rayon d'argument compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et vers zéro sur tout rayon d'argument compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, on conclut que e^x prend toute valeur finie non nulle (une infinité de fois) dans tout angle, si petit soit-il, qui contienne l'axe imaginaire du plan z. C'est un fait intéressant qu'on peut expliquer par la périodicité de e^x et qui appelle une *généralisation*.

9. Plus généralement, en supposant qu'une fonction entière ou méromorphe $f(z)$, sur un certain chemin L allant à l'infini de manière que l'argument de z sur L tende vers une limite φ_0, possède une limite déterminée ω, on peut avoir des conclusions analogues. En effet, un secteur quelconque, qui contient le rayon φ_0 à son intérieur, contient aussi à partir d'un certain moment le chemin L. Si, dans ce secteur, $f(z)$ a trois valeurs exceptionnelles (²), $f(z)$ devra tendre vers ω sur

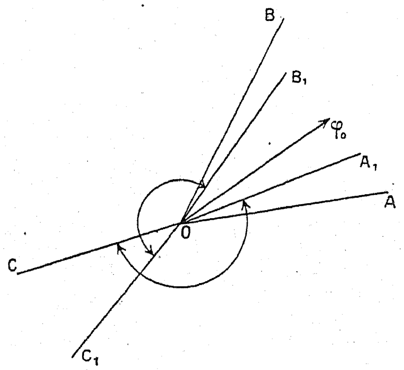
(¹) Une fonction entière est une fonction méromorphe admettant la valeur exceptionnelle ∞. Toute fonction méromorphe admettant une valeur exceptionnelle se ramène par transformation homographique à une fonction entière, elle est donc justiciable des mêmes méthodes.

(²) Je dirai dans la suite que a est valeur exceptionnelle de $f(z)$ dans un domaine T contigu à un point singulier essentiel isolé O, si, à l'intérieur de T, et dans un certain voisinage de O, $f(z)$ ne prend pas la valeur a.

tout rayon intérieur au secteur et tendra uniformément vers ω dans tout secteur intérieur au secteur considéré. Deux hypothèses sont donc seulement possibles :

1° Ou bien, dans tout secteur contenant le rayon φ_0, la fonction méromorphe $f(z)$ prend (une infinité de fois) toute valeur, sauf peut-être deux valeurs exceptionnelles au plus ;

2° Ou bien, dans un certain secteur AOB contenant le rayon φ_0, $f(z)$ admet trois valeurs exceptionnelles au moins, et alors il en est



visiblement de même dans tout secteur intérieur à AOB. Il faut alors considérer les autres secteurs de sommet O. Par O on mènera deux rayons voisins OC et OC_1 extérieurs à AOB et d'ailleurs quelconques, puis OA_1 et OB_1 très voisins de OA et OB, intérieurs à AOB. On envisagera les deux secteurs A_1OC et B_1OC_1 ayant en commun le secteur COC_1. Sur tout rayon de A_1OC qui est entre OA et OA_1, $f(z)$ tend vers ω; si donc dans A_1OC $f(z)$ a trois valeurs exceptionnelles, dans tout secteur intérieur à A_1OC, $f(z)$ devra tendre uniformément vers ω quand z tendra vers l'infini. La même conclusion s'applique à B_1OC_1. Il est donc impossible de supposer que dans chacun des trois secteurs AOB, A_1OC, B_1OC_1 $f(z)$ a trois valeurs exceptionnelles [1], sans quoi $f(z)$ devrait tendre uniformément vers ω au voisinage de l'∞. Donc, dans A_1OC par exemple, $f(z)$ prendra toute valeur finie ou

[1] Bien entendu, ces valeurs exceptionnelles devraient être supposées *a priori différentes pour les différents secteurs* puisque $f(z)$, d'après le théorème de M. Picard, n'admet autour du point à l'infini que deux valeurs exceptionnelles au plus.

infinie, sauf deux valeurs au plus. On recommencera le raisonnement, on divisera ce secteur A_1OC, en menant dans ce secteur deux rayons OD et OD_1 voisins et considérant les deux secteurs A_1OD et D_1OC qui ont en commun le secteur DOD_1. Si, *dans chacun d'eux*, $f(z)$ avait trois valeurs exceptionnelles, on conclurait que $f(z)$ devrait encore, dans A_1OC, tendre uniformément vers ω, ce qui ne peut être.

Par ce procédé *de divisions successives*, on trouvera toujours une infinité de secteurs *emboîtés*, dont l'ouverture tendra vers zéro, dans chacun desquels $f(z)$ a deux valeurs exceptionnelles au plus. Il pourra y avoir d'ailleurs plusieurs suites de secteurs emboîtés du type précédent. Chacune d'elles admettra un rayon limite. Soit OP un de ces rayons limites : *dans tout secteur contenant* OP, *si petite qu'on suppose son ouverture*, $f(z)$ *prendra toute valeur finie ou infinie, sauf peut-être deux valeurs exceptionnelles au plus*. En essayant d'appliquer les hypothèses et les conclusions de M. Lindelöf et ses collaborateurs, non plus à un seul secteur, mais à *tous les secteurs* aboutissant à l'infini, on aboutit à une impossibilité qui conduit à une proposition nouvelle précisant le théorème de M. Picard.

10. Mais on n'a pas ainsi obtenu une proposition *générale* qui s'applique à toutes les fonctions entières ou à toutes les fonctions méromorphes parce qu'un chemin de la nature de celui qui a été appelé L au n° 9 n'existe pas toujours. On sait bien, à vrai dire, que toute fonction entière tend vers l'infini sur certains chemins $\mathfrak{L}$ aboutissant à l'infini, mais on ne sait pas *a priori* si ces chemins ont une direction asymptotique φ_0. Il ne serait pas très malaisé d'étendre l'analyse du n° 9 au cas où l'argument de z sur $\mathfrak{L}$ resterait compris entre des limites finies φ_1 et φ_2. En renonçant également à employer des secteurs rectilignes pour employer des secteurs limités par des courbes semblables, et usant des propriétés connues de la représentation conforme, on arriverait aisément à établir une propriété analogue à celle du n° 9 pour toute fonction entière. Par exemple, on ferait jouer au chemin $\mathfrak{L}$, sur lequel $f(z)$ tend vers l'infini, le rôle que jouait le rayon φ_0 dans l'analyse précédente en encadrant $\mathfrak{L}$ de deux chemins semblables, et substituant aux rayons issus de O des chemins semblables à $\mathfrak{L}$. Le sec-

teur d'ouverture arbitrairement petite, contenant la direction privilégiée OP, serait remplacé ici par un secteur d'ouverture arbitrairement petite balayé par une courbe semblable à $\mathcal{L}$ et contenant une certaine courbe semblable à $\mathcal{L}$, privilégiée en position. Mais ce n'est pas pour l'instant mon but, car la méthode des familles normales de fonctions analytiques fournira d'un coup toutes ces généralisations sans aucune peine comme on le verra au Chapitre II.

11. Cependant, il n'est pas inutile de remarquer dès maintenant que les résultats du n° 7 permettent encore, sous des hypothèses moins restrictives, d'obtenir la même proposition qu'au n° 8.

Soit une fonction entière $f(z)$ pour laquelle existe un chemin L allant à l'infini dans une direction d'argument φ_0 sur lequel $f(z)$ reste bornée. On ne peut faire sur elle que deux hypothèses qui s'excluent naturellement comme au n° 9 :

1° Ou bien dans tout secteur contenant le rayon φ_0, si petite soit son ouverture, $f(z)$ prend toute valeur finie, sauf une au plus;

2° Ou bien dans un certain secteur AB contenant φ_0, $f(z)$ admet au moins deux valeurs exceptionnelles finies. Alors $f(z)$ reste bornée dans tout secteur intérieur à AOB. On mènera OA_1 et OB_1, respectivement voisins de OA et OB, dans le secteur AOB. Comme au n° 9, on mènera deux rayons voisins OC et OC_1 extérieurs à AOB de façon que les deux secteurs A_1OC et B_1OC_1 aient en commun le secteur COC_1. Si, dans le secteur A_1OC, $f(z)$ avait deux valeurs exceptionnelles finies, comme elle est bornée sur tout rayon du secteur A_1OA, elle serait bornée dans tout secteur intérieur à A_1OC. Le même raisonnement s'applique au secteur B_1OC_1. Comme $f(z)$ n'est pas bornée autour du point à l'infini, il faut supposer que dans l'un des deux secteurs A_1OC, B_1OC_1 $f(z)$ n'a qu'une valeur exceptionnelle finie au plus, par exemple dans A_1OC. Le raisonnement pourra se refaire en divisant A_1OC par deux rayons voisins OD et OD_1 tels que les secteurs A_1OD et D_1OC aient en commun le secteur DOD_1 : nécessairement, dans l'un de ces deux secteurs, A_1OD par exemple, $f(z)$ ne pourra avoir qu'une valeur exceptionnelle finie au plus. L'application indéfinie de ce procédé par divisions successives donnera une (ou plusieurs) série de secteurs emboîtés, d'ouverture tendant vers zéro, dans chacun desquels $f(z)$ admet une valeur exceptionnelle au plus. Ces secteurs ont un rayon limite OP jouissant de la propriété du nº 9 : *dans tout secteur contenant* OP, *si petite soit son ouverture, la fonction entière $f(z)$ prend toute valeur finie, sauf peut-être une valeur au plus.*

12. La même proposition s'applique à toute fonction méromorphe ayant une valeur exceptionnelle a, pour laquelle, sur un chemin L allant à l'infini suivant une direction φ_0, on a, à partir d'un certain moment $|f(z) - a| > A$. La fonction $\frac{1}{f(z) - a}$ est en effet une fonction entière bornée sur L.

L'hypothèse que L ait une direction asymptotique déterminée n'est pas essentielle pour la validité du résultat : avec peu de modifications du raisonnement, on pourrait supposer simplement que, sur L, l'argument de z reste compris entre deux limites finies. Enfin l'aide de la représentation conforme pourrait permettre, comme on l'a dit au nº 10, d'étendre le théorème à toute fonction entière. Je n'insisterai cependant pas sur l'emploi des méthodes précédentes, mon but étant, dans ce Chapitre, de prouver simplement qu'en poussant jusqu'au bout les conclusions obtenues par M. Lindelöf et ses collaborateurs dans les hypothèses où ils s'étaient placés pour obtenir la plupart de ces résultats, on pouvait arriver, au moins dans un grand nombre de cas, aux propositions nouvelles qui font l'objet du Mémoire actuel.

CHAPITRE II.

LES FONCTIONS ENTIÈRES GÉNÉRALES ET LES FONCTIONS MÉROMORPHES.

J'utiliserai ici la notion de famille normale de fonctions analytiques que M. Montel a déjà appliquée à la démonstration du théorème de M. Picard (*voir* ses deux Mémoires dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, 1912 et 1916) et que j'ai appliquée moi-même dans l'étude des questions d'itération (voir *Journal de Jordan*, 1918). Je renvoie à ces Mémoires pour les propositions qui me seront utiles ici.

I. — Les fonctions entières (¹).

13. On se propose ici d'étudier les valeurs prises par une fonction entière lorsqu'on s'approche du point à l'infini en suivant des courbes continues d'une *forme déterminée donnée à priori*. On se donnera la forme de ces courbes par la donnée d'une fonction d'une variable réelle t, $\sigma(t) = \sigma_1(t) + i\sigma_2(t)$. Lorsque t variera de 1 à $+\infty$, le point $T = \sigma(t)$ décrira une courbe continue $C[\sigma(1) = 1, \ \sigma(\infty) = \infty]$ passant par le point d'affixe 1 et allant à l'infini. Une courbe semblable à C passant par le point z sera décrite par le point $z\sigma(t)$ lorsque, z restant fixe, t varie de 1 à $+\infty$. J'appellerai zC cette courbe. C'est sur de pareilles courbes que j'étudierai les valeurs d'une fonction entière $f(z)$ quelconque.

On formera avec $f(z)$ et $\sigma(t)$ une famille de fonctions $f_t(z) = f[z\sigma(t)]$ dépendant du paramètre continu t qui sont toutes des fonctions entières. Les valeurs prises par $f(z)$ sur une courbe zC ne sont autres que les valeurs prises par toutes les fonctions $f_t(z)$ au point z, lorsque t varie. Si l'on imagine que z décrive une couronne circulaire (²) de centre O dont les deux cercles limites C_1 et C_2 sont absolument quelconques, il est clair que le point $z\sigma(t)$, t variant aussi de 1 à $+\infty$, décrira en particulier toute la région du plan extérieure à la couronne jusqu'à l'infini. Le théorème de M. Picard dit, en passant de $f(z)$ aux $f_t(z)$, que dans la couronne (C_1, C_2), il existe au plus une valeur finie que ne puisse prendre aucune des fonctions $f_t(z)$. Mais il est possible d'affirmer davantage, et c'est cette remarque essentiellement nouvelle qui permet d'obtenir les résultats auxquels j'ai fait allusion dans l'Introduction.

14. M. Montel a démontré en effet que toute famille de fonctions, holomorphes dans une aire D, qui, dans cette aire, ne prennent pas deux certaines valeurs finies au moins, est une famille *normale* : de toute suite infinie de fonctions de la famille on peut extraire une suite qui, dans toute aire intérieure à D, converge uniformément vers une

(¹) Voir *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 168, p. 502.

(²) Une couronne quelconque limitée par deux courbes entourant l'origine remplirait absolument le même office.

fonction limite analytique ou vers une constante infinie. Mais *la réciproque n'est pas vraie*, en ce sens qu'on peut avoir une famille de fonctions holomorphes, normale dans une aire D, et telle que toute valeur finie soit prise par une fonction au moins de la famille dans l'aire D; on peut en donner l'exemple simple suivant : choisir une infinité de constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ telles que, Δ étant l'aire décrite par le point $W = \varphi(z)$ quand z décrit D [$\varphi(z)$ fonction holomorphe dans D], les aires $\Delta + C_1$, $\Delta + C_2$, $\ldots$, $\Delta + C_n$, $\ldots$ recouvrent tout le plan des W : la famille des $\varphi_i(z) = \varphi(z) + C_i$ est normale dans D et n'admet pas dans D de valeur exceptionnelle finie. De ce qu'une famille de fonctions admet moins de deux valeurs exceptionnelles dans D, il ne s'ensuit pas qu'elle cesse d'être normale en quelque point de D.

15. Revenant à la famille des $f_t(z)$, qui, dans la couronne arbitraire (C_1, C_2), ne peut admettre qu'une valeur exceptionnelle au plus, rien ne s'oppose donc *a priori*, à ce que cette famille soit normale dans toute la couronne. Et cependant on va voir qu'elle ne peut pas l'être, on va montrer qu'*il est impossible de supposer que la famille des $f_t(z)$ soit normale en tout point de la couronne* (c'est-à-dire dans un petit domaine entourant ce point) : on en conclura qu'il existe dans la couronne *un point z_0 au moins autour duquel la famille n'est pas normale*, et par suite que dans une aire ω_0, arbitrairement petite, autour de z_0, il est impossible que les fonctions $f_t(z)$ de la famille admettent deux valeurs exceptionnelles au moins : dans toute aire entourant ω_0, les $f_t(z)$ prennent toute valeur finie, sauf peut-être une au plus. La démonstration qui va suivre constitue donc à vrai dire une nouvelle démonstration du théorème de M. Picard, distincte de celle de M. Montel, donnant un résultat plus précis, et comme une analyse du contenu de ce théorème de M. Picard.

16. Prenant en effet une suite infinie de fonctions $f_t(z)$ correspondant à la suite d'indices croissants

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n < \ldots [t_n \to \infty],$$

à supposer qu'elle soit normale dans toute la couronne (C_1, C_2), on pourra en extraire une suite infinie $(t_{n_1} < t_{n_2} < \ldots)$ qui, dans la couronne, convergera uniformément vers une fonction holomorphe ou vers la constante infinie. Or il est impossible que la limite soit une fonction holomorphe ou une constante finie, car on pourrait alors trouver une infinité de couronnes, à savoir toutes les couronnes $(t_{n_i}C_1, t_{n_i}C_2)$ pour $n_i > N$, s'en allant à l'infini et dans lesquelles $f(z)$ serait borné. Si la famille des $f_t(z)$ est normale dans (C_1, C_2), toute *fonction limite*, pour une infinité de $f_{t_n}(z)$ correspondant à des t_n grandissant indéfiniment, est *nécessairement identique à la constante infinie.*

Ceci exige que, t tendant vers l'infini, la fonction $f_t(z)$ tende uniformément vers l'infini, dans la couronne (C_1, C_2).

L'hypothèse contraire conduirait en effet à admettre qu'on peut trouver une suite d'indices croissant indéfiniment

$$t_1 < t_2 < t_3 \ldots < t_n < \ldots < t_n \to \infty$$

telle que pour chaque fonction $f_{t_i}(z)$ on ait en quelque point z_i de la couronne $|f_{t_i}(z_i)| < M$, M étant un nombre positif fixe. La famille des $f_{t_i}(z)$ étant normale dans la couronne, on en pourrait extraire une suite $f_{t_{n_i}}(z)$ convergeant uniformément dans la couronne vers une fonction holomorphe qui ne saurait être la constante infinie puisqu'au point z_{n_i} la fonction $f_{t_{n_i}}(z)$ est en module $< M$. On aboutirait donc à une contradiction : il y aurait une fonction limite pour une infinité de $f_{t_n}(z)$ qui ne serait pas infinie.

Il faut donc que pour $t > t_0$ on ait, dans toute la couronne (C_1, C_2),

$$|f^t(z)| > M,$$

M étant un nombre positif arbitrairement grand, donné *a priori*, et dont t_0 dépend.

Mais il est bien clair que les valeurs prises par les $f_t(z)$ $(t > t_0)$ dans la couronne (C_1, C_2) comprennent toutes les valeurs *prises par* $f(z)$ *à l'extérieur de la couronne* $[\sigma(t_0)C_1, \sigma(t_0)C_2]$, on aurait donc, à l'extérieur de cette couronne,

$$|f(z)| > M,$$

ce qui contredit le théorème de Weierstrass bien connu d'après lequel, au voisinage d'un point singulier essentiel isolé, une fonction uniforme s'approche autant qu'on le veut de toute valeur donnée à l'avance.

La conclusion est bien celle annoncée au n° 15 : *il est impossible que les $f_t(z)$ forment une famille normale dans toute la couronne* C_1, C_2.

17. *Il existe donc au moins un point z_0 dans toute couronne* $(C_1 C_2)$ *entourant l'origine, où la famille des $f_t(z)$ n'est pas normale.* Si petit que soit le cercle $\mathcal{D}_0$ de centre z_0, la famille des $f_t(z)$ ne peut être normale dans ce cercle. Les fonctions $f_t(z)$ ne peuvent donc admettre, dans ce cercle, plus d'une valeur exceptionnelle finie, sans quoi elles formeraient une famille normale. Considérant maintenant la courbe $z_0 C$, semblable à C, menée par z_0, elle est décrite par le point $z_0\sigma(t)$ quand t varie de 1 à $+\infty$. Lorsque z décrit le petit cercle $\mathcal{D}_0$ de centre z_0, le point $z\sigma(t)$ décrit un cercle $\mathcal{D}_0\sigma(t)$ ayant pour centre le point $z_0\sigma(t)$ de la courbe $z_0 C$ et dont le rayon est au rayon du cercle $\mathcal{D}_0$ dans le rapport $|\sigma(t)|$, rapport des modules des centres z_0 et $z_0\sigma(t)$. Lorsque z décrit $\mathcal{D}_0$, et t varie de 1 à $+\infty$, le point $z\sigma(t)$ va donc décrire une bande Δ, d'ouverture arbitrairement étroite avec le rayon de $\mathcal{D}_0$, contenant à son intérieur la courbe privilégiée $z_0 C$: cette bande sera balayée par le cercle $\mathcal{D}_0\sigma(t)$ dont le centre $z_0\sigma(t)$ décrit la courbe $z_0 C$ pendant que son rayon varie en restant proportionnel au module de son centre : le rayon initial, rayon de $\mathcal{D}_0$ est arbitrairement petit, ce qu'on exprime en disant que l'ouverture de la bande Δ est arbitrairement petite.

Or les valeurs prises par les fonctions $f_t(z)$ dans le cercle $\mathcal{D}_0$ ne sont autres que les valeurs prises par la fonction $f(z)$ dans la bande Δ balayée par le cercle $\mathcal{D}_0\sigma(t)$. On en conclut que, *si petite que soit l'ouverture de la bande Δ, pourvu qu'elle contienne à son intérieur la courbe privilégiée $z_0 C$, la fonction $f(z)$ prendra, dans cette bande Δ, toute valeur finie, sauf peut-être une valeur exceptionnelle au plus.* Il est clair, d'ailleurs, que si la fonction $f(z)$ admet une valeur exceptionnelle a dans tout le plan (comme l'est zéro pour la fonction e^z), c'est précisément cette valeur a que $f(z)$ ne prendra pas dans la bande Δ, toute autre valeur finie sera effectivement prise.

Il est clair également que *toute valeur finie* (sauf peut-être la valeur exceptionnelle éventuelle) *sera prise par $f(z)$ une infinité de fois dans* Δ, car si deux valeurs a et b distinctes n'étaient prises dans Δ qu'un nombre fini de fois, cela voudrait dire que pour $t > t_0$ les $f_t(z)$ ne prendraient plus dans $\mathcal{D}_0$ les valeurs a et b, on en conclurait que ces $f_t(z)$ pour $t > t_0$ formeraient une famille normale dans $\mathcal{D}_0$, et ceci contredit la propriété reconnue au point z_0.

18. Le mode de raisonnement employé donne donc le théorème de M. Picard en même temps qu'il le précise. Non seulement une fonction entière $f(z)$ quelconque prend toute valeur finie (sauf peut-être une valeur exceptionnelle au plus) à l'extérieur d'un cercle quelconque, si grand soit-il, mais on peut encore affirmer qu'elle les prend toutes, à l'extérieur de ce cercle, *dans un secteur curviligne* Δ *arbitrairement étroit, de forme arbitrairement donnée à priori,* mais contenant à son intérieur l'une ou l'autre de certaines courbes, privilégiées en position semblables à la courbe C donnée *a priori;* l'arbitraire de ces courbes est très grand puisqu'on n'a supposé à C que deux propriétés : d'être continue et d'aller à l'infini pour $t = +\infty$. Par exemple, si C est une demi-droite passant par l'origine, on pourra trouver une ou plusieurs demi-droites issues de l'origine, telles que dans tout angle ayant pour sommet O ou tout autre point d'une de ces droites, et contenant cette demi-droite, la fonction $f(z)$ prenne une infinité de fois toute valeur finie à l'exception peut-être d'une seule valeur. Pour la fonction $f(z) = e^z$ les deux rayons privilégiés sont l'axe imaginaire positif et l'axe imaginaire négatif. Cet exemple très simple montre d'ailleurs que, *sur un rayon privilégié,* $f(z)$ *peut être bornée et ne prendre que des valeurs réparties sur une courbe simple,* alors que les valeurs prises par $f(z)$ dans tout angle contenant le rayon recouvrent tout le plan; sur l'axe imaginaire, en effet, $|e^z| = 1$, et par conséquent les points $W = e^z$ correspondants se répartissent sur toute la circonférence $|W| = 1$.

19. *Remarque I.* — La proposition précédente renferme deux éléments : 1° la forme de la courbe C est *donnée a priori;* 2° dans un secteur arbitrairement étroit encadrant une courbe z_0C, $f(z)$ prend *effectivement* toute valeur finie (sauf peut-être une seule). Si l'on n'exige pas tant de précision, on peut donner une proposition qui serait à la proposition précédente ce que le théorème de Weierstrass

est au théorème de M. Picard. Il est facile en effet de construire une [1] courbe continue Γ, tendant vers l'infini et telle que les valeurs de $W = f(z)$, *sur cette courbe,* soient *denses dans tout le plan* W; lorsque z décrira cette courbe Γ $f(z)$ *s'approchera indéfiniment* de tout point du plan W. Cela ne veut cependant pas dire que, dans la bande Δ balayée par un cercle $\mathcal{D}$ dont le centre décrit Γ, comme cela a été fait pour la courbe $z_0 C$ au n° 17, la fonction $f(z)$ prendra *effectivement* toute valeur finie.

On rangera d'abord en une suite infinie tous les points d'affixe rationnel du plan W, en les désignant par $W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots$. On sait que cela est possible et l'on a de nombreux moyens de le réaliser. Parmi ces points, il en est un au plus W_0 tel que l'équation $f(z) = W_0$ n'ait qu'un nombre fini de racines. On le supprimera. On appellera z_i une racine de l'équation $f(z) = W_i$. On choisira d'abord arbitrairement une racine Z_1 de $f(z) = W_1$, puis on prendra la première racine de l'équation $f(z) = W_2$ dont le module soit *supérieur* à $|Z_1|$ et on l'appellera Z_2. La première racine de $f(z) = W_3$ dont le module soit supérieur à $|Z_2|$ sera choisie et s'appellera Z_3, etc. Joignant $Z_1Z_2, Z_2Z_3, \ldots$ par des segments de droite, on aura une courbe continue Γ tendant vers l'infini.

Lorsque z décrira Γ, $W = f(z)$ décrira une courbe continue passant par tous les points rationnels W_i. Cela veut dire que, quelque grand que soit un cercle de centre O, lorsque z décrira la partie de Γ extérieure à ce cercle, le point $W = f(z)$ décrira une courbe *s'approchant indéfiniment de tout point du plan,* car la suppression d'un nombre fini de points rationnels W_i (à quoi conduit *a priori* l'obligation pour z d'être extérieur au cercle considéré) n'empêche pas l'ensemble des W_i restants d'être dense dans tout le plan. Il va sans dire que je n'ai indiqué des choix aussi précis pour les racines Z_i et pour les courbes Z_iZ_j que pour avoir *une* courbe Γ qui fût bien déterminée, mais il est clair que ces choix peuvent être variés de bien des manières pour fournir des courbes Γ satisfaisantes. Sur Γ, $f(z)$ s'approche indéfini-

---

(1) Ou plusieurs courbes continues. Mais ici la forme de ces courbes *n'est pas donnée, à priori* puisqu'elle dépend, comme on va le voir, des racines des équations $f(z) = W_i$ (W_i rationnel).

ment de toute valeur finie, mais *a priori* rien ne permet de conclure que dans une bande Δ contenant Γ et construite comme au n° 17 $f(z)$ prend effectivement toute valeur finie; pour qu'il en fût ainsi il faudrait que, lorsque z décrit le cercle $\mathcal{O}$ qui balaye la bande Δ, l'aire $\mathcal{O}'$ décrite par $W = f(z)$ fût telle qu'au mouvement et à la déformation de $\mathcal{O}$ correspondissent un mouvement et une déformation de $\mathcal{O}'$ dans lesquels *tout point du plan serait intérieur à* $\mathcal{O}'$: on n'aperçoit pas de raisons pour qu'il en soit ainsi quelque petit qu'on suppose le rayon initial de cercle $\mathcal{O}$.

La proposition obtenue n'est donc pas aussi précise que celle du n° 17, on peut dire à ce point de vue qu'elle est à cette proposition comme le théorème de Weierstrass est à celui de M. Picard.

20. *Remarque II.* — La proposition fondamentale démontrée au n° 17 est qu'il est impossible que la famille des fonctions $f_t(z)$ soit normale dans *toute* la couronne (C_1, C_2) et cela quelle que soit cette couronne, pourvu qu'elle entoure l'origine. Mais il peut arriver et il arrive effectivement que cette famille soit normale dans certaines parties de la couronne séparées entre elles par des points où elle cesse de l'être. Il suffit pour s'en convaincre de prendre la fonction e^z et de choisir pour C une droite passant par l'origine. Ici $\sigma(t) = t$. La famille des fonctions $f_t(z) = f[z\sigma(t)] = e^{zt}$ est normale dans toute la partie de la couronne (C_1, C_2) située *à droite* de l'axe imaginaire, et *à l'intérieur* de cette partie elle tend uniformément vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$; la famille est aussi normale dans la partie de la couronne située *à gauche* de l'axe imaginaire et, *à l'intérieur* de cette partie, elle tend uniformément vers O quand t tend vers $+\infty$. Ces deux parties sont séparées par deux segments de l'axe imaginaire sur lesquelles la famille cesse d'être normale. Il peut se faire aussi que la famille des $f_t(z)$ ne soit normale en aucun point du plan z. C'est ce qui arrive en particulier pour les fonctions entières elliptiques, par exemple la fonction classique $\sigma(z)$. En effet, on sait que cette fonction s'exprime par le produit infini canonique

$$\sigma(z) = z \prod_{W}{}' \left[\left(1 - \frac{z}{W} \right) e^{\frac{z}{W} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{W^2}} \right],$$

où l'on a posé

$$W = 2h_1\omega_1 + 2h_2\omega_2;$$

$2\omega_1$ et $2\omega_2$ étant les périodes et h_1, h_2 des entiers quelconques positifs ou négatifs, l'indice Π' indiquant qu'on ne prend pas la combinaison $h_1 = h_2 = 0$. $\sigma(z)$ admet pour zéros simples tous les sommets du réseau de parallélogrammes des périodes.

Envisageant une *spirale* C *quelconque* tournant une infinité de fois autour du point à l'infini [1] et correspondant à une certaine fonction $\Sigma(t)$, on formera la famille des fonctions $\sigma_t(z) = \sigma[z\Sigma(t)]$. Les valeurs prises par une fonction $\sigma_t(z)$ dans un *petit cercle quelconque* $\mathcal{O}_0$ du plan z sont celles que prend la fonction $\sigma(z)$ elle-même dans le cercle $\mathcal{O}_0\Sigma(t)$. Or, si petit que soit pris $\mathcal{O}_0$ *a priori*, pourvu que t soit assez grand ($t > t_0$), le cercle $\mathcal{O}_0\Sigma(t)$ aura un rayon supérieur à telle limite positive qu'on voudra. Ce cercle contiendra donc, pourvu que $t > t_0$, un nombre de parallélogrammes de périodes aussi grand qu'on voudra, et, dans ce cercle, $\sigma(z)$ aura un nombre de zéros supérieur à tel nombre positif qu'on se sera donné arbitrairement, *a priori*. Les fonctions holomorphes $\sigma_t(z)$ auront dans le cercle $\mathcal{O}_0$ *un nombre de zéros dépassant toute limite quand t croît indéfiniment*. Ceci suffit pour qu'on puisse affirmer que la famille des $\sigma_t(z)$ n'est pas normale dans $\mathcal{O}_0$ [2]. La

---

(1) Par exemple une spirale logarithmique quelconque de pôle O.

(2) En effet, toute fonction limite d'une infinité de $\sigma_{t_n}(z)$ dont les indices t_n croissent indéfiniment devrait être *identiquement nulle dans* $\mathcal{O}_0$; pour $t \to \infty$, $\sigma_t(z)$ devrait tendre uniformément vers zéro dans $\mathcal{O}_0$. Or cela n'est pas, ainsi qu'il résulte des propriétés classiques de la fonction $\sigma(z)$. On a en effet

$$\sigma[z_0 + 2h_1\omega_1 + 2h_2\omega_2] = (-1)^{h_1h_2+h_1+h_2} e^{(2h_1\eta_1+2h_2\eta_2)(z_0+h_1\omega_1+h_2\omega_2)}\sigma(z_0).$$

z_0 étant fixe, les valeurs de $|\sigma(z_0 + 2h_1\omega_1 + 2h_2\omega_2)|$ pour h_1 et h_2 *très grands* dépendent essentiellement du terme $e^{(2h_1\eta_1+2h_2\eta_2)(z_0+h_1\omega_1+h_2\omega_2)}$ dont la valeur absolue est

$$e^{\mathcal{R}[(2h_1\eta_1+2h_2\eta_2)(z_0+h_1\omega_1+h_2\omega_2)]}.$$

Or, quel que soit z_0 fixe, l'équation en $h_1 h_2$

$$\mathcal{R}[(2h_1\eta_1 + 2h_2\eta_2)(z_0 + h_1\omega_1 + h_2\omega_2)] = 0$$

représente une conique dont le genre ne dépend pas de z_0. La région

$$\mathcal{R}[(2h_1\eta_1 + 2h_2\eta_2)(z_0 + h_1\omega_1 + h_2\omega_2)] > 0$$

ne peut être finie, sans quoi $\sigma(z)$ serait bornée dans tout le plan. Cette région, allant à fonction $\sigma(z)$ jouit donc de cette propriété remarquable de prendre toute valeur finie sauf peut-être une seule *dans toute bande* Δ, *d'ouverture arbitrairement petite*, construite à partir de *tout point* z_0 *du plan*.

21. On peut alors, si l'on veut, parler de l'ensemble E des points autour desquels la famille des $f_t(z)$ n'est pas normale. On sait que cet ensemble a un point au moins sur toute courbe entourant l'origine, puisqu'on a établi au n° 17 qu'il avait au moins un point dans toute couronne d'épaisseur arbitrairement petite entourant l'origine. C'est évidemment un ensemble fermé, et ce qui précède montre que cet ensemble fermé contient toujours *un continu* (1). Il est clair que E dépend de la courbe C donnée *a priori*, et, en particulier, il peut se se présenter des circonstances différentes, selon que les diverses courbes zC issues de tous les points z du plan forment une famille à deux paramètres réels ou à un seul. Si, par exemple, les courbes ζC relatives à tous les points ζ d'une certaine courbe z_0C coïncident avec cette courbe z_0C, comme cela arrive par exemple lorsque C est une droite passant par O ou une spirale logarithmique de pôle O(2), il est clair que les diverses courbes zC ne dépendront plus que d'un paramètre réel : dans ce cas on voit de suite que, si la famille des $f_t(z)$ n'est pas normale en un point z_0 du plan, elle ne l'est en aucun point de la courbe z_0C issue de z_0.

Lorsque la fonction entière $f(z)$ *admet une valeur exceptionnelle finie* a, comme l'est zéro pour e^z, on peut affirmer en outre que, quel que soit C, E *est un ensemble parfait, car aucun point* P *de* E *ne peut être isolé*. S'il l'était, en effet, on pourrait de toute suite t_1, t_2, ..., t_n, ..., ∞ extraite de la famille $f_t(z)$, extraire une suite qui, dans un petit cercle de centre P, convergerait partout, *sauf au centre*, vers une

l'infini sera donc traversée une infinité de fois par la bande Δ relative à tout point du plan; on en déduit facilement que $\sigma(z)$ ne peut tendre uniformément vers zéro lorsque z s'éloigne à l'infini dans Δ, et par conséquent que $\sigma_t(z)$ ne peut tendre uniformément vers zéro dans $\mathcal{D}_0$ lorsque $t \to \infty$.

(1) Qui peut être le plan tout entier, comme le montre l'exemple du n° 20.

(2) On reconnaît aisément que c'est *seulement dans ces deux cas* que la circonstance précédente peut se produire, car elle équivaut à dire que la courbe C coupe tous ses rayons vecteurs sous le même angle.

fonction holomorphe ou vers l'infini. La première éventualité est impossible, car, du lemme classique de Weierstrass, on conclurait que cette suite convergerait *même au centre* et la deuxième éventualité se ramène à la première à condition de considérer, non la suite des $f_{t_n}(z)$, mais la suite des $\frac{1}{f_{t_n}(z)-a}$ qui est encore une suite de fonctions entières.

Je n'insisterai pas davantage ici sur les propriétés de l'ensemble E.

22. *Conséquences relatives aux racines des équations $f(z)=a$.* — La proposition établie au n° 17 donne un renseignement très précis sur les arguments des racines des diverses équations $f(z)=a$, quel que soit a, pour une fonction entière donnée $f(z)$, d'ailleurs quelconque.

Si l'on adopte pour C une droite passant par l'origine, la proposition disant que, dans tout angle de sommet O contenant l'une ou l'autre de certaines droites privilégiées, la fonction $f(z)$ prend toute valeur finie, sauf peut-être une seule, revient à dire, en désignant par Oz_0 une de ces droites, que les racines $z_1(a), z_2(a), z_3(a), \ldots, z_n(a), \ldots$ de l'équation $f(z)=a$ ont des *arguments qui admettent φ_0 pour une de leurs limites*, et cela quel que soit a, sauf peut-être une seule valeur. Sauf peut-être une valeur de a, le rayon Oz_0 est un rayon limite pour les rayons $Oz_n(a)$ $(n=1, 2, \ldots, \infty)$. En particulier, il est impossible de trouver une fonction entière $f(z)$ dont les zéros aient un argument limite unique φ_0, dont les racines de $f(z)=1$ aient un argument limite unique $\varphi_1 \neq \varphi_0$ et les racines de $f(z)=a$ $(a\neq 0$ et de $1)$ aient un argument limite unique [1] $\neq \varphi_0$ et $\neq \varphi_1$. Si l'on construit tous les rayons limites des rayons $Oz_n(a)$ et si l'on désigne par $E(a)$ l'ensemble de ces rayons, il existe au moins un rayon commun à tous les $E(a)$, sauf peut-être un des $E(a)$ au plus.

On a des propositions analogues avec toute courbe C. La propriété de la courbe z_0C, privilégiée en position, dont l'existence a été établie

[1] Si, par exemple, les racines de $f(z)=a$ ont un rayon limite unique $O\alpha$, ou bien les racines de toute autre équation $f(z)=b$ (sauf peut-être une valeur de b) admettent $O\alpha$ pour rayon limite, ou bien toutes ces équations sans exception ont un rayon limite commun $O\beta \neq O\alpha$, pour leurs racines.

au n° 17, se traduit par ce fait que, quel que soit a (sauf peut-être une valeur finie au plus), on peut parmi les racines $z_n(a)$ de l'équation $f(z)=a$ en choisir une infinité $z_{n_1}(a), z_{n_2}(a), \ldots, z_{n_p}(a), \ldots$ telles que *le rapport entre la plus courte distance de $z_{n_p}(a)$ à la courbe z_0C d'une part, et le module de $z_{n_p}(a)$ d'autre part, tende vers zéro quand p augmente indéfiniment.* C'est une indication sur la façon dont on peut approcher *simultanément* des racines de $f(z)=a$ (quel que soit a) par des courbes de forme déterminée, mais d'ailleurs quelconque.

Je ne connais pas de proposition antérieure du type précédent qui renseigne sur les *arguments* des racines des équations $f(z)=a$, *quelle que soit la fonction entière $f(z)$.* Plusieurs géomètres ont étudié la *croissance des modules* des racines de ces équations en faisant sur $f(z)$ des hypothèses assez larges (¹) sans que l'on soit arrivé, je crois, à des conclusions absolument générales, valables pour toute fonction entière.

23. *Note.* — Tout ce qui s'est dit dans ce paragraphe I (²) des fonctions entières est valable pour *toute fonction méromorphe $\varphi(z)$ ayant une valeur exceptionnelle finie a,* car la fonction $\dfrac{1}{\varphi(z)-a}=f(z)$ est alors une fonction entière : tout ce qu'on a dit s'applique à $f(z)$ et par suite à $\varphi(z)=\dfrac{1+af(z)}{f(z)}$.

II. — Les fonctions méromorphes ayant une valeur asymptotique.

24. J'entends par là toute fonction méromorphe $\varphi(z)$ qui tend vers une limite déterminée ω, finie ou infinie (³), quand z tend vers

---

(¹) Par exemple, la régularité de la croissance.

(²) Il est à peine nécessaire de faire remarquer que les théorèmes de ce paragraphe I s'appliquent aussi à toute fonction uniforme admettant un point singulier essentiel isolé, autour duquel la fonction a une valeur exceptionnelle finie ou infinie.

(³) On peut, sans diminuer la généralité, supposer ω finie. Tout ce que nous dirons dans ce paragraphe II s'appliquera à toute fonction, uniforme autour d'un point singulier essentiel isolé, qui admet une valeur asymptotique ω lorsque z tend vers ce point sur un certain chemin Γ.

l'infini sur un certain chemin continu bien déterminé : un tel chemin est dit *chemin de détermination* ω, et ω s'appelle une valeur asymptotique. Une fonction entière quelconque admet la valeur asymptotique $+\infty$ et toute valeur exceptionnelle d'une fonction méromorphe est, comme on sait, une valeur asymptotique. [*Voir* notamment F. IVERSEN, *Thèse* (Helsingfors, 1914), et *Sur quelques propriétés des fonctions monogènes au voisinage d'un point singulier* (*Ofversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar*, Bd LVIII, 1915-1916, Afd. A, n° 25).] Je désignerai par Γ le chemin de détermination.

Il faut procéder comme pour les fonctions entières, mais raisonner avec plus de précaution, car les familles de fonctions méromorphes sont plus générales que les familles de fonctions holomorphes. C étant la courbe donnée *a priori* que décrit le point $T = \sigma(t)$ lorsque t varie de 1 à $+\infty$, on formera la famille des $\varphi_t(z) = \varphi[z\sigma(t)]$ et il s'agit de montrer que *cette famille ne peut être normale dans toute une couronne* (C_1, C_2), *d'ailleurs quelconque*, *entourant l'origine*. On montre, en effet, que toute suite infinie convergente extraite de la famille des $\varphi_t(z)$, si l'hypothèse précédente était vraie, devrait *converger nécessairement vers la constante* ω. Soit $\varphi_{t_1}, \varphi_{t_2}, \ldots, \varphi_{t_n}, \ldots$ cette suite, correspondant à des indices croissants $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots t_n \to \infty$. Les valeurs prises par $\varphi_{t_n}(z)$ dans la couronne (C_1, C_2) sont celles que prend $\varphi(z)$ dans la couronne $[\sigma(t_n)C_1, \sigma(t_n)C_2]$. Cette couronne tend vers l'infini quand t_n grandit indéfiniment. Mais elle est toujours traversée, du contour $\sigma(t_n)C_1$ au contour $\sigma(t_n)C_2$, par un arc continu $\alpha_n\beta_n$ au moins de la courbe Γ. Sur Γ, $\varphi(z)$ tend vers ω, donc sur l'arc précédent $\alpha_n\beta_n$ on aura

$$|\varphi(z) - \omega| < \varepsilon_n,$$

ε_n tendant vers zéro quand n et t_n grandissent indéfiniment. Revenant à la couronne (C_1, C_2), elle sera traversée du contour C_1 au contour C_2 par un arc continu $\widehat{A_n B_n} = \dfrac{\widehat{\alpha_n\beta_n}}{\sigma(t_n)}$ sur lequel on aura

$$|\varphi_{t_n}(z) - \omega| < \varepsilon_n.$$

Les arcs continus $A_n B_n$, dont les extrémités sont respectivement sur C_1 et C_2 ont pour ensemble limite un *ensemble continu* qui a un point au moins sur toute courbe entourant C_1 et intérieure à C_2, qui parcourt la couronne (C_1, C_2). En tout point de cet ensemble, la valeur de la fonction $F(z)$ limite de la suite des $\varphi_{t_n}(z)$ ne peut évidemment différer de ω. $F(z)$ se réduit donc, dans toute la couronne (C_1, C_2), à la constante ω.

C'est ici le lieu de faire remarquer que ce résultat concorde avec celui trouvé pour les fonctions entières au même endroit du raisonnement. La valeur ∞ étant valeur asymptotique pour toute fonction entière $f(z)$, on a bien vu au n° 16 que toute fonction limite de la famille des $f_t(z) = f[z\sigma(t)]$ ne pouvait différer de la constante infinie, à supposer, ce qu'on a ensuite reconnu inexact, que la famille des f_t fût normale dans la couronne (C_1, C_2). Mais au n° 16 on a pu se contenter de considérations plus élémentaires, car les fonctions entières sont plus simples que les fonctions méromorphes. Le raisonnement actuel s'applique d'ailleurs mot pour mot aux fonctions entières.

Il n'y a maintenant aucune difficulté à conclure, comme au n° 16, que, t tendant vers l'infini, $\varphi_t(z)$ devrait tendre uniformément vers la constante ω dans toute la couronne (C_1, C_2) et par suite que $\varphi(z)$ devrait tendre uniformément vers ω quand z tend vers l'infini : l'inégalité $|z| > R$ devant entraîner $|\varphi(z) - \omega| < \varepsilon$ dès que R serait assez grand. C'est là une impossibilité qui montre l'inexactitude de l'hypothèse initiale [1].

25. On est donc en droit de dire, comme au n° 17, qu'il existe un point au moins z_0, dans toute couronne (C_1, C_2) entourant l'origine, où la famille des $\varphi_t(z)$ n'est pas normale. *Dans la bande* Δ *que nous savons construire à partir du point* z_0 *et d'un cercle* ω_0, *arbitrairement petit, de centre* z_0, *la fonction* $\varphi(z)$ *prendra toute valeur finie ou infinie, sauf peut-être deux valeurs exceptionnelles au plus.* Si $\varphi(z)$ admet deux valeurs exceptionnelles dans tout le plan, ce sera précisément ces deux valeurs que $\varphi(z)$ ne pourra prendre dans la bande d'ouverture infiniment petite Δ. La remarque faite précédemment vaut ici : $\varphi(z)$ prendra *une infinité de fois* dans Δ toute valeur non exceptionnelle.

---

[1] *Voir* un raisonnement analogue dans ma Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 168, 1919, p. 719.

Envisageant par exemple la fonction méromorphe $\operatorname{th} z = \frac{e^2 z - 1}{e^2 z + 1}$ qui admet sur l'axe réel positif la valeur asymptotique $+1$ et sur l'axe réel négatif la valeur -1, ces deux valeurs étant d'ailleurs valeurs exceptionnelles pour $\operatorname{th} z$, on reconnaît aisément, lorsque C est une droite issue de l'origine $[\sigma(t) = t]$, que la famille des $\operatorname{th} tz$ est normale en tout point situé à droite de l'axe imaginaire et tend uniformément vers $+1$ lorsque t tend vers $+\infty$; elle est normale en tout point situé à gauche de cet axe et tend uniformément vers -1 lorsque t tend vers $-\infty$. Sur l'axe imaginaire, la famille des $\operatorname{th} tz$ n'est normale en aucun point. Dans tout angle de sommet O contenant cet axe, $\operatorname{th} tz$ prend toute valeur finie ou infinie à l'exclusion des deux valeurs $+1$ et -1. *Sur l'axe imaginaire*, $\operatorname{th} z$ *ne prend que des valeurs purement imaginaires* dont le module varie périodiquement de $-\infty$ à $+\infty$. Conclusions analogues pour la fonction $\operatorname{tang} z = -i \operatorname{th} iz$. Ici les deux valeurs exceptionnelles sont $+i$ et $-i$, ce sont les valeurs limites vers lesquelles tend respectivement $\operatorname{tang} z$ quand z s'éloigne à l'infini sur un rayon du demi-plan supérieur ou du demi-plan inférieur. C'est en tout point de l'axe réel que la famille des fonctions $\operatorname{tang} tz$ cesse d'être normale, sur cet axe, la fonction $\operatorname{tang} z$ varie périodiquement de $-\infty$ à $+\infty$ en restant réelle, alors que, dans tout angle contenant l'axe réel, $\operatorname{tang} z$ prend une infinité de fois toute valeur excepté $+i$ et $-i$.

26. Un autre exemple intéressant est fourni par la fonction elliptique classique $\zeta(z) - S i 2\omega_1$ et $2\omega_2$ sont ses périodes, on a les relations

$$\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\eta_1,$$
$$\zeta(z + 2\omega_2) = \zeta(z) + 2\eta_2;$$

$\zeta(z)$ a pour pôles simples tous les points

$$W = 2h_1\omega_1 + 2h_2\omega_2, \qquad h_1, h_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Dans un parallélogramme P de périodes de centre O, $\zeta(z)$ prend des valeurs qui recouvrent toute la partie infinie du plan ζ, extérieure à une certaine courbe fermée (parallélogramme curviligne), que décrit le point ζ quand z décrit le contour du parallélogramme de périodes. On déduit alors de la relation

$$\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\eta_1$$

que dans le parallélogramme D, couvert par un nombre fini N de parallélogrammes accolés, dont le premier serait P, et qui se déduiraient de P par N translations successives équipollentes au vecteur période $2\omega_1$, la fonction $\zeta(z)$ prend toute valeur finie ou infinie. Par suite, dans tout parallélogramme *équipollent à* D, formé de N parallélogrammes de périodes, accolés comme ceux de D, $\zeta(z)$ prendra toute valeur finie ou infinie. Prenant pour C une courbe *quelconque du plan* allant à l'infini, décrite par le point $T = \sigma(t)$ pour t variant de 1 à $+\infty$, on voit que la famille des $\zeta[z\sigma(t)] = \zeta_t(z)$ *ne saurait être normale en aucun point du plan*.

Effectivement, l'infini est une valeur asymptotique de $\zeta(z)$ vers laquelle $\zeta(z)$ tend quand z tend vers l'infini sur une droite *parallèle a un vecteur période quelconque*. Si l'on suppose que, dans un petit cercle $\mathcal{D}_0$ du plan, la famille des $\zeta[z\sigma(t)]$ soit normale, il est clair que, pour t assez grand, le cercle $\mathcal{D}_0\sigma(t)$ étant arbitrairement grand et contenant un nombre de parallélogrammes de périodes arbitrairement élevé, le nombre des pôles qu'une fonction de la famille possède dans $\mathcal{D}_0$ dépasse toute limite quand t grandit indéfiniment. Si une suite infinie de fonctions de la famille correspondant à des indices

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n < \ldots \quad t_n \to \infty$$

convergeait dans $\mathcal{D}_0$, elle ne pourrait converger que vers l'infini. Et la famille des $\zeta_t(z)$ étant supposée normale, dans $\mathcal{D}_0$, la convergence serait uniforme. Cependant, dès que t_n dépasse une certaine limite, le cercle $\mathcal{D}_0\sigma(t_n)$ étant arbitrairement grand contiendra à son intérieur un parallélogramme D, $\zeta(z)$ prendra dans $\mathcal{D}_0\sigma(t_n)$ toute valeur finie ou infinie, en particulier la valeur zéro. Toute fonction $\zeta_{t_n}(z)$ de la suite précédente, dès que t_n surpassera une certaine limite finie, prendra donc dans $\mathcal{D}_0$ toute valeur finie ou infinie, en particulier zéro. Les fonctions de la suite ne peuvent dans $\mathcal{D}$ tendre uniformément vers l'infini : *la famille des $\zeta_t(z)$ ne saurait être normale en aucun point du plan*.

Dans toute bande Δ, d'ouverture infiniment petite, ayant pour axe une courbe C *quelconque du plan, $\zeta(z)$ prend toute valeur finie ou infinie, une infinité de fois*.

27. On peut encore faire ici les mêmes remarques qu'au n° 19 et au n° 20, ces remarques s'appuieront sur les exemples qu'on vient de donner aux n^{os} 25 et 26 du présent paragraphe. Parallèlement au n° 21, on pourra, dans le cas qui nous occupe, parler de l'ensemble des points où la famille des $\varphi_t(z) = \varphi[z\sigma(t)]$ n'est pas normale. C'est un ensemble fermé et il contient un continu qui coupe toute courbe fermée entourant l'origine en un point au moins : c'est le sens du théorème démontré au n° 25. On peut affirmer aussi que lorsque la fonction méromorphe admet deux valeurs exceptionnelles finies ou infinies, l'ensemble E est *parfait*. Il est clair que E dépend de la courbe C choisie; il peut être linéaire (exemple de tang z donné au n° 25) ou superficiel [exemple de $\zeta(z)$].

Enfin, ce qu'on a dit au n° 22 des racines des équations $f(z) = a$, pour une fonction entière quelconque, s'applique aux racines des équations $\varphi(z) = a$ (a fini ou infini) pour toute fonction méromorphe $\varphi(z)$ ayant au moins une valeur asymptotique. Je me bornerai donc à y renvoyer le lecteur. Il suffira, au lieu d'admettre une seule valeur exceptionnelle a au plus comme pour les fonctions entières, d'en admettre deux distinctes (dont l'une peut être infinie) au plus.

28. On peut aussi étudier *les valeurs que prend une fonction méromorphe $\varphi(z)$ ayant une valeur asymptotique ω, au voisinage du chemin* Γ *sur lequel $\varphi(z)$ tend vers la limite* ω. z_0 étant un point quelconque de ce chemin, il est loisible de supposer que la fonction complexe $\sigma(t)$ de la variable réelle t a été choisie telle que, t variant de 1 à $+\infty$, le point $z_0\sigma(t)$ décrive la courbe Γ, du point z_0 à l'infini, toujours dans le même sens. On formera la famille des fonctions $\varphi_t(z) = \varphi[z\sigma(t)]$: deux cas sont possibles, ou bien cette famille est normale au point z_0, ou bien elle ne l'est pas.

1° Si *la famille est normale en* z_0, elle l'est dans un certain cercle $\mathcal{D}_0$ de centre z_0 qu'on choisira le plus grand possible. Lorsque z décrit ce cercle $\mathcal{D}_0$, $z\sigma(t)$ décrit un cercle $\mathcal{D}_0\sigma(t)$ dont le centre $z_0\sigma(t)$ est fixe sur Γ et dont le rayon est à celui de D_0 dans le rapport $|\sigma(t)|$. Ce cercle est traversé par la courbe Γ qui passe en son centre. Extrayons de la famille des $\varphi_t(z)$ une suite infinie correspondant aux indices indéfiniment croissants

$$t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n < \ldots t_n \to \infty.$$

Tout cercle $\mathbb{C}_0 \sigma(t_n)$, traversé par Γ, est parcouru par un arc de Γ que j'appellerai $\alpha_n \beta_n$ et qui passe en son centre $z_0 \sigma(t_n)$. J'appellerai $A_n B_n$ l'arc $\frac{\alpha_n \beta_n}{\sigma(t_n)}$.

C'est un arc semblable à l'arc $\alpha_n \beta_n$, qui traverse le cercle $\mathbb{C}_0$ en passant par son centre z_0. Sur $A_n B_n$ on a, dès que t_n est assez grand,

$$|\varphi_{t_n}(z) - \omega| < \varepsilon_n,$$

ε_n tendant vers zéro quand t_n croît indéfiniment.

Toute suite infinie d'arcs choisis parmi les arcs $A_n B_n$ admet un ensemble limite continu intérieur au cercle $\mathbb{C}_0$, cet ensemble limite possédant au moins un point sur tout cercle de centre z_0, intérieur à $\mathbb{C}_0$. En tout point de cet ensemble, la limite des $\varphi_{t_n}(z)$ ne peut différer de ω; *elle est donc identique à la constante ω dans tout le cercle* $\mathbb{C}_0$. Toute fonction limite de la famille des $\varphi_t(z)$ étant identique à ω, on conclut que, lorsque t tend vers l'infini, la fonction $\varphi_t(z)$ tend uniformément vers ω à l'intérieur du cercle $\mathbb{C}_0$, ce qui signifie que $\varphi(z)$ *tend uniformément vers ω lorsque z tend vers l'infini en restant à l'intérieur de la bande* Δ d'axe Γ balayée par le cercle $\mathbb{C}_0 \sigma(t)$ au cours du mouvement avec déformation que l'on a appris à lui imprimer.

Si l'on considère les racines $z_n(a)$ d'une équation quelconque $\varphi(z) = a$ $(a \neq \omega)$, on peut affirmer qu'à partir d'une certaine valeur n_a de n, elles sont toutes extérieures à la bande Δ; cette valeur peut dépendre, naturellement, de a; mais il est certain que, quelle que soit la valeur a telle que $|a - \omega| > \varepsilon$, ε étant donné positif et arbitraire, on pourra déterminer un cercle de centre O assez grand pour qu'*à l'extérieur de ce cercle aucune racine d'une équation $\varphi(z) = a$ ne soit intérieure à la bande* Δ.

2° Si, au contraire, *la famille des $\varphi_t(z)$ n'est pas normale en z_0*, quelque petit que soit le rayon de $\mathbb{C}_0$, et par conséquent quelque étroite que soit la bande Δ correspondante, la fonction $\varphi(z)$ prendra, dans Δ, toute valeur finie ou infinie, sauf peut-être deux valeurs au plus. *Le chemin Γ sera donc limite pour les racines de toute équation $\varphi(z) = a$*

(sauf deux valeurs a finies ou infinies au plus) en ce sens que le rapport entre la plus courte distance d'une racine $z_n(a)$ à Γ et le module $|z_n(a)|$ de cette racine tendra vers zéro pour une suite infinie convenable n_1, n_2, ..., n_p, ..., de ces racines (1).

III. — Les fonctions méromorphes sans valeur asymptotique.

29. Tout ce qui précède, dans les paragraphes I et II de ce Chapitre, suppose que la fonction méromorphe étudiée possède au moins une valeur asymptotique (une fonction entière est une fonction méromorphe particulière dont l'infini est une valeur exceptionnelle). Supposer qu'une fonction $\varphi(z)$ n'a pas de valeur asymptotique, c'est supposer que sa fonction inverse n'a pas de singularités transcendantes et n'admet dans tout le plan à distance finie ou infinie que des points critiques algébriques ou des pôles. Ceci se déduit immédiatement des travaux connus sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes pour lesquels on pourra consulter par exemple la thèse de M. Iversen. Si l'on construit la surface de Riemann Σ sur laquelle la fonction $z = \psi(W)$, inverse de la fonction méromorphe $W = \varphi(z)$, est uniforme, il est clair que chaque feuillet de cette surface ne saurait être relié directement qu'à un *nombre fini* d'autres feuillets, et par un nombre fini de points de ramification algébriques : chaque feuillet peut ainsi être isolé des autres par un nombre fini de coupures qui rendront uniforme la détermination de $z(W)$ correspondant à ce feuillet. On pourra toujours relier ces coupures entre elles de façon à n'en plus former qu'une seule. Lorsque W décrit le *feuillet ainsi coupé*, z décrit une aire d'un seul tenant, simplement connexe lorsque toutes les coupures ont été reliées en une seule, et *tout entière à distance finie* puisque, $z(W)$ n'ayant pas de point transcendant, z ne peut aucunement tendre vers l'infini quand W tend vers un point déterminé du *feuillet coupé*. On voit ainsi que *le plan des z pourra toujours être décomposé en une infinité de polygones*, dont chacun est la représentation conforme d'un feuillet de la surface de Riemann de $z(W)$; tous ces polygones

(1) *Voir* un raisonnement analogue dans ma Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 168, 1919, p. 812.

sont à distance finie, deux à deux contigus et remplissent tout le plan sans omission ni répétition; *dans chacun de ces polygones la fonction méromorphe $\varphi(z)$ prend toute valeur finie ou infinie* (¹). Cette proposition remplace ici la proposition du n° 25 pour les fonctions douées de valeur asymptotique. Elle est en particulier vérifiée par les fonctions doublement périodiques qui n'ont aucune valeur asymptotique, on le reconnaît aisément, et, pour ces fonctions, les polygones précédents ne sont autres que les parallélogrammes de périodes, ou plutôt des portions de parallélogrammes des périodes, car toute fonction elliptique prend deux fois au moins dans chaque parallélogramme des périodes toute valeur finie ou infinie.

30. On peut aussi appliquer la méthode des familles normales utilisée dans les paragraphes I et II aux fonctions méromorphes générales qui nous occupent actuellement; mais pour rechercher les points où la famille cesse d'être normale on aura recours à d'autres considérations qu'à celles tirées de valeurs asymptotiques, on utilisera par exemple la croissance, la distribution des zéros et des pôles dans le plan (²). En voici un exemple bien simple emprunté aux fonctions elliptiques. Prenant une fonction doublement périodique quelconque $\varphi(z)$ et une courbe C quelconque correspondant à la fonction $\sigma(t)$ on formera la famille $\varphi_t(z) = \varphi[z\sigma(t)]$. $\mathcal{D}_0$ étant un cercle quelconque du plan, dès que t sera assez grand, le cercle $\mathcal{D}_0\sigma(t)$ sera aussi grand qu'on voudra et contiendra un nombre de parallélogrammes de périodes aussi grand qu'on voudra. Si la famille des φ_t était normale dans $\mathcal{D}_0$, toute suite convergente qu'on en pourrait extraire devrait d'une part converger uniformément vers zéro puisque les zéros de φ_t dans $\mathcal{D}_0$ se rapprochent indéfiniment les uns des autres en même temps que leur nombre grandit indéfiniment quand t grandit indéfiniment; elle devrait

---

(¹) Voir *Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 168, 1919, p. 719.

(²) Il semble que, dans chaque cas, la nature de la fonction méromorphe doive faire choisir le mode qu'il convient d'adopter : on sera conduit à étudier le nombre des zéros et celui des pôles intérieurs à un anneau $(R, R\sigma)$ $(\sigma > 1)$. Lorsque R grandit indéfiniment d'une façon continue, on en tirera des conséquences sur la question de savoir si la famille des $\varphi_t(z)$ est ou n'est pas normale dans l'anneau $(R_0, R_0\sigma)$. Voir d'ailleurs la suite au n° 32 du présent Mémoire.

d'autre part converger uniformément vers l'infini puisque ce qu'on a dit des zéros de φ_t est vrai des pôles. Donc la famille des $\varphi_t(z)$ *ne saurait être normale en aucun point du plan* z, et cela quelle que soit la courbe C. Dans toute bande Δ, si petite que soit son ouverture, φ prend une infinité de fois toute valeur finie ou infinie, ce qui n'a rien d'étonnant puisque le rayon du cercle générateur $\omega_0\sigma(t)$ grandissant indéfiniment avec t, Δ contient toujours une infinité de parallélogrammes de périodes.

31. Voici encore ce qu'on peut dire des valeurs d'une fonction méromorphe quelconque $\varphi(z)$ au voisinage d'un chemin Γ, allant à l'infini et d'ailleurs quelconque, lorsqu'on suppose que, *z décrivant ce chemin, le point $w = \varphi(z)$ ne se rapproche pas indéfiniment de tout point du plan w*, c'est-à-dire que la courbe décrite par *w n'est pas dense dans tout le plan*. L'hypothèse actuelle est moins restrictive que celle qu'on a adoptée au n° 28; comme il a été fait au n° 28, on formera la famille des fonctions $\varphi_t(z) = \varphi[z\sigma(t)]$: z_0 étant un point fixe quelconque de Γ, le point $z_0\sigma(t)$ décrira Γ lorsque t variera de 1 à $+\infty$. Deux hypothèses sont possibles : ou bien la famille des $\varphi_t(z)$ est normale au point z_0, ou bien elle ne l'est pas.

1° Si la famille est normale au point z_0, et si l'on désigne par A une valeur telle que $|\varphi(z) - A|$ reste $> \varepsilon$, sur tout Γ, c'est-à-dire une valeur dont $\varphi(z)$ ne se rapproche pas indéfiniment sur Γ, la famille des $\frac{1}{\varphi_t(z) - A}$ sera bornée en z_0 : normale en z_0 comme la famille des $\varphi_t(z)$ elle sera uniformément bornée dans un certain cercle ω_0 de centre z_0, ce qui veut dire en somme que dans une certaine bande Δ engendrée par le cercle $\omega_0\sigma(t)$ quand t varie de 1 à $+\infty$ on aura $\left|\frac{1}{\varphi(z) - A}\right| < M$, l'épaisseur de la bande Δ (caractérisée par le rayon de ω_0) étant, bien sûr, fonction de ε et de A. Ceci veut dire que si, sur Γ, $\varphi(z)$ ne s'approche pas indéfiniment d'une certaine valeur A, il existe *toute une bande Δ, d'axe Γ, dans laquelle $\varphi(z)$ reste également à distance finie de* A, et ceci est vrai quelle que soit la valeur A dont $\varphi(z)$ reste à distance finie, sur Γ. En particulier, dès que $|z|$ dépasse une certaine limite R_A la bande Δ ne contiendra aucune racine de l'équation $\varphi(z) = A$.

Autrement dit encore, les racines de l'équation $\varphi(z) = \mathrm{A}$ ne sauraient avoir pour limite la courbe Γ, au sens déjà attribué à cette expression (nº 28, 2º).

2º Si, au contraire, la famille des φ_t n'est pas normale au point z_0 la conclusion est la même qu'au nº 28 (2º), le chemin Γ est limite pour les racines de toute équation $\varphi(z) = a$, sauf peut-être deux valeurs de a, finies ou infinies, au plus.

32. Je voudrais, en terminant, montrer que l'*hypothèse générale dans laquelle on s'est placé au paragraphe* II *pour établir le théorème du nº* 25 *n'est pas un pur artifice de démonstration*. C'est-à-dire que si on l'abandonne, le théorème peut n'être plus vrai. Je vais le montrer en fournissant l'exemple d'une fonction $f(z)$, uniforme, qui admet l'infini et l'origine pour points singuliers essentiels isolés, qui n'admet *aucune valeur asymptotique* lorsque z tend vers l'infini (ou vers l'origine), et pour laquelle la famille des fonctions $f_t(z) = f(zt)$, qui correspond à $\sigma(t) = t$ [1], (la courbe C étant un rayon issu de l'origine) est *normale autour de tout point du plan, excepté à l'origine.*

On s'adresse à une fonction doublement périodique $\varphi(\mathrm{Z})$ dont les périodes sont $2\pi i$ et a (a nombre réel positif) [2], et l'on pose

$$f(z) = \varphi(\log z).$$

La période $2\pi i$ de $\varphi(\mathrm{Z})$ rend $f(z)$ uniforme dans tout le plan, o et ∞ étant points singuliers essentiels isolés de $f(z)$; $f(z)$ est tel que

$$f(ze^a) = f(z),$$

$f(z)$ pas plus que $\varphi(\mathrm{Z})$ n'a de valeur asymptotique. Formons la famille

$$f_t(z) = f(zt) = \varphi(\log z + \log t) = \varphi(\mathrm{Z} + \log t) = \varphi_t(\mathrm{Z}),$$

---

(1) On pourrait remplacer C par une infinité de spirales logarithmiques convenables de pôle O, chacune de ces spirales correspondant à $\sigma(t) = \sigma^{t-1}$ et σ étant un nombre complexe tel que $\log \sigma$ soit le produit d'une *période quelconque* de $\varphi(\mathrm{Z})$ par un nombre *réel*, de telle façon que le vecteur $\log \sigma$ soit parallèle à un vecteur période.

(2) Si la période a n'était pas réelle, on prendrait pour courbe C une spirale logarithmique convenable au lieu d'un rayon; par exemple $\sigma(t) = \sigma^{t-1}$, σ étant tel que $\dfrac{\log \sigma}{a}$ soit réel.

t variant de 1 à $+\infty$, $\log t$ varie de 0 à $+\infty$. Lorsque z décrit un petit cercle ω_0 ne contenant pas l'origine, Z décrit dans son plan une petite aire D simplement connexe, intérieure à un parallélogramme de périodes de la fonction $\varphi(Z)$, et lorsque t varie, $Z + \log t$ décrit une petite bande D_1 parallèle à l'axe réel, et comprise entre les deux tangentes à l'aire D, parallèle à cet axe réel, qui comprennent entre elles l'aire D.

Or, si le rayon de ω_0 est assez petit, l'aire D est arbitrairement petite, et la bande D_1, *parallèle à une période de* φ, est arbitrairement étroite. Dans cette bande, $W = \varphi(Z)$ ne prend que des valeurs contenues dans une bande fermée du plan W d'épaisseur arbitrairement petite : il nous suffit de savoir qu'il y a une infinité de valeurs (formant des aires) que la fonction $\varphi(Z)$ ne peut prendre dans la bande D_1, que les $\varphi_t(Z)$ ne peuvent prendre dans l'aire D, et par conséquent que les $f_t(z)$ ne prennent pas dans l'aire ω_0, Ces fonctions $f_t(z)$ forment donc une famille normale en tout point du plan z. Lorsque z décrit un rayon fixe quelconque OU allant de 0 à $+\infty$ le point $W = f(z)$ décrit périodiquement une infinité de fois une certaine courbe analytique fermée $\mathfrak{C}$ (qui peut d'ailleurs passer par le point à l'infini du plan W). Lorsque z décrit un angle U_1OU_2 assez petit contenant le rayon considéré, $W = f(z)$ décrira périodiquement une bande fermée limitée par deux courbes analytiques $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ qui encadrent la courbe $\mathfrak{C}$. Lorsque l'ouverture de l'angle U_1OU_2 tend vers zéro, les deux courbes $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ tendent vers la courbe $\mathfrak{C}$. Lorsque l'ouverture de l'angle U_1OU_2 grandit jusqu'à atteindre 2π, la bande comprise entre $\mathfrak{C}_1$ et $\mathfrak{C}_2$ s'élargit indéfiniment jusqu'à recouvrir le plan des w tout entier un nombre de fois égal à l'*ordre* de la fonction doublement périodique $\varphi(Z)$.