JOSEPH PÉRÈS

Sur certaines transformations fonctionnelles et leur application à la théorie des fonctions permutables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 36 (1919), p. 37-50
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1919_3_36__37_0>

SUR

CERTAINES TRANSFORMATIONS FONCTIONNELLES

ET

LEUR APPLICATION A LA THÉORIE DES FONCTIONS PERMUTABLES

PAR M. JOSEPH PÉRÈS.

I. — Préliminaires.

1. Je rappelle que l'on désigne par le produit symbolique $\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}$ ou $\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}(x, y)$ la composition

$$\int_x^y f(x, \xi)\varphi(\xi, y)\,d\xi$$

des deux fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$. Ce produit symbolique obéit aux règles de calcul d'un produit ordinaire si les fonctions f et φ sont permutables, c'est-à-dire si

$$\overset{*}{f}\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}.$$

Dans le cas où la fonction $f(x, y)$ est du premier ordre, $[f(x, x) \neq 0]$, on peut toujours, sans restreindre la généralité, supposer la fonction f égale à 1, et ses dérivées premières nulles pour $x = y$. Toutes les fonctions permutables avec $f(x, y)$ se mettent alors sous la forme (Volterra)

$$(a) \qquad \lambda(y - x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\,\Phi(\xi; x, y)\,d\xi,$$

λ étant une fonction arbitraire et Φ dépendant de f. Toutes ces fonctions sont d'ailleurs permutables entre elles; nous dirons qu'elles forment un corps de fonctions permutables dont Φ est la fonction génératrice.

M. Volterra a donné un procédé pour former Φ à partir de f et a prouvé que la fonction Φ vérifie la condition

$$
\begin{aligned}
(1)\qquad & \Phi(\tau;\, x, y-\eta) + \Phi(\eta;\, \tau + x, y) + \int_{x+\tau}^{y-\eta} \Phi(\eta;\, \zeta, y)\,\Phi(\tau;\, x, \zeta)\, d\zeta \\
& = \Phi(\eta;\, x, y-\tau) + \Phi(\tau;\, x+\eta, y) + \int_{x+\eta}^{y-\tau} \Phi(\tau;\, \zeta, y)\,\Phi(\eta;\, x, \zeta)\, d\zeta.
\end{aligned}
$$

Cette relation exprime simplement la permutabilité de deux fonctions du corps ([1]). Elle caractérise donc les fonctions génératrices.

2. Mais il est aisé de se rendre compte que *la fonction génératrice d'un corps n'est pas unique.*

Soit Φ_0 la fonction génératrice du corps des fonctions permutables

$$\lambda(y-x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\,\Phi_0(\xi;\, x, y)\, d\xi.$$

Effectuons sur la fonction arbitraire λ la transformation de Volterra

$$(2)\qquad \lambda(\xi) = \mu(\xi) + \int_0^{\xi} \mu(\eta)\,\mathrm{K}(\eta;\, \xi)\, d\eta,$$

on a

$$\lambda(y-x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\,\Phi_0(\xi;\, x, y)\, d\xi = \mu(y-x) + \int_0^{y-x} \mu(\xi)\,\Phi(\xi;\, x, y)\, d\xi$$

avec

$$(3)\qquad \Phi(\xi;\, x, y) = \mathrm{K}(\xi, y-x) + \Phi_0(\xi;\, x, y) + \int_{\xi}^{y-x} \mathrm{K}(\xi, \sigma)\,\Phi_0(\sigma;\, x, y)\, d\sigma.$$

La fonction Φ, donnée par la formule (3), engendre évidemment le même corps de fonctions permutables que Φ_0.

Inversement, d'ailleurs, *la formule* (3), *où* $\mathrm{K}(x, y)$ *est arbitraire, donne l'expression générale des fonctions génératrices d'un corps en fonction de l'une d'elles* Φ_0. En effet, si Φ_0 et Φ_1 sont deux fonctions

([1]) Je renvoie, pour toutes indications bibliographiques, à ma Thèse (*Journ. de Math.*, 1915) et au Mémoire de M. Volterra [*Sulla teoria delle potenze, dei logaritmi, delle funzioni di composizione* (*Atti dei Lincei*, 1916)].

génératrices d'un corps, toute fonction $\varphi(x, y)$ du corps est

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \lambda(y-x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\,\Phi_0(\xi;\, x, y)\, d\xi \\ &= \mu(y-x) + \int_0^{y-x} \mu(\xi)\,\Phi_1(\xi;\, x, y)\, d\xi.\end{aligned}$$

φ étant donnée, les fonctions λ et μ sont déterminées; il existe donc entre elles une certaine relation. Tout revient à démontrer que cette relation est de la forme (2) : c'est immédiat, car l'équation précédente donne, pour $x = 0$,

$$\lambda(y) + \int_0^{y} \lambda(\xi)\,\Phi_0(\xi;\, 0, y)\, d\xi = \mu(y) + \int_0^{y} \mu(\xi)\,\Phi_1(\xi;\, 0, y)\, d\xi;$$

on en tire, en résolvant par rapport à λ, l'expression de λ sous la forme demandée.

3. On est ainsi amené à traiter le problème suivant : *Parmi toutes les fonctions génératrices d'un corps, déterminer les plus simples, celles qui mettront le mieux en évidence les propriétés du corps.* C'est ce problème que j'espère avoir résolu ici.

J'ai été guidé par l'idée suivante : parmi tous les corps de fonctions permutables, le plus simple, nommé par M. Volterra *corps du cycle fermé*, est celui de toutes les fonctions permutables avec l'unité. Il est composé de toutes les fonctions de $y - x$, $\lambda(y - x)$.

Un corps quelconque résulte donc du corps du cycle fermé par la transformation

$$(a) \qquad \lambda(y-x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\,\Phi(\xi;\, x, y)\, d\xi,$$

que je désignerai par la notation abrégée

$$\Omega(\lambda).$$

Si l'on veut pouvoir déduire les propriétés d'un corps quelconque de celles, très simples, du corps du cycle fermé, il faut choisir la fonction génératrice Φ de façon que la transformation Ω conserve la composition. En d'autres termes, de façon que si l'on a

$$\varphi(x, y) = \Omega(\lambda),$$
$$\psi(x, y) = \Omega(\mu),$$

on ait

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}(x, y) = \Omega(\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\mu}).$$

En développant les calculs, l'équation précédente peut s'écrire

$$\int_0^{y-x} \lambda(\eta)\,d\eta \int_0^{y-x-\eta} \mu(\tau)\,d\tau \Big\{ \Phi(\eta+\tau;\, x, y) - \Phi(\tau;\, x+\eta, y) - \Phi(\eta, x, y-\tau) - \int_{x+\eta}^{y-\tau} d\xi\, \Phi(\eta;\, x, \xi)\, \Phi(\tau;\, \xi, y) \Big\} = 0.$$

On en déduit

$$(4)\quad \Phi(\tau+\eta : x, y) = \Phi(\tau;\, x+\eta, y) + \Phi(\eta;\, x, y-\tau) + \int_{x+\eta}^{y-\tau} \Phi(\eta;\, x, \zeta)\, \Phi(\tau;\, \zeta, y)\, d\zeta \quad [1].$$

4. Dans la suite je résoudrai d'abord l'équation (4), déterminant ainsi toutes les transformations Ω qui conservent la composition.

Je montrerai alors comment les transformations ainsi obtenues peuvent servir à engendrer n'importe quel corps de fonctions permutables. J'aurai ainsi une méthode de recherche des fonctions permutables tout à fait indépendante des précédentes.

Je montrerai enfin, sur quelques exemples, comment l'expression, ainsi donnée des fonctions d'un corps, est très avantageuse pour l'étude de leurs propriétés.

II. — Résolution de l'équation fonctionnelle (4).

5. Si l'on suppose $\Phi(\tau;\, x, y)$ définie et continue dans le domaine

$$(d)\qquad 0 \leqq x \leqq y \leqq a, \qquad 0 \leqq \tau \leqq y - x,$$

[1] Cette relation entraîne évidemment (1); toutes les solutions de (4) sont des fonctions génératrices.

les fonctions précédentes $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ sont définies dans le domaine

(D) $$0 \leqq x \leqq y \leqq a$$

et la condition

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi} = \Omega(\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\mu})$$

s'exprime par la relation (4), où $0 \leqq x \leqq y \leqq a$ et où τ, η, $\tau + \eta$ sont compris entre 0 et $y - x$.

Nous allons déterminer toutes les solutions $\Phi(\tau; x, y)$ de (4), définies et continues dans le domaine (d). On pourrait naturellement remplacer ce domaine par d'autres (*cf.* § III, n° 14). Nous avons enfin besoin de faire sur Φ une hypothèse de dérivabilité.

6. Faisons dans l'équation (4) le changement de variables

$$x + \eta = x', \qquad y - \tau = y',$$

elle devient

(4') $$\Phi(\tau + \eta; x' - \eta, y' + \tau) = \Phi(\tau; x', y' + \tau) + \Phi(\eta; x' - \eta, y') + \int_{x'}^{y'} \Phi(\eta; x' - \eta, \zeta)\Phi(\tau; \zeta, y' + \tau)\, d\zeta.$$

Et en posant

$$\Phi(\tau; x', y') = \Psi(\tau; x', y' - \tau), \qquad \Phi(\tau; x', y') = \Psi_0(\tau; x' + \tau, y');$$

(4'') $$\Psi(\tau + \eta; x' - \eta, y' - \eta) = \Psi(\tau; x', y') + \Psi_0(\eta; x', y') + \int_{x'}^{y'} \Psi_0(\eta; x', \zeta)\, \Psi(\tau; \zeta, y')\, d\zeta.$$

En y faisant $\tau = \eta = 0$, il vient

$$\Psi_0(0; x', y') + \int_{x'}^{y'} \Psi_0(0; x', \zeta)\, \Psi(0, \zeta, y')\, d\zeta,$$

ce qui prouve que

(5) $$\Phi(0; x, y) = \Psi(0; x, y) = \Psi_0(0; x, y) = 0.$$

En dérivant enfin (4'') par rapport à τ et en y faisant $\tau = 0$, on obtient

(6) $$\Psi'_\tau(\eta; x' - \eta, y' - \eta) = \Psi'_\tau(0; x', y') + \int_{x'}^{y'} \Psi_0(\eta; x', \zeta)\, \Psi'_\tau(0; \zeta, y')\, d\zeta.$$

et, en posant

$$\Psi'_\tau(0;\, x',\, y') = f(x',\, y'),$$

$$(6') \quad \Psi'_\tau(\eta;\, x'-\eta,\, y'-\eta) = f(x',\, y') + \int_{x'}^{y'} \Psi_0(\eta;\, x',\, \zeta) f(\zeta,\, y')\, d\zeta.$$

Après le changement de variables

$$\begin{aligned} x'-\eta &= x, \\ y'-\eta &= x, \end{aligned}$$

l'équation précédente peut s'écrire

$$\Psi'_\eta(\eta;\, x,\, y) = f(x+\eta,\, y+\eta) + \int_x^y \Psi(\eta;\, x,\, \zeta) f(\eta+\zeta,\, y+\eta)\, d\zeta$$

et, en intégrant par rapport à η et tenant compte de (5), on obtient enfin

$$(7) \quad \Psi(\eta;\, x,\, y) = \int_0^\eta f(x+\eta_1,\, y+\eta_1)\, d\eta_1 + \int_0^\eta d\eta_1 \int_x^y d\zeta\, \Psi(\eta_1;\, x,\, \zeta) f(\eta_1+\zeta,\, y+\eta_1).$$

7. Cette dernière équation est aisée à résoudre par approximations successives.

Si l'on suppose $f(x,\, y)$ connue dans le domaine

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a,$$

sa solution sera

$$\Psi(\eta;\, x,\, y) = \Psi_1 + \Psi_2 + \ldots + \Psi_n + \ldots,$$

en posant

$$\Psi_1 = \int_0^\eta f(x+\eta_1,\, y+\eta_1)\, d\eta_1$$

et

$$\Psi_n = \int_0^\eta d\eta_1 \int_x^y d\zeta\, \Psi_{n-1}(\eta_1;\, x,\, \zeta) f(\eta_1+\zeta,\, y+\eta_1).$$

Les diverses fonctions Ψ_n se mettent sous la forme très simple suivante : en posant

$$f(x+\eta,\, y+\eta) = G_\eta(x,\, y),$$

on vérifie que

$$\Psi_n = \int_0^{\eta} d\eta_n \int_0^{\eta_n} d\eta_{n-1} \ldots \int_0^{\eta_2} d\eta_1 \overset{*}{G}_{\eta_1} \overset{*}{G}_{\eta_2} \ldots \overset{*}{G}_{\eta_n}(x, y).$$

Il n'y a pas de difficultés à prouver la convergence de la série des approximations, ni à prouver que les diverses approximations sont définies dans le domaine

$$0 \leqq x \leqq y, \qquad \eta \geqq 0, \qquad y + \eta \leqq a.$$

La solution $\Psi(\eta; x, y)$ de (7) est donc définie dans le même domaine.

8. Nous sommes donc conduits à poser

$$(9) \qquad \begin{aligned} \Phi(\tau; x, y) &= \Psi(\tau; x, y - \tau) \\ &= \sum_n \int_0^{\tau} d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1} \ldots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \overset{*}{G}_{\tau_1} \overset{*}{G}_{\tau_2} \ldots \overset{*}{G}_{\tau_n}(x, y - \tau), \end{aligned}$$

la fonction Φ étant bien définie pour

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a, \qquad 0 \leqq \tau \leqq y - x.$$

Les fonctions Φ ainsi construites dépendent d'une fonction arbitraire $f(x, y)$. D'après la marche suivie, il est évident que toutes les solutions cherchées de l'équation (4) peuvent se mettre sous la forme (9). Mais on ne peut pas affirmer, *a priori*, que l'expression (9) fournisse, quelle que soit $f(x, y)$, une solution de (4).

Nous allons le vérifier ; pour cela nous substituerons à Φ l'expression (9) dans l'équation (4) ou dans l'équation équivalente (4''), qui peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \Psi(\tau + \eta; x, y) = {} & \Psi(\tau; x + \eta, y + \eta) + \Psi(\eta; x, y) \\ & + \int_x^y \Psi(\eta; x, \zeta) \Psi(\tau; \zeta + \eta, y + \eta) d\zeta. \end{aligned}$$

Il suffit de vérifier que

$$\Psi_1(\tau + \eta; x, y) = \Psi_1(\tau; x + \eta, y + \eta) + \Psi_1(\eta; x, y)$$

et

$$(10)\qquad \Psi_n(\tau+\eta;\, x,\, y) = \Psi_n(\tau;\, x+\eta,\, y+\eta) + \Psi_n(\eta;\, x,\, y) + \sum_{p+q=n} \int_x^y \Psi_p(\eta;\, x,\, \zeta)\Psi_q(\tau;\, \zeta+\eta,\, y+\eta)\,d\zeta,$$

les indices p et q variant de 1 à $n-1$.

La première de ces formules est évidente, la seconde (10) s'établit comme suit : la relation entre Ψ_n et Ψ_{n-1} permet d'écrire le premier membre

$$\int_0^{\tau+\eta} d\eta' \int_x^y d\zeta \Psi_{n-1}(\eta';\, x, \zeta) f(\eta'+\zeta,\, \eta'+y)$$

ou

$$\Psi_n(\eta;\, x,\, y) + \int_0^{\tau} d\eta' \int_x^y d\zeta \Psi_{n-1}(\eta'+\eta;\, x,\, \zeta) f(\eta+\eta'+\zeta,\, \eta+\eta'+y);$$

en supposant enfin la formule (10) établie pour la valeur $n-1$ de la variable, il vient

$$\begin{aligned}
&= \Psi_n(\eta;\, x,\, y) + \int_0^{\tau} d\eta' \int_{x+\eta}^{y+\eta} d\zeta \Psi_{n-1}(\eta';\, x+\eta, \zeta) f(\eta'+\zeta,\, y+\eta'+\eta)\\
&\quad + \int_0^{\tau} d\eta' \int_x^y d\zeta \Psi_{n-1}(\eta;\, x,\, \zeta) f(\eta'+\eta+\zeta,\, \eta+\eta'+y)\\
&\quad + \sum_{p+q=n-1} \int_x^y d\zeta' \Psi_p(\eta;\, x,\, \zeta') \int_0^{\tau} d\eta' \int_{\zeta'}^{y} d\zeta \times\\
&\qquad \times \Psi_q(\eta';\, \zeta'+\eta,\, \zeta+\eta) f(\eta'+\eta+\zeta,\, y+\eta'+\eta),
\end{aligned}$$

et, en tenant compte encore de la relation entre Ψ_n et Ψ_{n-1},

$$\begin{aligned}
&= \Psi_n(\eta;\, x, y) + \Psi_n(\tau;\, x+\eta,\, y+\eta) + \int_x^y \Psi_{n-1}(\eta;\, x,\, \zeta)\, \Psi_1(\tau;\, \zeta+\eta,\, y+\eta)\,d\zeta\\
&\quad + \sum_{p+q=n-1} \int_x^y d\zeta \Psi_p(\eta;\, x,\, \zeta) \Psi_{q+1}(\tau;\, \zeta+\eta,\, y+\eta);
\end{aligned}$$

on retrouve bien le second membre de (10).

9. En résumé, *dans le domaine*

$$(d)\qquad 0 \leqq x \leqq y \leqq a, \qquad 0 \leqq \eta \leqq y - x,$$

toutes les solutions de l'équation fonctionnelle (4) *sont données par la formule*

$$(11)\quad \Phi(\eta;\, x, y) = \sum_n \int_0^{\eta} d\eta_n \int_0^{\eta_n} d\eta_{n-1} \ldots \int_0^{\eta_2} d\eta_1\, \overset{*}{G}_{\eta_1} \overset{*}{G}_{\eta_2} \ldots \overset{*}{G}_{\eta_n}(x, y-\eta),$$

avec

$$G_\eta(x, y) = f(x+\eta, y+\eta),$$

$f(x, y)$ *étant une fonction arbitraire définie pour*

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a.$$

III. — Représentation, par une des transformations précédentes, d'un corps déterminé de fonctions permutables.

10. Nous avons déterminé ainsi toutes les transformations Ω qui conservent la composition.

Chacune des fonctions Φ précédentes est fonction génératrice d'un corps de fonctions permutables. Les fonctions du corps sont données par la formule (a) et, en mettant à part les singularités qui peuvent provenir de $\lambda(y-x)$, sont définies dans le domaine

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a,$$

puisque (d) est le domaine d'existence de Φ.

11. Nous obtenons ainsi tous les corps de fonctions permutables. Il suffit, pour s'en assurer, de prouver que, $F(x, y)$ étant une fonction quelconque, telle que

$$(12)\qquad F(x, x) = 1, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y=x} = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y=x} = 0,$$

et définie pour

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a,$$

on peut choisir l'arbitraire $f(x, y)$ dont dépend Φ, de façon que

$$F(x, y) = 1 + \int_0^{y-x} \Phi(\tau;\, x, y)\, d\tau = \Omega(1)$$

ou

$$F(x, y) = 1 + \int_0^{y-x} \Psi(\tau; x, y-\tau)\, d\tau.$$

12. Pour résoudre cette équation, mettons en évidence la façon dont le deuxième membre dépend de f.

En posant

$$K(x, y) = \int_0^{y-x} \Psi(\tau; x, y-\tau)\, d\tau,$$

il vient, d'après l'équation (7),

$$\begin{aligned} K(x, y) = & \int_0^{y-x} d\tau \int_0^{\tau} f(x+\eta_1, y+\eta_1-\tau)\, d\eta_1 \\ & + \int_0^{y-x} d\tau \int_0^{\tau} d\eta_1 \int_x^{y-\tau} \Psi(\eta_1; x, \zeta) f(\eta_1+\zeta, y+\eta_1-\tau)\, d\zeta, \end{aligned}$$

d'où, après quelques changements de variable,

$$\begin{aligned} K(x, y) = & \int_x^y d\xi_1 \int_{\xi_1}^y d\xi_2 f(\xi_1, \xi_2) + \int_x^y d\xi_1 \int_{\xi_1}^y d\xi_2 \int_0^{\xi_1 - x} d\eta \times \\ & \times \Psi(\eta; x, \xi_1 - \eta) f(\xi_1, \xi_2), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, symboliquement,

$$K(x, y) = \overset{***}{1f1} + \overset{***}{Kf1}.$$

On en tire

$$K(x, y) = \overset{***}{1f1} + \overset{****}{1f1f1} + \overset{*******}{1f1f1f1} + \ldots.$$

13. L'équation qui doit déterminer f est donc

$$F(x, y) = 1 + \overset{***}{1f1} + \overset{*****}{1f1f1} + \ldots.$$

Grâce aux conditions (12) on obtient une équation équivalente en la dérivant par rapport à x et à y. En posant $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = H$, cette équation s'écrit

$$-H = f + \overset{***}{f1f} + \overset{*****}{f1f1f} + \ldots$$

ou

$$-\mathrm{H} = \overset{*}{f}\frac{\overset{*}{1}^{\circ}}{\overset{*}{1}^{\circ} - \overset{**}{1f}},$$

d'où

$$-\overset{*}{\mathrm{H}}(\overset{*}{1}^{\circ} - \overset{**}{1f}) = \overset{*}{f},$$

d'où

$$f = -\frac{\overset{*}{1}^{\circ}}{\overset{*}{1}^{\circ} - \overset{**}{\mathrm{H}1}}\overset{*}{\mathrm{H}} = -\overset{*}{\mathrm{H}} - \overset{***}{\mathrm{H}1\mathrm{H}} - \overset{*****}{\mathrm{H}1\mathrm{H}1\mathrm{H}} - \ldots.$$

14. Le problème de la recherche des fonctions permutables avec F est ainsi résolu. La seule restriction étant l'existence de $\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial x \partial y}$.

Nous nous sommes placés, jusqu'à présent, dans le domaine

$$0 \leqq x \leqq y \leqq a.$$

Il n'y a naturellement aucune difficulté à le remplacer par

$$a \lesseqgtr x \lesseqgtr y \lesseqgtr b,$$

ou plus généralement par tout domaine tel que la composition de deux fonctions définies dans ce domaine fournisse une nouvelle fonction définie dans ce même domaine.

IV. — Applications à quelques développements en série.

15. M. Volterra a remarqué que la série

$$(13) \qquad a_0 \mathrm{F}(x, y) + a_1 \overset{*}{\mathrm{F}}{}^2(x, y) + \ldots + a_n \overset{*}{\mathrm{F}}{}^{n+1}(x, y) + \ldots$$

représente, si elle converge, une fonction permutable avec F.

J'ai montré, dans ma Thèse [1], en me limitant au cas où $\mathrm{F}(x, y)$ est analytique, que toutes les fonctions $\mathrm{G}(x, y)$, permutables avec $\mathrm{F}(x, y)$ et analytiques dans un voisinage de $y = x$, y admettent un développement de forme (13) convergent; la condition nécessaire et

(1) Chapitre IV.

suffisante de convergence de (13) étant que la série

$$\sum a_n \frac{z^n}{n!} \tag{14}$$

représente un élément de fonction analytique. Les autres fonctions $G(x, y)$ admettent des développements en série de polynomes symboliques de F.

Je puis, maintenant, grâce à l'étude précédente, compléter ces résultats, les étendant aux fonctions non analytiques et précisant la relation qui existe entre (13) et (14).

16. Remarquons d'abord que la relation

$$\overset{*}{\Omega}(\lambda)\,\overset{*}{\Omega}(\mu) = \Omega(\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\mu}),$$

vérifiée par les transformations définies au paragraphe II, entraîne, si n est entier,

$$\left[\overset{*}{\Omega}(\lambda)\right]^n = \Omega(\overset{*}{\lambda}{}^n).$$

En particulier, si l'on a choisi Ω comme il vient d'être dit (§ III), on a

$$F(x, y) = \Omega(1),$$

d'où

$$\overset{*}{F}{}^n(x, y) = \Omega\left(\overset{*}{1}{}^n\right) \tag{15}$$

avec

$$\overset{*}{1}{}^n = \frac{(y-x)^{n-1}}{\Gamma(n)}.$$

La relation (15) entraîne immédiatement

$$\overset{*}{F}{}^{n+1}(x, y) = \frac{(y-x)^n}{n!}\left\{1 + \theta\,\frac{M(x-y)^2}{n+2}\right\},$$

M étant une constante et θ compris entre o et 1. Il en résulte que les deux séries

$$\sum a_n \overset{*}{F}{}^{n+1} \tag{13}$$

et

$$(14) \qquad \sum a_n \overset{*}{1}{}^{n+1} = \sum a_n \frac{(y-x)^n}{n!}$$

ont même domaine de convergence.

17. Étant donnée une fonction $G(x, y)$, permutable avec $F(x, y)$, il est aisé de reconnaître si elle admet un développement (13). Il existe une fonction $\lambda(y-x)$ telle que

$$G(x, y) = \Omega(\lambda).$$

Si λ est analytique et admet un développement convergent (14), on en déduira, en lui appliquant l'opération Ω, le développement (13) pour $G(x, y)$; et inversement.

Sinon, la fonction λ admet, sous restriction de continuité, un développement en série de polynomes, uniformément convergent

$$\lambda(y-x) = \sum_0^\infty {}_n \left(a_0^{(n)} + a_1^{(n)} \frac{y-x}{1} + \ldots + a_{p_n}^{(n)} \frac{(y-x)^{p_n}}{p_n!} \right),$$

on en déduit, par l'opération Ω, pour $G(x, y)$, le développement

$$G = \sum_0^\infty {}_n \left(a_0^{(n)} F + a_1^{(n)} \overset{*}{F}{}^2 + \ldots + a_{p_n}^{(n)} \overset{*}{F}{}^{p_n+1} \right),$$

uniformément convergent. Les deux séries précédentes sont, d'ailleurs, simultanément uniformément convergentes.

Ce sont les résultats annoncés au début de ce paragraphe.

18. Je veux signaler, pour terminer, une autre application des considérations précédentes.

M. Volterra a défini, par la résolution de l'équation

$$\overset{*}{\varphi}{}^q = f,$$

la fonction $\overset{*}{f}{}^{\frac{1}{q}}$ et en a déduit la définition de $\overset{*}{f}{}^{\frac{p}{q}}$, l'exposant $\frac{p}{q}$ étant rationnel. Il indique, dans le Mémoire déjà cité, que, si $\overset{*}{f}^{\frac{p}{q}}$ tend vers une limite lorsque $\frac{p}{q}$ tend vers l'irrationnelle z, on pourra prendre cette limite pour définition de $\overset{*}{f}^{z}$.

L'existence de cette limite était difficile à démontrer, car la définition précédente de $\overset{*}{f}^{\frac{p}{q}}$ ne mettait pas en évidence la façon dont cette fonction dépend de $\frac{p}{q}$. M. Volterra y parvient en développant d'abord la théorie, très élégante, des logarithmes de composition.

Grâce aux considérations précédentes, la définition de $\overset{*}{f}^{z}$ est immédiate. On prouve sans peine que

$$\overset{*}{f}^{\frac{p}{q}} = \Omega\left(\overset{*}{1}^{\frac{p}{q}}\right),$$

et l'on en déduit que

$$\overset{*}{f}^{z} = \Omega\left(\overset{*}{1}^{z}\right). \tag{16}$$

On peut enfin développer, à partir de la formule (16), la théorie des logarithmes de composition.

Si l'exposant z est négatif, on peut encore écrire la formule (16), en étendant convenablement la signification du signe intégrale qui y figure, pour que cette intégrale conserve un sens [1]. Comme j'ai déjà montré [2] l'intérêt de semblables extensions du sens de l'intégrale, dans la théorie de la composition, et comme j'aurai sans doute à revenir sur ce sujet, je me borne à indiquer le fait.

---

(1) Si z n'est pas entier, il suffit de prendre la partie finie de l'intégrale.

(2) *Rend. R. Acc. dei Lincei*, 7 et 21 janvier 1917.