

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LÉOPOLD LEAU

Sur la mesure des ensembles linéaires

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 35 (1918), p. 313-392

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1918_3_35__313_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR

LA MESURE DES ENSEMBLES LINÉAIRES,

PAR M. LÉOPOLD LEAU.

Introduction.

On doit à M. Jordan une première théorie de la mesure des ensembles. Une théorie plus complète a été édifiée par M. Borel qui l'a reprise sur de nouveaux principes et par M. Lebesgue qui, lui assurant une base élargie, en a donné un exposé systématique. Toutefois elle n'épuise pas encore le problème fondamental. S'il peut sembler au moins prématuré de s'occuper des ensembles qui lui échappent puisque aucun d'eux, comme l'a montré M. Lebesgue, ne saurait être effectivement construit avec les moyens actuels de l'analyse, la question se pose de comparer entre eux les ensembles de mesure nulle. C'est ce que M. Borel a commencé de faire par une méthode qui lui a donné d'intéressants résultats (1).

Je pose le problème de la mesure, *pour une famille d'ensembles*, en me limitant d'ailleurs dans ce Mémoire aux ensembles linéaires. Les conditions sont les conditions habituelles de l'égalité et de la somme; mais je distingue le cas où l'on exige que la propriété de la somme s'étende à une infinité dénombrable d'ensembles de celui où l'on se contente d'une propriété valable pour une somme d'un nombre limité d'entre eux, réservant aux familles qui satisfont à la propriété

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XLI, fasc. 1.

générale la qualification de *mesurables*, appelant les autres *semi-mesurables*. Sans doute il est précieux que la condition relative à la somme soit réalisée dans toute son étendue, mais les faits sont là; d'ailleurs, même dans une famille semi-mesurable, il est des circonstances où l'on peut affirmer que la propriété a lieu pour certaines infinités d'ensembles. Restreignant le problème de la mesure à telle ou telle famille, j'ai dû ajouter aux conditions ordinaires celle-ci, que les mesures des ensembles fussent déterminées par elles.

Disons qu'un milieu (ensemble non borné) est de translation lorsqu'il admet des translations ou périodes h_n formant une suite qui tend vers zéro; j'entends par là que le déplacement h_n superpose le milieu à lui-même. Un cas particulier remarquable est celui où le milieu admet pour période la différence d'abscisses de deux quelconques de ses points; j'appelle un tel milieu *homogène*; à un changement d'origine près, c'est un module de points. Un milieu de translation est la somme de milieux homogènes, de même module de périodes, et réciproquement.

On étudie d'abord ici des ensembles bornés situés dans un même milieu de translation. A de tels ensembles s'applique soit la méthode de M. Jordan, soit celle de MM. Borel et Lebesgue. On forme ainsi une première espèce de familles mesurables ou semi-mesurables.

Les milieux homogènes deux à deux commensurables sont à leur tour réunis en familles auxquelles s'étend la notion de mesure. Contrairement aux conventions faites ailleurs (1) il a fallu donner des mots diviseur et multiple des définitions conformes à celles en usage dans toute théorie de mesure de grandeurs. Pour éviter toute confusion elles ne sont employées qu'avec les milieux. Des familles de milieux homogènes on passe ensuite à certaines familles de milieux plus généraux de translation.

Envisageons une telle famille. A chacun des milieux dont elle se compose sont attachés des ensembles bornés qui, dans la première étude, ont été réunis en un même groupe. De tous ces groupes formons un système unique. Il est lui aussi, selon les cas, mesurable ou semi-

(1) Voir notamment POINCARÉ, *Sur un mode nouveau de représentation géométrique des formes quadratiques définies ou indéfinies* (*Journal de l'École Polytechnique*, 1880).

mesurable et il est encore susceptible d'extension; à cette démonstration est consacré le dernier Chapitre. C'est le résultat fondamental du présent Mémoire (1).

J'ai consulté surtout les travaux de MM. Borel et Lebesgue; l'indication en est donnée par la suite quand il y a lieu.

Au cours de ma rédaction a paru l'Ouvrage de M. de la Vallée Poussin (*Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*), dans la Collection de M. E. Borel.

CHAPITRE I.

ENSEMBLES APPARTENANT A UN MÊME MILIEU DE TRANSLATION.

I. MILIEUX DE TRANSLATION. DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES. — Nous considérons des ENSEMBLES LINÉAIRES, c'est-à-dire des ensembles de points sur une droite ou de nombres qui sont les abscisses de tels points sur un axe.

Un ensemble est inclus ou contenu dans un autre ou lui appartient si tout point du premier est un point du second.

Nous appliquons l'expression *somme* d'ensembles, en nombre fini ou infini, uniquement à des ensembles tels qu'aucun point ne soit commun à deux au moins d'entre eux.

Nous dirons qu'un ensemble *admet une période ou translation* h , si x étant l'un quelconque des points de l'ensemble l'ensemble $x + h$ est identique à l'ancien, c'est-à-dire si le glissement de la droite sur elle-même d'une quantité h fait coïncider l'ensemble avec lui-même. Les deux bornes d'un tel ensemble sont infinies.

On appellera *milieu de translation* un ensemble qui admet des translations $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$, formant une suite ayant zéro pour limite ou, plus brièvement, des translations infinitésimales.

Un milieu de translation est partout dense.

Un cas particulier très important est celui des milieux homogènes.

(1) Les principaux résultats ont été publiés aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 23 juillet 1917.

2. MILIEUX HOMOGÈNES. — *Définitions.* — Un ensemble de points qui ne se réduit pas à une suite de points équidistants constitue un *milieu homogène* lorsque toute translation qui amène un point de l'ensemble sur un autre point de même ensemble fait entièrement coïncider l'ensemble avec lui-même.

Abstraction faite de l'exception relative à la file de points équidistants, on constate les propriétés suivantes :

Si a, b sont deux nombres quelconques de l'ensemble, la définition exprime qu'il admet la translation $b - a$; si a, b, c sont trois nombres quelconques elle exprime encore que d tel que $d - c = b - a$ appartient à l'ensemble.

L'ensemble coïncide avec lui-même par retournement autour du milieu du segment joignant deux quelconques de ses points. Cela résulte de ce que, par rapport à un tel point, tous les points de l'ensemble sont deux à deux symétriques; car si a et b sont les abscisses de deux points quelconques, puis c un autre point, le point d tel que $d - b = a - c$ appartient à l'ensemble. C'est le seul mode de coïncidence par retournement. Le retournement autour de l'un des points de l'ensemble en est un cas particulier.

Si l'on prend l'un des points comme origine, l'ensemble des abscisses est un *module de nombres*, et réciproquement un module de nombres relatifs définit un tel ensemble de points rapporté à l'un d'eux pris comme origine : ce module, c'est le système de translations qui le caractérise.

S'il existe un intervalle limité dans lequel un tel ensemble n'ait qu'un nombre fini de points et si h est la distance minima de deux d'entre eux, l'ensemble se réduit à une série de points équidistants, d'équidistance h , $x_0 \pm nh$, x_0 étant l'un d'eux, car s'il existait, en dehors d'eux, un autre point ξ tel que

$$x_0 + ph < \xi < x_0 + (p + 1)h,$$

on en conclurait une translation $\xi - (x_0 + ph)$ inférieure à h . Hors ce cas simple un ensemble qui coïncide avec lui-même dès que l'on amène par translation un de ses points sur un autre est un *milieu homogène*.

Mais, puisqu'il est partout dense il admet des périodes aussi petites que l'on veut en valeur absolue. Donc :

Tout milieu homogène est un milieu de translation.

Une somme de milieux homogènes identiques est un milieu de translation.

Réciproquement, *tout milieu de translation est soit un milieu homogène soit une somme de milieux homogènes identiques.*

Le milieu \mathfrak{X} donné admet par hypothèse une suite $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$, de translations infinitésimales. Un point quelconque a de \mathfrak{X} engendre par ces translations un milieu homogène; \mathfrak{X} est une collection de tels ensembles dont deux quelconques sont évidemment identiques.

Voici quelques exemples de milieux homogènes : I. Tous les nombres relatifs, c'est-à-dire tous les points de la droite ; II. Les nombres commensurables ; III. Les nombres fractionnaires dont le dénominateur est une puissance d'un même nombre entier ; IV. Les nombres algébriques réels.

3. ENSEMBLES DE TRANSLATION D'UN MÊME TYPE OU FRAGMENTS D'UN MILIEU DE TRANSLATION. — Nous dirons qu'un *ensemble*, dont l'une au moins des bornes λ', λ'' est finie, est de *translation*, lorsqu'il coïncide avec la partie d'un milieu de translation comprise entre ces mêmes bornes, étant entendu que, si une borne appartient à l'ensemble, elle appartient au milieu. Si les deux bornes sont *finies*, l'ensemble est dit aussi un *fragment* du milieu. Définitions analogues dans le cas particulier d'un milieu homogène.

Deux fragments sont dits *égaux* s'ils peuvent coïncider par glissement. Leurs bornes étant λ', λ'' ($\lambda' < \lambda''$) et μ', μ'' ($\mu' < \mu''$) les différences $\lambda'' - \lambda', \mu'' - \mu'$ que nous appellerons *longueur des fragments* et qui sont celles des segments rectilignes de mêmes extrémités sont certainement égales. La réciproque n'est pas vraie; pour qu'elle ait lieu il faut encore, et il suffit, que les bornes inférieures (ou supérieures, ce sera la même condition) soient des points homologues, c'est-à-dire des points qui viennent en coïncidence par une certaine translation du milieu. Ainsi, dans le milieu constitué par les points

d'abscisses rationnelles, les fragments $(0, 1)$, $(e, e + 1)$ ne sont pas égaux; les fragments $(e, e + 1)$, $(e + \frac{1}{10}, e + \frac{11}{10})$ sont égaux. Nous appellerons *équivalents* deux fragments qui ont même longueur.

Pour qu'un fragment soit égal à lui-même après retournement il faut et il suffit qu'il soit symétrique par rapport à son milieu.

Lorsque deux fragments sont équivalents sans être égaux on peut les décomposer chacun en deux parties dont l'une a une longueur aussi petite que l'on veut, les fragments restants étant égaux. Soient, en effet, $(\alpha, \alpha + h)$, $(\beta, \beta + h)$ les fragments donnés; désignons par ε un nombre positif, petit à volonté; en choisissant une translation inférieure à ε on peut trouver un point α' , homologue de α , par exemple supérieur à β et tel que $\alpha' - \beta < \varepsilon$. Les fragments $(\alpha, \alpha + h)$, $(\alpha', \alpha' + h)$ sont égaux; la conclusion est immédiate.

Si deux fragments sont égaux ils ne peuvent coïncider après retournement préalable de l'un d'eux que si l'un d'eux et, par conséquent, tous les deux sont des fragments symétriques. Sinon ils deviennent équivalents; tel est par exemple alors le cas des fragments $(\pi, 4)$, $(10, 14 - \pi)$ dans le milieu des rationnels.

On sait qu'un intervalle I est dit la *somme* d'une infinité d'autres lorsque tout point intérieur à I est point intérieur ou point frontière d'un intervalle partiel. Nous dirons qu'un fragment est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité de fragments lorsque l'intervalle qui correspond au premier est la somme de ceux qui correspondent aux seconds. C'est là une restriction dans la définition générale de la somme d'une infinité d'ensembles; mais elle n'est effective (n° 6) que dans le cas de fragments qui, au sens de M. Borel, sont de mesure nulle.

4. Ceci posé, rappelons l'énoncé du problème de la mesure tel qu'il a été donné par M. Lebesgue⁽¹⁾ :

« Nous nous proposons d'attacher à chaque ensemble E borné,

⁽¹⁾ *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Gauthier-Villars, p. 103.

formé des points de Ox , un nombre positif ou nul, $m(E)$, que nous appelons *la mesure de E*, et qui satisfait aux conditions suivantes :

- » 1. *Deux ensembles égaux ont même mesure.*
- » 2. *L'ensemble somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans point commun deux à deux, a pour mesure la somme des mesures.*
- » 3. *La mesure de tous les points de $(0, 1)$ est 1.* »

Soit alors un milieu de translation \mathfrak{M} . Si, d'après la théorie que ces conditions définissent, l'un quelconque de ses fragments est de mesure nulle, ce qui arrivera certainement si l'ensemble \mathfrak{M} est énumérable, nous ne réussissons point par là à comparer entre eux les divers fragments. Modifions donc ainsi, *en ce qui concerne les fragments du milieu \mathfrak{M}* , le problème de la mesure.

Proposons-nous d'attacher à chaque fragment F de \mathfrak{M} un nombre positif ou nul, $m(F)$, que nous appellerons *la mesure de F*, et qui satisfera aux conditions suivantes :

- 1'. *Deux fragments égaux ont même mesure.*
- 2'. *Le fragment somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de fragments [sans point commun deux à deux (1)] a pour mesure la somme des mesures.*
- 3'. *La mesure du fragment $(0, 1)$ (par exemple) est un nombre positif ω .*

Si la méthode Borel-Lebesgue conduit, pour le fragment $(0, 1)$, à un nombre positif, nous le prendrons pour nombre ω et les mesures des divers fragments seront celles fournies par cette méthode. Sinon, les conditions 1, 2 et 3 étant imposées par les conditions générales d'intégration, on sera amené à modifier ces dernières lorsque la variable évolue dans le milieu \mathfrak{M} .

Observons de suite que si la mesure des fragments est possible elle fournira pour deux fragments équivalents des nombres égaux,

(1) Cette restriction est ici sans intérêt.

résultat qu'il était indispensable d'atteindre si l'on fait attention qu'un fragment retourné peut cesser d'être égal à lui-même. La propriété s'établit aisément comme il suit :

Soient (λ', λ'') , (μ', μ'') les fragments équivalents considérés. Choisissons une translation h ($h > 0$) aussi petite que l'on voudra. Elle fournit, à partir d'un point arbitraire, une suite de points du milieu, en sorte qu'il y en a respectivement p et q dans les deux fragments de même longueur l et l'on a

$$ph \leq l < (p + 2)h, \quad qh \leq l < (q + 2)h.$$

D'ailleurs, tous les fragments de la suite sont égaux. On en déduit que

$$|m(\mu', \mu'') - m(\lambda', \lambda'')| < 3m(h),$$

$m(h)$ étant la mesure commune de ces fragments. Or elle tend vers zéro, le nombre de ceux qui sont situés dans le fragment $(0, 1)$ pouvant être pris aussi grand que l'on veut.

Si la mesure est possible, deux fragments ayant même longueur ont même mesure, la mesure d'un fragment somme de plusieurs autres est égale à la somme des mesures de ces derniers, les mesures des fragments sont donc nécessairement proportionnelles à leurs longueurs. La mesure d'un fragment de longueur l est donc nécessairement $l\omega$. Avec ces nombres, d'ailleurs, les conditions 1', 2' et 3' sont vérifiées : *les fragments sont mesurables*.

5. ÉNONCÉ GÉNÉRAL DU PROBLÈME DE LA MESURE. — Ce premier cas étant examiné, nous poserons comme il suit, d'une manière générale, le problème de la mesure.

Une famille \mathfrak{F} d'ensembles E de points situés sur un axe $x'x$ est dite *mesurable* si l'on peut faire correspondre à chaque ensemble un nombre positif ou nul, *mais non tous nuls*, sa mesure, qui satisfasse aux conditions suivantes :

1". *Deux ensembles de \mathfrak{F} , égaux, par glissement ou après retournement préalable de l'un d'eux, ont même mesure.*

2". A. Si l'ensemble somme d'un nombre fini d'ensembles de \mathfrak{F} (sans point commun deux à deux) appartient à \mathfrak{F} , sa mesure est la somme de leurs mesures.

B. Si l'ensemble somme d'une infinité dénombrable d'ensembles de \mathfrak{F} (sans point commun deux à deux) appartient à \mathfrak{F} , sa mesure est la somme de leurs mesures.

3". La mesure d'un ensemble particulier de \mathfrak{F} , de mesure non nulle, est un nombre positif arbitraire ω .

4". Les mesures des ensembles de \mathfrak{F} sont complètement déterminées par les conditions précédentes.

On pourrait substituer aux conditions 3" et 4" la suivante : Les mesures sont déterminées, à un facteur positif près, par les conditions 1" et 2".

Les restrictions dans l'énoncé des conditions 1 et 2 de M. Lebesgue, ici 1" et 2", ont pour objet de limiter à volonté la collection des ensembles qui forment \mathfrak{F} ; mais il devenait indispensable de poser la condition 4" pour éviter la juxtaposition dans \mathfrak{F} de plusieurs collections composées chacune d'ensembles comparables entre eux, alors que les ensembles appartenant à des collections différentes ne le seraient point.

Les fragments d'un milieu de translation constituent bien une famille mesurable. Mais il y a des familles très importantes pour lesquelles la condition 2" B ne sera pas nécessairement réalisée; il n'est cependant pas inutile de les considérer, surtout si l'on sait distinguer parmi leurs ensembles certaines infinités énumérables qui y satisfont. Nous donnerons donc la définition suivante :

Une famille est dite *semi-mesurable* si elle satisfait aux conditions d'une famille mesurable, sauf peut-être à celle relative à la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles (2" B).

La suite de ce Chapitre est consacrée à la recherche de familles mesurables ou semi-mesurables d'ensembles appartenant à un même milieu de translation.

6. EXTENSION DE LA MÉTHODE BOREL-LEBESGUE AUX ENSEMBLES DE CERTAINS

MILIEUX DE TRANSLATION. — Cette méthode (1), dont les principes sont dus à M. Borel, a été exposée d'une manière systématique par M. Lebesgue dans ses *Leçons sur l'intégration*. Les ensembles qu'elle permet de mesurer seront dits *mesurables* L, et c'est à ce dernier Ouvrage que je me réfère dans ce qui suit :

Soit un milieu de translation \mathfrak{K} dont les fragments sont mesurables L. Le rapport de la mesure d'un fragment à sa longueur est une constante k . Nous allons prouver que, nécessairement, k est 0 ou 1.

Plus généralement, imaginons dans un intervalle fixe, par exemple (0, 1), un ensemble G duquel on sait que, dans tout intervalle inclus dans le premier, le rapport de sa mesure extérieure à la longueur de l'intervalle qui le porte (2) est au plus égal à un nombre fixe k'' inférieur à 1; sa mesure extérieure est nulle. Car si $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots$ est une suite d'intervalles couvrant G, si l_1, l_2, \dots sont les mesures extérieures correspondantes et si l'on pose

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots, \quad l = l_1 + l_2 + \dots,$$

on a

$$\frac{l_i}{\alpha_i} \leq k'', \quad \text{d'où} \quad l \leq \alpha k'',$$

et, si l'on remplace α par sa limite inférieure l ,

$$l \leq lk'', \quad \text{d'où} \quad l = 0.$$

De même, s'il existe un nombre positif k' tel que, dans tout intervalle partiel, le rapport de la mesure intérieure de G à la longueur de l'intervalle soit au moins égal à k' , la mesure intérieure de G est égale à 1, car l'ensemble complémentaire a une mesure extérieure nulle.

Ainsi, pour un ensemble mesurable L, le rapport de la portion contenue dans un intervalle partiel quelconque à la longueur de cet intervalle

(1) Voir BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 46; *Leçons sur les fonctions de variables réelles*, p. 16. — LEBESGUE, *Annali di Matematica*, 1902, p. 238; *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, p. 98 et 102.

(2) Qui a mêmes bornes que lui.

a pour bornes 0 et 1, à moins que dans l'intervalle total le rapport ne soit précisément 1 ou 0.

De cette proposition, la propriété relative au milieu \mathfrak{R} est une conséquence immédiate.

Si les fragments de \mathfrak{R} ne sont pas mesurables L, leurs mesures extérieures sont égales à leurs longueurs et leurs mesures intérieures sont nulles. A ces mesures s'applique en effet, sans difficulté, la démonstration du n° 4 relative à la proportionnalité des fragments à leurs longueurs; et par suite les rapports constants des mesures, soit extérieures, soit intérieures, des fragments à leurs longueurs ne peuvent être que 0 ou 1.

Nous sommes maintenant en état de fixer la portée exacte de la restriction concernant la définition d'une somme de fragments. Si les fragments du milieu sont de mesure L nulle, la restriction est réelle; on peut, en effet, enfermer les points d'un fragment dans des intervalles dont la somme des longueurs soit aussi petite que l'on veut; les fragments situés dans ces intervalles ont pour somme, au sens général de la somme des ensembles, le fragment donné. Dans tout autre cas, la restriction n'est qu'apparente: soient F le fragment donné, $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ des fragments dont, au sens général des ensembles, il est la somme, I, $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ les intervalles correspondants; puisque la mesure extérieure de F est égale à sa longueur, la somme des longueurs des intervalles $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ est égale à celle de I, et par suite les points de I qui n'appartiennent pas à $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ (s'il en existe) forment un ensemble de mesure L nulle. Ainsi se trouve caractérisée la circonstance dans laquelle l'ensemble, et non le fragment, F est au sens large la somme de F_1, F_2, \dots, F_n ; et l'on constate que le théorème relatif à la somme subsiste: la mesure du fragment F est la somme des mesures des fragments $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$.

7. Ceci établi, proposons-nous de déterminer une famille d'ensembles mesurables appartenant à un milieu \mathfrak{R} de translation.

Si \mathfrak{R} est le continu, c'est le problème de M. Borel. De même aussi, lorsque, \mathfrak{R} n'étant pas le continu, ses fragments sont mesurables L et le nombre k du n° 6 est égal à 1; alors, en effet, le segment (0, 1) aura même mesure ω que le fragment (0, 1); dans ce cas, le milieu complé-

mentaire, évidemment de translation, \mathfrak{N}' , donne lieu à un rapport nul et l'on peut faire la remarque suivante : pour qu'une famille d'ensembles bornés, inclus dans \mathfrak{N} , soit mesurable L, il faut et il suffit qu'elle jouisse de la même propriété dans le continu après adjonction à ses ensembles des ensembles correspondants de mêmes bornes et de mesure nulle de \mathfrak{N}' , et, pour les deux familles, les mesures seront les mêmes.

Mais si le nombre k est égal à zéro, le problème est entièrement nouveau; il en est de même si, contrairement à notre première hypothèse, les fragments de \mathfrak{N} ne sont pas mesurables L. Sans doute on ne sait pas construire effectivement de tels ensembles et, comme l'a établi M. Lebesgue, ils ne sont pas susceptibles d'être définis par les expressions analytiques à notre disposition; toutefois, il n'y a ni raison ni utilité à les exclure *a priori*.

8. *Supposons que les fragments de \mathfrak{N} ne soient pas mesurables L.* Précisément, dans ce cas, la méthode Borel-Lebesgue se prête à une extension toute naturelle (1).

On sait (n° 6) que, les fragments de \mathfrak{N} n'étant pas mesurables L, leurs mesures extérieures sont égales à leurs longueurs et leurs mesures intérieures sont nulles.

Imaginons un tel milieu, et soit un ensemble E qui lui appartient; un ensemble complémentaire relativement à \mathfrak{N} sera un ensemble qui, ajouté à E, reproduira un fragment (a, b) du milieu. Enfermons les points de E dans un nombre fini ou une infinité dénombrable de fragments; la mesure de l'ensemble de ces fragments sera le produit par ω de la somme de leurs longueurs, et la limite inférieure de ces mesures sera dite *la mesure extérieure de E relativement à \mathfrak{N}* : $m_e(E)$. Si $C_{ab}(E)$ est le complémentaire de E par rapport à (a, b) , on devra avoir, si E appartient à une famille d'ensembles mesurables comprenant les fragments de \mathfrak{N} , et si la différence de deux ensembles de la famille appartient aussi à la famille, d'une part,

$$m_e(E) \geq m(E),$$

(1) LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, p. 103 et suiv.

d'autre part

$$m(\mathbf{E}) + m[C_{ab}(\mathbf{E})] = m(a, b),$$

et, puisque $m_e[C_{ab}(\mathbf{E})]$ sera au moins égal à $m[C_{ab}(\mathbf{E})]$,

$$m(\mathbf{E}) \geq m(a, b) - m_e[C_{ab}(\mathbf{E})].$$

Cette limite inférieure de $m(\mathbf{E})$ sera la *mesure intérieure* de \mathbf{E} relativement à $\mathfrak{K} : m_i(\mathbf{E})$.

Je dis que, quel que soit d'ailleurs \mathbf{E} , la mesure intérieure est au plus égale à la mesure extérieure. En effet, enfermons \mathbf{E} dans une infinité énumérable de fragments α et $C_{ab}(\mathbf{E})$ dans les fragments β ; l'ensemble des α et des β couvre le fragment (a, b) et par conséquent, *dans le continu*, la somme des longueurs des α et des β , c'est-à-dire des segments correspondants, est au moins égale à la mesure extérieure L du fragment (a, b) , donc à sa longueur. Multipliant toutes ces longueurs par ω on a donc aussi, *par rapport à* \mathfrak{K} ,

$$m(\alpha) + m(\beta) \geq m(a, b),$$

d'où l'on déduit

$$m_e(\mathbf{E}) \geq m_i(\mathbf{E}).$$

Considérons les ensembles \mathbf{E} pour lesquels la mesure intérieure est égale à la mesure extérieure. Cette famille \mathfrak{F} , qui comprend les fragments, répondra au problème posé. Les mesures de ces ensembles satisfont aux conditions 1", 3" et 4". L'exposé de M. Lebesgue s'applique ici sans modification à la vérification de la condition 2". Si des ensembles, en nombre fini ou énumérable (tous compris entre deux bornes fixes), appartiennent à \mathfrak{F} , leur somme en fait aussi partie et sa mesure est la somme de leurs mesures.

La suite des démonstrations est encore valable. Bornons-nous donc à en énoncer les résultats :

Si deux ensembles sont ensembles de \mathfrak{F} , il en est de même de la partie de l'un extérieure à l'autre. En particulier, si l'un est contenu dans l'autre, la différence des deux appartient à \mathfrak{F} et sa mesure est la différence de leurs mesures.

Si un nombre limité ou une infinité dénombrable d'ensembles (tous

compris entre deux bornes fixes) appartiennent à \mathfrak{F} : 1° l'ensemble des points qui sont éléments de l'un au moins d'entre eux est ensemble de \mathfrak{F} ; 2° l'ensemble des points qui leur sont communs à tous est ensemble de \mathfrak{F} .

On dispose là de deux opérations qui, employées par M. Borel à partir des intervalles un nombre fini de fois, lui a fourni les ensembles mesurables que l'on rencontre pratiquement dans le continu. Pour user de la seconde, on utilise la propriété suivante :

Si des ensembles $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$ sont tels que chacun E_i contient ceux d'indice plus grand et s'ils appartiennent à \mathfrak{F} , la mesure de leur partie commune est la limite de $m(E_i)$ pour i infini.

9. D'ailleurs il existe un lien très simple entre la famille d'ensembles mesurables que la méthode Borel-Lebesgue donne dans le continu et celle qu'elle fournit dans un milieu de translation \mathfrak{X} auquel elle n'était pas directement applicable.

Soit \mathcal{C} un ensemble de la première; il est la somme de deux autres, l'un E inclus dans \mathfrak{X} , l'autre E' inclus dans \mathfrak{X}' , milieu complémentaire de \mathfrak{X} par rapport au continu.

Dans le continu couvrons \mathcal{C} et son complémentaire de deux systèmes d'intervalles, α et β . Le système de fragments α de \mathfrak{X} couvre E et celui des fragments β son complémentaire dans \mathfrak{X} . On en conclut que E appartient à la seconde famille et que $m(E) = km(\mathcal{C})$ si l'on prend dans \mathfrak{X} le nombre k pour mesure d'un fragment de longueur 1.

Inversement, soit E un ensemble de la seconde famille. Appelons $E + E_1$ l'ensemble des points de \mathfrak{X} et E' l'ensemble des points de \mathfrak{X}' qui sont inclus dans tout système d'intervalles couvrant E ; posons

$$\mathcal{C} = E + E_1 + E'.$$

Soient α et β deux systèmes de fragments de \mathfrak{X} y couvrant respectivement E et son complémentaire. Le système d'intervalles α couvre \mathcal{C} dans le continu, et \mathcal{C} est formé des points communs à tous les systèmes α ; donc, d'après une propriété rappelée au numéro précédent,

\mathcal{E} est mesurable L, et l'on a

$$m(\mathbf{E} + \mathbf{E}_1) = km\mathcal{E};$$

d'ailleurs les points de \mathbf{E}_1 sont communs aux α et aux β , par suite $m(\mathbf{E}_1) = 0$ et ainsi $m(\mathbf{E}) = km.\mathcal{E}$.

10. EXTENSION DE LA MÉTHODE DE M. JORDAN AUX ENSEMBLES DES AUTRES MILIEUX DE TRANSLATION. — Si la constante k (n° 6) est nulle, c'est-à-dire si les fragments du milieu \mathfrak{K} sont de mesure L nulle, la méthode de MM. Borel et Lebesgue n'est plus utilisable : un ensemble quelconque peut être enfermé dans des fragments dont la somme des longueurs, et par conséquent la somme des mesures dans \mathfrak{K} , serait aussi petite que l'on veut : c'est dire que, rapporté à \mathfrak{K} , tout ensemble, et un fragment lui-même, aurait une mesure nulle.

La méthode de M. Jordan (1) conduira à des familles d'ensembles qui seront seulement semi-mesurables. On sait qu'elle consiste en ceci : décomposer en un nombre fini d'intervalles partiels un intervalle contenant l'ensemble \mathbf{E} considéré, prendre la somme s'_n des longueurs des intervalles dont tous les points appartiennent à \mathbf{E} , la somme s''_n des longueurs de ceux qui contiennent des points de \mathbf{E} ; pour une suite de décompositions telle que le maximum de la longueur de tous les intervalles tende vers zéro, s'_n et s''_n tendent vers des limites s' et s'' ; ces limites sont fixes, s' est au plus égal à s'' ; la première s'appelle l'*étendue intérieure* de \mathbf{E} , la seconde l'*étendue extérieure* de \mathbf{E} : $e_i(\mathbf{E})$, $e_e(\mathbf{E})$; quand elles sont égales on dit que \mathbf{E} est *mesurable J*.

Remplaçons le mot *intervalle* par le mot *fragment*, la longueur d'un intervalle par la mesure du fragment et nous aurons un procédé que l'on peut employer avec le milieu \mathfrak{K} . Les nombres ainsi obtenus satisferont à toutes les conditions (2) du n° 5, sauf peut-être à 2°B. Prenons en effet par exemple tous les points du fragment $(0, 1)$ supposé énumé-

(1) *Cours d'Analyse*, t. I.

(2) On voit aisément que si un nombre limité d'ensembles (sans point commun deux à deux) sont mesurables J il en est de même de leur somme, que la différence de deux de ces ensembles est aussi mesurable J et qu'il y a entre les mesures les mêmes relations qu'entre les ensembles.

nable ; chacun d'eux est mesurable J et son étendue est nulle, le fragment entier est aussi mesurable J et son étendue est ω .

11. Voici un cas où la condition $2^{\circ}B$ est vérifiée. Disons qu'un ensemble E situé dans un intervalle (a, b) est dissociable en les ensembles $E_1, E_2, \dots, E_i, \dots$ dont il est la somme lorsqu'on peut décomposer (a, b) en une infinité énumérable d'intervalles tels qu'un même intervalle ne contienne pas de points d'ensembles différents ; une extrémité commune à deux intervalles sera considérée à volonté comme étant de l'un ou de l'autre.

Alors, si les ensembles E_i sont mesurables J, il en est de même de E et son étendue est la somme de leurs étendues.

Pour établir cette propriété nous utiliserons l'observation suivante qu'il suffira de justifier dans le continu : On peut dans la méthode de M. Jordan substituer aux décompositions de l'intervalle (a, b) , en un nombre *fini* d'intervalles, les décompositions en nombre *fini ou infini* ⁽¹⁾ *énumérable*.

Soient, en effet, un ensemble \mathcal{C} situé dans l'intervalle (a, b) , Δ une décomposition de (a, b) en une infinité dénombrable d'intervalles, σ' la somme des longueurs de ceux dont les points appartiennent tous à \mathcal{C} , σ'' la longueur totale de ceux qui contiennent des points de \mathcal{C} . La longueur de ceux qui ne contiennent pas de points de \mathcal{C} sont $l - \sigma'' = t$, l étant la longueur de (a, b) .

Si nous prenons dans Δ les n premiers intervalles, parmi eux certains ont contribué à σ' pour une valeur σ'_n , ceux-ci et d'autres à σ'' pour σ''_n , d'autres enfin à t pour t_n .

Choisissons n assez grand pour que $\sigma' - \sigma'_n$, $\sigma'' - \sigma''_n$, $t - t_n$ soient inférieurs à un nombre positif arbitraire ε .

La décomposition D formée par les n premiers intervalles de Δ et les intervalles restants dans (a, b) donne lieu à des valeurs approchées μ' , μ'' des étendues intérieure et extérieure de \mathcal{C} , et l'on a

$$(1) \quad \sigma' < \sigma'_n + \varepsilon \leq \mu' + \varepsilon \leq e_i(\mathcal{C}) + \varepsilon,$$

$$(2) \quad e_e(\mathcal{C}) \leq \mu'' \leq l - t_n = l - t + t - t_n = \sigma'' + t - t_n < \sigma'' + \varepsilon.$$

(1) Rappelons qu'un intervalle est dit la *somme* d'une infinité d'autres lorsque tout point qui lui est intérieur est point intérieur ou point frontière d'un intervalle partiel.

Les étendues intérieure et extérieure de \mathcal{C} sont respectivement la borne supérieure et la borne inférieure des valeurs approchées fournies par les décompositions finies. Les inégalités (1) et (2) montrent que ces bornes ne sont pas modifiées par l'adjonction des décompositions infinies.

On peut aller plus loin. Les différences entre les étendues et leurs valeurs approchées sont inférieures à un nombre positif arbitraire η dès que les intervalles en nombre fini sont de longueur inférieure à une quantité correspondante α ; il en est de même si les intervalles peuvent être une infinité. On a, en effet,

$$(3) \quad \begin{aligned} \mu' - \sigma' &= \mu' - \sigma'_n - (\sigma' - \sigma'_n) < \mu' - \sigma'_n \\ &\leq [l - t_n - (\sigma''_n - \sigma'_n)] - \sigma'_n \leq l - t_n - \sigma''_n = (l - t_n) + (\sigma'' - \sigma); \end{aligned}$$

d'où

$$(3)' \quad \mu' - \sigma' < 2\varepsilon$$

et

$$(4) \quad \sigma'' - \mu'' = \sigma'' - \sigma''_n - (\mu'' - \sigma''_n) < \sigma'' - \sigma''_n;$$

d'où

$$(4)' \quad \sigma'' - \mu'' < \varepsilon.$$

Supposons les intervalles de Δ inférieurs à α et prenons 2ε plus petit que α et que η . Nous aurons, à cause des inégalités (3)' et (4)' et du fait que tous les intervalles de D sont inférieurs à α ($l - \sigma''_n - t_n < 2\varepsilon$),

$$(5) \quad e_i(\mathcal{C}) - \sigma' < 2\eta,$$

$$(6) \quad \sigma'' - e_c(\mathcal{C}) < 2\eta,$$

ce qui justifie notre affirmation.

Revenons à l'ensemble E dissociable; (a, b) est exactement couvert par l'assemblage Δ ; divisons l'ensemble des intervalles où E_n est inclus de manière à obtenir, par la méthode de M. Jordan appliquée aux *fragments*, des valeurs approchées $m'_i(E_n)$, $m''_e(E_n)$ des mesures intérieure et extérieure avec une erreur inférieure à ε_n , la série des ε_n étant

convergente et de somme ε aussi petite qu'on veut. Nous aurons ainsi, pour E, les valeurs approchées $\Sigma m'_i(E_n)$ et $\Sigma m''_e(E_n)$ et la propriété est établie.

12. SUITE DE L'EXAMEN DE LA PROPRIÉTÉ RELATIVE A LA SOMME D'UNE INFINITÉ DÉNOMBRABLE D'ENSEMBLES. — Chercher des conditions fort générales où cette propriété subsiste ou bien, comme nous l'avons fait pour les fragments (n° 3), *restreindre le sens du mot somme* de manière à la conserver, c'est tout un, et il n'y a-là qu'une différence de mots. Nous plaçant au second point de vue, convenons de la définition suivante :

Définition. — Un ensemble E, mesurable (J), appartenant à l'intervalle (0, 1) par exemple, est dit la *somme* des ensembles E_p si, quel que soit ε positif, il existe des décompositions Δ, Δ_p de l'intervalle (0, 1) en nombre fini ou infini d'intervalles partiels telles que : 1° la somme des fragments α provenant de Δ et donnant une valeur approchée de E par défaut comporte une erreur inférieure à ε ; 2° les fragments α_p fournissant dans Δ_p une valeur approchée par défaut de E_p , tout point d'un *intervalle* α appartient à l'un des *intervalles* α_p (pour une valeur convenable de p).

Il va de soi qu'on suppose toujours avant tout E formé des éléments des E_p qui sont sans point commun deux à deux.

Si E et les E_p sont des fragments, on constate sans difficulté que si, au sens des fragments (n° 3), le premier est la somme des seconds, il l'est aussi au sens de la définition précédente. Inversement si, au sens de cette définition, E est la somme des E_p , il l'est au sens des fragments, à moins qu'une borne de E soit point limite de bornes des E_p . Cette double propriété rend assez naturelle la définition ci-dessus. D'ailleurs, quand elle est vérifiée par des ensembles, les ensembles E_p sont mesurables (J) et l'on a

$$\text{mes. } E = \Sigma \text{mes. } E_p.$$

Cela résulte d'une part des inégalités

$$\begin{aligned} m_i E &\leq \Sigma m_i E_p, \\ m_e E &\geq \Sigma m_e E_p \end{aligned}$$

et de l'hypothèse que E est mesurable J.

Mais ce n'est point le cas le plus général où la propriété relative à la somme [au sens large (1)] subsiste. Il suffit, pour constater ce fait, de prendre un fragment E de bornes α' , α'' et d'extraire de l'intervalle I de mêmes bornes des intervalles I_p comprenant tous les points de E de même longueur totale que I et laissant à leur extérieur un ensemble ε . Les I_p définissent des fragments E_p dont la somme, au sens strict, ne donne pas E . On peut d'ailleurs énoncer des conditions nécessaires et suffisantes. Dans ce qui suit, les décompositions Δ , Δ_p sont respectivement utilisées pour avoir des valeurs approchées de E , E_p .

13. THÉORÈME. — Soient des ensembles E , E_1 , ..., E_p ... mesurables J , le premier E somme des autres, au sens large. Si sa mesure est la somme de leurs mesures on peut à tout nombre positif ε faire correspondre une suite de décompositions de l'intervalle fondamental (comprenant tous les ensembles) Δ , Δ_1 , ..., Δ_p , ... telle que :

1° Les fragments β_p qui fournissent une valeur approchée par excès de E_p comportent une erreur inférieure à ε_p et la somme $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_p \dots$ est au plus égale à ε ;

2° Tout point des intervalles β des fragments qui donnent E par excès appartient à l'un des intervalles β_p , pour une valeur convenable de p .

Partons d'une décomposition Δ et de décompositions Δ'_1 , ..., Δ'_p , ... telles que les différences entre les sommes de fragments par excès et par défaut, β , α d'une part, β'_1 , α'_1 , ..., β'_p , α'_p , ... d'autre part, diffèrent respectivement de moins de η , η'_1 , ..., η'_p , ..., la somme $\eta'_1 + \dots + \eta'_p + \dots$ étant égale à η' .

Supposons la décomposition Δ en un nombre fini de parties. Tout β qui n'est pas un α a un point commun avec un β'_p ; allongeons ce dernier intervalle de la partie du premier qui lui serait extérieure; cette modification des Δ' a pour effet possible d'augmenter les β' et de diminuer les α' , η' augmentant de moins de 2η . Les α excèdent les α' actuels d'au plus $\eta' + 2\eta$, à cause de l'hypothèse $m.E = \Sigma mE_p$. D'ailleurs les parties d'un α'_p qui ne sont point parties des α forment des intervalles inclus dans ceux des β qui ne sont pas des α ; de plus un α'_p et

(1) La somme, d'après la définition précédente, sera dite au sens strict.

un α'_γ définissent deux intervalles qui n'empiètent pas l'un sur l'autre; il en résulte que les parties des intervalles α extérieures aux intervalles α'_p nouveaux ont une mesure fragmentaire inférieure $\eta' + 3\eta$; et si on laisse de côté, pour n'en conserver qu'un nombre limité, une infinité d'intervalles α' dont la somme des mesures ne dépasse pas η , les intervalles γ qui subsistent dans les intervalles α hors des α' conservés ont une mesure qui n'atteint pas $\eta' + 4\eta$. Chaque point d'un fragment γ a un élément commun avec un fragment (au moins) β'_p . Ajoutons-le à ce fragment. Au total, les β' augmenteront et les α' diminueront donc de moins de $\eta' + 4\eta$, et par suite, dans le système de décompositions $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p, \dots$ auquel nous parvenons, la somme des différences de mesures par excès et par défaut de $E_1, E_2, \dots, E_p, \dots$ est inférieure à $2\eta' + 6\eta$. Il suffit donc d'avoir choisi $2\eta' + 6\eta \leq \varepsilon$ pour satisfaire à l'énoncé du théorème.

D'ailleurs, *a fortiori*, tout point d'un intervalle α appartient à l'un des intervalles β_p . Cette propriété, comme la précédente, subsiste si respectant les points de subdivision de Δ on imagine des décompositions Δ', Δ'', \dots qui donnent de E des mesures aussi approchées qu'on veut. Donc :

THÉORÈME. — Soient des ensembles $E, E_1, \dots, E_p, \dots$ mesurables J , le premier E somme des autres, au sens large. Si sa mesure est la somme de leurs mesures, on peut à tout couple de nombres positifs ε, η faire correspondre une suite de décompositions de l'intervalle fondamental $\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_p, \dots$ telle que :

1° Les fragments α qui fournissent une valeur approchée par défaut de E et les fragments β_p une valeur approchée par excès de E_p comportent respectivement des erreurs inférieures à η et à ε_p , la somme

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_p + \dots$$

étant au plus égale à ε ;

2° Tout point des intervalles α appartient à l'un des intervalles β_p , pour une valeur convenable de p .

14. Les réciproques sont immédiates :

Première réciproque. — Soient des ensembles $E, E_1, \dots, E_p, \dots$, le premier E somme des autres, au sens large et, ces derniers, mesurables J . On suppose qu'à tout nombre positif ε on peut faire correspondre une suite de décompositions de l'intervalle fondamental $\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_p, \dots$ telle que :

1° Les fragments β_p qui fournissent une valeur approchée par excès de E_p comportent une erreur inférieure à ε_p et la somme $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_p + \dots$ est au plus égale à ε ;

2° Tout point des intervalles β des fragments qui donnent E par excès appartient à l'un des intervalles β_p , pour une valeur convenable de p .

Dans ces conditions E est mesurable J et sa mesure est la somme de leurs mesures.

Deuxième réciproque. — Soient des ensembles $E, E_1, \dots, E_p, \dots$, le premier E somme des autres, au sens large, tous mesurables J . On suppose qu'à tout couple de nombres positifs ε, η on peut faire correspondre une suite de décompositions de l'intervalle fondamental $\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_p, \dots$ telle que :

1° Les fragments β_p qui fournissent une valeur approchée par excès de E_p comportent une erreur inférieure à ε_p , la somme $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_p + \dots$ étant au plus égale à ε , et les fragments α qui donnent une valeur approchée par défaut de E une erreur inférieure à η ;

2° Tout point des intervalles α appartient à l'un des intervalles β_p pour une valeur convenable de p .

Dans ces conditions, la mesure de E est la somme des mesures des E_p .

En effet, en supposant que η soit simplement une limite de l'excès de la mesure intérieure de E sur celle des α , on a, d'après les hypothèses,

$$m_i E \leq \Sigma m_e E_p \quad \text{et aussi} \quad m_i E \geq \Sigma m_i E_p,$$

de sorte que

$$m_i E = \Sigma m E_p.$$

15. EXAMEN D'UN CAS SIMPLE. — Admettons que, quel que soit ε , on puisse trouver une décomposition Δ telle que la différence des valeurs approchées qu'elle fournit pour E_p soit inférieure à ε_p , la somme des ε_p étant au plus égale à ε ; la première réciproque est applicable.

On sera ramené à ce cas particulier si l'on peut faire correspondre à tout nombre ε un système de décompositions $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p, \dots$ dont les points de subdivision déterminent une décomposition de l'intervalle fondamental, car on la prendra pour Δ et il est clair qu'elle donne pour E_p des valeurs approchées de moindre différence que Δ_p .

Ici se pose la question : comment reconnaître si un ensemble de points peut définir une décomposition de l'intervalle fondamental? La réponse est immédiate : il faut et il suffit que l'ensemble soit fermé et que chacun de ses points limites soit à l'intérieur de l'intervalle fondamental et ne soit limite que d'un côté.

Exemple dans lequel $mE = \sum mE_p$. — Dans l'intervalle fondamental $(0, 1)$ du milieu quelconque de translation \mathfrak{N} , prenons pour E_{p-1} l'ensemble formé des points

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2^{p+2}n^{p+2}} < x \leq \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2^{p+1}n^{p+1}} \\ \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2^{p+1}n^{p+1}} \leq x < \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2^{p+2}n^{p+2}} \end{aligned} \right\} (n=1, 2, \dots, +\infty).$$

Si le milieu \mathfrak{N} n'avait pas ses fragments de mesure L nulle, et si l'on prend 1 pour mesure du fragment $(0, 1)$, on aurait

$$mE_p = \frac{1}{2^{p+1}} \zeta(p+2) - \frac{1}{2^{p+2}} \zeta(p+3)$$

en posant

$$\zeta(z) = \frac{1}{1^z} + \frac{1}{2^z} + \dots + \frac{1}{q^z} + \dots$$

et

$$mE = \frac{1}{4} \zeta(3).$$

Ces résultats subsistent si les fragments de \mathfrak{N} sont de mesure L nulle.

En effet, ayant fait choix d'une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_p, \dots$ décroissants de somme inférieure à ε , je prends, comme points de subdivision de Δ_p, ε_p et les bornes, supérieures à ε_p , des fragments dont la somme constitue E_p ; dans cette décomposition de $(0, 1)$, l'intervalle $(0, \varepsilon_p)$ est le seul des β_p qui ne soit pas un α_p . Me donnant ensuite deux nombres positifs η', η'' de somme η arbitrairement petite, je sépare l'intervalle $(0, \eta')$ de l'intervalle $(0, 1)$ ainsi que, dans l'intervalle $(\eta', 1)$, des intervalles de somme η'' construits autour de chaque membre de la forme $\frac{1}{2n+1}$ et, si l'on veut, d'un seul côté. Avec les extrémités de ces intervalles et celles des bornes des fragments des E_p qui sont dans les parties restantes, je constitue Δ . Il est clair que les conditions requises à la deuxième réciproque sont réalisées.

16. EXEMPLE DE MILIEU HOMOGÈNE DE MESURE L NULLE ($k = 0$) ET AYANT LA PUISSANCE DU CONTINU. — Nous nous servons de la propriété suivante :

Soit une suite de nombres entiers supérieurs à 1 : $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$; posons $d_i = u_1 u_2 \dots u_i$. On peut, a étant un nombre quelconque positif ou négatif, le mettre, et cela d'une seule manière, sous la forme

$$a_0 + \frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \dots + \frac{a_n}{d_n} + \dots,$$

les a_p étant des entiers, le premier positif ou négatif, les autres positifs ou nuls et satisfaisant aux inégalités $a_i < u_i$. Il n'y a d'exception que pour tout développement limité

$$a_0 + \frac{a_1}{d_1} + \dots + \frac{a_n}{d_n},$$

qui peut aussi s'écrire sous forme de série

$$a_0 + \frac{a_1}{d_1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{d_n} + \frac{u_{n+1}-1}{d_{n+1}} + \dots + \frac{u_p-1}{d_p} + \dots$$

Levons la restriction que les entiers a_i , qui suivent le premier,

doivent être non négatifs et inférieurs chacun à la quantité u_i correspondante : alors, un même nombre est fourni une infinité de fois par ce mode de représentation.

Considérons l'ensemble E_λ des nombres α , pour chacun desquels une représentation de ce type satisfait à la condition $\lim \frac{a_n}{r_n} = \lambda$, r_n étant une variable donnée positive infiniment grande telle que la série $\sum \frac{r_n}{d_n}$ soit convergente : E_λ forme un milieu homogène; ces divers milieux sont égaux.

Posons

$$\sigma_n = \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{r_s}{d_s};$$

si de plus $d_n \sigma_n$ tend vers zéro pour n infini, on peut affirmer que les milieux correspondant à deux valeurs différentes de λ sont sans point commun, car μ étant la différence de ces valeurs on aurait une égalité de la forme

$$0 = b_0 + \frac{b_1}{d_1} + \frac{b_2}{d_2} + \dots + \frac{b_n}{d_n} + \frac{b_{n+1}}{d_{n+1}} + \dots$$

avec $\lim \frac{b_n}{r_n} = \mu$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse précédente.

17. Soient p et α deux nombres positifs, $p > \alpha$; posons $p - \alpha = t$ et prenons $u_n \geq d_{n-1}^p$, $r_n \leq d_{n-1}^\alpha$ (au moins à partir d'un certain rang); on en déduit, en supposant pour plus de simplicité que les inégalités aient lieu dès le début,

$$u_{s+1} \geq u_1^{p(p+1)^{s-1}}, \quad d_{s+1} \geq u_1^{p+1)^s}, \quad \frac{r_{n+1}}{d_{n+1}} \leq \frac{1}{d_n^{p+1-\alpha}}.$$

Par suite $d_n \sigma_n$ est inférieur à $d_n \sum_{s=n}^{\infty} \frac{1}{d_s^{p+1-\alpha}}$, a fortiori à $\sum_{s=n}^{\infty} \frac{1}{d_s^{p-\alpha}}$

et à $\sum_{s=n}^{\infty} \frac{1}{u_1^{t(p+1)^{s-1}}}$, quantité qui tend vers zéro pour n infini.

La propriété précédente a donc lieu. Mais, de plus, on voit aisément qu'un milieu E_λ a une mesure L nulle. En effet, ε étant un nombre positif arbitraire, on peut, pour un nombre α de E_λ , prendre n assez grand pour que

$$\left| \alpha - \left(a_0 + \frac{a_1}{d_1} + \dots + \frac{a_n}{d_n} \right) \right| \leq \frac{|\lambda|(1+\varepsilon)}{d_n^{p+1-\alpha}}.$$

Soit $\frac{p}{q}$ la somme $a_0 + \frac{a_1}{d_1} + \dots + \frac{a_n}{d_n}$, $q = d_n$; enlevons de l'intervalle $(0, 1)$ tous les intervalles partiels dont le milieu a une abscisse rationnelle de dénominateur d_n , à partir d'une certaine valeur de l'indice, et dont l'épaisseur est $\frac{2|\lambda|(1+\varepsilon)}{d_n^{p+1-\alpha}}$; nous sommes certains d'enlever ainsi tout nombre α compris entre 0 et 1, sauf des nombres rationnels fournis par les premiers développements limités aux indices inférieurs. Or la longueur totale des intervalles supprimés est inférieure à

$$2|\lambda|(1+\varepsilon) \sum_n \frac{d_n}{d_n^{p+1-\alpha}}.$$

Nous avons vu plus haut que cette série tend vers zéro pour n infini, la mesure L du fragment $(0, 1)$ de E_λ est donc nulle.

D'ailleurs, cet ensemble a la puissance du continu. Les divers ensembles E_λ sont manifestement identiques : une translation h qui amène un point de E_λ sur un point de E_λ fait coïncider les deux ensembles. Considérons donc E_0 ; r_n est infiniment grand, parmi les nombres α de E_0 il y a en particulier ceux pour lesquels chaque a_i est non négatif et inférieur à un nombre fixe, 10 par exemple. Ces nombres correspondent aux nombres α dont la représentation décimale est $\sum \frac{a_i}{10^i}$; or ces derniers forment un ensemble ayant la puissance du continu.

18. En modifiant légèrement la démonstration ci-dessus, on voit que l'ensemble \mathcal{C} des ensembles E_λ considérés, qui est lui-même homogène, est aussi de mesure L nulle. Il suffit de prendre pour

l'épaisseur des intervalles extraits de $(0, 1) \frac{1}{d_n^{1+\frac{1}{2}}}$; quel que soit le point considéré de \mathcal{C} , et par conséquent quel que soit λ , il finira, pour n assez grand, par être englobé dans l'intervalle supprimé.

On peut étendre encore la même propriété à l'ensemble homogène des points pour chacun desquels existe un développement tel que $\frac{|a_i|}{r_i}$ soit borné.

Cet exemple est suggéré par une démonstration de M. Borel (¹).

19. EXEMPLE DE MILIEU DE TRANSLATION DONT LES FRAGMENTS NE SONT PAS MESURABLES L. — Soient α et s deux entiers supérieurs à 1, premiers entre eux; à chaque nombre relatif x associons l'ensemble $x + \frac{n}{d^q}$, q étant un entier positif ou nul et n un entier de signe quelconque; nous partageons ainsi les nombres relatifs en des ensembles E qui constituent des milieux de translation; groupons ces ensembles en familles \mathcal{C} qui contiennent, avec un ensemble E_0 , ceux E_1, E_2, \dots, E_{s-1} qui s'en déduisent en effectuant successivement $s - 1$ fois la translation $\frac{1}{s}$. Ces familles sont parfaitement définies. Adoptons (²) dans chacune d'elles un des ensembles qui le forment. La réunion de ces ensembles donne un milieu de translation \mathfrak{M}_0 , duquel on déduit par la translation $\frac{1}{s}$ des milieux $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_{s-1}$. Ces milieux $\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_{s-1}$ sont sans point commun deux à deux; au total, ils

(¹) *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 39 et suiv.

(²) C'est cette distinction d'un ensemble privilégié dans chaque famille que l'on ne sait pas actuellement effectuer. Si l'on imagine un nombre x écrit dans le système de base d , soit $x_0 x_1 x_2 \dots x_n \dots$, on peut lui faire correspondre une série entière

$$c_0 x_0 + c_1 x_1 z + \dots + c_n x_n z^n + \dots,$$

suivant une loi déterminée. Les séries qui correspondent aux nombres d'un même ensemble ne diffèrent entre elles que de polynômes. Le problème peut donc être ramené à déterminer une propriété qui leur soit commune et qui soit caractérisée par un nombre variant avec les ensembles d'une même famille,

reconstituent le continu; ils sont identiques et leurs fragments ne sont pas mesurables L (n° 6), car cette mesure serait nécessairement la $s^{\text{ième}}$ partie de la longueur.

CHAPITRE II.

MESURE DE CERTAINS MILIEUX DE TRANSLATION.

1. L'objet de ce Chapitre est de comparer entre eux certains milieux de translation, de définir le rapport de deux d'entre eux et d'appliquer enfin à ces ensembles qui n'ont ni borne inférieure ni borne supérieure la théorie de la mesure.

Nous nous occuperons principalement de milieux homogènes; les familles que nous constituerons seront d'ordinaire seulement semi-mesurables.

2. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS DES MILIEUX HOMOGÈNES. — Pour que deux milieux homogènes égaux coïncident il faut et il suffit (s'ils sont sur une même droite) qu'un point de l'un coïncide avec un point de l'autre.

Pour que deux milieux homogènes soient égaux il faut et il suffit qu'ils admettent les mêmes translations.

Si des milieux homogènes, en nombre fini ou infini, admettent un milieu de points qui leur soient communs à tous, ce milieu est homogène.

Pour qu'un milieu homogène soit égal à une partie d'un autre il faut et il suffit que le second admette toutes les translations du premier.

3. DIVISEURS ET MULTIPLES D'UN MILIEU HOMOGÈNE. — Soient deux milieux homogènes M et \mathfrak{X} , M égal à une partie M_0 de \mathfrak{X} ; si a_0 est un point de M_0 et a_1 un point quelconque de \mathfrak{X} mais non de M_0 , la translation $a_1 - a_0$ amène M_0 sur une autre partie M_1 de \mathfrak{X} sans point commun avec M_0 ; ainsi \mathfrak{X} est la somme, en nombre fini ou infini, de milieux égaux à M . Une pareille décomposition n'est possible que d'une seule manière, car, dès que deux parties égales à M ont un point commun, elles coïncident.

Si \mathfrak{R} est la somme d'une infinité d'ensembles égaux à M , nous dirons que M est un diviseur nul de \mathfrak{R} , \mathfrak{R} un multiple infini de M , que les rapports $\frac{M}{\mathfrak{R}}$, $\frac{\mathfrak{R}}{M}$ sont respectivement nul et infini. Si \mathfrak{R} est la somme d'un nombre limité μ d'ensembles égaux à M , nous dirons que M est un diviseur (non nul) de \mathfrak{R} , \mathfrak{R} un multiple (non infini de M), que les rapports $\frac{M}{\mathfrak{R}}$, $\frac{\mathfrak{R}}{M}$ sont respectivement $\frac{1}{\mu}$ et μ , ce que nous écrirons aussi

$$M = \frac{1}{\mu} \mathfrak{R}, \quad \mathfrak{R} = \mu M.$$

4. Voici comment on peut essayer de déterminer ce nombre μ . Soit h_1 une translation de \mathfrak{R} , mais non de M . Partons de M_0 , la translation h_1 donne M_1 distinct de M_0 ; de nouvelles translations h_1 conduisent de M_1 à M_2 , etc. Si aucun des M_p ne coïncide avec M_0 ils sont tous distincts, car si M_{r+s} était identique à M_r , M_r , c'est-à-dire M , admettrait la translation sh_1 et par conséquent M_s serait identique à M_0 . Alors \mathfrak{R} contient une infinité de fois M .

Si M_{μ_1} coïncide avec M_0 et s'il est le premier à le redonner, c'est que $\mu_1 h_1$ est une translation de M . Soit

$$M_0^{(1)} = M_0 + M_1 + \dots + M_{\mu_1-1},$$

$M_0^{(1)}$ est homogène. En effet soient b_i un point de M_i , c un autre point de $M_0^{(1)}$; ou bien c appartient aussi à M_i , alors la translation $c - b_i$ transforme chaque M_p en lui-même, ou bien c fait partie de M_j ($j \neq i$); posons $b_j = b_i + (j - i)h_1$, la translation $c - b_i$ est la résultante de deux autres, l'une $(j - i)h_1$ qui transforme chaque partie M_p en une autre partie de $M_0^{(1)}$, la seconde qui laisse chaque M_p invariant.

Portons notre attention sur les translations de la forme th_1 , t entier. Lorsque t est un multiple de μ_1 , elles laissent fixe chaque M_p ; lorsque t est premier avec μ_1 , une translation de cette nature classe les M_p dans un ordre tel que chacun d'eux est remplacé par le suivant et que, appliquée μ_1 fois à l'un quelconque des M_p , elle reproduit celui-là après avoir fourni tous les autres; enfin lorsque t et μ_1 ont un plus grand commun diviseur δ les M_p se répartissent en δ cycles qui en con-

tiennent chacun $\frac{\mu_1}{\sigma}$, ces derniers se déduisant les uns des autres par la translation h_1 qui, appliquée $\frac{\mu_1}{\sigma}$ fois à l'un d'eux, les reproduit tous.

Revenons à $M_0^{(1)}$: si $M_0^{(1)}$ est identique à \mathfrak{R} , on a $\mathfrak{R} = \mu_1 M$.

Sinon, soit h_2 une translation de \mathfrak{R} , mais non de $M_0^{(1)}$. Appliquée plusieurs fois successivement à $M_0^{(1)}$ elle donne $M_1^{(1)}, M_2^{(1)}$. Si la suite est infinie, \mathfrak{R} contient $M_0^{(1)}$ et par suite M une infinité de fois. Dans le cas contraire, soit $M_{\mu_2}^{(1)}$ le premier $M^{(1)}$ qui reproduit $M_0^{(1)}$ lui-même, et posons

$$M_0^{(2)} = M_0^{(1)} + M_1^{(1)} + \dots + M_{\mu_2-1}^{(1)};$$

$M_0^{(2)}$ est homogène.

Si $M_0^{(2)}$ est identique à \mathfrak{R} , on a $\mathfrak{R} = \mu_1 \mu_2 M$.

Sinon on poursuivra de la même manière.

Bref, si μ est infini, ou l'une des suites $M_0^{(p)}, M_1^{(p)}, M_2^{(p)}, \dots$ est infinie, ou la suite même $M_0, M_0^{(1)}, M_0^{(2)}, \dots$ est infinie, aucun des $M_0^{(p)}$ ne reproduisant \mathfrak{R} . Si μ est fini chaque suite est limitée et leur nombre est fini. $M_0^{(1)}$ est une somme d'ensembles $M_0, M_1, \dots, M_{\mu_1-1}$ formant un cycle, la translation h_1 faisant passer d'un M au suivant et de M_{μ_1-1} à M_0 ; de même $M_0^{(2)}$ est la somme des ensembles $M_0^{(1)}, \dots, M_{\mu_2-1}^{(1)}$ qui forment aussi un cycle ...; de même enfin, si $M_0^{(p)}$ est \mathfrak{R} lui-même, il est la somme des ensembles du cycle $M_0^{(p-1)}, \dots, M_{\mu_p-1}^{(p-1)}$, et l'on a

$$\mu = \mu_1 \mu_2 \dots \mu_p.$$

5. REMARQUES SUR LA DÉCOMPOSITION EN CYCLES. — Considérons dans la suite des cycles un cycle quelconque de cycles, par exemple $M_0^{(1)}, M_1^{(1)}, \dots, M_{\mu_2-1}^{(1)}, M_0^{(2)}$ étant $M_0 + M_1 + \dots + M_{\mu_1-1}$.

Les translations $h_2, 2h_2, \dots, (\mu_2 - 1)h_2$ ont transformé chaque M en $\mu_2 - 1$ autres; distinguons-les par un second indice en posant

$$M_s^{(1)} = M_{0,s} + M_{1,s} + \dots + M_{\mu_1-1,s},$$

$M_{p,0}$ étant l'ancien M_p et $M_{p,s}$ se déduisant de $M_{p,s-1}$ par h_2 . M_{p,μ_2} est un $M_{p,0}$; s'il est $M_{p,0}$ le cycle de cycles peut s'obtenir en intervertissant les translations h_1 et h_2 , en sorte que l'on effectue d'abord

sur $M_{0,0}$ par exemple les translations $h_2, 2h_2, \dots$ qui donneront $M_{0,0}, M_{0,1}, \dots, M_{0,\mu_2-1}$, puis, sur ce cycle, les translations $h_1, 2h_1, \dots$ qui fourniront un cycle de μ_1 ensembles. Cela arrivera lorsque $\mu_2 h_2$ sera une translation de M_0 . Si $q \neq p$, $\mu_2 h_2$ est une translation résultante d'une translation γ de M_0 et d'une translation de la forme $t h_1$, t étant congru à $q - p$ relativement au module μ_1 . Au cas où t serait premier avec μ_1 , ce n'est qu'après avoir effectué la translation $\mu_1(\mu_2 h_2)$ sur $M_{0,0}$ que l'on sera revenu à cet ensemble de départ après avoir d'ailleurs obtenu tous les autres. On aura remplacé un cycle de cycles par un cycle unique. Au cas, enfin, où t et μ_1 auraient un plus grand commun diviseur δ , on reviendra à $M_{0,0}$ après $\frac{\mu_1}{\delta} \mu_2$ translations h_2 , on aura ainsi un cycle qui par $\delta - 1$ translations h_1 reproduira l'ensemble proposé. Si μ_1 et μ_2 sont premiers entre eux, on pourra certainement substituer à la translation h_2 la translation $h_2 + x h_1$, l'entier x étant choisi de façon que $x \mu_2 + t$ soit congru à zéro suivant le module μ_1 ; alors on aura bien un cycle de μ_1 cycles formés chacun de μ_2 ensembles égaux à $M_{0,0}$: on peut intervertir les facteurs μ_1 et μ_2 .

Si un facteur μ_1 est le produit de deux entiers $\mu'_1 \mu''_1$ on peut remplacer le cycle relatif à μ_1 par un cycle des cycles; la translation $\mu'_1 h_1$ appliquée plusieurs fois à M_0 donne $M_{\mu'_1}, M_{2\mu'_1}, \dots$; du cycle

$$M_0 + M_{\mu'_1} + \dots + M_{(\mu'_1-1)\mu'_1} = M'_0$$

on déduit ensuite par les translations $h_1, 2h_1, \dots, (\mu'_1 - 1)h_1$ un nouveau cycle composé de $M'_0, M'_1, M'_{\mu'_1-1}$, c'est-à-dire de $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{\mu_1-1}$.

Donc *il existe toujours une suite de cycles s'engendrant les uns les autres à partir de M_0 de manière à reproduire M et correspondant à la décomposition de μ en un produit de facteurs premiers, distincts ou non, et pris dans un ordre arbitraire* (puisque l'on peut intervertir l'ordre de deux facteurs premiers entre eux).

6. COMPOSITION DES TRANSLATIONS QUI ENGENDRENT LES CYCLES. — Désignons d'une manière générale par η les translations de M et envisageons les translations des cycles successifs relatifs à une décomposition

quelconque. D'abord h_1 , translation qui engendre le premier cycle n'est pas un η ; $\mu_1 h_1$ est un η et c'est le premier multiple de h_1 qui jouisse de cette propriété. Toute translation de $M_0^{(1)}$ est de la forme $\eta + m_1 h_1$, m_1 étant un entier. Puis h_2 qui fournit le cycle $M_0^{(2)}$ n'appartient pas à $M_0^{(1)}$, mais $\mu_2 h_2$ est une translation de $M_0^{(1)}$, et c'est le premier multiple de h_2 qui soit de cette forme; et ainsi de suite. Bref les multiples $\mu_1 h_1, \mu_2 h_2, \dots, \mu_s h_s, \dots, \mu_p h_p$ sont les premiers multiples de $h_1, h_2, \dots, h_s, \dots, h_p$ donnés par des égalités de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} \mu_1 h_1 = \tau_1, \\ \mu_2 h_2 = \tau_2 + a_1^{(2)} h_1, \\ \mu_3 h_3 = \tau_3 + a_1^{(3)} h_1 + a_2^{(3)} h_2, \\ \dots, \dots, \dots, \\ \mu_s h_s = \tau_s + a_1^{(s)} h_1 + a_2^{(s)} h_2 + \dots + a_{s-1}^{(s)} h_{s-1}, \\ \dots, \dots, \dots, \\ \mu_p h_p = \tau_p + a_1^{(p)} h_1 + a_2^{(p)} h_2 + \dots + a_{p-1}^{(p)} h_{p-1}, \end{cases}$$

les a étant entiers, et les diverses translations de $M_0^{(1)}, M_0^{(2)}, \dots, M_0^{(s)}, \dots, M_0^{(p)}$ ou \mathfrak{M} sont respectivement fournies par les formules

$$(2) \quad \begin{cases} \eta + m_1 h_1, \\ \eta + m_1 h_1 + m_2 h_2, \\ \dots, \dots, \dots, \\ \eta + m_1 h_1 + m_2 h_2 + \dots + m_s h_s, \\ \dots, \dots, \dots, \\ \eta + m_1 h_1 + m_2 h_2 + \dots + \dots + m_p h_p, \end{cases}$$

les m étant des entiers arbitraires.

7. CONDITIONS POUR QU'UN MILIEU HOMOGÈNE ADMETTE UN MULTIPLE OU UN DIVISEUR. — Observons que h_1 n'est pas une translation de M et que $\mu_1 h_1$ en est une. Donc quand un milieu M admet un multiple (non infini), il existe un diviseur de l'une de ses translations qui n'est pas lui-même une translation. D'ailleurs, lorsque ce fait se présente et si h_1 est ce diviseur et $\mu_1 h_1$ la première translation de M , les translations $h_1, 2h_1, \dots, (\mu_1 - 1)h_1$ fournissent un milieu homogène multiple de M . Ainsi :

Pour qu'un milieu admette un multiple (non infini), il faut et il suffit qu'un diviseur d'une de ses translations ne soit pas lui-même une translation.

Si η_1 étant une translation de M , $h_1 = \frac{\eta_1}{\mu_1}$ n'est pas une translation, un diviseur quelconque de h_1 n'est pas non plus une translation, de sorte que le premier multiple de M que nous venons de former admet aussi des multiples, également multiples de M . Par suite :

Un milieu qui admet un multiple en admet une infinité.

Portons notre attention sur \mathfrak{R} et sur $M_0^{(p-1)}$: Le module des translations de \mathfrak{R} s'obtient en adjoignant h_p au module des translations de $M_0^{(p-1)}$ et $\mu_p h_p$ est le premier multiple de h_p qui appartienne à ce dernier module. Quand il est possible d'effectuer une pareille dissociation, le module restreint définit un milieu $M^{(p-1)}$ qui, par l'emploi de h_p , engendre \mathfrak{R} . Donc :

Pour qu'un milieu admette un diviseur (non nul), il faut et il suffit que l'on puisse distinguer une translation h_p et délimiter un sous-module de translations de manière à satisfaire aux conditions suivantes :

1° h_p ne fait point partie du sous-module, mais un multiple de h_p lui appartient;

2° L'adjonction de h_p au sous-module redonne le module.

Soit $\mu_p h_p = \eta_p$, translation du diviseur considéré de \mathfrak{R} . Si un diviseur $\frac{h_p}{n}$ de h_p est translation de \mathfrak{R} il existe un η , soit η' , et un entier q tels que

$$q h_p - \eta' = \frac{h_p}{n} \quad \text{ou} \quad \frac{qn - 1}{n} h_p = \eta'.$$

D'une part $\frac{\eta'}{\eta_p}$ est nécessairement rationnel; d'autre part, $(qn - 1)h_p$ étant un η , $qn - 1$ est un multiple de μ_p , par suite μ_p et n sont certainement premiers entre eux. Ainsi, avec les mêmes notations que ci-dessus, si $\frac{h_p}{n}$ est translation de \mathfrak{R} , n et μ_p sont premiers entre eux. En

conséquence, *il existe une infinité de diviseurs de h_p qui ne sont point translations de \mathfrak{K}* . Donc, enfin :

Un milieu qui n'admet par de multiple n'admet pas non plus de diviseur.

Cela résultait d'ailleurs de ce fait : si un milieu admet un multiple, ce dernier admet lui aussi des multiples.

On peut donc diviser les milieux en trois classes comprenant respectivement :

- 1° Ceux qui admettent à la fois des multiples (non infinis) et des diviseurs (non nuls);
- 2° Ceux qui admettent des multiples (non infinis), mais qui n'admettent pas de diviseurs (non nuls);
- 3° Ceux qui n'admettent ni multiples (non infinis) ni diviseurs (non nuls).

Les milieux des deux dernières classes, qui n'ont pas de diviseurs, seront dits *premiers*. Ceux de la dernière seront dits *clos*, les autres *non clos*.

8. EXEMPLES. — 1° Le milieu des nombres relatifs est clos; en effet, il n'a pas de multiple, il n'a donc pas de diviseur. Ainsi : *il n'existe pas de milieu homogène qui soit un diviseur non nul du continu.*

2° Le milieu des rationnels relatifs est clos.

3° Soit \mathfrak{Q} un ensemble de nombres premiers à chacun desquels nous faisons correspondre un entier positif qui peut être infini. L'ensemble M des rationnels relatifs, dont les dénominateurs sont des produits de facteurs pris à \mathfrak{Q} avec des exposants au plus égaux aux maxima correspondants, forme un milieu homogène. Je suppose que \mathfrak{Q} ne contienne pas tous les nombres premiers; soit p l'un de ceux qui n'en font point partie. La translation $\frac{1}{p}$ appliquée $p - 1$ fois donnera un milieu $M + M_1 + \dots + M_{p-1}$ multiple de M ; et le milieu \mathfrak{K} ainsi obtenu peut se définir comme M en partant de \mathfrak{Q} auquel on adjoindrait p avec l'exposant maximum 1. De même si q est un nombre de \mathfrak{Q} avec l'exposant α , la translation $\frac{1}{q^{\alpha+1}}$, appliquée à M , fournit un multiple qui se

forme directement à partir de \mathfrak{Q} en augmentant de 1 l'exposant α relatif à q . On peut ainsi construire à partir de \mathbf{M} une suite de milieux tels que chacun d'eux soit multiple du précédent. Inversement, en diminuant successivement d'une unité les exposants maxima de divers nombres premiers de \mathfrak{Q} , on forme une suite de milieux, à partir de \mathbf{M} , dont chacun est un diviseur du précédent.

4° Reportons-nous au Chapitre I, n° 16. Soient trois nombres $a_{\lambda'}$, $a_{\lambda''}$, $a_{\lambda'''}$ pour lesquels les limites correspondantes soient λ' , λ'' , λ''' . La limite qui correspond à $a_{\lambda'} - a_{\lambda''} + a_{\lambda'''}$ est $\lambda' - \lambda'' + \lambda'''$. Donc, si $\varphi(\lambda)$ est un ensemble de valeurs de λ et $\mathcal{C}(\varphi)$ l'ensemble des ensembles $\mathbf{E}(\lambda)$ des nombres a qui correspondent à ces diverses valeurs de λ , pour que $\mathcal{C}(\varphi)$ soit un milieu homogène il faut et il suffit que $\varphi(\lambda)$ soit lui-même un tel milieu. Soient $\varphi_1(\lambda)$ et $\varphi_2(\lambda)$ deux milieux homogènes; $\varphi_1(\lambda)$ admet la translation h lorsque $\mathcal{C}(\varphi_1)$ admet une (et par suite toute) translation a_h ; donc $\mathcal{C}(\varphi_2)$ est un multiple de $\mathcal{C}(\varphi_1)$ en même temps que $\varphi_2(\lambda)$ est un multiple de $\varphi_1(\lambda)$ et ces multiples sont les mêmes.

9. MILIEUX DIVISEURS D'UN MÊME MILIEU. — *Remarque préliminaire.* — Soient deux milieux \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 , ayant un milieu commun \mathbf{D}_1 ; si \mathfrak{N}_2 et \mathfrak{N}_1 , respectivement égaux à \mathfrak{N}_1 , et à \mathfrak{N}_2 , ont un point commun a_2 ils ont un milieu commun \mathbf{D}_2 identique à \mathbf{D}_1 . Il suffit, pour justifier cette observation, de donner à l'ensemble \mathfrak{N}_1 et \mathfrak{N}_2 , une translation amenant un point a_1 de \mathbf{D}_1 en a_2 .

Soit un milieu \mathfrak{N} admettant les diviseurs \mathbf{F} et \mathbf{G} , en sorte que

$$\mathfrak{N} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 + \dots + \mathbf{F}_\mu = \mathbf{G}_0 + \mathbf{G}_1 + \dots + \mathbf{G}_\nu.$$

Supposons d'abord que chaque \mathbf{F}_i et chaque \mathbf{G}_j aient un milieu commun que nous désignerons par \mathbf{H}_{ij} , tous les \mathbf{H} sont égaux d'après ce qui précède; un \mathbf{H} est contenu ν fois dans un \mathbf{F} , μ fois dans un \mathbf{G} , $\mu\nu$ fois dans \mathfrak{N} .

Supposons ensuite qu'un \mathbf{F} et qu'un \mathbf{G} , par exemple \mathbf{F}_0 et \mathbf{G}_0 n'aient pas de point commun. S'ils admettent les mêmes translations ils sont identiques, la suite des \mathbf{G} est la même que celle des \mathbf{F} , écrits dans un autre ordre et $\mu = \nu$. Sinon il existe une translation k , que l'un \mathbf{F}_0

admet et que l'autre G_0 n'admet pas; cette translation fournit un cycle, par exemple

$$G_0 + G_1 + \dots + G_{\nu-1} = G_0^{(1)},$$

qui n'a pas de point commun avec F_0 et \mathfrak{K} est une somme de milieux identiques à $G_0^{(1)}$

$$G_0^{(1)} + G_1^{(1)} + \dots + G_{\nu-1}^{(1)} \quad (\nu = \nu_1 \nu').$$

Reprenons notre raisonnement : si F_0 et $G_0^{(1)}$ sont identiques, G était un diviseur de F , $F = \nu_1 G$ et $\nu = \nu_1 \mu$. Sinon, ou F_0 admet une translation que $G_0^{(1)}$ n'admet pas et nous seront conduits à substituer au cycle $G_0^{(1)} + G_1^{(1)} + \dots + G_{\nu-1}^{(1)}$ un autre cycle $G_0^{(2)} + G_1^{(2)} + \dots + G_{\nu'-1}^{(2)}$, ν' étant un diviseur de ν' , ou il existe une translation h_1 de $G_0^{(1)}$ qui engendre un cycle tel que $F_0 + F_1 + \dots + F_{\mu-1} = F_0^{(1)}$ sans point commun avec $G_0^{(1)}$ et l'on a

$$\mathfrak{K} = F_0^{(1)} + F_1^{(1)} + \dots + F_{\mu-1}^{(1)} \quad (\mu = \mu_1 \mu').$$

Or, supposons que l'on ait poursuivi la première suite d'opérations, nécessairement limitée, tant que F_0 admet des translations qui ne laissent pas invariants les multiples de G successivement considérés, puis la seconde suite d'opérations tant que le multiple de G auquel on s'est arrêté et que je désigne par $G_0^{(i)}$ possède des translations qui transforment $F_0, F_0^{(1)}, \dots$; soit $F_0^{(j)}$ le dernier multiple de F que l'on obtient ainsi. Toute translation de $F_0^{(j)}$ est une translation de $G_0^{(i)}$, car elle est la résultante de translations de F_0 , qui appartiennent à $G_0^{(i)}$, et de translations empruntées à $G_0^{(i)}$; de même toute translation de $G_0^{(i)}$ est une translation de $F_0^{(j)}$. Donc $F_0^{(j)}$ et $G_0^{(i)}$ sont identiques. Posons

$$F_0^{(j)} = m F_0, \quad G_0^{(i)} = n G_0, \quad \mathfrak{K} = k F_0^{(j)} = k G_0^{(i)}.$$

On a

$$k m = \mu, \quad k n = \nu.$$

Chaque $F_0^{(j)}$ coïncide avec $G_0^{(i)}$. Admettons, pour fixer les idées, que coïncident $F_0^{(j)}$ et $G_1^{(i)}, F_1^{(j)}$ et $G_2^{(i)}, \dots, F_{k-2}^{(j)}$ et $G_{k-1}^{(i)}, F_{k-1}^{(j)}$ et $G_0^{(i)}$. Chacun des m ensembles F dont $F_0^{(j)}$ se compose a une partie commune avec chacun des n ensembles qui forment $G_1^{(i)}$ et ces mn parties sont égales;

mais elles sont aussi égales à celles que fournissent les décompositions résultantes de $F_1^{(j)}$ et $G_2^{(j)}$, ..., $F_{k-2}^{(j)}$ et $G_{k-1}^{(j)}$, $F_{k-1}^{(j)}$ et $G_0^{(j)}$. Donc il existe un milieu H contenu n fois dans F et m fois dans G . Ainsi on a cette propriété :

THÉOREME. — *Si un milieu \mathfrak{K} contient les diviseurs F et G respectivement μ fois et ν fois, ces derniers admettent un diviseur commun H qui est contenu n fois dans F , m fois en G , m et n étant les quotients de μ et de ν par un même diviseur k . Le milieu \mathfrak{K} est égal à $k m n H$ ou $\frac{\mu \nu}{k} H$.*

Enfin H peut notamment être identique à F ou à G .

10. PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE ET PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR DE DEUX MILIEUX. — *Si deux milieux F et G ont un multiple commun \mathfrak{K} (non infini) ils admettent, d'après le théorème précédent, un diviseur commun H (non nul). La réciproque est vraie.* En effet, F et G se déduisent respectivement de H au moyen de deux suites de translations $h_1, h_2, \dots, h_r; k_1, k_2, \dots, k_s$, effectuées dans cet ordre et auxquelles correspondent, suivant notre notation habituelle, les entiers $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s$. L'application de h_1 à G ou bien laisse G invariant ou engendre un cycle constituant un milieu au plus égal à μ_1 fois G , soit $G^{(1)}$; de même, la translation h_2 appliquée à $G^{(1)}$ ou bien redonne $G^{(1)}$ ou fournit un cycle composé au plus de μ_2 fois $G^{(1)}$, car $\mu_2 h_2$ est une résultante des translations de H et de h_1 et ainsi de suite; on parvient ainsi à un milieu qui est multiple de G et aussi de F puisqu'il en admet toutes les périodes.

11. Cela posé cherchons tous les multiples de deux milieux F et G ayant un multiple commun \mathfrak{K} non infini, c'est-à-dire un diviseur commun H non nul. Il se peut que l'un des milieux F, G divise l'autre. Les multiples de ce dernier sont alors les multiples communs. Sinon, soit k une translation de G , donc de \mathfrak{K} , que F n'admet pas; on en conclut pour F un cycle formant un milieu $F^{(1)}$; les multiples communs à F et à G sont les mêmes que ceux communs à $F^{(1)}$ et à G ; si $F^{(1)}$ admet toutes les périodes de G il est un multiple de G ; dans le cas contraire, on déduira de $F^{(1)}$ un nouveau multiple de $F^{(2)}$ et les multiples com-

muns à F et à G sont les mêmes que ceux communs à $F^{(2)}$ et à G . Mais cette suite d'opérations a certainement une fin puisque l'on obtient des milieux tous diviseurs de \mathfrak{K} , chacun étant multiple du précédent; elle s'arrêtera au plus tard à \mathfrak{K} lui-même. Donc :

THÉORÈME. — *Si deux milieux admettent un multiple commun non infini, il existe un milieu dont les multiples sont les mêmes que les multiples communs aux deux milieux proposés.*

Nous l'appellerons le *plus petit commun multiple* de ces deux milieux.

12. Supposons que deux milieux F et G aient un diviseur commun H non nul. S'ils en ont un autre K tel que H et K ne soient pas divisibles l'un par l'autre, ils sont divisibles par le plus petit commun multiple M_1 de H et de K , lequel contient chacun de ces derniers un certain nombre de fois. S'il existe encore un diviseur commun L tel que, de M_1 et de L , l'un ne soit pas divisible par l'autre, le plus petit commun multiple M_2 de M_1 et de L divise F et G et il contient plusieurs fois M_1 et L ; ces opérations ont donc une fin; on arrive à un milieu D qui divise F et G et qui est tel que tout diviseur commun à F et à G le divise; chacun de ses diviseurs divise d'ailleurs F et G . Ainsi:

THÉORÈME. — *Si deux milieux admettent un diviseur commun non nul, il existe un milieu dont les diviseurs sont les mêmes que les diviseurs communs aux deux milieux proposés.*

Nous l'appellerons le *plus grand commun diviseur* de ces deux milieux.

13. Les expressions « plus petit commun multiple », « plus grand commun diviseur » seront respectivement remplacées par « p. p. c. m. » et « p. g. c. d. ».

L'existence pour deux milieux d'un multiple commun non infini ou d'un diviseur commun non nul entraîne l'existence du p. p. c. m. et du p. g. c. d.

14. P. P. C. D. ET P. P. C. M. DE PLUSIEURS MILIEUX. — Soient plusieurs milieux $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$. S'ils ont un diviseur commun H , deux quelconques d'entre eux F_1 et F_2 ont un p. p. c. m. M_2 et un p. g. c. d. D_2 ; la conclusion serait la même si l'on supposait un multiple π aux milieux proposés. Les diviseurs communs et les multiples communs à ceux-ci sont respectivement les mêmes que ceux communs à D_2, F_3, \dots, F_n et à M_2, F_3, \dots, F_n . En poursuivant le raisonnement on arrive donc à la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Si plusieurs milieux ont un diviseur commun non nul ou un multiple commun non infini, il existe deux milieux que nous appellerons l'un le p. p. c. d. et l'autre le p. p. c. m. de ces milieux et qui jouissent de ces propriétés : les diviseurs du premier et les multiples du second sont respectivement les mêmes que les diviseurs communs et les multiples communs aux milieux proposés.*

On peut obtenir le p. p. c. d. ou le p. p. c. m. de plusieurs milieux comme on forme ceux de plusieurs nombres entiers, en remplaçant deux milieux par leur p. p. c. d. ou leur p. p. c. m. et en poursuivant de la même façon jusqu'à ce que l'on ait un milieu unique.

15. TRANSLATIONS MULTIPLICATRICES D'UN MILIEU. — Reportons-nous au n° 6; il y a lieu d'étudier de plus près les translations qui font passer d'un milieu M à l'un de ses multiples π .

Observons d'abord que dans les égalités (1) on peut supposer les a non négatifs et inférieurs aux μ correspondants : $0 \leq a_j^{(s)} < \mu_j$. Envisageons la $s^{\text{ième}}$ égalité, on peut successivement réduire $a_{s-1}^{(s)}, a_{s-2}^{(s)}, \dots, a_1^{(s)}$ aux limites indiquées. Alors il ne saurait y avoir deux tableaux différents pour ces h et avec cet ordre, car de

$$\begin{aligned} \mu_s h_s &= \eta_s + a_1^{(s)} h_1 + \dots + a_j^{(s)} h_j + a_{j+1}^{(s)} h_{j+1} + \dots + a_{s-1}^{(s)} h_{s-1}, \\ \mu_s h_s &= \eta'_s + b_1^{(s)} h_1 + \dots + b_j^{(s)} h_j + a_{j+1}^{(s)} h_{j+1} + \dots + a_{s-1}^{(s)} h_{s-1}, \end{aligned}$$

on déduirait

$$[a_j^{(s)} - b_j^{(s)}] h_j = \eta''_s + c_1^{(s)} h_1 + \dots + c_{j-1}^{(s)} h_{s-1}$$

avec

$$0 < |a_j^s - b_j^s| < \mu_j^n,$$

ce qui est impossible.

Nous dirons que les translations h_1, h_2, \dots, h_p , prises dans cet ordre, affectées des coefficients $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ constituent un *multiplicateur de translations ordonnées* et nous le noterons

$$[h_1(\mu_1), h_2(\mu_2), \dots, h_p(\mu_p)];$$

il est défini par le système des égalités (1). Relativement à M, deux *multiplicateurs de translations ordonnées* sont *équivalents* s'ils produisent le même milieu.

En permutant les translations ordonnées, on est certain de retrouver \mathfrak{M} , car l'ensemble final des translations résultantes sera toujours

$$\eta + m_1 h_1 + m_2 h_2 + \dots + m_p h_p.$$

Mais, ainsi que nous l'avons vu dans le cas de deux translations seulement, les coefficients des translations ne restent pas nécessairement invariables; il peut arriver que certaines périodes deviennent inutiles. Ce dernier fait se présente lorsque l'une d'entre elles s'exprime au moyen de celles qui sont déjà introduites et d'une période de M.

La manière dont \mathfrak{M} a été obtenu nous indique le mode de formation de tout multiplicateur équivalent: il suffit de choisir une translation

$$k_1 = \eta^{(1)} + b_1^{(1)} h_1 + b_2^{(1)} h_2 + \dots + b_p^{(1)} h_p,$$

qui ne se réduise pas à un η ; soit $\nu_1 k_1$ le premier multiple de k_1 qui est un η ; on prend une deuxième translation

$$k_2 = \eta^{(2)} + b_1^{(2)} h_1 + b_2^{(2)} h_2 + \dots + b_p^{(2)} h_p,$$

qui ne soit pas de la forme $\eta + m_1 k_1$ et l'on opère sur elle comme sur k_1 , et ainsi de suite.

Disons qu'on a, abstraction faite de l'ordre, un *multiplicateur de translations fondamentales* l_1, l_2, \dots, l_r , lorsque toute translation de \mathfrak{M}

est de la forme

$$\eta + u_1 l_1 + u_2 l_2 + \dots + u_r l_r \quad (\text{les } u \text{ entiers})$$

et qu'aucun l ne s'exprime au moyen des autres et d'un η , c'est-à-dire qu'il n'existe aucune relation de la forme

$$l_i = \eta' + c_1 l_1 + \dots + c_{i-1} l_{i-1} + c_{i+1} l_{i+1} + \dots + c_r l_r \quad (\text{les } c \text{ entiers}).$$

Relativement à M, *deux multiplicateurs de translations fondamentales sont équivalents* s'ils produisent le même milieu.

Partons d'un multiplicateur de translations ordonnées. Aménons successivement au dernier rang chacune des translations, les autres ayant des rangs quelconques; si, venue à ce rang, aucune ne disparaît, elles forment un système de translations fondamentales; sinon, supprimons de l'ensemble la première translation qui disparaît ainsi; recommençons l'opération avec les translations restantes. On forme donc de cette façon un ensemble de translations fondamentales (et, selon l'ordre d'envoi au dernier rang, on pourrait parfois en obtenir plusieurs).

Inversement, si nous avons un ensemble de translations fondamentales, nous pourrions les ordonner de manière qu'il leur corresponde des coefficients non égaux à 1.

16. SYSTÈME CANONIQUE DE TRANSLATIONS ORDONNÉES. — Nous supposons dans ce qui suit μ décomposé en produit de facteurs premiers.

PREMIER CAS : μ est un produit de facteurs premiers égaux. — On peut remplacer le multiplicateur de translations ordonnées défini par le système (1) du n° 6 par un multiplicateur équivalent tel que les indices maxima des translations qui figurent effectivement dans les membres de droite des égalités aillent en croissant avec le numéro d'ordre de ces relations.

Et d'abord on peut supposer que ces indices maxima n'aillent jamais en décroissant, car si par exemple, n étant inférieur à s , l'indice final de la $n^{\text{ième}}$ relation était supérieur à celui de la $s^{\text{ième}}$, on substituerait à h_s la période $h_n + h_s$.

qui donne le même cycle), l'égalité relative à ch_l offre le même indice maximum.

Raisonnons à présent sur un exemple. Soit

$$(4) \quad \begin{cases} \mu_1 h_1 = \eta_1, \\ \mu_1 h_2 = \eta_2, \\ \mu_1 h_3 = \eta_3, \\ \mu_1 h_4 = \eta_4 + a_1^{(4)} h_1, \\ \mu_1 h_5 = \eta_5 + a_1^{(5)} h_1 + a_2^{(5)} h_2 + a_3^{(5)} h_3, \\ \mu_1 h_6 = \eta_6 + a_1^{(6)} h_1 + \dots + a_4^{(6)} h_4. \end{cases}$$

Partons de la dernière égalité et prenons

$$\mu_1 h_6 = h'_4.$$

h'_4 s'exprime donc en fonction d'un η et des h d'indice au plus égal à 4. Inversement h_4 s'exprime en fonction d'un η , de h'_4 et des h d'indices inférieurs à 4; il suffit, pour le voir, d'user comme plus haut de l'indice x tel que $xa_x^{(6)}$ soit congru à 1 suivant le module μ_1 . Puis $\mu_1 h'_4$ se développe comme $\mu_1 h_4$ jusqu'à l' h de même indice, c'est-à-dire ici 1. Posons

$$\mu_1 h'_4 = h'_1,$$

h'_1 et h_1 s'expriment en fonction l'un de l'autre et d'un η . On a en effet

$$\mu_1 h'_1 = \eta'_1.$$

Substituant aux périodes h_1, h_4, h_6 , les périodes h'_1, h'_4, h'_6 , nous transformons le système (4) en un système analogue relatif à $h'_1, h_2, h_3, h'_4, h_5, h'_6$, mais où les relations (4) et (6) sont simplifiées. Effaçant les accents nous avons

$$(5) \quad \begin{cases} \mu_1 h_1 = \eta_1, \\ \mu_1 h_2 = \eta_2, \\ \mu_1 h_3 = \eta_3, \\ \mu_1 h_4 = h_1, \\ \mu_1 h_5 = \eta_5 + a_1^{(5)} h_1 + \dots + a_3^{(5)} h_3, \\ \mu_1 h_6 = h_4. \end{cases}$$

Envisageant alors la dernière égalité non transformée, nous opérons avec elle comme précédemment avec la dernière de toutes. Ici l'opération s'arrête. D'une manière générale les transformations se poursuivent jusqu'à ce que les membres de droite se réduisent à un η ou à un h . On a ici :

$$(6) \quad \mu_1 h_1 = \eta_1, \quad \mu_1 h_2 = \eta_2, \quad \mu_1 h_3 = \eta_3, \quad \mu_1 h_4 = h_1, \quad \mu_1 h_5 = h_3, \quad \mu_1 h_6 = h_4.$$

Plus généralement et disposant convenablement les indices on obtient un système de translations ordonnées défini par des égalités de cette nature :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} (8) \quad \mu_1 h_1^{(1)} = \eta_1, \quad \mu_1 h_{i-1}^{(1)} = \eta_{i-1}, \\ (9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 h_i^{(1)} = \eta_i, \\ \mu_1 h_i^{(2)} = h_i^{(1)}, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 h_{i+1}^{(1)} = \eta_{i+1}, \\ \mu_1 h_{i+1}^{(2)} = h_{i+1}^{(1)}, \end{array} \right. \\ \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots, \\ (10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 h_s^{(1)} = \eta_s, \\ \mu_1 h_s^{(2)} = h_s^{(1)}, \\ \dots\dots\dots, \\ \mu_1 h_s^{(f)} = h_s^{(f-1)}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Les translations $h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(f)}$ sont dites du 1^{er}, 2^e, ..., f^{ième} ordre. Elles sont simples [relations (8)] ou assemblées en groupements canoniques binaires ou de type 2 [relations (9)] ... de type f [relations (10)]. Sous réserve de conserver l'ordre des périodes dans un même groupement, on peut intervertir ces groupements eux-mêmes. C'est uniquement pour la commodité que nous les avons classés ci-dessus dans un ordre de types non décroissants. Lorsqu'un multiplicateur se compose de translations constituant soit des translations simples, soit des groupements canoniques, nous dirons qu'il forme un système canonique de translations ordonnées.

On aurait un système de translations fondamentales en conservant les translations simples et, dans chaque groupement, la translation d'ordre le plus élevé.

Pour qu'un ensemble de translations satisfaisant à des égalités de forme canonique constituent *effectivement* un système canonique de

1° Si d est un multiple de μ_1 , soit d_1 un déterminant des c , non multiple de μ_1 et tel que tout déterminant de degré supérieur soit multiple. On peut supposer d_1 formé avec les j premières lignes et les j premières colonnes; prenant les j premières relations et par exemple la $(j + 1)^{\text{ième}}$, on en déduirait entre les k_1, \dots, k_{j+1} et les h (donc les k) d'ordre inférieur une relation dans laquelle le coefficient de k_{j+1} serait premier avec μ_1 , ce qui est impossible.

2° Si d n'est pas multiple de μ_1 , on tire des relations pour dh_1, \dots, dh_i , donc aussi pour h_1, \dots, h_i des expressions linéaires de k_1, \dots, k_i et des h , donc des k , des ordres inférieurs.

Alors k_1, \dots, k_i sont les translations d'ordre le plus élevé des groupements du plus haut type de S_2 et fournissent ces groupements. On passera ensuite aux groupements du type voisin que l'on déterminera d'une façon analogue; enfin on fera choix des translations simples.

Ainsi on sait construire un système canonique quelconque équivalent à un système canonique donné.

De plus, pour que deux systèmes canoniques soient équivalents il faut et il suffit que les translations de l'un étant des translations du milieu produit par l'autre, il y ait dans les systèmes autant de groupements d'un même type.

18. DEUXIÈME CAS GÉNÉRAL : μ est un produit de facteurs premiers qui ne sont pas tous égaux. — On peut supposer que, dans le système de translations ordonnées [relations (1), n° 6], les nombres premiers égaux sont consécutifs. Soient donc

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{s-1}, \quad \mu_s = \mu_{s+1} = \dots = \mu_{t-1}, \quad \dots$$

A l'aide des $s - 1$ premières égalités on a pu remplacer ce système partiel par un système canonique équivalent; admettons que cette opération préliminaire ait été exécutée : les membres de droite de ces égalités se réduisent à un η ou à un h comme il est expliqué au n° 16.

Nous allons substituer à la translation h_s une autre de la forme

$$h'_s = h_s + c_1 h_1 + \dots + c_{s-1} h_{s-1},$$

de sorte que $\mu_s h'_s$ se réduise à un η . On a

$$(1) \quad \mu_s h'_s = \eta_s + (a_1^{(s)} + \mu_s c_1) h_1 + \dots + (a_{s-2}^{(s)} + \mu_s c_{s-2}) h_{s-2} + (a_{s-1}^{(s)} + \mu_s c_{s-1}) h_{s-1}.$$

Choisissons c_{s-1} de manière que le coefficient de h_{s-1} soit multiple de μ_s ; h_{s-1} disparaît du membre de droite et les termes précédents peuvent être modifiés; prenons alors c_{s-2} de façon que le nouveau coefficient de h_{s-2} soit multiple de μ_s , et ainsi de suite. Notre égalité prend la forme

$$\mu_s h'_s = \eta'_s.$$

h'_s a été substitué à h_s dans toutes les égalités suivantes. Effaçons les accents. Posant alors

$$h'_{s+1} = h_{s+1} + c_1 h_1 + \dots + c_{s-1} h_{s-1},$$

nous pouvons déterminer les nouvelles constantes c de telle sorte que l'expression de $\mu_s h'_{s+1}$ ne contienne ni h_1 , ni h_2 , ..., ni h_{s-1} ; et ainsi de suite. Alors les égalités de la $s^{\text{ième}}$ à la $(t-1)^{\text{ième}}$ inclusivement, toutes relatives à μ_s ne font intervenir, outre les η , que les h (les nouveaux) depuis h_s jusqu'à h_{t-1} ; on peut les remplacer par un système canonique. On suivra la même marche jusqu'à ce qu'on ait substitué au multiplicateur donné un multiplicateur composé d'une suite de systèmes canoniques relatifs aux divers facteurs premiers. Bref on a un ensemble de groupements, pouvant se réduire à des translations simples, et de la forme

$$(2) \quad \mu' h_i^{(1)} = \eta_i, \quad \mu' h_i^{(2)} = h_i^{(1)}, \quad \dots, \quad \mu' h_i^{(f)} = h_i^{(f-1)}.$$

Nous conservons les définitions du n° 16. Les observations faites alors subsistent; mais pour s'assurer qu'un système formellement canonique l'est effectivement il suffit de constater que les translations du premier ordre, relatives à chaque nombre premier, sont indépendantes; car une relation telle que (8) du n° 16, qui intéresserait des translations relatives à plusieurs nombres premiers, se transformerait en une autre faisant intervenir un nombre premier de moins si on la multipliait par lui.

L'exposé du n° 17 subsiste avec cette précision : dans la relation du début

$$k = \eta' + \sum ch \quad (0 \leq c < \mu_1),$$

les h sont supposés relatifs à un même nombre premier μ_1 , et nous dirons que k appartient à μ_1 et qu'il est d'ordre j (ordre maximum des h). Et nous compléterons ainsi la conclusion : Pour que deux systèmes canoniques soient équivalents, il faut et il suffit que les translations de l'un étant des translations du milieu produit par l'autre, il y ait dans les deux systèmes autant de groupements d'un même type pour chaque facteur premier de μ .

19. MULTIPLES ET DIVISEURS D'UN MILIEU. — Quand un milieu M est défini par le système Σ de ses translations η et qu'on sait reconnaître si une translation appartient ou non à Σ , il est aisé de construire un multiple \mathfrak{N} à l'aide d'un système S_1 , canonique ou non, de translations ordonnées. Tout autre est le problème inverse : du module donné Σ_1 des translations ζ de \mathfrak{N} , il faut savoir séparer un sous-module Σ qui, multiplié par S_1 , reproduise Σ_1 .

20. Supposons S_1 connu et mis sous une forme canonique; il est déterminé par des relations telles que les relations (2) du n° 18.

Définitions. — Étant donné un ensemble quelconque de nombres relatifs, on peut les imaginer distribués en ensembles partiels tels que le rapport de deux nombres quelconques d'un même groupement soit rationnel et qu'il soit irrationnel dans le cas contraire. Nous dirons que *les nombres d'un même groupement sont de même espèce*.

Supposons les η_i de même espèce réunis dans un même groupement et $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p$ formant un de ces groupements. On a

$$\frac{\eta_1}{a_1} = \frac{\eta_2}{a_2} = \dots = \frac{\eta_p}{a_p} = \eta',$$

les entiers a étant premiers entre eux dans l'ensemble. Soient, d_2 étant le p. g. c. d. de a_1 et a_2 ,

$$a_1 = a'_1 d_2, \quad a_2 = a'_2 d_2, \quad \pm (b_1 a'_2 - b_2 a'_1) = 1, \quad \frac{\eta_1}{a'_1} = \frac{\eta_2}{a'_2} = \eta'_2,$$

d'où

$$\pm (b_1 \eta_2 - b_2 \eta_1) = \eta'_2.$$

Il faut que η'_2 soit une translation de M, et l'on a

$$\frac{\eta'_2}{a_2} = \frac{\eta_3}{a_3} = \dots = \eta'.$$

Poursuivant le raisonnement, nous constatons que η' doit être une translation de M. Si $\mu_1 h_1^{(1)} = a_1 \eta'$, a_1 est premier avec μ_1 . On en conclut facilement que, dans le système canonique, on peut substituer à $h_1^{(1)}, h_2^{(2)}, \dots$ les quantités $k_1^{(1)}, k_1^{(2)}, \dots$ telles que

$$\mu_1 k_1^{(1)} = \eta', \quad \mu_1 k_1^{(2)} = k_1^{(1)}, \quad \dots$$

Bref, pour éviter d'inutiles changements de notation, on peut supposer que

$$\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_p,$$

et, relativement à ce groupement, on a

$$(r) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \mu_1 h_1^{(1)} = \eta_1, & \mu_1 h_1^{(2)} = h_1^{(1)}, & \dots, & \mu_1 h_1^{(\alpha_1)} = h_1^{(\alpha_1 - 1)}; \\ \mu_2 h_2^{(1)} = \eta_1, & \mu_2 h_2^{(2)} = h_2^{(1)}, & \dots, & \mu_2 h_2^{(\alpha_2)} = h_2^{(\alpha_2 - 1)}; \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots; \\ \mu_p h_p^{(1)} = \eta_1, & \mu_p h_p^{(2)} = h_p^{(1)}, & \dots, & \mu_p h_p^{(\alpha_p)} = h_p^{(\alpha_p - 1)}. \end{array} \right.$$

Une translation de \mathfrak{N} , de même espèce que η_1 , est une résultante des translations h précédentes et d'une autre de la forme $\frac{\eta_1}{\delta}$, δ étant premier avec $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$.

Envisageons $\frac{\eta_1}{\delta}$ et soit d'abord le cas où le multiplicateur S_1 se réduit au groupement ci-dessus. Une translation du type

$$t = \frac{\eta_1}{\delta} + \sum r_i \frac{\eta_1}{\mu_i^{\alpha_i}},$$

où les $\frac{r_i}{\mu_i^{\alpha_i}}$ ne sont pas tous des entiers, ne peut faire partie de M, car,

si par exemple $\frac{r_1}{\mu_1^{\alpha_1}}$ est égal à une fraction irréductible du dénominateur $\mu_1^{\alpha_1}$, en ferait également partie $t \delta \mu_2^{\alpha_2} \dots \mu_p^{\alpha_p}$, donc $\frac{\eta_1}{\mu_1^{\alpha_1}}$, ce qui n'a pas lieu. Or toute translation de \mathfrak{M} est la résultante d'une translation de M et d'une de la forme $\sum \frac{r_i \eta_i}{\mu_i^{\alpha_i}}$. Donc, en retranchant de t une telle expression, on doit trouver une translation de M. Puisque l'on retrouve une expression de même forme, il faut qu'elle se réduise à $\frac{\eta_1}{\delta}$. Toutes les translations du type $\frac{\eta_1}{\delta}$ (η_1 compris) sont nécessairement de M.

Si le multiplicateur contient d'autres groupements que celui défini par (1), la proposition subsiste; car, si l'on pose

$$(2) \quad t' = \sum_1^p \frac{r_i \eta_i}{\mu_i^{\alpha_i}} + \sum_{p+1}^q \frac{r_i \eta_{p+1}}{\mu_i^{\alpha_i}} + \dots$$

et

$$(3) \quad t = \frac{\eta_1}{\delta} + t',$$

les $\frac{r_i}{\mu_i^{\alpha_i}}$ n'étant pas tous des entiers, la translation t ne saurait faire partie de M, comme précédemment; le raisonnement s'achève de la même manière.

Toute translation de même espèce qu'une translation de S, est de la forme

$$\frac{\alpha_1}{\delta_1} \eta_1 + \frac{\alpha_{p+1}}{\delta_{p+1}} \eta_{p+1} + \dots + t',$$

les fractions $\frac{\alpha_1}{\delta_1}, \frac{\alpha_{p+1}}{\delta_{p+1}}, \dots$ étant irréductibles, δ_1 premier avec $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p$, δ_2 avec $\mu_{p+1} \dots \mu_q$, etc. Pour qu'elle fasse partie de M, il faut et il suffit que t' soit une résultante de $\eta_1, \eta_{p+1}, \eta_{q+1}, \dots$.

Si toutes ses translations sont de même espèce que celles du multiplicateur, nous dirons que \mathfrak{M} est de classe zéro; alors M est complètement déterminé et il est aisé de vérifier qu'il est effectivement multiplié par μ ($\mu = \mu_1^{\alpha_1} \mu_2^{\alpha_2} \dots$) à l'aide de S, et reproduit ainsi \mathfrak{M} .

21. Sinon, soient $\partial\pi^{(0)}$ l'ensemble ainsi délimité dans $\partial\pi$ et $M^{(0)}$ la partie attribuée à M .

Considérons une translation de $\partial\pi$, θ , qui n'est pas de même espèce que l'une de celles de S_1 ; il faut qu'il existe un ι' tel que $\theta - \iota'$ appartienne à M ; et même il doit exister des entiers c_i ($0 \leq c_i < \mu_i^{\alpha_i}$) tels que si

$$(4) \quad \theta' = \theta + \sum_1^p \frac{c_i \eta_1}{\mu_i^{\alpha_i}} + \sum_{p+1}^q \frac{c_i \eta_{p+1}}{\mu_i^{\alpha_i}} + \dots = \theta + \iota'',$$

θ' soit de M .

Pour une même valeur de θ , deux θ' correspondant à des systèmes différents des c_i ne sauraient être de M , car leur différence en serait.

Ainsi, parmi les μ valeurs de θ' obtenues en faisant varier les c , une et une seule doit être de M : supposons que ce soit θ .

S'il existe des translations de même espèce que θ , elles sont des résultantes de θ et de translations de la forme $\frac{\theta}{\delta}$, δ étant un nombre premier ou une puissance d'un tel nombre. Une translation telle que $\frac{\theta}{\delta} + \iota''$ doit appartenir (1) à M , mais il ne faut pas que, pour c et c' entiers, $c\theta + c' \left(\frac{\theta}{\delta} + \iota'' \right)$ soit un ι' , les $\frac{r_i}{\mu_i^{\alpha_i}}$ n'étant pas tous entiers. Cette condition se ramène à la suivante: $\delta \iota''$ est une résultante des $\eta_1, \eta_{p+1}, \dots$. De là une distinction: si δ est premier avec μ , c' est $\frac{\theta}{\delta}$ qui est nécessairement de M ; si δ est par exemple $\mu_i^{\alpha_i}$, nous pla-

(1) On a, $\frac{u}{v}$ étant une fraction, A un entier, p_1, p_2, \dots des nombres premiers, β_1, β_2, \dots leurs exposants positifs,

$$\frac{u}{v} \theta = \frac{A}{p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots} \theta.$$

En multipliant l'expression par $p_1^{\beta_1}, \dots$, on constate qu'une certaine expression de la forme $\frac{m_1}{p_1^{\beta_1}}$, dans laquelle m_1 n'est pas multiple de p_1 , est une translation.

Soit $m_1 x - p_1^{\beta_1} y = \pm 1$; $\frac{m_1 x}{p_1^{\beta_1}} \theta$, c'est-à-dire $y \theta \pm \frac{\theta}{p_1^{\beta_1}}$, est une translation, donc aussi $\frac{\theta}{p_1^{\beta_1}}$.

cerons arbitrairement dans M l'une des quantités $\frac{\theta}{\delta} + \frac{c_1 \alpha_1}{\mu_1^{\alpha'}}$, α' étant le plus petit des entiers α_i et α' , et c_1 ayant l'une des valeurs 0, 1, 2, ..., $\mu_1^{\alpha'} - 1$.

Pour opérer avec ordre, on peut considérer d'abord les μ_i pour lesquels l'exposant dans δ reste fini et l'on fixe, pour l'exposant maximum, la translation de M . S'il n'y en a pas d'autres, les choix sont en nombre limité. Sinon, on prend ensuite les μ_i pour lesquels les exposants correspondants dans les δ croissent indéfiniment; pour chacun d'eux, on adopte une suite d'exposants croissants et l'on passe de chacun au suivant comme il est expliqué ci-dessus. Marquons de l'indice 1 la translation θ qui vient d'être envisagée. Nous venons de déterminer un sous-module de \mathfrak{K} formé des translations résultantes de celles qui sont de même espèce que θ_1 et de celles de $\mathfrak{K}^{(0)}$ et d'en attribuer une partie à M . Il se peut que certaines périodes de \mathfrak{K} non encore introduites soient de même espèce que certaines des précédentes. Elles sont de la forme

$$(5) \quad \frac{u_1}{v_1} \theta_1 + \frac{u'}{v'} \theta' = \frac{\Lambda}{p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}} (n_1 \theta_1 + n' \theta')$$

(les u, v, n entiers, $\Lambda, p_1, \dots, \beta_1, \dots$ comme dans la note précédente).

Toutes celles qui sont de même espèce qu'une période particulière $n_1 \theta_1 + n' \theta'$, on les traitera comme on vient de traiter celles de même espèce que θ . Plusieurs translations $n_1 \theta_1 + n' \theta'$, voire même une infinité, sont peut-être à considérer. Imaginons qu'elles soient toutes ordonnées en une suite énumérable, que l'on opère successivement (quand il y a lieu) sur chacune d'elles comme il vient d'être indiqué. Sans doute, on serait ainsi généralement conduit à une infinité dénombrable d'opérations qui en exigent chacune une infinité; mais ce qu'il importe seulement de noter, c'est que dans le milieu homogène $\mathfrak{K}^{(1)}$ ainsi délimité à l'intérieur de \mathfrak{K} , on sépare un module $M^{(1)}$ par des choix faits arbitrairement dans un ordre bien défini et tel que, si on lui adjoint les translations du multiplicateur, d'après son mode même de formation, on le multiplie par μ et l'on reproduit $\mathfrak{K}^{(1)}$.

Or d'autres translations subsistent peut-être dans \mathfrak{N} et si θ_2 est l'une d'elles, on envisage successivement celles qui sont de même espèce que θ_2 , puis celles qui, non introduites, sont de même espèce qu'une résultante de θ_2 et d'une translation de $\mathfrak{N}^{(1)}$, c'est-à-dire celles qui sont de la forme

$$(6) \quad \frac{u_2}{v_2} \theta_2 + \frac{u_1}{v_1} \theta_1 + \frac{u'}{v'} \theta',$$

d'où les nouveaux modules $\mathfrak{N}^{(2)}$ et $M^{(2)}$. Et ainsi de suite, s'il y a lieu. Si l'on épuise ainsi \mathfrak{N} , c'est que \mathfrak{N} est énumérable; la condition est d'ailleurs suffisante (la suite des $\theta_1, \theta_2, \dots$ étant d'ordinaire illimitée). *Si \mathfrak{N} est énumérable, et non de classe zéro, nous dirons qu'il est de classe 1.*

22. Si \mathfrak{N} n'est pas dénombrable, nous ne traiterons qu'un cas particulier, celui où l'on peut former un ensemble \mathfrak{C} , somme de deux autres, l'un \mathfrak{C}_1 qui est dénombrable et comprend les translations de \mathfrak{N} de même espèce que celles du multiplicateur, l'autre \mathfrak{C}_2 qui est formé de systèmes de translations de même espèce, en sorte que : 1° aucune translation de \mathfrak{C}_2 n'est la résultante de translations d'espèces différentes de \mathfrak{C} ; 2° toute translation de \mathfrak{N} est une résultante de translations de \mathfrak{C} , et réciproquement. Nous dirons que \mathfrak{N} est *réductible*. Traitant \mathfrak{C}_1 comme précédemment, puis chaque système de \mathfrak{C}_2 comme 0 tout à l'heure, nous arrivons au même résultat que ci-dessus, sauf que le nombre des M n'est pas énumérable. En résumé :

Si \mathfrak{N} est énumérable et de classe zéro, M existe et est unique.

Si \mathfrak{N} est énumérable et de classe un, il existe un nombre limité ou une infinité énumérable de M .

Si \mathfrak{N} n'est pas énumérable et s'il est réductible, il existe une infinité non dénombrable de M .

23. EXEMPLE. — Je prendrai simplement une seule translation multiplicatrice $\frac{1}{3}$.

I. Soit pour \mathfrak{N} l'ensemble des rationnels, le facteur 3 ne pouvant

figurer au dénominateur qu'avec l'exposant 1. En supprimant de \mathfrak{M} ces dernières fractions, on obtient l'unique M.

II. Au \mathfrak{M} précédent adjoignons les translations résultantes avec π et $\sqrt{2}$. Désignons par ε_1 et ε_2 des nombres 0, 1 et 2 choisis arbitrairement, et complétons les translations du premier M par leurs résultantes avec $(\pi + \frac{\varepsilon_1}{3})$ et $(\sqrt{2} + \frac{\varepsilon_2}{3})$. Nous avons neuf nouveaux M.

III. Posons

$$F(z) = \sum_1^{\infty} \frac{z^i}{10^{\varphi(i)}} \quad \text{et} \quad z = \sum_1^{\infty} \frac{\alpha_j}{10^{\psi(j)}}$$

les α sont des entiers inférieurs à 10, positifs ou nuls, mais une infinité ne sont pas nuls; les fonctions $\varphi(n)$, $\psi(p)$ sont positives, croissantes et infinies avec l'argument. On peut choisir ces fonctions de telle sorte que, si l'on considère s valeurs distinctes quelconques de z , les valeurs correspondantes de $F(z)$, qui sont distinctes, ne sont pas liées par une relation linéaire à coefficients entiers. Dans ce but, il suffit ⁽¹⁾ de prendre $\psi(n) = \varphi(n) = (n!)^2$.

(1) Voici un procédé de calcul : soient

$$F_1(z) = \sum_1^n \frac{z^i}{10^{\varphi(i)}}, \quad F_2(z) = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{z^i}{10^{\varphi(i)}}, \quad z_1 = \sum_1^p \frac{\alpha_j}{10^{\psi(j)}}, \quad z_2 = \sum_{p+1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{10^{\psi(j)}}.$$

On décompose $F_1(z)$ en deux parties, dont l'une est $F_1(z_1)$; en sorte que

$$F(z) = F_1(z_1) + [F_1(z) - F_1(z_1)] + F_2(z),$$

et l'on multiplie les deux membres de cette égalité par une puissance de 10 qui rend $F_1(z_1)$ entier. Mais on choisit la relation entre p et n (j'ai pris $p = n$) et les fonctions $\psi(p)$, $\varphi(n)$, de manière que les deux derniers termes de la somme restent aussi petits que l'on veut. Alors, si

$$(1) \quad m_1 F(z^{(1)}) + m_2 F(z^{(2)}) + \dots + m_s F(z^{(s)}) + m_{s+1} = 0,$$

on a aussi

$$(2) \quad m_1 F_1(z_1^{(1)}) + m_2 F_1(z_1^{(2)}) + \dots + m_s F_1(z_1^{(s)}) + m_{s+1} = 0.$$

Or, si dans $F_1(z)$ on prend un terme de plus (et par suite aussi dans z_1), en retrans-

L'ensemble des nombres $F(z)$ a la puissance du continu, donc aussi le milieu \mathfrak{K} des translations qui en résultent avec $\frac{1}{3}$. Or, si à chacun des nombres $F(z)$ nous ajoutons $\frac{\varepsilon}{3}$, ε étant à volonté pour chacun d'eux 0, 1 ou 2, le milieu M des translations que ces nouveaux nombres définissent est l'un quelconque des milieux diviseurs cherchés.

24. DÉTERMINATION DES P. G. C. D. ET DU P. P. C. M. DE DEUX MILIEUX DONT ON CONNAÎT UN DIVISEUR COMMUN. — *Remarque préliminaire.* — Étant donné un système de translations ordonnées [relations (1), n° 6] nous pouvons supposer, comme au n° 18, que les μ_i sont des nombres premiers, les nombres premiers égaux étant consécutifs :

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{s-1}, \quad \mu_s = \mu_{s+1} = \dots = \mu_{t-1}, \quad \dots$$

Sans qu'il soit nécessaire de remplacer le système partiel des $s - 1$ premières égalités par un système canonique équivalent, le procédé du n° 18 s'applique de sorte que nous sommes en droit d'admettre que

chant de la nouvelle égalité l'égalité précédente, on obtient

$$(3) \quad \sum m [(z_1 + h)^{n+1} + \alpha_{n+1} F'_1(\zeta_1)] = 0,$$

relation dans laquelle h désigne $\frac{\alpha_{n+1}}{10^{\varphi(n+1)}}$ et ζ_1 une quantité intermédiaire entre z_1 et $z_1 + h$. On en conclut que si, dans les $z, \alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(s)}$ est un système d' α de mêmes rangs qui se reproduit une infinité de fois, on a

$$(4) \quad m_1 \alpha^{(1)} F'(z^{(1)}) + \dots + m_s \alpha^{(s)} F'(z^{(s)}) = 0.$$

Pour une infinité de valeurs de n , la relation (3) s'écrit donc

$$(5) \quad \Sigma m z F'(z) + \Sigma m \alpha [F'_1(z) - F'(z)] + \Sigma m \alpha [F'_1(\zeta) - F'_1(z)] + \Sigma m (z_1 + h)^{n+1} = 0.$$

Le premier terme est nul, les deux suivants sont d'un ordre infinitésimal au moins égal à celui de $\frac{1}{10^{\varphi(n+1)}}$; on en conclut aisément que, dans le dernier terme, les coefficients des $(z_1 + h)^{n+1}$, c'est-à-dire les m , sont nuls.

la relation relative à $\mu_i h_i$ ne contient pas de translations h qui appartiennent à des nombres premiers différents de h_i .

25. Cela posé, soient les milieux F et G qui admettent un diviseur commun D défini par l'ensemble T de ses translations; ils s'en déduisent respectivement par les translations multiplicatrices

$$h_1, h_2, \dots, h_p; \quad l_1, l_2, \dots, l_q$$

satisfaisant à des égalités conformes à la remarque précédente et de la forme

$$\Sigma_1 \quad (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 h_1 = \tau_1 \\ \mu_2 h_2 = \tau_2 + a_1^{(2)} h_1, \\ \dots\dots\dots \\ \mu_{s-1} h_{s-1} = \tau_{s-1} + a_1^{(s-1)} h_1 + \dots + a_{s-2}^{(s-1)} h_{s-2}, \\ \dots\dots\dots \\ \mu_p h_p = \tau_p + \dots\dots\dots + a_{p-1}^{(p)} h_{p-1}; \end{array} \right.$$

$$\Sigma_2 \quad (2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu_1 l_1 = \zeta_1, \\ \nu_2 l_2 = \zeta_2 + b_1^{(2)} l_1, \\ \dots\dots\dots \\ \nu_{t-1} l_{t-1} = \zeta_{t-1} + b_1^{(t-1)} l_1 + \dots + b_{t-2}^{(t-1)} l_{t-2}, \\ \dots\dots\dots \\ \nu_q l_q = \zeta_q + \dots\dots\dots + b_{q-1}^{(q)} l_{q-1}. \end{array} \right.$$

Les notations dans (2) et dans (1) sont analogues. Les a et les b sont non négatifs et respectivement inférieurs aux μ et aux ν correspondants. Toute translation commune à F et à G est de la forme

$$\theta_1 + \Sigma m_i h_i \quad \text{ou} \quad \theta_2 + \Sigma c_j l_j,$$

les c et les m étant des entiers et les θ des translations de T. Si les m sont nuls on a une période de D; un ensemble de translations qui n'en contient pas d'autres définit un diviseur de D. Chercher toutes les translations communes revient à déterminer toutes les formes linéaires en l_j qui se réduisent à une expression telle que $\theta + \Sigma m_i h_i$. Or une pareille forme linéaire se décompose en une somme de formes

relatives chacune à une même valeur de ν et *qui sont séparément des périodes communes*. On en conclut qu'il est impossible de trouver de nouvelles translations si aucun ν n'est égal à un μ ; D est alors le plus grand commun diviseur. Admettons au contraire que

$$\mu_1 = \mu_2 \dots = \mu_{s-1} = \nu_1 = \nu_2 \dots = \nu_{t-1}.$$

Nous chercherons successivement les expressions $l_1, c_1 l_1 + l_2, c_1 l_1 + c_2 l_2 + l_3, \dots$ ($0 \leq c_i < \mu_i$) qui se réduisent à $\theta + \Sigma m_i h_i$ ($i \leq s-1$); soit $c_1 l_1 + c_2 l_2 + l_3$ la première. Nous poserons

$$l'_3 = c_1 l_1 + c_2 l_2 + l_3$$

et nous substituerons l'_3 à l_3 dans les relations (2). Et l'on continuera de la même façon. On a pu supposer les coefficients de $l_1, l_2, l_3; \dots$ égaux à un dans les expressions successives. Pour un type déterminé une seule peut être période. Les substitutions effectuées dans (2) *les membres de droite relatifs aux l' ne peuvent contenir d'autres l que des l'* (car une combinaison non trouvée de l à indices inférieurs serait translation). On a ainsi un tableau analogue aux tableaux (1) et (2) définissant un système S_1 de translations ordonnées qui, appliqué à D, fournit le p. g. c. d. ω .

26. Les multiples communs à F et à G admettent toutes les périodes

$$\theta + \Sigma m_i h_i + \Sigma n_j l_j.$$

Mais il peut n'être pas nécessaire de conserver dans cette formule tous les h et tous les l . Cela arrivera si D n'est pas le p. g. c. d. Supposons donc que nous ayons déterminé ce p. g. c. d. ω . Dans le système (2) et par suite aussi dans le système (1) du numéro précédent les translations l' peuvent être placées en tête des relations, de sorte que les égalités suivantes de (1) et de (2) caractérisent des translations multiplicatrices ordonnées qui définissent respectivement F et G à partir du p. g. c. d.

Afin de conserver les notations, supposons ce travail préliminaire accompli; D est ω , les translations nouvelles formées d'une part à

l'aide des h , d'autre part à l'aide des l , sont toutes distinctes. Réunissons les relations (1) et (2) en plaçant par exemple les égalités de (2) relatives à un nombre premier à la suite des égalités de (1) qui ont trait à ce même nombre premier (l'ordre des nombres premiers étant indifférent) et nous aurons un multiplicateur de translations ordonnées qu'admet nécessairement tout multiple commun à F et à G et qui définit, à partir de Θ , leur p. p. c. m., \mathfrak{N} .

27. DÉTERMINATION DU P. P. C. M. ET DU P. G. C. D. DE DEUX MILIEUX DONT ON CONNAIT UN MULTIPLE COMMUN. — Soient F et G les milieux qui sont définis par les ensembles T_1 et T_2 de leurs translations. Il admettent un multiple commun M qui se déduit d'eux respectivement par les translations multiplicatrices Σ_1 et Σ_2 définies comme au n° 25, les η et les ζ appartenant bien entendu les premières à T_1 , les secondes à T_2 .

Pour qu'un milieu soit multiple commun de F et de G, il faut et il suffit qu'il admette les translations de G et celles, produites par Σ_2 , qui appartiennent à F. Or la marche suivie au n° 25 est applicable : seulement, ici, il faut chercher les formes linéaires en l , relatives à une même valeur de ν , qui se réduisent à une translation de F. En les adjoignant à T_2 , ainsi que leurs résultantes avec ces dernières, on forme le p. p. c. m. de F et de G, \mathfrak{N} .

L'opération précédente a fourni un système de translations multiplicatrices qui de G déduit \mathfrak{N} . Appliquée à Σ_1 , elle donnerait de même le multiplicateur qui conduit à \mathfrak{N} en partant de F. Supposons ce travail accompli, et, pour plus de simplicité, admettons que Σ_1 et Σ_2 soient précisément les multiplicateurs qui produisent \mathfrak{N} .

Les translations l se réduisent à des translations de F, si η' appartient à T_1 ; il en est de même des périodes $\eta' + \Sigma n_i l_i$ ($0 \leq n_i < \nu_i$), et parmi toutes celles-ci une et une seule est de T_2 ; l'ensemble de ces périodes Θ définit le p. g. c. d. Θ . L'application à Θ du multiplicateur Σ_2 reproduit T_1 , et celle de Σ_1 à T_1 fournit \mathfrak{N} . Bref, le multiplicateur constitué par la réunion des deux multiplicateurs Σ_1 et Σ_2 mène du p. g. c. d. au p. p. c. m.

Mais la détermination du p. g. c. d. et du p. p. c. m., en partant d'un multiple commun, est pratiquement un tout autre problème qu'avec la donnée d'un commun diviseur.

28. CAS DE PLUS DE DEUX MILIEUX. — On donne plusieurs milieux F_1, F_2, \dots, F_k . Si l'on connaît un diviseur commun D et des systèmes $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$ de translations multiplicatrices ordonnées qui de D conduisent à F_1, F_2, \dots, F_k , on saura déterminer le p. g. c. d. \mathcal{D}_1 et le p. p. c. m. \mathcal{R}_1 de F_1 et de F_2 , ainsi que les systèmes multiplicateurs σ'_1, σ''_1 qui mènent de D à \mathcal{D}_1 ou à \mathcal{R}_1 . Pour la recherche du p. g. c. d. des milieux donnés, on leur substituera $\mathcal{D}_1, F_3, \dots, F_k$ avec $\sigma'_1, \Sigma_3, \dots, \Sigma_k$ et, pour celle du p. p. c. m. $\mathcal{R}_1, F_3, \dots, F_k$ avec $\sigma''_1, \Sigma_3, \dots, \Sigma_k$.

Supposons au contraire connu un multiple commun M auquel on vient de F_1, F_2, \dots, F_k respectivement par $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$. On sait former le p. p. c. m. \mathcal{R}_1 de F_1 et de F_2 qui conduit à M par σ''_1 ; admettons que, en suivant la marche du n° 27, on puisse construire aussi leur p. g. c. d. \mathcal{D}_1 d'où l'on va à M par σ'_1 . La suite des opérations s'ordonnera alors comme ci-dessus.

29. MILIEUX COMMENSURABLES ENTRE EUX (milieux homogènes). — *Définitions.* — On appelle « rapport d'un milieu M_1 à l'un de ses diviseurs non nuls M_2 » le nombre de fois qu'il le contient.

Étant donnés deux milieux M_1, M_2 qui admettent un même diviseur D non nul, on appelle « rapport de M_1 à M_2 » le quotient des nombres de fois qu'ils le contiennent.

Cette définition est justifiée par la propriété suivante : Si $M_1 = \mu_1 D$ et $M_2 = \mu_2 D$ et s'il existe un autre diviseur commun E tel que $M_1 = \nu_1 E$ et $M_2 = \nu_2 E$, on a

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

En effet (n° 9), D et E admettent un diviseur commun H contenu n fois dans E , et l'on a

$$\mu_1 n = \nu_1 m, \quad \mu_2 n = \nu_2 m.$$

THÉORÈME. — Si deux milieux M_1 et M_2 sont commensurables avec un même milieu U , leur rapport est égal au quotient de leurs rapports à U .

En effet, il y a par hypothèse un diviseur V_1 commun à M_1 et à U , un V_2

à M_2 et à U ; V_1 et V_2 divisant U ont un diviseur commun V , et l'on a

$$M_1 = m_1 V, \quad M_2 = m_2 V, \quad U = u V;$$

d'où la conclusion.

Remarques. — I. Si deux milieux M_1, M_2 sont commensurables avec un même troisième U , ils sont commensurables entre eux. Cela résulte de la définition précédente.

II. Si un milieu M_1 est incommensurable avec un milieu U , il n'est pas possible de trouver deux milieux M'_1, M''_1 , commensurables avec U , dont la différence des rapports soit inférieure à un nombre positif quelconque ε et tels que M'_1 soit inclus dans M_1 et M_1 dans M''_1 : en effet, M'_1 serait un diviseur de M_1 .

30. FAMILLES DE MILIEUX HOMOGÈNES COMMENSURABLES ENTRE EUX; ELLES SONT MESURABLES OU SEMI-MESURABLES. — Soit une famille \mathcal{F} de milieux homogènes, telle que deux quelconques soient commensurables et que tout milieu commensurable avec l'un d'eux appartienne à la famille. Prenons l'un d'eux arbitrairement U comme unité et adoptons pour mesure de chacun d'eux son rapport à U .

Si un milieu somme de plusieurs milieux de \mathcal{F} est homogène, il appartient lui-même à \mathcal{F} ; il en est de même s'il s'agit de la différence de deux milieux de \mathcal{F} .

On voit immédiatement qu'une pareille famille \mathcal{F} est au moins semi-mesurable.

Mais si la somme M d'une infinité énumérable $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ de milieux de \mathcal{F} fait elle-même la partie de \mathcal{F} , sa mesure est-elle la somme de leurs mesures?

M se déduit de M_1 par des translations multiplicatrices ordonnées qui, notées dans l'ordre inverse, sont $h_1, h_2, \dots, h_{\alpha_1}$, et si $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\alpha_1}$ sont les entiers correspondants, M est la somme de $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{\alpha_1}$ milieux identiques à M_1 ; M_1 et M_2 ont un p. g. c. d. D_2 , M_1 se déduit de D_2 par un système de translations ordonnées qui, notées dans l'ordre inverse, sont $h_{\alpha_1+1}, h_{\alpha_1+2}, \dots, h_{\alpha_2}$; l'application de quelques-unes des translations résultantes de $h_1, h_2, \dots, h_{\alpha_1}$ donne M_2 ; de même

D_2 et M_3 ont un p. g. c. d. D_3 , D_2 se construit à partir de D_3 par le système multiplicateur $h_{x_2+1}, \dots, h_{x_3}$ et M_3 est fourni par D_3 à l'aide de certaines résultantes des translations h_1, h_2, \dots, h_{x_2} .

Je suppose tous les μ_i nombres premiers. Soit η l'une quelconque des translations de M , autre que les résultantes des h , s'il en existe, et a l'un quelconque particulier de ses points. Tout autre point est

donné par une expression de la forme $a + \eta = \sum_{i=1}^{i=\infty} c_i h_i$, les entiers c non nuls étant en nombre fini. Les points de l'un des milieux identiques à M_i sont donnés par $a + \eta + \sum_{i=\alpha_i+1}^{i=\infty} c_i h_i$, ceux de l'un des

milieux identiques à D_2 par $a + \eta + \sum_{i=\alpha_2+1}^{i=\infty} c_i h_i$, et ainsi des autres.

Cela posé, considérons un segment de droite $(0, 1)$, divisons-le en μ_1 parties égales, chacune d'elles en μ_2 parties égales, etc.; c'_j désignant une valeur particulière de c_j et c''_j le reste de sa division par μ_j ,

faisons correspondre aux points $a + \eta + \sum_{j=1}^{j=p} c'_j h_j$ le point

$$\frac{c''_1}{\mu_1} + \frac{c''_2}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{c''_p}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}.$$

Nous avons ainsi une infinité énumérable E de points, tous rationnels, et qui sont les points de décomposition du segment, ainsi que son origine.

A un ensemble

$$a + \eta + c'_1 h_1 + \dots + c'_{k-1} h_{k-1} + \sum_{i=k}^{i=\infty} c_i h_i$$

(les entiers c variables et ceux non nuls toujours en nombre fini) correspondent les points rationnels, premier point compris, dernier exclu, de l'intervalle

$$\frac{c''_1}{\mu_1} + \frac{c''_2}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{c''_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{k-1}}, \quad \frac{c''_1}{\mu_1} + \frac{c''_2}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{c''_{k-1} + 1}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{k-1}},$$

d'étendue $\frac{1}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{k-1}}$; c'est précisément la mesure de cet ensemble si l'en prend comme unité M , c'est-à-dire si on lui donne comme mesure l'étendue du segment qui lui correspond. Si l'un des ensembles est inclus dans un autre, l'intervalle qui correspond au premier est inclus dans l'intervalle qui correspond au second; si un ensemble est la somme de plusieurs autres, son intervalle est la somme de leurs intervalles. Nous avons ainsi une image géométrique de M et de ses parties M_1, M_2, \dots [M_i est représenté soit par un segment de décomposition de l'intervalle $(0, 1)$, soit par un nombre limité de tels segments]. Soit E_j l'ensemble des points rationnels qui correspondent à M_j , il est constitué par ceux des points de E qui appartiennent à certain des intervalles (en nombre limité). Tout point de E appartient à un E_j et à un seul. Supprimons successivement de $M, M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$; enlevons en même temps du segment $(0, 1)$ les intervalles qui correspondent à $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$. Tout point de E devra donc être enlevé. Or, on peut enlever de $(0, 1)$ une infinité d'intervalles, dont la somme soit aussi petite que l'on veut, et telle que tout point de E soit enlevé. Si donc on choisit pour les M_n les milieux qui correspondent à ces intervalles, la somme de leurs mesures sera inférieure à celle de M . *Dans le cas général, la famille de milieux sera donc seulement semi-mesurable.* L'exposé qui précède donne en même temps une forme tangible à la condition pour que la mesure du milieu, somme des milieux en infinité dénombrable, soit égale à la somme des mesures de ces milieux : il faut et il suffit que la même propriété ait lieu pour les intervalles qui sont les images géométriques de ce milieu même et de ses parties.

Voici un cas particulier intéressant : si une famille est formée à partir d'un milieu qui n'a pas de diviseur (non nul), mais qui a un multiple (donc une infinité), aucun milieu ne sera la somme d'une infinité d'autres. Donc *la famille sera mesurable.* Exemple : On utilise le milieu constitué par les fractions $\frac{n}{p^\alpha}$, p étant un entier fixe, n et α prenant des valeurs entières quelconques, positives pour le dernier.

31. EXTENSION A CERTAINS MILIEUX DE TRANSLATION. — *Définition.* — Nous dirons qu'un ensemble A de points est indépendant d'un sys-

tème T de translations lorsque la différence des abscisses de deux points quelconques de A n'est jamais une translation de T .

Cela posé, un milieu M de translation est la somme de milieux homogènes identiques. Soient T le système de translations qui caractérise ces milieux, A un ensemble de points pris un et un seul dans chacun d'eux (peu importe dans la question présente que l'on sache ou même qu'il soit effectivement possible de faire un pareil choix); A est indépendant de T . Les translations de T redonnent M à partir de A . Réciproquement, si A est indépendant de T , en effectuant les translations de T sur chaque point de A , on obtient des milieux homogènes identiques et distincts dont la somme est un milieu de translation.

Soit maintenant une famille \mathcal{F} de milieux homogènes M , caractérisés chacun par l'ensemble T de ses translations, et satisfaisant aux conditions du n° 30, en sorte qu'elle est mesurable ou semi-mesurable. Considérons un ensemble A *indépendant de chaque* T ; cela arrivera par exemple si tous les T appartiennent à un même module τ et si A est indépendant de T . Appliquons à A les translations de chaque T , nous formons ainsi des milieux de translation \mathcal{M} dont nous dirons de l'ensemble qu'il *dérive d'une famille de milieux homogènes commensurables*; il va de soi que chacun d'eux n'est pas fixé en position et peut glisser sur la droite qui le porte.

Nous allons prouver qu'une telle famille de milieux de translation est mesurable ou semi-mesurable comme celle de milieux homogènes dont elle dérive et montrer à cet effet que le rapport de deux milieux \mathcal{M} est égal au rapport des deux T correspondants.

32. *Pour que deux milieux \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 soient égaux, il faut et il suffit que les modules T_1 et T_2 des translations soient identiques.*

La condition est suffisante; elle est nécessaire, car toute translation admise par un milieu est admise par l'autre.

\mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 étant supposés égaux, il est intéressant de noter l'effet du déplacement qui amène un point de \mathcal{M}_2 , d'abscisse x_2 sur un point de \mathcal{M}_1 , d'abscisse y_1 ; soit x_1 le point de \mathcal{M}_1 sur lequel vient x_2 lorsqu'on établit une coïncidence de \mathcal{M}_2 avec \mathcal{M}_1 : le déplacement actuel

est le résultant de ce dernier et de celui qui place x_1 en y_1 ; si donc y_1 dérive de x_1 par une translation de T_1 , ce dernier mouvement n'a fait que glisser sur lui-même chacun des ensembles identiques à T_1 dont \mathfrak{N}_2 se compose : \mathfrak{N}_2 coïncide encore avec \mathfrak{N}_1 . Soit $\lambda = y_1 - x_1$; lorsque deux points dont la différence d'abscisses n'est pas un élément de T_1 , se placent l'un sur l'autre, les deux ensembles élémentaires qui en dérivent par T_1 coïncident entièrement. Donc tout couple α, β de points de A pour lequel $\beta - \alpha = \lambda + \theta$, θ étant une translation de T_1 , sera tel que la translation λ amènera l'ensemble (α) sur l'ensemble (β) ; si A admet les translations $\pm \lambda$ (à des translations près de T_1) la coïncidence de \mathfrak{N}_2 et de \mathfrak{N}_1 sera complète; cela arrive notamment si le milieu de translation est un milieu homogène. Mais s'il n'y a pas deux couples tels que

$$\delta - \gamma = \beta - \alpha + \theta \quad (\gamma \text{ et } \beta \text{ pouvant être égaux}),$$

on ne parviendra par là qu'à superposer deux ensembles élémentaires; exemple : A est formé de $\sqrt{2}, e, \pi$, et T_1 est l'ensemble des rationnels. Il peut se faire que l'on ait des coïncidences partielles en nombre fini ou non; exemple : avec le même T_1 , on prend des nombres algébriques, on peut choisir l'ensemble A de manière que si α, β, γ sont trois nombres de A , tantôt $\beta - \alpha + \gamma$ (à un rationnel additif près) en fasse aussi partie, tantôt non.

Pour que la superposition de \mathfrak{N}_2 et de \mathfrak{N}_1 soit complète, il faut et il suffit que A se déduise d'un ensemble B à l'aide des translations $\pm \lambda$ à un θ près et \mathfrak{N}_1 se construit alors à partir de B au moyen du module résultant de T_1 et de $\pm \lambda$.

33. *Pour que $\mathfrak{N}_1 = n\mathfrak{N}_0$, il faut et il suffit que les modules correspondants satisfassent à l'égalité $T_1 = nT_0$.*

La condition est suffisante.

Elle est nécessaire. En effet, on a par hypothèse

$$(1) \quad \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_0^{(1)} + \dots + \mathfrak{N}_0^{(n)}$$

$\mathfrak{N}_0^{(1)}, \dots, \mathfrak{N}_0^{(n)}$ étant identiques à \mathfrak{N}_0 ; \mathfrak{N}_1 se déduit de A par les

translations de T_1 ; \mathfrak{N}_1 admet toutes les périodes de \mathfrak{N}_0 , ainsi T_0 est inclus dans T_1 et $T_1 = pT_0$; on en conclut $\mathfrak{N}_1 = p\mathfrak{N}_0$, donc (1) $p = n$.

On passe de T_0 à T_1 à l'aide d'un multiplicateur de translations ordonnées; en les faisant jouer sur $\mathfrak{N}_0^{(1)}$ par exemple, on obtiendra les autres milieux de la somme. Mais il peut arriver, comme il a été expliqué ci-dessus, que $\mathfrak{N}_0^{(1)}$ vienne se superposer à lui-même par une translation λ , n'appartenant pas à T_0 , mais que A admettrait, à des translations près de T_0 . Alors par l'emploi de λ et d'une translation multiplicatrice ou bien les \mathfrak{N}_0 se permutent ou bien ils se divisent en cycles à l'intérieur desquels s'opèrent les permutations, et il n'existe pas d'autre moyen (en dehors du procédé général des translations multiplicatrices) pour obtenir des échanges des $\mathfrak{N}_0^{(i)}$.

Considérons une translation quelconque λ n'appartenant pas à T_1 , et qui fait glisser \mathfrak{N}_1 sur lui-même; A admet λ à des translations près de T_1 , sommes d'une translation de T_0 et d'une translation multiplicatrice qui fait passer de \mathfrak{N}_0 à \mathfrak{N}_1 . Le déplacement λ aura d'une manière générale pour effet de disloquer un milieu quelconque $\mathfrak{N}_0^{(i)}$ en n milieux qui viendront se placer respectivement sur n parties de $\mathfrak{N}_0^{(1)}$, $\mathfrak{N}_0^{(2)}$, ..., $\mathfrak{N}_0^{(n)}$.

34. Pour que $\frac{\mathfrak{N}_1}{\mathfrak{N}_2} = \frac{p}{q}$, il faut et il suffit que $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$, T et T_2 étant les modules qui correspondent à \mathfrak{N}_1 et à \mathfrak{N}_2 .

(1) \mathfrak{N}_1 ne peut se présenter comme somme, de deux manières et en nombres différents, de milieux identiques à \mathfrak{N}_0 . Partons de l'égalité (1). Soit

$$\eta = c_1 \frac{\theta_1}{\mu_1} + c_2 \frac{\theta_2}{\mu_2} + \dots + c_s \frac{\theta_s}{\mu_s}$$

une translation quelconque introduite par T_1 ; $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ sont chacun puissance d'un nombre premier et leur produit vaut p ; les c sont des entiers non négatifs et inférieurs aux dénominateurs correspondants. Pour chaque système des c (non tous nuls) un point x_1 de $\mathfrak{N}_0^{(1)}$ sort de ce milieu, pour deux systèmes différents il va dans deux milieux différents; il visite donc $p - 1$ milieux; tout milieu est d'ailleurs visité, car si x_i est l'homologue de x_1 dans $\mathfrak{N}_0^{(i)}$, $x_i - x_1$ est une translation de T_1 . Ainsi $p = n$.

La condition est suffisante. Elle est nécessaire : dire que

$$\frac{\varpi_1}{\varpi_2} = \frac{p}{q},$$

c'est dire qu'il existe un milieu ϖ_0 tel que l'on ait

$$\varpi_1 = p \varpi_0, \quad \varpi_2 = q \varpi_0.$$

La conclusion est immédiate.

Ainsi *les milieux de la famille sont proportionnels à leurs modules de périodes.*

35. Les notions de multiple, de p. g. c. d., de p. p. c. m. s'étendent aux milieux de notre famille de translation.

Si ϖ_2 est inclus dans ϖ_1 , T_2 module du premier est un diviseur de T_1 module du second, ϖ_2 est un multiple de ϖ_1 . En effet, une période θ_2 de ϖ_2 , étant la différence des abscisses de deux points de ϖ_1 , est la somme d'une différence d'abscisses ξ (pouvant être nulle) de deux points de A et d'une période θ_1 de ϖ_1 ; or l'égalité $\xi = \theta_2 - \theta_1$ exige $\theta_2 = \theta_1$.

La propriété du n° 33 montre que la recherche du p. g. c. d. ou du p. p. c. m. de plusieurs milieux se ramène à celle du p. g. c. d. ou du p. p. c. m. des modules de leurs périodes; le module trouvé est celui des périodes du milieu cherché.

CHAPITRE III.

SYSTÈMES D'ENSEMBLES APPARTENANT A DIVERS MILIEUX DE TRANSLATION.

1. Dans ce Chapitre, on se propose de comparer entre eux des ensembles bornés qui sont inclus dans des milieux ϖ de translation (ce qui comprend le cas de milieux homogènes) constitués comme on

vient de l'exposer à la fin du Chapitre précédent; c'est-à-dire que la famille des \mathfrak{M} dérive d'une famille de milieux homogènes commensurables. On formera ainsi certains systèmes d'ensembles mesurables ou semi-mesurables.

2. Soit donc une telle famille Σ de milieux de translation \mathfrak{M} . A chacun d'eux, on peut, d'après le Chapitre I, attacher un système S d'ensembles E, qui est mesurable ou semi-mesurable. Je dis que cette propriété de la mesure appartient à son tour à l'ensemble \mathfrak{C} de tous ces ensembles E.

Faisons choix de l'un des milieux, \mathfrak{M}_0 , comme milieu unité; un milieu quelconque \mathfrak{M} de Σ est mesuré par un nombre ω , positif, que nous adoptons comme mesure de l'un de ses fragments de longueur 1. Il en résulte pour chaque E un ou plusieurs nombres selon qu'il est mesurable dans un seul milieu ou dans plusieurs. Il faut montrer que ce nombre a une valeur unique et qu'il satisfait aux conditions de la mesure.

3. Voici une remarque qui nous sera utile : Nous avons vu (Chap. I, n° 8) que la mesure extérieure de E dans le milieu \mathfrak{M} où il est inclus est la limite inférieure de la mesure des fragments de \mathfrak{M} , en nombre fini ou en infinité dénombrable dans lesquels on peut enfermer les points de E. C'est le produit par ω de la limite inférieure de la mesure, dans le continu, des intervalles de mêmes bornes. Or, pour qu'un ensemble de fragments de \mathfrak{M} contienne les points de E, il faut et il suffit que l'ensemble des segments correspondants le contienne dans le continu.

La somme des longueurs de ses segments a une limite inférieure fixe qui est la mesure extérieure de E dans le continu; nous l'appellerons *la mesure segmentaire extérieure de E*. Son produit par ω donne donc la mesure extérieure dans \mathfrak{M} .

La même observation est valable pour l'étendue extérieure.

LEMME. — Si \mathfrak{M}_2 est un diviseur de \mathfrak{M}_1 , en sorte que $\mathfrak{M}_1 = K \mathfrak{M}_2$, et si \mathfrak{M} est la somme de n , n étant inférieur à k , des k milieux identiques

à \mathfrak{K}_2 , dont la réunion forme \mathfrak{K}_1 , l'étendue intérieure J et la mesure intérieure L , dans \mathfrak{K}_1 , d'un fragment de \mathfrak{K} sont nulles; son étendue extérieure et sa mesure extérieure sont égales à la mesure du fragment de \mathfrak{K}_1 , qui a les mêmes bornes. L'étendue intérieure et la mesure intérieure, dans \mathfrak{K}_1 , d'un ensemble inclus dans \mathfrak{K} sont nulles.

Soient a et b les bornes du fragment F_1 de \mathfrak{K} . Décomposons l'intervalle (a, b) en une somme finie d'intervalles partiels; dans chacun d'eux sont des points de \mathfrak{K}_1 , qui n'appartiennent pas à \mathfrak{K} ; on en conclut que l'étendue intérieure J de F_1 , envisagée dans \mathfrak{K}_1 , est nulle. De même son étendue extérieure, puisqu'il a des points dans chaque intervalle partiel, est égale à celle du fragment correspondant de \mathfrak{K}_1 , c'est-à-dire à $\omega_1(b - a)$, ω_1 étant la mesure du milieu \mathfrak{K}_1 .

Soient un second intervalle (c, d) de même longueur que (a, b) et F_2 le fragment de \mathfrak{K} de bornes c et d . A un point x' de \mathfrak{K} appartenant à F_1 , on peut faire correspondre un point x'' de F_2 , homologue de x' , c'est-à-dire tel que l'on passe de x' à x'' par une translation de \mathfrak{K}_2 , et de plus aussi voisins que l'on veut, du point où vient x' lorsqu'on met le segment (a, b) sur le segment (c, d) : cette dernière condition s'exprime ainsi $|(x'' - c) - (x' - a)| < \varepsilon$, ε donné positif. Si l'on couvre les points de F_1 d'une infinité énumérable I d'intervalles compris entre a et b et de longueur α , $\alpha\omega_1$ est une limite supérieure de la mesure extérieure de F_1 dans \mathfrak{K}_1 . Or, donnons à I le déplacement $x'' - x'$, dans leur nouvelle position les intervalles de I couvrent F_2 , à une longueur près, inférieure à ε . Donc F_1 et F_2 ont même mesure extérieure. Le rapport des mesures extérieures des fragments de \mathfrak{K} dans \mathfrak{K}_1 aux mesures des fragments de \mathfrak{K}_1 , de mêmes bornes qu'eux est donc constant. Cela suffit à prouver, en raisonnant comme au Chapitre I, n° 6, que la mesure extérieure d'un fragment F_1 de \mathfrak{K} est soit nulle, soit égale à celle du fragment correspondant Φ_1 de \mathfrak{K}_1 . Mais elle ne peut être nulle (à moins que ses bornes soient confondues), car nulle aussi serait *a fortiori* celle du fragment Φ_2 de \mathfrak{K}_2 de mêmes bornes et par suite celle de la somme des k fragments identiques à Φ_2 qui constitue Φ_1 , serait nulle également.

On en conclut encore que la mesure intérieure de F_1 est nulle.

La conséquence pour un ensemble inclus dans \mathfrak{K} est immédiate.

4. Imaginons un ensemble G inclus dans \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}' un milieu multiple de \mathfrak{M}_1 . Désignons par $ms_e(G)$ la mesure extérieure segmentaire de G , par ω_1 et ω' les mesures des milieux \mathfrak{M}_1 et \mathfrak{M}' , par $m_e(G)$, $m_i(G)$ les mesures extérieure et intérieure de G dans un milieu qui sera indiqué entre parenthèses, on a

$$\begin{aligned} (\mathfrak{M}') & \quad \begin{cases} m_i(G) = 0, \\ m_e(G) = ms_e(G) \times \omega'; \end{cases} \\ (\mathfrak{M}_1) & \quad m_e(G) = ms_e(G) \times \omega_1. \end{aligned}$$

En conséquence : 1° Pour que G soit mesurable dans \mathfrak{M}' , il faut et il suffit que sa mesure extérieure y soit nulle.

2° Pour que G soit mesurable dans \mathfrak{M}' , il faut et il suffit qu'il soit mesurable dans \mathfrak{M}_1 et que sa mesure y soit nulle; les mesures sont alors nulles dans les deux milieux.

Les mêmes conclusions subsistent si l'on parle d'étendue J au lieu de mesure L .

5. Considérons maintenant un ensemble G inclus dans deux milieux \mathfrak{M}' et \mathfrak{M}'' . Ils proviennent de l'application de deux systèmes de translations T' et T'' à un même ensemble \mathcal{C} qui en est indépendant. Soit T_1 le système de translations qui définit le p. g. c. d. de T' et de T'' ; on a $T' = p'T_1$ et $T'' = p''T_1$, et T_1 appliqué à \mathcal{C} donne le milieu \mathfrak{M}_1 . Il n'existe pas de points communs à \mathfrak{M}' et à \mathfrak{M}'' en dehors de \mathfrak{M}_1 ; donc G est inclus dans \mathfrak{M}_1 ; l'un des entiers p' , p'' est différent de 1; soit p' . Pour que G soit mesurable dans \mathfrak{M}' , il faut et il suffit qu'il soit mesurable dans \mathfrak{M}_1 et que sa mesure y soit nulle; alors elle est nulle aussi dans \mathfrak{M}' et dans \mathfrak{M}'' . Ainsi :

Lorsqu'un ensemble inclus dans deux milieux est mesurable dans les deux, ses mesures sont égales : elles sont nulles. La même propriété a lieu s'il s'agit d'étendue J .

6. LEMME. — *Soient des ensembles E_1, E_2, \dots, E_n et leur somme E respectivement inclus dans les milieux $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_n, \mathfrak{M}$ (de la famille considérée). Si les milieux $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_n$ sont deux à deux sans point*

commun, et si \mathfrak{K} est leur somme, la mesure extérieure de E dans \mathfrak{K} est au moins égale à la somme des mesures extérieures des E_p dans les milieux \mathfrak{K}_p correspondants. La propriété subsiste s'il y a une infinité énumérable de milieux \mathfrak{K}_p et si la somme de leurs mesures ω_p est égale à la mesure ω de \mathfrak{K} .

En effet, on a

$$m_{s_e} E \geq m_{s_e} E_p$$

et par suite

$$(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_p) m_{s_e} E \geq \sum \omega_p m_{s_e} E_p.$$

La conclusion est immédiate. Elle subsiste s'il est question d'étendue au lieu de mesure. La propriété a lieu *a fortiori* si \mathfrak{K} contenant les \mathfrak{K}_p n'est pas leur somme.

7. THÉORÈME. — Les conditions étant les mêmes qu'au lemme précédent, si de plus on suppose E mesurable dans \mathfrak{K} , chaque ensemble E_p est mesurable dans le milieu correspondant \mathfrak{K}_p et la somme des mesures des E_p est égale à celle de E . La même propriété a lieu dans le cas de l'étendue.

Je dis d'abord que, pour toute valeur de p ,

$$m_{s_e} E = m_{s_e} E_p.$$

En effet, supposons par exemple $m_{s_e} E > m_{s_e} E_1$, la différence étant η . Couvrons E_1 d'intervalles α_1 dont la somme a_1 des longueurs dépasse $m_{s_e} E_1$ de moins de ε . E peut être considéré comme formé de deux parties, E' composé des points situés dans les α_1 , E'' des points situés au dehors. D'ailleurs E étant mesurable, il en est de même de E' et de E'' . On a, E' comprenant E_1 ,

$$m E' \leq a_1 \omega < m_{s_e} E_1 + \omega \varepsilon,$$

$$m E = \omega m_{s_e} E = \omega m_{s_e} E_1 + \omega \eta.$$

Si donc, on a pris $\varepsilon < \eta$,

$$m E'' = m E - m E' > \omega(\eta - \varepsilon) > 0.$$

Or E'' n'a pas de points dans \mathfrak{R}_1 ; si donc il était mesurable dans \mathfrak{R} sa mesure serait nulle. Ainsi il est exact que, quel que soit p ,

$$ms_c E = ms_c E_p;$$

et par suite

$$m_c E = \Sigma m_c E_p.$$

Soit (a, b) un intervalle contenant E ; posons $b - a = l$; CE_i désignant le complémentaire de E_i dans le fragment (a, b) du milieu qui lui correspond, CE est mesurable (dans \mathfrak{R}) et l'on a

$$ms_c CE = l - ms_c E.$$

D'ailleurs le complément de E dans \mathfrak{R} est la somme des compléments de E_1, E_2, \dots . Donc

$$ms_c CE = ms_c CE_p$$

quel que soit p ; ainsi

$$m_i E_p = l \omega_p - \omega_p ms_c CE_p = l \omega_p - \omega_p ms_c CE = \omega_p ms_c E = m_c E_p.$$

Enfin

$$m E = \Sigma m E_p$$

Nous venons en même temps d'établir cette propriété.

THÉORÈME. — *Si un ensemble E est mesurable dans un milieu \mathfrak{R} , la partie E' de cet ensemble, qui appartient à un milieu \mathfrak{R}' inclus dans \mathfrak{R} , est mesurable dans \mathfrak{R}' .*

8. THÉORÈME. — *Soient les ensembles E_1, E_2, \dots, E_n et leur somme E respectivement inclus dans les milieux $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_n, \mathfrak{R}$. Si les milieux $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_n$ sont deux à deux sans point commun et si E est mesurable dans \mathfrak{R} et chaque E_p dans le milieu \mathfrak{R}_p correspondant, la somme des mesures des E_p est égale à la mesure de E . La même propriété a lieu dans le cas de l'étendue.*

Premier cas. — \mathfrak{R} est la somme de $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \dots, \mathfrak{R}_n$; c'est une conséquence du théorème précédent.

Deuxième cas. — Les milieux \mathfrak{K}_p ne sont pas tous inclus dans \mathfrak{K} .

Soit D_p le p. g. c. d. de \mathfrak{K} et de \mathfrak{K}_p ; l'un au moins des milieux identiques à D_p dont \mathfrak{K}_p se compose ne contient pas de points de E_p , donc (n° 3, lemme) $mE_p = 0$; donc aussi dans \mathfrak{K} , $mE_p = 0$; la différence $E - E_p$ est mesurable dans \mathfrak{K} et sa mesure est celle de E , nous supprimerons E_p des ensembles donnés et de leur somme; opérant de même pour tous les ensembles E_p dont le milieu excède \mathfrak{K} nous sommes ramenés soit au premier, soit au troisième cas.

Observons que le raisonnement précédent serait valable s'il y avait une infinité d'ensembles et s'il fallait en supprimer une infinité, pourvu que, dans \mathfrak{K} , la mesure de l'ensemble total supprimé soit nulle, c'est-à-dire égale à la somme des mesures des ensembles partiels disparus.

Troisième cas. — Les milieux \mathfrak{K}_p sont tous inclus dans \mathfrak{K} , mais \mathfrak{K} n'est pas leur somme.

Les milieux étant supposés en nombre limité, soit D leur p. g. c. d. Des milieux identiques à D dont \mathfrak{K} se compose l'un au moins n'appartient à aucun des \mathfrak{K}_p et par conséquent ne contient pas de points de E . Donc (n° 3, lemme) $mE = 0$. Sans qu'il soit nécessaire ici de faire l'hypothèse que les E_p sont mesurables, nous concluons du résultat précédent que $ms_p E_p = 0$, puis précisément que mE_p existe et est nulle.

9. THÉORÈME GÉNÉRAL. — *Si les ensembles E_1, E_2, \dots, E_n et leur somme E respectivement inclus dans les milieux $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \dots, \mathfrak{K}_n$, \mathfrak{K} y sont mesurables, la mesure de la somme est égale à la somme des mesures des parties.*

Soit D le p. g. c. d. des milieux; \mathfrak{K} est la somme de milieux, M^1, M^2, \dots, M^j identiques à D ; E est la somme d'ensemble E^1, \dots, E^j situés respectivement dans ces milieux; on sait (n° 7) que les E^s sont mesurables dans les milieux M^s et que l'on a

$$mE = mE^1 + mE^2 + \dots + mE^j.$$

Chacun des ensembles E_p se décompose en ensembles partiels $E_p^1,$

E_p^2, \dots, E_p^j contenus séparément dans E^1, E^2, \dots, E^j , et

$$E^1 = E_1^1 + E_2^1 + \dots + E_n^1,$$

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + \dots + E_n^2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$E^j = E_1^j + E_2^j + \dots + E_n^j.$$

\mathfrak{M}_p est formé de quelques-uns des milieux M^r et peut-être de quelques autres qui n'appartiennent pas à \mathfrak{M} et dans lesquels il n'existe pas de points de E_p ; on en conclut (n° 7 et n° 8, troisième cas) que $E_p^1, E_p^2, \dots, E_p^j$ sont mesurables dans M^1, M^2, \dots, M^j et que $mE_p = \Sigma mE_p^r$. Ainsi tous les E_p^r du tableau ci-dessus sont mesurables et la somme de leurs mesures est égale à celle des mesures des E_p . Or, dans un même milieu M^s , on a $E^s = E_1^s + E_2^s + \dots + E_n^s$ et tous ces ensembles sont mesurables; donc

$$mE^s = mE_1^s + mE_2^s + \dots + mE_n^s.$$

Ajoutant toutes les égalités analogues, on en conclut que

$$mE = \Sigma \Sigma mE_p^s = \Sigma mE_p.$$

10. CONCLUSIONS. — Les familles du type envisagé dans ce Chapitre sont semi-mesurables.

11. ADJONCTION DE NOUVEAUX ENSEMBLES. — On peut enrichir de nouveaux ensembles les familles qui viennent d'être étudiées.

LEMME I. — *Si d'une part les ensembles F_1, F_2, \dots, F_p , et d'autre part les ensembles G_1, G_2, \dots, G_q (les premiers et les seconds respectivement sans point commun deux à deux) ont même somme E , s'ils sont respectivement inclus dans les milieux $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \dots, \mathfrak{M}_p, \mathfrak{M}_{p+1}, \dots, \mathfrak{M}_{p+q}$ et y sont séparément mesurables, et si enfin E est inclus dans un milieu \mathfrak{M} , on a*

$$mF_1 + mF_2 + \dots + mF_p = mG_1 + mG_2 + \dots + mG_q.$$

Soit en effet D le p. g. c. d. des milieux; \mathfrak{M} est la somme de milieux

M^1, M^2, \dots, M^j identiques à D . Dans le milieu M^i sont situées les portions $F_1^i, F_2^i, \dots, F_p^i, G_1^i, \dots, G_q^i$ des ensembles F_1, \dots, G_q . \mathfrak{K}_r est formé de quelques-uns des milieux M^i et peut-être de quelques autres qui n'appartiennent pas à \mathfrak{K} et dans lesquels il n'existe pas de point de F_r (ou de G_{r-p}); on en conclut que $F_r^1, F_r^2, \dots, F_r^j$ sont mesurables dans M^1, M^2, \dots, M^j et que l'on a

$$(1) \quad mF_r = mF_r^1 + mF_r^2 + \dots + mF_r^j.$$

De même

$$(2) \quad mG_s = mG_s^1 + mG_s^2 + \dots + mG_s^j.$$

L'ensemble E se compose d'ensembles partiels E^1, E^2, \dots, E^j situés dans M^1, M^2, \dots, M^j . Or dans M^i

$$E^i = F_1^i + F_2^i + \dots + F_p^i = G_1^i + G_2^i + \dots + G_q^i.$$

Puisque, dans ce milieu, $F_1^i, F_2^i, \dots, F_p^i$ sont mesurables, il en est de même de la somme et l'on a

$$(3) \quad mE^i = mF_1^i + mF_2^i + \dots + mF_p^i.$$

De même

$$(4) \quad mE^i = mG_1^i + mG_2^i + \dots + mG_q^i.$$

On en conclut

$$(5) \quad \sum_i mE_i = \sum \sum mF_r^i = \sum \sum mG_s^i.$$

Or

$$\sum \sum mF_r^i = \sum_r mF_r \quad \text{et} \quad \sum \sum mG_s^i = \sum_s mG_s.$$

La propriété est donc établie.

12. LEMME II. — Les données étant les mêmes qu'au lemme I, sauf

que E n'est pas supposé inclus dans un milieu de la famille, on a encore

$$(1) \quad mF_1 + mF_2 + \dots + mF_p = mG_1 + mG_2 + \dots + mG_q.$$

Soit, en effet, \mathfrak{M} le milieu p. p. c. m. des milieux proposés. Plaçons-le de manière qu'il contienne un point de \mathfrak{M}_1 et par conséquent \mathfrak{M}_1 tout entier, il contiendra certainement d'autres milieux, certainement l'un des q derniers. Les ensembles correspondants lui appartiendront et, s'il en reste, ils n'auront aucun point sur lui. Les premiers donneront, d'après le lemme I, une égalité de la forme annoncée. Un déplacement de \mathfrak{M} lui fera ensuite prendre un point des milieux restés en dehors; de là une nouvelle égalité de même forme avec quelques-uns des ensembles. Bref, la relation (1) se décompose en relations analogues qui ont lieu séparément.

13. CONVENTION. — Si des ensembles E, $F_2, \dots, F_p, G_1, \dots, G_q$ sont inclus dans des milieux et s'ils y sont mesurables sauf l'un d'eux E, si de plus on a

$$(1) \quad E + F_2 + \dots + F_p = G_1 + G_2 + \dots + G_q,$$

on posera

$$(2) \quad mE = \Sigma mG_s - \Sigma mF_r.$$

Nous avons à prouver qu'à un tel ensemble E ne correspond de cette manière qu'un seul nombre et que la famille, ainsi agrandie, satisfait encore aux conditions de la mesure.

Il est à peine utile de signaler que cette définition de la mesure de E n'est pas en contradiction avec les résultats antérieurs (au cas de E mesurable) et qu'elle est obligatoire si les nouveaux ensembles peuvent être adjoints à la famille.

Un cas particulier de la relation (1) est celui-ci :

$$(3) \quad E = G_1 + G_2.$$

Tous les autres se ramènent à celui-là. Par additions successives, on

arrive à

$$(4) \quad E = G_1 + G_2 + \dots + G_q.$$

Si un ensemble se présente de diverses façons sous cette forme, on a toujours pour lui la même mesure (lemme II).

Prenons la relation générale (1). On peut supposer (lemme II) que les milieux de ces ensembles appartiennent à un même milieu. Alors, d'après le lemme I et avec ses notations, dans le milieu M^i , où l'on a, E^i étant la partie de E qui y est contenue,

$$E^i + F_2^i + \dots + F_p^i = G_1^i + G_2^i + \dots + G_q^i,$$

$F_2^i, \dots, F_p^i, G_1^i, \dots, G_q^i$ y sont mesurables; donc les sommes $F_2^i + \dots + F_p^i$, $G_1^i + \dots + G_q^i$ y sont mesurables, leur différence E^i l'est également; on a

$$(5) \quad \begin{aligned} mE^i &= m(G_1^i + \dots + G_q^i) - m(F_2^i + \dots + F_p^i) \\ &= mG_1^i + \dots + mG_q^i - mF_2^i - \dots - mF_p^i, \end{aligned}$$

et comme on doit poser

$$(6) \quad mE = mE^i + \dots + mE^i,$$

il faut donc que

$$(7) \quad mE = \Sigma mG_s - \Sigma mF_p.$$

Puisque la définition générale se ramène au cas particulier (6) de la somme et qu'elle ne donne alors qu'un nombre comme mesure à un ensemble, il en est donc toujours ainsi.

Soit maintenant

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n,$$

deux au moins de ces ensembles étant nouvellement introduits; on a donc, certains des membres de droite pouvant se réduire à un

ensemble,

$$\begin{aligned} E_1 &= F_1^1 + F_1^2 + \dots + F_1^{n_1}, \\ E_2 &= F_2^1 + F_2^2 + \dots + F_2^{n_2}, \\ &\dots\dots\dots, \\ E_n &= F_n^1 + F_n^2 + \dots + F_n^{n_n}. \end{aligned}$$

Les F sont d'anciens ensembles et l'on a

$$(8) \quad m E_i = m F_i^1 + m F_i^2 + \dots + m F_i^{n_i}.$$

Or

$$E = \Sigma E_i = \Sigma \Sigma F_i^p,$$

donc

$$(9) \quad m E = \Sigma \Sigma m F_i^p = \Sigma m E_i.$$

14. REMARQUE. — On n'obtiendrait aucune nouvelle extension en supposant maintenant que, dans l'égalité (1), quelques-uns des F et des G sont des ensembles nouveaux (puisque l'on pourrait les remplacer par des sommes d'ensembles anciens).

15. On vient d'établir que *la famille agrandie est au moins semi-mesurable. Elle est mesurable si la famille primitive l'était elle-même.*

Soit

$$(1) \quad E = E_1 + E_2 + \dots + E_n + \dots,$$

tous, ou quelques-uns de ces ensembles, étant nouveaux. Posons

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} E = F^1 + F^2 + \dots + F^p, \\ \dots\dots\dots, \\ E_n = F_n^1 + F_n^2 + \dots + F_n^{n_n}; \end{array} \right.$$

les F sont des ensembles anciens. Si l'on considère les milieux $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_p$ dans lesquels F^1, F^2, \dots, F^p sont mesurables, D le p. g. c. d. de ces milieux, M^1, M^2, \dots, M^j les milieux identiques à D dans la totalité desquels E est situé, F^2 se décompose en ensembles situés dans

les M et qui y sont mesurables; E à son tour est donc décomposé en ensembles situés respectivement dans ces M ; dans le milieu M^i , on a ainsi

$$(3) \quad E^i = G_1^i + G_2^i + \dots + G_j^i, \quad \text{si} \quad F^h = G_1^h + G_2^h + \dots + G_j^h$$

et (lemme I, n° 11)

$$(4) \quad mE^i = mG_1^i + mG_2^i + \dots + mG_j^i.$$

E était supposé inclus dans un milieu \mathfrak{M} ; chaque F_n^r est situé dans un milieu qui admet avec D un p. g. c. d., il est donc la somme d'ensembles, anciennement mesurables, situés dans des milieux diviseurs des M et sa mesure est la somme de leurs mesures. Ordonnant en série tous ceux qui appartiennent à M^i ou à l'un de ses diviseurs, il vient, en les désignant par H_1^i, H_2^i, \dots (H_1^s, \dots, H_j^s formant un F_n^r),

$$(5) \quad E^i = H_1^i + H_2^i + \dots,$$

et, puisque la famille était supposée mesurable,

$$(6) \quad mE^i = mH_1^i + mH_2^i + \dots$$

Ajoutant les j égalités analogues, on a donc

$$(7) \quad mE = \Sigma mE^i = \Sigma \Sigma mH_i^s = \sum_s \sum_i mH_i^s = \sum_{n,r} mF_n^r = \Sigma mE_n.$$

16. EXEMPLES. — I, Reportons-nous au Chapitre II, n° 8. Soient des nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_n ; le milieu constitué par les rationnels qui, irréductibles, admettent au dénominateur p_1, p_2, \dots, p_n jusqu'aux exposants maxima $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et les autres nombres premiers avec tout exposant est un milieu homogène $M_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$. Donnons-nous un ensemble A de nombres tels qu'il n'y en ait pas deux dont la différence soit un rationnel; a et h étant deux nombres quelconques, le premier de A , le second de $M_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$, l'ensemble de $a + h$ forme un milieu de translation $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ et les ensembles inclus dans les H

auxquels s'applique, selon le cas, le procédé généralisé de M. Jordan ou ⁽¹⁾ celui de MM. Borel et Lebesgue, forment une famille semi-mesurable ou ⁽¹⁾ mesurable, car (Chap. II, n° 30) la famille des milieux M construite à partir de $M_{0,0,\dots,0}$ qui est sans diviseur est mesurable. Prenons comme unité l'ensemble des points de $H_{0,0,\dots,0}$ compris entre 0 et 1. L'ensemble des points de $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ situés dans les intervalles $(1, \lambda)$, (λ^2, λ^3) , (λ^4, λ^5) , ... (λ étant inférieur à 1 et positif) a pour mesure

$$\frac{1}{1+\lambda} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}.$$

De même (Chap. I, n° 15) l'ensemble dans le même milieu des points x tels que

$$\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2^{p+3} n^{p+3}} < x \leq \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2^{p+2} n^{p+2}},$$

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2^{p+2} n^{p+2}} \leq x < \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2^{p+3} n^{p+3}}$$

$$(n = 1, 2, \dots, +\infty; p = 1, 2, \dots, +\infty)$$

a pour mesure

$$\frac{1}{4} \zeta(3) p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n},$$

$\zeta(z)$ étant la fonction de Riemann $1 + \frac{1}{2^z} + \frac{1}{3^z} + \dots$

On peut imaginer tous les relatifs divisés en ensembles partiels tels que deux nombres ne différant que d'un rationnel appartiennent au même ensemble. Avec un nombre pris arbitrairement dans chacun d'eux, on aura une collection A. D'ailleurs, le continu lui-même ne figurerait pas parmi les milieux H ainsi obtenus, car il est de l'un quelconque d'entre eux un multiple infini.

II. On obtiendra le continu parmi les milieux de la famille en considérant le milieu constitué par les rationnels qui, irréductibles,

(1) Si toutefois il en est pour lesquels la mesure extérieure d'un segment ne soit pas nulle.

admettent au dénominateur les nombres premiers p_1, p_2, \dots, p_n jusqu'aux exposants maxima $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ respectivement au plus égaux à des nombres fixes $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ et un autre nombre premier q avec tout exposant; les milieux $M_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ homogènes ainsi définis ne formeront pas une famille complète, telle qu'elle a été établie au Chapitre II; cependant, elle satisfera à toutes les conditions de la mesure; ces divers milieux seront tous multiples de $M_{0, 0, \dots, 0}$. Prenons en particulier une collection A déduite du continu ⁽¹⁾. Le continu sera $H_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n}$ et, par rapport à lui, la mesure du milieu $H_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}$ sera

$$\frac{1}{p_1^{\mu_1 - \alpha_1} p_2^{\mu_2 - \alpha_2} \dots p_n^{\mu_n - \alpha_n}}$$

III. Désignons par h_1, h_2, \dots, h_n, n nombres qui ne sont pas liés par une relation de la forme $\Sigma c_i h_i = 0$ à coefficients non tous nuls. Le milieu $M_{\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n}}$ défini par

$$x = k_1 \left(\frac{p_1}{q_1} h_1 \right) + \dots + k_n \left(\frac{p_n}{q_n} h_n \right) \quad (n \geq 2),$$

les fractions $\frac{p}{q}$ étant données et les k des entiers arbitraires, est manifestement homogène. Ses éléments sont énumérables; la famille des M est, comme on le voit aisément, semi-mesurable. Si l'on prend pour unité la partie de $M_{1, 1, \dots, 1}$ située de 0 à 1 et si, ayant décomposé un intervalle en un nombre limité ou une infinité énumérable d'intervalles partiels, on en prend une suite S de longueur l , la partie de $M_{\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n}}$ située dans S a pour mesure $l \frac{q_1 q_2 \dots q_n}{p_1 p_2 \dots p_n}$.

IV. En utilisant les résultats établis au Chapitre I (nos 16 et suiv.),

(1) Il suffit de se représenter les nombres relatifs répartis en ensembles tels que deux nombres différant d'une fraction dont le dénominateur contient p_1, p_2, \dots, p_n jusqu'aux exposants $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ et q à un exposant quelconque appartiennent au même ensemble et un nombre pris dans chacun de ces ensembles pour former A.

on peut déduire d'exemples donnés de nouveaux exemples. Conservant les notations alors adoptées, nous savons que l'ensemble E_λ est un milieu homogène ainsi que le milieu \mathcal{C} formé par tous les ensembles E_λ . Une portion (n^{os} 17 et 18) de E_λ et de \mathcal{C} comprise entre deux bornes a la puissance du continu et une mesure L nulle. Si λ parcourt un milieu homogène, l'ensemble E_λ engendre un milieu homogène.

Faisons notamment décrire à λ un milieu M du numéro précédent, et soit \mathfrak{K} (noté avec les mêmes indices) le milieu produit alors par E_λ ; si l'on prend pour unité la partie de $\mathfrak{K}_{1,1,\dots,1}$ comprise entre 0 et 1 et si l'on envisage les points de $\mathfrak{K}_{\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_n}{q_n}}$ situés eux aussi dans S, on aura la même mesure que plus haut, car le rapport de deux milieux \mathfrak{K} est égal (Chap. II, n^o 8) au rapport des milieux M correspondants.