

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HENRI LEBESGUE

Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 35 (1918), p. 191-250

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1918_3_35__191_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REMARQUES

SUR LES

THÉORIES DE LA MESURE ET DE L'INTÉGRATION,

PAR M. HENRI LEBESGUE.



I. — Introduction.

1. Cette étude a été écrite à l'occasion de remarques formulées par M. Borel sur les définitions qu'il appelle des *définitions constructives*.

Dans sa Thèse (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1895), M. Borel eut l'occasion de démontrer qu'on ne peut couvrir tous les points d'un intervalle (a, b) à l'aide d'intervalles dont la somme des longueurs est inférieure à $b - a$. Il aperçut nettement que la proposition ainsi établie pouvait servir de base pour une définition de la mesure des ensembles avec laquelle on pourrait considérer les divisions de la grandeur à mesurer en une infinité dénombrable de morceaux et non plus seulement en un nombre fini de morceaux.

Dans ses *Leçons sur la Théorie des fonctions* (1898) il esquaissa cette théorie de la mesure.

Mes travaux, sur cette question et sur l'intégration, commencent en 1901; l'état de la question avant mes recherches est nettement indiqué par une Notice sur ses travaux scientifiques publiée par M. Borel à l'occasion de l'élection à l'Académie des Sciences du 18 mars 1901. Ma première Note est du 29 avril 1901. Dès cette pre-

mière Note, je donnais les définitions de l'intégrale et de la mesure, j'indiquais que ces définitions s'appliquaient à toutes les fonctions de la classification de M. Baire.

Enfin, je montrais que, pour les fonctions bornées, l'intégrale permet la recherche des fonctions primitives. Bref, j'énonçais les résultats que je devais légitimer et développer dans ma Thèse (*Annali di Matematica*, 1902).

En 1912, M. Borel a publié, dans le *Journal de Mathématiques*, un Mémoire sur le *Calcul des intégrales définies* : il y expose à nouveau les définitions de la mesure et de l'intégrale. M. Borel considère que tous ses travaux appartiennent à une même méthode, que j'appellerai la *méthode constructive*, méthode qu'il oppose à celle que j'ai suivie. La méthode constructive serait plus naturelle, plus simple, plus directe et plus rapide que la mienne; elle serait plus générale et cependant ferait connaître plus exactement la portée des résultats, entachés d'une trop grande généralité (apparente) dans mes travaux.

De tels avantages ne seraient pas étonnants, car il est presque exceptionnel que la méthode la meilleure, celle qui s'attaque aux difficultés principales et ne s'embarrasse pas de considérations parasites, apparaisse du premier coup, et je ne prétends pas avoir utilisé le meilleur procédé quand j'ai, le premier, démontré la compatibilité des conditions imposées à la mesure et posé la définition de l'intégrale. Je dois dire cependant que les conclusions de l'étude qu'on va lire sont en désaccord complet avec les affirmations de M. Borel.

Je m'excuse de la longueur de ce travail; mais, comme je n'ai pas pu trouver, dans les Mémoires de M. Borel, l'exposé des raisons qui motivent son opinion, ni même l'explication de ce qu'est une définition constructive, j'ai dû examiner toutes les hypothèses auxquelles j'ai pensé.

Comme les différences de forme entre les définitions données par M. Borel et par moi-même sont plus nettes dans le cas de l'intégration, je commencerai par l'examen des définitions de l'intégrale.

2. Dans sa seconde Notice, publiée en 1912, M. Borel écrit : « J'ai repris récemment la théorie de l'intégrale définie, en me plaçant au point de vue des définitions constructives que j'avais utilisées dans

ma théorie de la mesure; la théorie ainsi constituée est plus générale que celle de M. Lebesgue pour les fonctions non bornées d'une seule variable, équivalente à celle de M. Lebesgue, mais plus simple, pour les fonctions bornées; »

En suivant l'ordre même de cette phrase, j'examine d'abord (Chap. II) le cas des fonctions non bornées. M. Borel affirme que sa théorie est plus générale que la mienne, mais il n'en donne aucune preuve. Il remarque seulement que son procédé s'applique à des fonctions qui, prises en valeur absolue, ne resteraient pas intégrables, donc à des fonctions qui ne sont pas sommables puisque j'ai réservé le qualificatif *sommable* pour la classe bien homogène des fonctions absolument intégrables, lesquelles s'intègrent par un procédé uniforme.

Mais, en introduisant ce qualificatif *sommable*, je n'oubliais pas qu'Euler et ses devanciers avaient intégré des fonctions non absolument intégrables. Les procédés qui ont permis d'obtenir ces intégrations peuvent encore être utilisés et même, comme on les applique à partir de l'intégrale des fonctions sommables et non plus seulement à partir de l'intégrale des fonctions continues, le champ de leur utilisation se trouve considérablement étendu. Cette façon de procéder est si naturelle que j'aurais pu oublier de la signaler, mais, en fait, je l'ai expressément exposée et je l'ai utilisée, pour des applications aux séries trigonométriques, par exemple. On peut se reporter notamment aux deux livres que j'ai eu l'honneur de publier dans la Collection de M. Borel.

L'affirmation de M. Borel peut donc avoir deux significations : 1° la définition posée par M. Borel est plus générale que celle relative aux fonctions sommables; mais ceci est inexact, car, s'il existe des fonctions auxquelles la première définition s'applique sans que la seconde soit utilisable, le cas inverse se rencontre également; 2° la définition de M. Borel s'applique à des fonctions qui ne sont intégrables par aucun des procédés que j'ai donnés; mais ceci aussi est inexact et *toutes les fonctions intégrables par les procédés de M. Borel sont intégrables aussi par les miens, tandis que l'inverse n'a pas lieu. La méthode constructive de M. Borel n'est donc pas plus générale que la mienne.*

M. Borel s'est borné à poser sa définition et à affirmer qu'elle est

meilleure que les autres. Les conclusions ci-dessus sont au contraire basées sur la détermination précise de la classe des fonctions auxquelles la définition de M. Borel est applicable théoriquement. Pour pouvoir l'appliquer pratiquement, une étude de la nature de celle que j'ai faite était d'ailleurs indispensable, car il importe de savoir reconnaître s'il existe un certain ensemble dénombrable de points, jouissant d'une propriété spéciale, et, lorsqu'il existe, de le déterminer; tout le procédé opératoire de M. Borel reposant sur l'existence et la détermination de cet ensemble.

Jusqu'ici la définition de M. Borel n'a d'ailleurs été utilisée par personne et, à cause de son caractère tout à fait artificiel, je crois qu'elle ne le sera jamais. Au reste, le procédé opératoire auquel elle conduit est moins régulier et moins simple que le procédé de la totalisation de M. Denjoy, lequel se réduit, pour cette classe de fonctions, aux opérations que j'avais indiquées.

Ce qu'il faut surtout retenir de cette étude pour la comparaison de la méthode constructive de M. Borel avec la mienne, ce sont les différences profondes, capitales, entre les définitions données par M. Borel pour les fonctions bornées et pour les fonctions non bornées. On ne sait appliquer pratiquement la première qu'à des fonctions données par des séries multiples de polynomes et la connaissance des points singuliers de la fonction ne sert à rien; on ne sait pas appliquer la seconde à des fonctions données par des séries et, dans les seuls cas où l'on sait l'appliquer, on utilise la connaissance des points singuliers. La première n'emploie pas les valeurs de la fonction, et même, avec elle, on peut ignorer les rapports entre l'intégrale d'une fonction continue et les sommes

$$\sum h_i f(\xi_i);$$

la seconde est basée sur l'emploi de sommes riemanniennes généralisées représentées par le symbole ci-dessus. Enfin, la définition relative aux fonctions non bornées ne contient pas comme cas particulier la définition relative aux fonctions bornées.

Les différents travaux d'un auteur sont tous liés dans son esprit; mais le lecteur ne peut s'occuper que des seuls liens logiques. Entre

les deux définitions posées par M. Borel, les différences logiques sont au moins aussi grandes que celles qui les séparent des miennes; laissant donc de côté la définition relative aux fonctions non bornées, je me limite à la considération des définitions de l'intégrale des fonctions bornées et de la mesure que j'étudie au Chapitre III.

3. Pour l'intégrale, la définition de M. Borel me paraît être l'*exacte* mise en œuvre du procédé de calcul que j'ai donné. Seulement, tandis que je démontre que ce procédé de calcul donne bien le nombre « intégrale » que j'ai précédemment défini, pour M. Borel, le nombre donné par le procédé de calcul est, par définition, l'intégrale. Il obtient ainsi une rédaction à certains égards plus synthétique, comme il est presque de règle dans toute exposition faite après coup de résultats antérieurement acquis.

Quelle est la simplification apportée par la nouvelle définition, quelles sont les considérations parasites qu'elle élimine?

La seule chose que l'on voie disparaître, c'est la relation entre intégrale et fonction intégrée, qui servait de définition de l'intégrale dans mes travaux. Or, il me semble que ce n'est pas là une considération parasite, mais la considération principale.

Posons, par définition,

$$\int_a^b Ax^m dx = \frac{A}{m+1} (b^{m+1} - a^{m+1}),$$

puis, si

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{m=i} A_m^i x^m \right),$$

la série en i étant convergente uniformément,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} \left[\sum_{m=0}^{m=i} \frac{A_m^i}{m+1} (b^{m+1} - a^{m+1}) \right].$$

Nous aurons ainsi une définition *constructive* de l'intégrale des fonctions continues, définition qui permettra de suivre pas à pas un

certain procédé de construction de ces fonctions continues. Cette définition sera peut-être plus courte que la définition classique, mais elle ne pourra en réalité servir à rien; elle ne pourra être utilisée dans aucune application si on ne la complète pas en prouvant qu'il y a un lien entre

$$\int_a^b f(x) dx$$

et les sommes

$$\sum f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Ce lien seul fera comprendre l'intérêt de l'intégrale et justifiera qu'on s'en soit occupé.

La définition constructive de M. Borel est exactement analogue à celle que je viens de donner; elle a l'air de se suffire à elle-même seulement quand on ne l'applique à rien; ici, comme dans le cas des fonctions non bornées, il semble que M. Borel définisse pour le plaisir de définir, et parce qu'il peut définir sans contradiction, mais que ces définitions n'ont aucun but. S'il a en vue une application quelconque, il faudra bien qu'il établisse un lien entre

$$f(x) \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x) dx$$

et alors, entre sa définition complétée et la mienne, on ne trouvera pas d'autre différence qu'une interversion de l'ordre de deux paragraphes.

Si l'on juge de la simplicité d'une définition d'après le caractère plus ou moins élémentaire des notions intervenant dans cette définition, en suivant la même voie que M. Borel, on arrivera à l'énoncé suivant qui, à certains égards, présentera la simplicité maximum :

Si, quel que soit ε , on peut trouver dans (a, b) deux familles A et B respectivement formées d'intervalles non empiétant et tels que la somme des longueurs des premiers soit supérieure à $b - a - \varepsilon$, tandis que celle des seconds est au plus ε , et cela de manière que, si α est un intervalle de A, en tout point de α qui n'appartient pas à B, la fonction consi-

dérée $f(x)$ diffère d'une constante K_α attachée à α , de moins de ε , alors $\Sigma[K_\alpha \times (\text{longueur de } \alpha)]$ est une valeur approchée de $\int_a^b f(x) dx$.

Une telle définition est très élémentaire, puisqu'elle ne fait intervenir que des intervalles et des constantes; mais, pour qu'elle soit comprise et qu'elle puisse être utilisée, il faut qu'on en déduise tous les cas particuliers qui, dans l'exposition que j'ai adoptée, permettent de passer pas à pas, et non pas d'un seul bond comme ici, du cas de l'intégrale d'une constante au cas général. Ce mode de définition aurait de plus l'inconvénient de ne plus rien faire intervenir de la théorie des ensembles; or, c'est à l'emploi de cette théorie, et en particulier à l'utilisation de la notion de mesure, que se rattachent presque tous les progrès faits récemment dans l'étude des fonctions de variable réelle.

C'est pour mettre ce fait en évidence qu'au Chapitre IV je passe rapidement en revue les idées qui m'ont paru avoir été particulièrement fécondes.

4. M. Borel voit une grande différence entre ses définitions et les miennes, parce que je considère les fonctions et les ensembles en soi (c'est-à-dire sans m'occuper de la façon dont ces fonctions et ensembles me sont donnés), tandis qu'il prétend raisonner uniquement sur des êtres donnés d'une certaine manière. Dès que j'applique les définitions, je ne rencontre, il est vrai, dans la pratique que les fonctions et ensembles étudiés par M. Borel; mais comme je n'ai pas commencé par dire que je me limitais à ces fonctions et ensembles, M. Borel fait à plusieurs reprises aux exposés que j'ai donnés, le reproche d'avoir une plus grande généralité (apparente). Ce reproche n'est pas fondé. Il n'est pas juste envers mon procédé, car, en prévision du cas où l'on rencontrerait des fonctions et ensembles non considérés par lui, M. Borel a bien soin de dire à diverses reprises que ses procédés permettent de mesurer tous les ensembles et d'intégrer toutes les fonctions que je considère; donc, nos deux procédés ont la même généralité.

Il n'est pas juste envers moi, car c'est moi, et non M. Borel, qui ai montré que, dans la pratique, on peut se borner aux ensembles et

fonctions que M. Borel considère et que j'ai fait toute réserve sur l'intérêt des autres.

En réalité, les procédés de M. Borel et les miens diffèrent extrêmement peu et ils réussissent dans les mêmes cas ; ils ont la même généralité, aussi bien apparente que réelle.

5. Dans mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* de 1905, je n'ai réussi que très péniblement à nommer un ensemble non mesurable B et une fonction non représentable analytiquement ; il me paraissait invraisemblable que de tels ensembles ou fonctions pussent se rencontrer en Analyse. M. Borel, renchérissant sur mes résultats, a écrit que les seuls ensembles que les analystes *pourraient* jamais définir font partie de la famille des ensembles mesurables B. C'est la même idée qui l'a conduit à donner le nom d'*ensembles bien définis* et de *fonctions bien définies* aux ensembles mesurables B et aux fonctions représentables analytiquement. C'est à ces ensembles et fonctions qu'il aurait désiré se limiter ; en réalité, il a considéré les mêmes ensembles et fonctions que moi, et il n'existe actuellement pas de méthode applicable seulement aux ensembles et fonctions mesurables B.

L'intérêt que pouvait présenter la recherche d'une telle méthode a d'ailleurs brusquement diminué ; dans les *Comptes rendus* du 8 janvier 1917, deux savants russes, MM. Lusin et Souslin, ont annoncé qu'ils pouvaient nommer très facilement des fonctions non représentables analytiquement ou, ce qui est équivalent, des ensembles non mesurables B. En particulier, ils indiquaient que la projection sur un axe d'un ensemble bien défini, suivant la terminologie de M. Borel, peut fort bien être un ensemble mal défini.

Ce dernier fait est en contradiction avec un raisonnement de trois lignes, grossièrement erroné, grâce auquel j'avais cru pouvoir écarter cette possibilité.

Cette opération géométrique : faire la projection d'un ensemble, et les opérations analytiques correspondantes, dont je dirai quelques mots, constituent la fissure par laquelle les ensembles non mesurables B et les fonctions non représentables analytiquement s'introduisent en Mathématiques. Dès maintenant, on aperçoit qu'une méthode constructive s'appliquant aux seules fonctions représentables

analytiquement a beaucoup perdu de son intérêt et qu'on doit rechercher une méthode de raisonnement pour la classe plus générale de fonctions introduites par MM. Lusin et Souslin.

L'erreur que j'avais commise nécessite plusieurs corrections et observations que je donne au Chapitre IV.

6. Le dernier Chapitre est consacré à des questions de priorité. D'habitude, ces questions se règlent en quelques lignes, une citation, une date et c'est fini. Mais j'ai à répondre à une réclamation globale et qui n'est basée sur aucun texte.

M. Borel, avant mes travaux, n'avait pas écrit une seule phrase, une allusion, *un simple mot* sur la définition de l'intégrale, et cependant il réclame une part dans la paternité de cette définition. Il le fait en opposant cette *définition* à ses *conséquences* qu'il déclare m'être entièrement personnelles (fonctions dérivées, séries de Fourier, intégrales singulières) (*voir* p. 246). En retenant le point de départ et en me laissant seulement les conséquences, M. Borel se trouve réclamer en somme une part de paternité sur tous mes travaux.

On comprend que devant l'étendue de cette contestation je ne puisse me borner à une dénégation; le lecteur serait trop facilement porté à penser que si M. Borel n'a rien publié, c'est seulement parce que mes travaux découlaient des siens si naturellement et nécessairement qu'il a pu se dispenser de le signaler. L'étendue de la réclamation suffit ainsi à la faire supposer fondée.

Je dois donc mettre en évidence les idées personnelles qui m'ont conduit à cette définition. L'une d'elles fait apparaître une relation entre la mesure et l'intégrale. Dans sa Notice, M. Borel semble s'appuyer sur l'existence de cette relation; mais cette relation, c'est moi, et moi seul, qui l'ai mise en évidence; elle ne peut m'être opposée.

Un autre argument de M. Borel c'est l'analogie de forme entre la définition de la mesure, qu'il avait donnée en 1898, et celle de l'intégrale, qu'il a donnée en 1912; mais cette dernière définition est essentiellement basée sur un fait mathématique que j'ai établi : la possibilité d'intégrer terme à terme toutes les séries à termes positifs. Cette proposition a été regardée comme capitale par plusieurs auteurs :

« C'est l'un des résultats les plus beaux de la théorie », écrit M. de la Vallée Poussin. Quand je l'ai donnée, elle était tout à fait inattendue, bien qu'il nous semble maintenant que certains résultats partiels d'Arzelà et d'Osgood auraient dû la faire prévoir. Or, la définition de M. Borel, qui est basée sur l'intégration terme à terme des séries, n'aurait pu être posée que par celui qui aurait prévu le théorème.

En résumé, si, en 1898, quelqu'un avait eu les idées qui m'ont servi, ou connu les résultats que j'ai obtenus, il aurait dû arriver à ma définition de l'intégrale; mais il n'en a pas été ainsi.

La réclamation de M. Borel est sans aucun fondement.

7. J'ai été moins embarrassé pour ce qui est de la mesure, car là il y a des textes et il m'est facile, en particulier, de prouver que je n'ai pas commencé à travailler la question quand elle était déjà entièrement traitée, comme on pourrait le croire en lisant la seconde Notice de M. Borel. En particulier, M. Borel affirme que ses procédés permettent de mesurer tous les ensembles qu'on pourra jamais rencontrer; mais cette généralité, c'est moi, je l'ai déjà dit, qui l'ai montrée; des citations (*voir* p. 244) prouvent que M. Borel croyait, au contraire, ne pouvoir mesurer qu'une classe restreinte d'ensembles. Je ne me suis donc pas occupé seulement des ensembles qui ne peuvent servir à rien.

D'une façon générale, ici, comme pour l'intégrale, ce n'est qu'en considérant mon apport comme une vérité banale connue de tout temps, ceci malgré les textes cette fois, et en s'appuyant, cependant, précisément sur les faits nouveaux que j'ai fait connaître, qu'on peut diminuer ma contribution. On parle généralement de la théorie de la mesure de MM. Borel et Lebesgue; je suis fier de cette dénomination, car j'ai conscience de l'avoir méritée.

Je désire vivement qu'avant de se faire une opinion on relise les Mémoires. De l'opinion de ceux qui se reporteront aux Mémoires originaux, je suis bien certain.

II. — Intégration des fonctions non bornées.

8. Pour le cas des fonctions bornées, trois définitions seulement ont été proposées : 1° la définition classique de l'intégrale des fonctions continues qui s'applique aux fonctions bornées et continues ; 2° la définition, à peine différente, de Riemann, qui s'applique à toutes les fonctions bornées qui n'ont qu'un ensemble de mesure nulle de points singuliers ⁽¹⁾ ; 3° la définition que j'ai donnée, qui s'applique à toutes les fonctions bornées et mesurables.

En réalité, cette dernière définition s'applique aussi à des fonctions non bornées ; ce sont celles qui restent intégrables quand on les prend en valeur absolue, je les ai appelées *fonctions sommables*. Cette extension de la troisième définition est analogue à celle qui fait passer de la première à la deuxième.

Dès les premiers temps du calcul intégral, la première définition a reçu une extension capitale. *Si cette définition cesse de s'appliquer pour (a, b) , mais s'applique dans (α, β) quels que soient α et β dans (a, b) , on appelle intégrale dans (a, b) la limite de l'intégrale dans (α, β) , si cette limite existe, quand on fait tendre α vers a et β vers b .*

Partant de là et admettant de plus que l'on a

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b \quad \text{avec} \quad a < c < b,$$

on définit l'intégrale dans tout intervalle ne contenant qu'un nombre fini de points singuliers.

Cette définition est, par exemple, nettement exposée dans le *Cours* de Cauchy ; elle lui est, bien entendu, très antérieure.

Pour nous, cette extension ne présente plus d'intérêt que dans le

(1) *I.*, p. 29. Par la lettre *I.*, je désignerai mes *Leçons sur l'Intégration et la recherche des fonctions primitives*. La lettre *T* renverra à ma Thèse (Intégrale, Longueur, Aire) (*Annali di Matematica*, 1902) ; les lettres *F. R. A.* au *Mémoire du Journal de Mathématiques*, 1905.

cas où les points singuliers a et b sont des *infinis*, c'est-à-dire dans le cas où $f(x)$ n'est pas bornée autour de a et b .

La deuxième définition est susceptible d'une extension analogue; Riemann l'utilise de suite dans son Mémoire *Sur les séries trigonométriques*, où il définit l'intégrale. En signalant que la troisième définition s'applique seulement à des fonctions intégrables en valeur absolue et laisse par suite de côté bien des fonctions très simples intégrées depuis longtemps, j'ai naturellement donné l'extension analogue qui permet d'englober aussi tous les cas traités antérieurement (1). Il faut remarquer qu'avec la troisième définition, les points gênants ne sont pas les *infinis*, qui peuvent être partout denses, mais les *infinis* autour desquels la fonction cesse d'être sommable. J'appellerai ces points les *points de non-sommabilité*.

L'extension que nous venons d'examiner repose sur ces deux propriétés admises *a priori* : 1° l'intégrale *indéfinie* est une fonction continue; 2° l'intégrale étendue à l'intervalle (a, b) , somme de deux autres (a, c) , (c, b) , est la somme des intégrales étendues aux deux intervalles composants (a, c) , (c, b) .

Puisque ces propriétés ne sont pas contradictoires avec les définitions précédentes, adjoignons-les à titre de complément à ces définitions. Ainsi complétée, la première définition s'appliquera à toutes les fonctions n'ayant qu'un ensemble réductible de points singuliers (que nous supposerons d'ailleurs être des *infinis*); ce sera la définition de Dirichlet-Cauchy (2). La seconde définition s'appliquera à toutes les fonctions n'ayant qu'un ensemble réductible d'*infinis* et un ensemble de mesure nulle de points singuliers; ce sera la définition de Dirichlet-Riemann (3). La troisième définition s'appliquera à toutes les fonctions n'ayant qu'un ensemble réductible de points de non-sommabilité; cette définition donne ce que j'ai appelé l'*intégrale calculée à l'aide de l'intégrale indéfinie* (4).

(1) *T.*, p. 40.

(2) *I.*, p. 8 à 14.

(3) *I.*, p. 66.

(4) *T.*, p. 40; *Z.*, p. 115. Je ne me suis d'ailleurs pas contenté de poser une définition, je l'ai appliquée à la recherche des fonctions primitives (*T.*, p. 40 et 41) et à l'étude des séries trigonométriques (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1903, p. 453 et suiv.).

Le premier pas, dans la voie que nous venons de suivre, a été fait par Dirichlet qui, pour la première définition, a envisagé le cas où le dérivé de l'ensemble des infinis ne contiendrait qu'un nombre fini de points (1).

9. De la considération des intervalles d'exclusion on peut tirer un tout autre procédé de définition; c'est celui que M. Jordan a adopté dans son *Cours d'analyse* (2).

L'ensemble E des infinis de la fonction f est fermé. Enfermons E dans des intervalles en nombre fini dont chacun est de longueur δ au plus, prenons l'intégrale de f à l'extérieur de ces intervalles et faisons tendre δ vers zéro. Si, dans ces conditions, on a une limite, cette limite est l'intégrale de f . Pour que cette intégrale vérifie bien la relation

$$\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx,$$

essentielle aux applications, il faut que E soit de mesure nulle (3).

En faisant varier les intervalles d'exclusion relatifs à une même valeur de δ , on voit que si (a, b) est un intervalle contigu à E et si (α, β) est intérieur à (a, b) , f doit avoir une intégrale dans (α, β) et que cette intégrale doit avoir une limite quand α et β tendent respectivement vers a et b . Donc f doit avoir une intégrale dans chaque intervalle contigu à E.

(1) Ces recherches de Dirichlet ne nous sont parvenues que grâce à l'exposé qu'en a donné Lipschitz dans son Mémoire sur les séries trigonométriques. En traduisant ce Mémoire (*Acta mathematica*, t. 36), M. Montel a signalé l'erreur suivante : Lipschitz admet seulement que l'ensemble des infinis est non dense et il croit pouvoir en déduire que le dérivé de cet ensemble ne contient qu'un nombre fini de points. A cause de cette erreur, il est assez difficile de préciser exactement le cas que Dirichlet a voulu considérer.

(2) Ce procédé avait été utilisé antérieurement par Harnack (*Math. Annalen*, Bd XXI, XXIV), qui développe à cette occasion de longues considérations manquant totalement de précision et, à cause de cela, fort difficiles à suivre. Au même procédé se rapportent des travaux de de la Vallée Poussin (*J. de Math.*, 4^e série, t. 8); Stolz (*Wiener Berichte*, Bd CVII); E.-H. Moore (*Trans. am. math. Soc.*, t. 2). Les définitions de ces différents auteurs ne sont pas équivalentes; plusieurs d'entre eux utilisent aussi le procédé de Dirichlet. Voir aussi Hölder (*Math. Ann.*, Bd XXIV) et le *Berichte* de M. Sehnfliess.

(3) Cette condition a été signalée par plusieurs auteurs (*I.*, p. 66).

Profitant encore de la possibilité de faire varier les intervalles d'exclusion, on pourra les choisir de façon à obtenir une valeur approchée de l'intégrale aussi grande que l'on voudra en valeur absolue, si la série

$$\sum \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx,$$

formée avec des intégrales de f étendues aux intervalles contigus à E , n'est pas absolument convergente.

Adoptons la convention suivante :

Si l'on sait intégrer une fonction f dans tous les intervalles (a_n, b_n) contigus à un ensemble fermé E de mesure nulle et si la série

$$\sum \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx$$

est absolument convergente, la somme de cette série sera par définition l'intégrale de f .

Ce procédé de définition est celui que j'appellerai le procédé généralisé de M. Jordan. Si on l'applique au cas où E est l'ensemble des infinis d'une fonction intégrable au sens de Riemann en dehors de E , on a en effet une définition susceptible de remplacer celle de M. Jordan et un peu plus générale que la sienne (1).

Pour utiliser entièrement cette nouvelle généralisation, il faudra prévoir le cas où l'on saurait seulement calculer les intégrales

$$\int_{a_n}^{b_n} f(x) dx$$

à l'aide des intégrales définies; la définition s'applique alors au cas suivant :

Supposons la fonction presque partout sommable et soit ε l'en-

(1) C'est cette forme que j'ai donnée autrefois à la définition de M. Jordan (*J.*, p. 66).

semble des points de non-sommabilité, ensemble supposé de mesure nulle; \mathcal{C} est la somme d'un ensemble réductible E_1 et d'un ensemble parfait E . S'il arrivait que E n'existe pas, la définition du numéro précédent devrait être employée; si E existe, cette définition donne seulement les intégrales étendues aux intervalles contigus à E et il faut utiliser la convention nouvelle.

Ce procédé généralisé de M. Jordan marque à peu près le point extrême auquel je suis parvenu dans la recherche d'une fonction connaissant sa dérivée :

« On peut dire que nous savons résoudre ce problème lorsque l'intervalle de variation de x peut être considéré comme somme d'un ensemble non dense E et de l'ensemble des intervalles (α, β) contigus à E , l'ensemble E étant réductible et la fonction proposée ayant une intégrale indéfinie $F(x)$ dans chaque intervalle (α, β) .

» Même si E n'est pas réductible le problème peut être résolu, à condition que la fonction soit intégrable dans E et que la série des quantités $[F(\beta) - F(\alpha)]$ soit absolument convergente. » (*T.*, p. 42.)

La condition indiquée dans le dernier alinéa, que f soit intégrable sur E , est plus générale que celle qui astreint E à être de mesure nulle. Cette condition conduit à étudier f sur E comme on l'a étudié auparavant sur l'intervalle total; on pourra obtenir ainsi un nouvel ensemble exceptionnel E_1 , et ainsi de suite, transfiniment.

Ce procédé transfini est l'une des opérations qu'il faut utiliser pour *totaliser* une fonction par les procédés de M. Denjoy. Je me hâte d'ajouter que je n'ai compris tout l'intérêt de ce procédé qu'après avoir lu M. Denjoy et que la définition de la totalisation lui est entièrement personnelle.

Les définitions précédentes conduisent à étudier la fonction f à intégrer sur certains ensembles E ; mais si f est infinie aux points de E ou en certains points de E on est arrêté. On convient en général de ne pas s'occuper des points où f est infinie; on raisonne en somme sur une fonction φ , qu'on substitue à f , et qui est égale à f aux points où f est finie, qui est nulle là où f est infinie.

Cette façon de procéder oblige à quelques précautions, car l'inté-

grale qu'on obtient a parfois des propriétés assez inattendues. Ainsi, par exemple, l'intégrale indéfinie d'un nombre dérivé non partout fini n'est pas en général la fonction primitive de ce nombre. Pour cette raison, j'ai, dans quelques travaux, pris la précaution de ne parler que de l'intégrale d'une fonction prise dans l'ensemble des points où la fonction est finie.

10. Voici maintenant la définition donnée par M. Borel :

« Soit $f(x)$ une fonction non bornée, non intégrable au sens de Riemann; supposons qu'on puisse déterminer dans le champ d'intégration une infinité énumérable de points $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ ayant la propriété suivante : si l'on entoure le point A_n d'un intervalle d'exclusion $B_n C_n$, tel que la série $\Sigma B_n C_n$ soit convergente et de somme ε , les sommes de Riemann généralisées tendent vers une limite, quels que soient les intervalles, supposés fixes, et cette limite tend elle-même vers une limite, lorsque ε tend vers zéro; cette dernière limite est, par définition, l'intégrale, au sens de Riemann, généralisée. Les sommes de Riemann généralisées sont les sommes

$$\Sigma h_i f(\xi_i)$$

dans lesquelles on suppose :

- 1° Que les points de division x_i n'appartiennent pas aux intervalles d'exclusion;
- 2° Que h_i est égal à $x_i - x_{i-1}$, diminué, s'il y a lieu, de la longueur des intervalles d'exclusion;
- 3° Que ξ_i est situé entre x_{i-1} et x_i , mais n'appartient pas non plus aux intervalles d'exclusion.

On étudie la limite de ces sommes de Riemann dans l'hypothèse que les h_i tendent vers zéro et l'on fait tendre ensuite vers zéro les intervalles d'exclusion. »

Examinons d'abord ce que donnerait cette définition appliquée à des fonctions $f(x)$ bornées. Dans l'ensemble \mathcal{C} , obtenu en retirant de (a, b) les points des intervalles $B_n C_n$ choisis, $f(x)$ doit être intégrable grâce au procédé opératoire de Riemann utilisé sous la forme

généralisée qu'indique M. Borel. Un raisonnement immédiat montre que les points de \mathcal{C} en lesquels $f(x)$ présente une discontinuité ⁽¹⁾ supérieure à η forment un ensemble qu'on peut enfermer dans un nombre fini d'intervalles dont la somme des longueurs est aussi petite qu'on le veut. De là on déduit que l'ensemble des points de discontinuité de $f(x)$, considérée seulement sur \mathcal{C} , est de mesure nulle; la réciproque est d'ailleurs vraie: si l'ensemble e des points de discontinuité de $f(x)$, considérée seulement dans \mathcal{C} , est de mesure nulle, $f(x)$ est intégrable dans \mathcal{C} par le procédé de Riemann généralisé ⁽²⁾.

Donnons à ε une suite de valeurs positives indéfiniment décroissantes, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$. A ces valeurs correspondent des ensembles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots$ et des ensembles de points de discontinuité correspondants e_1, e_2, \dots . Je supposerai les intervalles d'exclusion choisis de façon que \mathcal{C}_i contienne \mathcal{C}_{i-1} , alors e_i contiendra e_{i-1} . Et si l'on appelle $\Sigma \mathcal{C}_i$ et Σe_i les sommes des \mathcal{C}_i et des e_i , Σe_i est l'ensemble des points de discontinuité de $f(x)$ considérée dans tout $\Sigma \mathcal{C}_i$. Or $\Sigma \mathcal{C}_i$ ne diffère de (a, b) que par l'ensemble de mesure nulle α , formé des points appartenant à la fois à tous les groupes d'intervalles d'exclusion choisis pour chacune des valeurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$. Donc la fonction $f(x)$ est continue en tout point, si l'on convient de laisser de côté l'ensemble de points $\alpha + \Sigma e_i$, qui est de mesure nulle. Les fonctions intégrables par le procédé de Riemann général rentrent donc dans la classe des fonctions qui sont continues en tous leurs points à condition de faire abstraction d'un certain ensemble de mesure nulle. Cette classe de fonctions, qui est celle que l'on rencontre déjà dans la comparaison de l'intégration riemannienne ordinaire et de l'intégration des fonctions sommables, étant constituée uniquement de fonctions sommables, *les fonctions bornées intégrables par le procédé de M. Borel sont toutes sommables.*

11. La réciproque n'est évidemment pas vraie: une fonction, égale à zéro sauf aux points d'un ensemble, non dense et de mesure non nulle

⁽¹⁾ Pour la distinction entre la continuité et la discontinuité, on ne tient naturellement compte que des valeurs prises par $f(x)$ dans \mathcal{C} .

⁽²⁾ Tout cela s'obtient comme dans le cas où il n'y a pas d'intervalles d'exclusion; voir par exemple I., p. 29 et 109.

dans tout intervalle, où elle est égale à un, est sommable et cependant elle n'est pas intégrable par le procédé de Riemann généralisé. Nous allons préciser quelles sont les fonctions sommables auxquelles s'applique le procédé étudié.

L'ensemble α se compose de l'ensemble A des points A_i et d'un ensemble β qui varie avec les intervalles d'exclusion choisis. Cette remarque rend vraisemblable l'énoncé suivant que nous allons démontrer :

Pour qu'une fonction bornée soit intégrable par le procédé de M. Borel, il faut et il suffit que, si l'on fait abstraction des points A_i et des valeurs de la fonction en ces points, l'ensemble des points de discontinuité de $f(x)$ soit de mesure nulle.

Soit D l'ensemble des points de discontinuité de $f(x)$ considérée seulement dans $B = (a, b) - A$. Soient M_1 et m_1 les bornes de $f(x)$ dans B. Quand on fait abstraction de β , à condition peut-être de conserver cependant deux points convenablement choisis P_1 et p_1 de β , les bornes de f dans $B - \beta + P_1 + p_1$ seront respectivement supérieure à $M_1 - 1$ et inférieure à $m_1 + 1$.

Divisons (a, b) en deux parties égales, δ_2 et δ'_2 ; les bornes de $f(x)$ dans la partie de B située dans δ_2 sont M_2 et m_2 . Les bornes de $f(x)$ dans la partie de $B - \beta$ comprise dans δ_2 seront respectivement supérieure à $M_1 - \frac{1}{2}$ et inférieure à $m_2 + \frac{1}{2}$, pourvu peut-être que l'on conserve deux points P_2 et p_2 de β . Ces points peuvent être distincts de P_1 et p_1 ou non. De même la considération de δ'_2 fournira peut-être deux points P'_2 et p'_2 .

Divisons (a, b) en trois parties égales, δ_3 , δ'_3 , δ''_3 ; à condition peut-être de conserver des points $P_3, p_3; P'_3, p'_3; P''_3, p''_3$ de β , les bornes de $f(x)$ dans chacun de ces intervalles varieront de moins de $\frac{1}{3}$, que l'on considère la fonction pour les points de $B - \beta$ ou pour ceux de B; etc.

Tous les points P et p mis en évidence forment un ensemble dénombrable γ qui fait partie de β . Or, il est facile de modifier le choix des intervalles d'exclusion de façon à faire sortir γ du nouvel ensemble β .

donc du nouvel α . Pour cela il suffira, par exemple, de choisir les intervalles correspondant à ε_1 , de façon qu'ils ne contiennent pas p_1 et P_1 ; ceux relatifs à ε_2 , de façon qu'ils ne contiennent pas $p_1, P_1, p_2, P_2, p'_2, P'_2$ et ainsi de suite.

Soit α' le nouvel ensemble α . Les points de D sont points de discontinuité pour $f(x)$, que l'on considère $f(x)$ dans tout B ou seulement dans l'ensemble $B - \beta'$, analogue à $B - \beta$ et qui contient $[B - \beta] + \gamma$ à cause de la façon même dont a été choisi l'ensemble β' . Sont exceptés cependant les points de D qui font partie de α' , s'il en existe; mais α' est de mesure nulle, donc, si D n'était pas de mesure nulle, avec les nouveaux intervalles d'exclusion, on aurait, à partir d'une certaine valeur de i , des ensembles de points de discontinuité e'_i , analogues aux e_i et de mesure non nulle. La proposition directe est démontrée; pour démontrer la réciproque, il suffit de remarquer que, dans les conditions de l'énoncé, $f(x)$ est sommable; que les sommes riemanniennes généralisées, étendues à l'ensemble \mathcal{C} , obtenu en enlevant les intervalles d'exclusion, tendent, d'après ce qui précède, vers

$$\int_{\mathcal{C}} f(x) dx,$$

que, par suite, la différence entre

$$\int_a^b f(x) dx$$

et cette limite est égale à l'intégrale de $f(x)$ dans les intervalles d'exclusion, laquelle tend vers zéro avec ε .

12. Supposons maintenant $f(x)$ non bornée. A chaque valeur de ε correspondra comme précédemment un ensemble \mathcal{C} , pour lequel les sommes riemanniennes généralisées devront tendre vers une limite; or ceci seul nous a servi dans la plus grande partie du raisonnement, donc :

Pour qu'une fonction sommable soit intégrable par le procédé de M. Borel, il faut et il suffit que, en convenant de faire abstraction de l'ensemble dénombrable des points A_i , elle soit bornée en tous ses points et n'ait qu'un ensemble de points de discontinuité de mesure nulle.

De là il résulte évidemment qu'une *fonction sommable n'est pas en général intégrable par le procédé de M. Borel*, car une telle fonction a, en général, tous ses points pour infinis, et cela même si l'on fait abstraction d'un ensemble dénombrable dans la recherche de ses infinis.

Voici un exemple précis. Un intervalle (a, b) étant donné, enlevons les points intérieurs à l'intervalle de même milieu et de mesure $K_1 \times (b - a)$; sur chacun des deux intervalles restants, opérons de même, K_1 étant remplacé par K_2 ; puis, opérons sur les quatre intervalles restants avec un nombre K_3 ; etc. Les points restants forment un ensemble partout non dense de mesure égale à $b - a$ multipliée par sa densité moyenne

$$d = (1 - K_1)(1 - K_2)(1 - K_3) \dots$$

Choisissant les K convenablement, on peut donner à d n'importe quelle valeur inférieure à 1; on pourra prendre par exemple

$$K_i = 1 - d^{2^i}.$$

Soit $Z(d, a, b)$ cet ensemble duquel on suppose enlevés les points a et b . Partons de $(0, 1)$. Construisons l'ensemble

$$Z\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right) = Z_1.$$

Dans chaque intervalle (α_1, β_1) contigu à Z_1 , construisons l'ensemble

$$Z\left(\frac{1}{2^2}, \alpha_1, \beta_1\right);$$

soit Z_2 la somme de ces ensembles. Dans chaque intervalle (α_2, β_2) contigu à Z_2 , construisons l'ensemble,

$$Z\left(\frac{1}{2^3}, \alpha_2, \beta_2\right);$$

soit Z_3 la somme de ces ensembles; etc.

Nous prendrons $f(x)$ égale à i aux points de Z_i et égale à 0 aux points n'appartenant à aucun des Z_i . La mesure de Z_i étant inférieure

à $\frac{1}{2^i}$, la contribution de Z_i dans l'intégrale de $f(x)$ sera au plus $\frac{i}{2^i}$; donc $f(x)$ est sommable. Cette fonction $f(x)$ n'est pas intégrable par le procédé de M. Borel; car elle a tous ses points pour infinis quel que soit l'ensemble dénombrable A que l'on néglige (1).

Pour les fonctions sommables, l'énoncé donné plus haut fait connaître la condition nécessaire et suffisante pour que le procédé de M. Borel s'applique; ce procédé s'applique alors qu'il s'agisse de trouver l'intégrale de $f(x)$ ou celle de $|f(x)|$.

13. Nous nous occupons maintenant de fonctions qui, prises en valeur absolue, ne sont pas intégrables, donc qui ne sont pas sommables; les définitions les plus simples s'appliquant à cette classe de fonctions sont la définition classique de Cauchy et sa généralisation par la méthode de Dirichlet-Lipschitz, comme je l'ai dit plus haut.

Le procédé de M. Borel est évidemment identique à celui de Cauchy dans le cas où celui-ci s'applique, c'est-à-dire quand il n'y a qu'un nombre limité d'infinis, mais nous allons voir qu'il existe des fonctions intégrables à l'aide de la définition primitive de Dirichlet qui ne sont pas intégrables par le procédé de M. Borel. Cette remarque a déjà été faite par M. Menchoff (2).

Prenons une suite infinie de nombres $a_1 > b_1 \geq a_2 \geq b_2 > \dots > 0$, et

(1) Bien entendu, pour donner seulement des exemples de fonctions sommables qui ne soient pas intégrables par le procédé de M. Borel, il n'est pas nécessaire de recourir à un exemple aussi compliqué que celui qui précède. Prenons la fonction sommable égale à un aux points d'un ensemble partout non dense et de mesure non nulle et égale à zéro ailleurs, qui a été considérée plus haut; cette fonction bornée n'est pas intégrable par le procédé de M. Borel. Modifions-la aux points d'un ensemble dénombrable quelconque de façon à la rendre non bornée; elle reste sommable et non intégrable par le procédé de M. Borel.

Mais il y avait intérêt à montrer que, si l'on modifiait la définition de M. Borel de façon à ce qu'elle soit applicable à toutes les fonctions sommables bornées, elle ne s'appliquerait toutefois pas nécessairement aux fonctions sommables non bornées. Et cela, parce que les intervalles d'exclusion sont choisis à partir d'un ensemble dénombrable de points de base.

(2) La Note de M. Menchoff est datée du 17 février 1915. Elle est écrite en russe; je ne sais de quel périodique elle est extraite. Dans le texte, j'imité la méthode de construction de M. Menchoff.

soit f_n une fonction nulle en dehors de (b_n, a_n) , continue de 0 à a_1 , sauf en un point de c_n de (b_n, a_n) où nous supposons qu'elle devient infinie de manière que $|f_n|$ ne soit pas intégrable, mais que f_n le soit. L'intégrale de f_n dans (b_n, a_n) se calculera par le procédé classique de Cauchy, nous la supposons égale à I_n ; la série ΣI_n sera supposée alternée, $(-1)^n I_n > 0$, et convergente et la série $\Sigma |I_n|$ divergente.

La fonction $F = \Sigma f_n$ est intégrable par le procédé primitif de Dirichlet; elle n'est pas intégrable par le procédé de M. Borel. En effet, pour appliquer ce procédé, il nous faudra certainement choisir pour points d'exclusion les points c_n , et nous n'aurions aucun avantage à prendre en plus d'autres points. Prenons donc les points c_n . Autour de c_n , pour n pair et plus grand que $2p$, prenons (b_n, a_n) pour intervalle d'exclusion; pour les autres valeurs de n prenons autour de c_n de tout petits intervalles. Alors, quel que soit p , l'intégrale dans les intervalles non exclus sera égale à $-\infty$ ou aussi voisine que l'on voudra de $-\infty$; donc le procédé de M. Borel ne s'applique pas. Remarquons en passant qu'en choisissant autrement les intervalles d'exclusion on pourrait obtenir des sommes de Riemann généralisées tendant vers $+\infty$ ou vers tel nombre que l'on voudra.

Ce raisonnement montre qu'une fonction intégrable par le procédé primitif de Dirichlet n'est pas intégrable par le procédé de M. Borel si les infinis de la fonction, ou certains d'entre eux, peuvent être enfermés dans des intervalles d'exclusion tels que la série des valeurs absolues des intégrales de Dirichlet prises dans ces intervalles soit divergente. Par exemple : la fonction

$$\frac{d}{dx} \left\{ x \sin \frac{1}{x} \sin \left[\frac{1}{\left(x \sin \frac{1}{x} \right)} \right] \right\},$$

qui admet pour infinis les valeurs $x = 0$ et $x = \frac{1}{k\pi}$ et qui, par suite, est intégrable par le procédé primitif de Dirichlet, n'est pas intégrable par le procédé de M. Borel. En effet, l'intervalle

$$\left(\frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}, \frac{1}{k\pi} \right)$$

fournit comme valeur de l'intégrale

$$(-1)^k \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}},$$

ce qui est le terme général d'une série non absolument convergente.

14. Soient $f(x)$ une fonction intégrable par le procédé de M. Borel et A l'ensemble des points de base des intervalles d'exclusion. Nous savons qu'en faisant abstraction des points de A, $f(x)$ est bornée en tout point.

Disons qu'un point est un vrai infini de $f(x)$, si $f(x)$ reste non bornée autour de ce point quand on néglige les valeurs prises par la fonction aux points de A. Les vrais infinis de $f(x)$ appartiennent à A et d'ailleurs ils forment évidemment un ensemble fermé, donc l'ensemble des vrais infinis est un ensemble réductible I faisant partie de A.

Soit (u, v) un intervalle quelconque, soient l et l' les longueurs totales des intervalles d'exclusion respectivement intérieures et extérieures à (u, v) ; on peut faire tendre l et l' vers zéro suivant deux lois quelconques, l beaucoup plus vite que l' , par exemple. Il en résulte que la contribution de (u, v) dans les sommes riemaniennes généralisées doit tendre vers une limite déterminée; c'est-à-dire que l'intégrale de $f(x)$ dans (u, v) existe et peut se calculer par le procédé de M. Borel. Supposons que (u, v) ne contienne aucun point de I ni à son intérieur, ni comme extrémité. En faisant abstraction des valeurs prises aux points de A, $f(x)$ est bornée en tout point de (u, v) , même aux points de A contenus dans (u, v) ; donc $f(x)$ est uniformément bornée dans (u, v) ⁽¹⁾, quand on néglige les valeurs prises aux points de A. Nous pouvons utiliser les considérations du n° 11 et conclure en particulier que $f(x)$ est sommable dans (u, v) .

Supposons maintenant que (u, v) ne contienne à son intérieur aucun point de I, mais que u et v fassent partie de I. Soient (α', α) ,

(1) Je rappelle que *bornée en un point* et *bornée autour d'un point* sont deux locutions équivalentes et qu'il ne faut pas confondre *bornée en un point* et *finie en un point*.

(β', β) les intervalles d'exclusion relatifs à u et v ; la possibilité de faire varier indépendamment les uns des autres les intervalles d'exclusion permet de prendre pour contribution de (u, v) dans les sommes riemaniennes une quantité aussi voisine qu'on le veut de l'intégrale de f prise de α à β' . Donc, quand α tend vers u et β' vers v , cette intégrale tend vers une limite fixe, c'est-à-dire que l'intégrale de $f(x)$ dans (u, v) se calcule par le procédé de Cauchy à partir de l'intégrale dans (α, β') .

Soient maintenant des intervalles $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, contigus à I , et J_1, J_2, \dots , les intégrales de $f(x)$ dans ces intervalles. L'indétermination des intervalles d'exclusion permet d'obtenir, pour la contribution de $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots$, une valeur aussi voisine qu'on le veut de $J_1 + J_2 + \dots$. Cette somme non ordonnée a donc une valeur déterminée.

En résumé, la fonction $f(x)$ est sommable à l'intérieur de chaque intervalle contigu à I , elle a une intégrale dans chacun de ces intervalles et la série de ces intégrales est absolument convergente. On peut donc attacher à $f(x)$ une intégrale indéfinie $F(x)$ en utilisant indifféremment les procédés du n° 8 ou ceux du n° 9.

Ainsi, toute intégrale qui peut être obtenue par le procédé de M. Borel peut aussi être calculée, et à l'aide des intégrales indéfinies, et par le procédé généralisé de M. Jordan; on a vu au n° 13 que la réciproque n'est pas vraie.

Enfermons les points de A dans des intervalles $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2), \dots$ n'empiétant pas les uns sur les autres. La limite des sommes riemaniennes généralisées, étendues à la partie c de (a, b) extérieure à ces intervalles, diffère de l'intégrale cherchée $F(b) - F(a)$ de la quantité $\Sigma[F(\mu_i) - F(\lambda_i)] = \Sigma$. Cela est évident si les (λ_i, μ_i) sont en nombre fini; mais on peut ramener le cas général à celui-ci.

En effet, conservons seulement un nombre fini des (λ_i, μ_i) et remplaçons les autres par des intervalles très petits et convenablement choisis, entourant les points A_i extérieurs aux (λ_i, μ_i) conservés. Comme $F(x)$ est continue, on rendra la contribution de ces intervalles très petits dans la nouvelle somme $\Sigma[F(\mu_i) - F(\lambda_i)]$ aussi petite qu'on le voudra et cette somme se réduira à celle qui est relative aux intervalles conservés, soit Σ' . Mais nous avons réduit la longueur totale ε des intervalles conservés et Σ' doit être, comme Σ , inférieur

en valeur absolue à un nombre η tendant vers zéro avec ε . Puisque Σ' est une partie finie quelconque de Σ , la série Σ est absolument convergente. Par suite Σ représente l'intégrale de $f(x)$ dans les intervalles d'exclusion et $F(b) - F(a) - \Sigma$ est bien l'intégrale dans ε .

La somme $\Sigma |F(\mu_i) - F(\lambda_i)|$ est, d'après ce qui précède, inférieure à 2η , donc tend vers zéro avec ε . On exprime ce fait en disant que $F(x)$ a une *variation totale nulle* dans A . Cette condition entraîne celle précédemment rencontrée : la série des intégrales J_k , étendues aux intervalles contigus à I , est absolument convergente. En effet, s'il n'en était pas ainsi, quel que soit ε , on pourrait trouver des intervalles (m_p, n_p) contigus à I , en nombre fini, dont la longueur totale serait inférieure à ε et dont la contribution dans la série des valeurs absolues des intégrales J_k serait supérieure au nombre 2η correspondant à ε . Convenons de prendre un système d'intervalles d'exclusion parmi lesquels se trouveront les intervalles $(m_p - \theta, n_p - \theta)$; θ étant très petit. La valeur approchée de la variation totale de $F(x)$ dans A , fournie par ces intervalles, surpasserait 2η . Nous pouvons maintenant conclure :

Pour qu'une fonction $f(x)$ ait une intégrale calculable par le procédé de M. Borel, il faut et il suffit : 1° que les points de discontinuité de $f(x)$ forment un ensemble de mesure nulle, que ses points de non-sommabilité forment un ensemble réductible et que les procédés du n° 8 permettent de lui attacher une intégrale indéfinie $F(x)$; 2° qu'il existe un ensemble dénombrable A dans lequel $F(x)$ a une variation totale nulle et tel que $f(x)$ soit bornée en tout point n'appartenant pas à A , quand on néglige les valeurs prises par $f(x)$ aux points de A .

Dans cet énoncé on peut remplacer n° 8 par n° 9. Si l'on fait ce changement et si l'on remplace aussi les mots *réductible* et *dénombrable* par *de mesure nulle*, on a un énoncé qui s'applique au procédé de M. Borel, modifié en ce sens que les intervalles d'exclusion sont choisis à partir de points A_i formant un ensemble de mesure nulle.

15. La complication de ces conditions rend très peu vraisemblable qu'une question d'Analyse conduite à la considération d'une classe de fonctions satisfaisant à ces conditions. Cette complication est due au caractère arbitraire de la définition : pourquoi assujettir les intervalles d'exclusion à dépendre d'une infinité dénombrable de points de base

plutôt que d'un ensemble de mesure nulle de tels points ? pourquoi assujettir la somme des longueurs des intervalles d'exclusion à tendre vers zéro plutôt que la somme des racines carrées des longueurs ?

Je ne dirai que quelques mots d'une autre généralisation envisagée par M. Borel. Avec sa définition, la somme de deux fonctions intégrables peut ne pas être intégrable; alors, par définition, la somme des intégrales sera l'intégrale de la somme. Mais, pour arriver ainsi à un ensemble de fonctions intégrables tel que la somme de deux fonctions de l'ensemble appartienne aussi à l'ensemble, il ne faut pas se borner là; il faut convenir de faire aussi entrer dans l'ensemble les sommes de trois, de quatre, etc., d'un nombre fini quelconque de fonctions intégrables par le procédé primitif. Il faudrait aussi prouver qu'on ne sera jamais conduit à une contradiction. Cette extension ne modifie pas le résultat essentiel de la comparaison entre le procédé de M. Borel et les procédés antérieurs, car ceux-ci s'appliquent tous à des ensembles de fonctions qui sont *fermés par rapport à l'addition*.

Je voudrais faire remarquer ce que la seconde généralisation de M. Borel conservera d'un peu illusoire tant qu'on ne saura pas répondre aux questions suivantes : une fonction F étant donnée, comment reconnaîtra-t-on qu'elle est la somme de deux fonctions auxquelles s'applique le procédé primitif de M. Borel ? quelles sont les propriétés de l'intégrale ainsi attachée à F ?

La première définition de M. Borel suggère des remarques analogues. La comparaison de cette définition avec des définitions antérieures nous a permis de déterminer les points A_i , de fixer l'étendue du champ d'application de la définition et nous a fourni des propriétés du nombre défini puisque ce nombre est aussi l'intégrale donnée par d'autres procédés bien étudiés. Mais, en se plaçant au point de vue de M. Borel, il faudrait obtenir l'équivalent de ces renseignements sans utiliser les définitions antérieures de l'intégrale; en particulier, puisque M. Borel s'occupe des fonctions qu'on obtient de proche en proche par des passages à la limite, il faudrait savoir reconnaître quand un tel passage fournit une fonction f intégrable par le procédé de M. Borel et apprendre à choisir les A_i d'après la considération des fonctions dont f est la limite.

Remarquons d'ailleurs que les caractères de la définition de M. Borel

la différencient nettement, comme je l'ai dit dans l'Introduction, de celle qu'il a donnée pour les fonctions bornées. Elle est plus voisine de celle que j'ai donnée moi-même. En particulier, elle ne suit aucun procédé de construction des fonctions, je ne puis donc considérer qu'elle fait partie de la *méthode constructive* et je la laisse maintenant de côté.

III. — Intégration des fonctions bornées et mesure des ensembles.

16. Je vais dorénavant m'occuper à peu près uniquement des fonctions bornées et je comparerai la définition constructive de l'intégrale donnée par M. Borel avec celle que j'avais formulée car, et c'est une remarque qui est essentielle, ce que M. Borel appelle « la théorie de l'intégrale définie » dans la phrase que j'ai citée au début, c'est uniquement la définition. Si l'on se rappelle que la définition que j'ai donnée tient en très peu de lignes on s'étonnera, avant tout examen, que celle de M. Borel puisse être tellement plus simple que cela vaille la peine d'être signalé.

α . Dans son *Mémoire sur le calcul des intégrales définies*, M. Borel dit qu'une fonction est asymptotiquement équivalente à des polynômes si, quel que soit ε , la fonction diffère d'un polynôme de moins de ε pourvu qu'on ne considère que des valeurs de la variable extérieures à des intervalles d'exclusion de longueur totale inférieure à ε .

β . Il montre que cette propriété se conserve à la limite, donc appartient à toutes les fonctions des classes de Baire.

γ . Il appelle intégrale d'une fonction asymptotiquement équivalente à des polynômes, la limite des intégrales de ces polynômes.

La forme de cette définition paraît en effet fort différente de celle que j'ai donnée, mais regardons-y de plus près. Aussitôt après avoir défini l'intégrale je m'occupe de la délimitation du champ d'application de cette définition. Les fonctions auxquelles elle s'applique sont les fonctions mesurables.

α . Les fonctions mesurables sont identiques aux fonctions asymptotiquement équivalentes à des polynômes.

β. Je démontre que la limite d'une suite de fonctions mesurables est une fonction mesurable et j'en conclus que la définition s'applique à toutes les fonctions des classes de Baire.

γ. Je démontre ce théorème : *Si f est la limite d'une série convergente presque partout de fonctions f_n bornées dans leur ensemble, l'intégrale de f est la limite de l'intégrale de f_n .*

La marche suivie par M. Borel est donc exactement celle que je suivais quand, moi aussi, je m'occupais du *calcul des intégrales définies*. La seule différence est que j'ai défini antérieurement l'intégrale, tandis que M. Borel prend le résultat du calcul comme définition; d'où cet unique changement : tandis que, dans la démonstration de (γ), j'écris une inégalité relative à la différence

$$\int f dx - \int f_n dx,$$

M. Borel écrit exactement la même pour la différence

$$\int f_p dx - \int f_n dx.$$

J'ai démontré ce théorème sur l'intégration des suites dès le début de mes recherches afin de pouvoir intégrer terme à terme l'égalité

$$f(x) = \lim_{h=0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

et remonter ainsi d'une dérivée à sa fonction primitive. Si l'on veut bien se rappeler que ce théorème sur l'intégration des suites était tout à fait inattendu et a été considéré parfois comme l'un des résultats les plus précieux de la théorie, le caractère synthétique d'exposition *a posteriori* du procédé de M. Borel apparaîtra pleinement. Car ce procédé part, comme d'un des éléments de la définition, de la conviction de l'exactitude du fait mathématique que nous a appris ce théorème caché. On peut faire une remarque analogue relativement à l'emploi, dans l'énoncé (α), d'une propriété qui a lieu *presque partout*.

17. En tout cas, ce caractère synthétique ne suffit pas pour pouvoir

opposer l'un à l'autre le procédé de M. Borel et le mien. D'ailleurs, ma définition, elle-même, peut être divisée en trois parties α , β , γ correspondant exactement à celles de la définition de M. Borel.

α . J'appelle *fonction mesurable* toute fonction $f(x)$ telle que l'ensemble E des valeurs de x définies par la double inégalité

$$a < f(x) < b$$

soit, quelles que soient les constantes a et b , un ensemble mesurable. Ce qui veut dire que E et son complémentaire e doivent pouvoir être enfermés respectivement dans des intervalles I et i , tels que la somme des parties communes soit aussi petite que l'on veut.

β . Je prouve que l'addition, la multiplication et le passage à la limite ne font pas sortir de l'ensemble des fonctions mesurables; donc que toutes les fonctions de Baire font partie de cet ensemble.

γ . Je donne la définition proprement dite; je vais la résumer en suivant, par exemple, la marche de mes *Leçons*.

Je divise l'intervalle de variation de $f(x)$ en intervalles de longueur ε au plus; si (a_i, b_i) est l'un d'eux, je lui attache un ensemble E comme il a été dit dans (α) et soit φ la fonction égale à 1 dans E, à 0 dans le complémentaire e .

La fonction f diffère de moins de ε de la somme $\sum a_i \varphi$; l'intégrale de cette somme sera une valeur approchée de celle de f . A $a_i \varphi$ j'attache comme intégrale $a_i \times$ mesure (E) : la définition est achevée.

Pour définir la mesure de E, j'enferme les points de E et de son complémentaire respectivement dans des intervalles I et i , la somme de leurs parties communes étant ε . Soit j le complémentaire de i . On sait définir la mesure des ensembles d'intervalles I et i , donc de I et j , et, de l'*inégalité topologique*

$$I \text{ contient } E \text{ qui contient } j,$$

on déduit

$$\text{mesure (I)} \geq \text{mesure (E)} \geq \text{mesure (j)},$$

et l'on passe à la limite en faisant tendre ε vers zéro.

Dans ce paragraphe γ , on utilise aussi le théorème de la page précédente, mais c'est dans un cas simple et suggestif.

18. Malgré des différences certaines de forme il n'y a donc aucune différence de fond entre les deux modes d'exposition; on peut noter cependant que, tandis que je fais séparément les passages à la limite relatifs aux deux ε (ε topologique, différence entre E et I; ε quantitatif, différence entre f et $\Sigma a_i \varphi$), M. Borel peut les faire simultanément.

Il y a si peu opposition entre les deux méthodes que, à la suite d'une Note de M. Borel, M. F. Riesz a proposé comme méthode tout à fait analogue à la fois à celle de M. Borel et à la mienne un exposé en quelque sorte intermédiaire (1).

M. Riesz se donne d'ailleurs comme but d'arriver à une exposition élémentaire et il lui semble pour cela indispensable d'éviter ou du moins d'ajourner l'étude approfondie des ensembles mesurables. S'il ne s'agit que d'une question d'ordre de paragraphes, peu m'importe, mais je crois qu'il serait mauvais de se passer de la théorie des ensembles, comme je l'ai dit dans l'Introduction.

19. Je voudrais indiquer comment j'ai été conduit à la définition de l'intégrale. Pour la solution d'un problème qui importe peu (la détermination de l'aire de certaines surfaces applicables sur le plan), j'avais besoin de généraliser la notion d'intégrale. Je connaissais à l'avance un certain nombre de propriétés que devait avoir l'intégrale à définir et je me trouvais à peu près dans les conditions où il m'était possible de considérer l'intégrale comme définie par ses propriétés mêmes, à l'exemple de ce que M. Drach nous a appris à faire en arithmétique et M. Hilbert en géométrie. Seulement, à cette définition *descriptive*, il me fallait associer une définition *constructive* donnant en quelque sorte un procédé de calcul bien défini et prouvant par cela

(1) BOREL, *Comptes rendus*, 12 février 1912; F. RIESZ, *Comptes rendus*, 4 mars 1912. M. Borel, dans son Mémoire, cite encore les noms de MM. Weyl, Egoroff, Lusin comme s'étant occupés de l'exposition de la définition de l'intégrale dans une direction analogue à celle qu'il suit. A ces noms, j'ajouterai celui de M. Fubini qui, dans les *Rendiconti* de Palerme, écrivait en 1907: « Osservero che in generale sarà bene che gli integrali, di cui qui si parla, sieno intesi come integrali di Lebesgue. Ciò si potrebbe evitare, sostituendo in qualche punto il limite di un integrale di Riemann all'integrale del Lebesgue. Ma si porterebbe un'inutile complicazione. »

même la compatibilité des conditions composant la définition descriptive (1).

Pour cela j'ai examiné les définitions classiques de Cauchy et de Riemann. Avec la première, si $f(x)$ est infinie en a , on entoure a d'un intervalle d'exclusion et ainsi l'on groupe ensemble les valeurs de $f(x)$ voisines de l'infini, si l'on peut dire. Cela est d'ailleurs plus net dans une définition de M. de la Vallée Poussin : on prend l'intégrale de $f(x)$, continue en général mais non bornée, dans les intervalles où $f(x)$ reste comprise entre $-M$ et $+N$ et l'on fait tendre vers l'infini les nombres M et N .

Dans la définition de Riemann on a, comme on sait, à rechercher la limite commune de deux sommes $\Sigma hm, \Sigma hM$, dans lesquelles les h sont des longueurs d'intervalles, m et M les bornes de la fonction dans ces intervalles. Or la différence de ces deux sommes étant $\Sigma h(M - m)$, et Σh étant fixe, les deux sommes ne pourront avoir la même limite que si $M - m$ tend en général vers zéro ; c'est-à-dire si la division en intervalles considérée a eu pour effet de grouper ensemble, en général, des valeurs peu différentes de la fonction.

Comme le procédé de Riemann n'a pas été construit spécialement en vue de cette fin, ce sera exceptionnellement et en quelque sorte par hasard qu'il y atteindra. Opérons donc d'une façon plus systématique et pour cela imitons la définition de M. de la Vallée Poussin (2). Mais, comme ce n'est plus la seule valeur ∞ qui est singulière, que toute valeur atteinte peut être singulière, nous sommes conduits à opérer comme il suit :

Partageons l'intervalle de variation de $f(x)$ en intervalles partiels de longueur ε au plus ; si (a, b) est l'un d'eux, groupons dans un ensemble E les valeurs de x telles que l'on ait

$$a \leq f(x) < b,$$

(1) Les termes *descriptive* et *constructive* sont ceux que j'ai utilisés I., p. 99. Aucune confusion avec la méthode constructive de M. Borel n'est possible, puisque M. Borel oppose nos définitions.

(2) La définition de M. de la Vallée Poussin comme les définitions antérieures de Cauchy et Dirichlet est en effet « faite sur mesure » par rapport à la fonction considérée. Ce n'est donc pas dans ce caractère d'être « faite sur mesure » qu'il faut chercher, comme l'a fait M. Borel, l'origine de la puissance des récentes définitions de l'intégrale et de la mesure.

et formons la somme $\Sigma am(E)$, $m(E)$ étant la mesure de E , mesure qui devra posséder les propriétés essentielles des longueurs des intervalles.

20. Un examen rapide me montra que la définition de la mesure proposée par M. Jordan ne conduisait qu'à l'intégrale de Riemann ⁽¹⁾; il fallait adopter une définition déterminant la mesure d'une classe plus étendue d'ensembles. Dans ses *Leçons sur la Théorie des fonctions*, M. Borel construisait une classe d'ensembles qu'il appelle les *ensembles mesurables* ⁽²⁾ en effectuant, à partir des intervalles, les deux opérations suivantes : 1° réunir une infinité dénombrable d'ensembles précédemment définis, c'est-à-dire en faire la somme; 2° prendre la partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles précédemment définis, c'est-à-dire faire le produit de ces ensembles d'après la terminologie de M. de la Vallée Poussin. En s'appuyant sur les propriétés qu'il veut attribuer à la mesure, et en suivant pas à pas la construction des ensembles, M. Borel attache une mesure à chacun d'eux.

M. Borel a déclaré que cette famille d'ensembles est moins générale que celle considérée par M. Jordan ⁽³⁾; aussi ce n'est pas à cette classe d'ensembles que je me suis arrêté; mais j'ai imposé à la mesure les mêmes propriétés que M. Borel, c'est-à-dire que j'ai utilisé la définition *descriptive* qu'il avait adoptée; seulement, je l'ai employée autrement.

La définition descriptive de M. Borel peut se formuler ainsi : la mesure d'un ensemble est un nombre positif ou nul; deux ensembles égaux ont même mesure; la somme d'ensembles, sans point commun deux à deux, a pour mesure la somme des mesures.

Cette définition est aussi celle qui convient pour la mesure de M. Jordan; mais, dans ce dernier cas, il faut entendre par *somme* la réunion d'un nombre fini de composants, tandis que, pour la mesure de M. Borel, la somme peut être constituée par une infinité dénombrable d'ensembles. Les conditions imposées à la mesure par M. Borel

(1) *I.*, p. 36 et suiv.

(2) Ce sont ceux qu'il appelle maintenant *bien définis* et qui sont plus connus sous la dénomination d'*ensembles mesurables* B que je leur ai donnée.

(3) *Voir*, plus loin, page 244. L'idée première de la notion de mesure étudiée par M. Jordan est due à Cantor.

sont donc plus précises, par suite elles peuvent suffire pour déterminer la mesure d'une classe plus étendue d'ensembles.

M. Jordan a recherché tous les ensembles pour lesquels les conditions qu'il a imposées suffisent pour déterminer le nombre mesure; ce sont les ensembles mesurables J.

Je n'ai eu qu'à l'imiter pour trouver tous les ensembles dont la mesure est déterminée par les conditions imposées par M. Borel, en utilisant cependant une variante qu'il importe de signaler.

Un ensemble E étant donné, pour déterminer sa mesure, M. Jordan l'enferme dans un nombre fini d'intervalles; soit δ la somme de leurs longueurs, la borne inférieure de δ est l'étendue extérieure de E, soit e_e . Opérons de même sur le complémentaire C de E, et supposons que ce complémentaire soit pris par rapport à un intervalle d'étendue 1; si e'_e est l'étendue extérieure de C, la différence

$$e_i = 1 - e'_e$$

est appelée l'*étendue intérieure* de E.

Lorsque les deux étendues e_e et e_i sont égales, l'ensemble est mesurable J. En résumé, M. Jordan détermine ces ensembles par leur comparaison avec les sommes d'un nombre fini d'intervalles auxquelles sa définition lui permet d'attacher une mesure.

Comme la définition descriptive de M. Borel nous permet d'attacher une mesure aux sommes d'une infinité d'intervalles, en employant ces sommes dans les opérations précédentes, nous obtenons la famille des ensembles mesurables qui apparaît ainsi comme une extension naturelle et immédiate de la famille des ensembles mesurables J.

21. Mais il fallait démontrer que les ensembles obtenus vérifiaient bien les conditions de la définition, ce qui se ramène à ceci : démontrer qu'une somme d'ensembles de la famille appartient bien à la famille. Un ensemble constituant et son complémentaire peuvent être enfermés dans des intervalles A et α ayant en commun des longueurs aussi petites que l'on veut; il suffit de choisir parmi les différents A et parmi les différents α des intervalles permettant de faire la même chose pour la somme. Ceci est analogue au calcul de valeurs approchées par

excès et par défaut d'une somme connaissant les valeurs approchées par excès et par défaut des différents termes ⁽¹⁾.

Dans son Mémoire récent, M. Borel emploie une méthode qui, à mes yeux, est pour ainsi dire identique à la mienne. Un ensemble E est mesurable si, quel que soit ε , il existe un ensemble d'intervalles \mathcal{A} tel que les points de E n'appartenant pas à \mathcal{A} et ceux de \mathcal{A} n'appartenant pas à E puissent être enfermés dans des intervalles de longueur totale ε au plus. Telle est en somme la propriété qu'il met en œuvre.

Donc, tandis que je me servais d'intervalles pour obtenir des ensembles approchés par excès et par défaut de ceux que j'étudiais, M. Borel se sert d'intervalles pour obtenir des ensembles approchés et une limite supérieure de l'erreur. On voit qu'il n'y a aucune différence fondamentale entre les deux façons d'opérer que cependant M. Borel oppose en écrivant dans son Mémoire :

« J'ai indiqué cette marche dans mes *Leçons sur la Théorie des fonctions*; comme j'avais surtout en vue les applications, je me suis contenté d'affirmer que le théorème fondamental, ou des procédés tout à fait analogues à ceux qu'on a employés pour démontrer ce théorème, permettent de justifier ces définitions en prouvant qu'elles ne sont jamais contradictoires entre elles. Mais j'ai omis toute démonstration, car la rédaction détaillée me paraissait devoir être longue et fastidieuse.

» Cette justification résulte indirectement des travaux de M. Lebesgue, publiés depuis, auxquels je pourrais renvoyer; mais il me semble préférable de développer complètement la théorie en restant au point de vue des définitions constructives; car c'est la forme sous laquelle j'ai été naturellement conduit à ces considérations, à propos de questions qui se sont posées dans mes recherches de théorie des fonctions (notamment dans ma Thèse), et c'est aussi la forme sous laquelle les questions se posent dans les applications. »

(1) *I.*, p. 107. Dans ma Thèse, la rédaction est, je l'ai signalé il y a longtemps, incorrecte, parce que, au paragraphe 4, il faut, dans la phrase « [La série $\Sigma m(\alpha'_i)$ est convergente], [si donc on a choisi les ε_i de façon que la série $\Sigma \varepsilon_i$ soit convergente et ait ε pour somme] ... », intervertir l'ordre des deux phrases mises entre crochets.

22. Examinons donc si la forme *constructive* de la définition, adoptée par M. Borel, prépare mieux les applications. Tout d'abord, je dois déclarer que je ne comprends pas à quelles applications M. Borel fait allusion; je ne vois pas qu'il ait fait aucune application de la mesure.

Dans son Ouvrage sur la Théorie des fonctions, je ne trouve qu'un passage où l'on semble utiliser cette notion; mais, en réalité, on utilise seulement, et incidemment, une dénomination. Et cela est d'autant plus certain, que le passage auquel je fais allusion n'est qu'une rédaction nouvelle d'une étude faite par M. Borel dans sa Thèse, avant qu'il ne se soit occupé de mesure.

Voici ce dont il s'agit: M. Borel étudie l'ensemble C des points de convergence de certaines séries. Pour cela il enferme l'ensemble D des points de divergence dans des intervalles dont il peut rendre la somme des longueurs aussi petite qu'il le veut. Il en conclut, grâce à la propriété que j'ai rappelée au début de l'Introduction, que l'ensemble C existe effectivement.

Dans son Livre, M. Borel opère de même, mais cette fois il peut exposer le raisonnement en disant: D est de mesure nulle, donc D ne contient pas tous les points et C existe.

Encore cette forme de langage exige-t-elle quelques précautions. A la page 67 de son Livre, M. Borel, en déclarant que l'ensemble D est de mesure égale à zéro, ajoute:

« Nous ne sommes d'ailleurs pas assurés que cet ensemble soit mesurable; en employant le langage expliqué page 48, nous devrions dire que sa mesure est *inférieure ou égale à zéro*; mais la mesure n'est jamais négative. »

Ainsi, même en ce qui concerne cette pseudo-application, antérieure en réalité à la notion de mesure, la méthode constructive de M. Borel n'est pas préférable. Elle supposerait en effet que l'on ait mis en évidence la construction de l'ensemble D à l'aide des deux opérations géométriques qui permettent de construire de proche en proche les ensembles mesurables B.

Or, comme l'indique la phrase citée de M. Borel, on ne le fait pas et l'on n'arrive à parler encore de mesure que par extension. Au contraire, avec la forme de définition que j'emploie, qui consiste toujours

à enfermer l'ensemble dans des intervalles, l'application est toute préparée.

D'une façon générale, dans les applications à la théorie des fonctions (sauf celles relatives aux problèmes que pose la classification de M. Baire, problèmes que M. Borel n'a pas envisagés), la nature mesurable B des ensembles rencontrés importe peu et elle n'apparaît pas comme liée à la question. La meilleure preuve en est précisément l'histoire de la notion de mesure. M. Borel part d'une question de la théorie des fonctions et il est conduit à comparer un ensemble E à un ensemble d'intervalles recouvrant E. Il passe de là à la notion de mesure, mais en introduisant la notion d'ensemble mesurable B qui n'a au fond rien à voir dans la question. Sous cette forme, la mesure n'a eu aucune application et s'adapte même mal à la question d'où était parti M. Borel.

A mon tour, je définis la mesure; je reste fidèle à l'idée primitive de comparer les ensembles à des intervalles les recouvrant. J'ai ainsi une notion s'appliquant parfaitement au problème primitif de M. Borel et dont je puis faire de suite de multiples applications à la théorie des fonctions. Dans ces applications, j'ai besoin de savoir que les ensembles que je rencontre sont mesurables à mon sens, je n'ai pas besoin de savoir qu'ils sont mesurables B. Et c'est pourquoi j'ai pu étudier la dérivation des intégrales et les séries trigonométriques, par exemple, *avant* de publier mon Mémoire du *Journal de Mathématiques*, relatif aux ensembles mesurables B, et dans lequel je prouve qu'on pourrait, sans inconvénients pratiques, se limiter, *si on savait le faire*, à la considération des seuls ensembles mesurables B.

Ainsi la méthode constructive ne prépare pas mieux aux applications et n'est pas celle à laquelle le souci de ces applications conduit le plus naturellement. Les applications conduisent à la méthode non constructive qui est d'ailleurs la suite la plus naturelle des considérations auxquelles M. Borel avait été conduit dans sa Thèse par l'étude d'une question précise de théorie des fonctions (1).

(1) On me permettra une remarque d'un caractère personnel. Très souvent celui qui discute est, par cela même qu'il discute, considéré comme ayant tort; or, avant de développer, avec preuves, mes arguments, j'ai à rétorquer, avec preuves, les arguments inverses affirmés sans preuves par M. Borel.

Certes, quand, pour donner des exemples, on définit un ensemble par des propriétés géométriques ou arithmétiques, il arrive souvent qu'on obtienne des ensembles que l'on reconnaît immédiatement être mesurables B. Mais il ne faut pas confondre exemple et exercice avec application.

23. Ceci m'amène à examiner un autre argument de M. Borel : la méthode constructive a l'avantage de ne pas considérer la fonction ou l'ensemble en soi, elle permet de se limiter aux fonctions et ensembles donnés d'une certaine manière. Par suite, cette méthode peut se réclamer de Cauchy; la méthode non constructive a pour parrains Riemann et Weierstrass.

D'habitude, on oppose Cauchy et Riemann à Weierstrass; M. Borel oppose Cauchy et Riemann l'un à l'autre parce que le premier n'a jamais écrit une phrase de définition du mot fonction, tandis que le second en a écrit une. Mais, à moins d'attribuer une vertu magique aux mots, il n'y a pas en cela matière à opposition puisque tous deux, quand il s'agit de démontrer, raisonnent sur les propriétés logiques de la classe des fonctions sur lesquelles ils opèrent. Il est d'ailleurs impossible de faire autrement, si l'on raisonne. Cependant il y a cette différence entre Cauchy et Riemann d'une part, Weierstrass de l'autre, que les premiers raisonnent sur les valeurs de la fonction et le dernier sur une représentation de la fonction. Quand, par exemple, Cauchy définit une fonction de variable complexe, il fait intervenir une propriété des valeurs de la fonction sans se préoccuper de la façon dont la fonction est donnée. C'est seulement lorsqu'il s'agit de reconnaître si une fonction particulière donnée satisfait à la définition générale posée que Cauchy s'occupe du procédé particulier qui a servi à donner la fonction. C'est exactement de la même façon que j'opère. Au contraire, la façon de M. Borel est à rapprocher de celle de Weierstrass avec cette circonstance, en quelque sorte aggravante, qu'un même ensemble, qu'une même fonction peuvent être donnés d'une infinité de manières entièrement différentes. Par suite, à une même fonction, à un même ensemble, donnés de diverses façons, correspondent des procédés différents de définition de l'intégrale ou de la mesure. Cela rend particulièrement sensible l'intérêt qu'il y a à considérer ces procédés comme

servant seulement au calcul et à donner une définition établissant un lien direct entre la fonction et l'intégrale, entre l'ensemble et la mesure, qui ne dépende que de la fonction ou de l'ensemble, non de la façon dont ils sont donnés. C'est en faisant cela que l'on peut légitimement se réclamer du nom de Cauchy.

Je ne veux nullement opposer un exclusivisme à un autre, ils sont tous néfastes; mais je tiens à dire que j'ai, moi aussi et moi surtout, le droit de me réclamer de Cauchy.

En somme, la seule différence véritable entre l'exposition constructive de M. Borel et la mienne, en ce qui concerne l'intégrale, c'est l'absence, dans l'exposition constructive, de tout lien direct entre l'intégrale et la fonction intégrée. La seule considération que l'exposition constructive supprime est loin d'être une considération parasite : c'est la généralisation de la relation entre

$$\int_a^b f(x) dx$$

et

$$\sum f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

dans le cas où $f(x)$ est continue. Avec l'exposition constructive, on peut ignorer cette relation, même dans le cas où $f(x)$ est continue et cela précisément parce qu'on ne considère pas la fonction en soi.

La méthode constructive ne considère pas l'ensemble en soi, ni la fonction en soi; elle étudie uniquement les ensembles ou les fonctions donnés d'une certaine manière. Mais c'est pour en déduire une propriété de ces ensembles ou fonctions; cette propriété obtenue, on raisonne, qu'on l'avoue ou non, sur tous les ensembles ou fonctions la possédant, *que ces ensembles ou fonctions puissent ou non être obtenus par les procédés constructifs primitifs*. Je fais allusion ici à ces propriétés que M. Borel exprime d'une façon pittoresque en disant que tout ensemble mesurable B ne diffère d'intervalles qu'à 2ε près; que toute fonction de Baire ne diffère de fonctions continues qu'à 3ε près. Or les ensembles qui ne diffèrent d'intervalles qu'à 2ε près sont précisément les ensembles mesurables que j'ai considérés; les fonctions qui ne diffèrent de fonctions continues qu'à 3ε près sont les

fonctions mesurables que j'ai considérées. Les deux méthodes s'occupent donc de la même classe de fonctions, elles ont la même généralité quand on les utilise convenablement et M. Borel le signale à multiples reprises. A d'autres moments, il tient à ne conclure que pour les seuls ensembles ou fonctions donnés par les procédés constructifs; la méthode non constructive lui paraît alors plus générale, et, comme cette plus grande généralité ne sert pratiquement à rien, il peut la qualifier d'apparente. Je rappelle que cette plus grande généralité n'entraîne d'ailleurs aucune complication dans les raisonnements, au contraire.

Au reste, supposons qu'au lieu d'avoir donné la définition de l'intégrale, par exemple, pour toutes les fonctions possédant une certaine propriété P, puis d'avoir démontré dans un second paragraphe que toutes les fonctions de Baire possède cette propriété P, j'ai interverti l'ordre de ces deux paragraphes; je n'aurais plus considéré la fonction en soi.

En résumé, il n'y a entre les deux modes d'exposition que des différences très faibles, comme il en subsiste toujours, par exemple, entre deux expositions d'un même raisonnement; mais la méthode constructive ne met pas en évidence de lien direct entre mesure et ensemble mesuré, entre intégrale et fonction intégrée. Par suite, elle cache le véritable intérêt des notions de mesure et d'intégrale, elle prépare moins aux applications. De plus, on verra de suite qu'elle conduirait à parler de l'intégrale sans utiliser la théorie des ensembles, dont je vais m'efforcer de montrer le rôle important dans les recherches récentes sur les fonctions de variables réelles.

Je veux dire auparavant un mot de la notion d'ensemble mesurable B qui joue un rôle capital dans les travaux de M. Borel. En réalité, cette notion est étrangère aux questions de mesure et d'intégration; son véritable rôle est ailleurs, on va le voir bientôt.

Sans doute, à cause de la difficulté de sortir de la classe des ensembles mesurables B, il y aurait intérêt à connaître des méthodes s'appliquant à ces seuls ensembles et seulement aux fonctions de Baire qui correspondent à ces ensembles, pourvu toutefois que ces méthodes ne soient pas trop compliquées. Mais jusqu'ici on ne connaît aucune méthode applicable à ces seuls ensembles et fonctions. M. Borel part bien des définitions de ces seuls ensembles et fonctions, mais par la

suite il raisonne sur des classes plus vastes que celles d'où il était parti.

IV. — Les fonctions de variable réelle.

24. Je vais rechercher les conceptions qui ont joué le rôle essentiel dans les travaux récents sur les fonctions de variable réelle. Je n'entends pas faire un historique complet et reconstituer les pensées des auteurs, je veux seulement mettre en lumière quelques idées, inconscientes, non exprimées à l'origine, qui, peu à peu, se sont dégagées et autour desquelles se groupent les principaux travaux.

A l'origine du mouvement on rencontre le nom de Baire (1); sa Thèse est restée justement célèbre. Elle donnait le plus beau démenti à cette opinion alors si répandue qu'il n'était possible de faire aucun travail sur les fonctions de variable réelle et qu'au reste cela ne servirait à rien (2); et en ce sens elle eut une première influence, en quelque sorte morale.

Il faut noter ensuite l'importance du résultat principal de cette Thèse et surtout l'originalité des moyens mis en œuvre pour y parvenir. Beaucoup de qualités diverses des ensembles avaient été distinguées; l'emploi constant de la théorie des ensembles joint à une analyse minutieuse, à une dissection de la notion de continuité, permit à M. Baire de distinguer beaucoup de qualités des fonctions et de délimiter des classes de fonctions ayant des propriétés communes précises. Je fais allusion ici aux fonctions semi-continues, aux fonctions ponctuellement discontinues, aux fonctions continues quand on néglige les ensembles dénombrables, etc. (3).

(1) Les premières Notes de M. Baire, qui orientent nettement ses recherches, sont antérieures au Livre de M. Borel sur la Théorie des fonctions. La Thèse de M. Baire est postérieure à ce Livre, mais il est évident que M. Baire en a peu subi l'influence.

(2) On citait alors comme un tour de force unique la définition de Darboux pour les intégrales par défaut et par excès; définition que l'on n'utilisait jamais d'ailleurs.

(3) Bien entendu, il ne serait pas difficile de trouver des précurseurs, et cette observation s'appliquera à tout ce qui suit; mais ce que je veux dire, c'est que M. Baire a utilisé ces procédés avec plus de continuité et avec plus de bonheur que nul ne l'avait fait avant lui. Il a ainsi appelé l'attention sur ces procédés qui, avec lui, ont commencé à

Mais l'apport principal de M. Baire est la conception de cet ensemble de fonctions qui contient les polynômes et qui est fermé par rapport aux opérations addition, multiplication, passage à la limite.

C'est l'ensemble des fonctions représentables analytiquement ou fonctions de Baire. Sans qu'on puisse affirmer que cet ensemble de fonctions suffira à tout, il est bien certain qu'il est très vaste et que la plupart des questions d'Analyse ne nous en feront pas sortir. La théorie des fonctions de variable réelle peut donc prendre provisoirement comme but l'étude des fonctions de Baire. Provisoirement, parce que cette classe de fonctions sera peut-être insuffisante et aussi parce qu'elle sera peut-être trop vaste pour que nous réussissions à l'étudier.

25. Si une propriété appartient aux polynômes et se conserve à la limite, le procédé par récurrence transfini qui permet de définir toutes les fonctions de Baire, permet aussi de leur étendre la propriété considérée. Le premier exemple d'une propriété commune à toutes les fonctions de Baire a été donné par M. Baire lui-même : I. Toute fonction de Baire est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait, quand on néglige les ensembles de première catégorie (*Comptes rendus*, 11 décembre 1899).

Vient ensuite la propriété énoncée au n° 16 : II. Toute fonction de Baire est mesurable (*Comptes rendus*, 29 avril 1901). Dans ma Thèse je l'ai remplacée par ce résultat plus précis : III. Toute fonction de Baire est mesurable B. Je laisse de côté cet énoncé sur lequel j'aurai à revenir et je m'occupe des deux premiers, bien que j'aie peu de chose à dire de celui de M. Baire qui n'a pas encore été étudié. Je veux seulement remarquer qu'il existe certainement des fonctions, auxquelles s'applique l'énoncé II sans que l'énoncé I s'applique et que, si on limitait l'énoncé de M. Baire à la seule considération de la discontinuité sur l'intervalle considéré, il y aurait aussi des fonctions

devenir conscients, à constituer par suite un instrument en quelque sorte catalogué auquel on sait qu'on pourra avoir recours dans telle ou telle circonstance.

Au sujet des travaux de M. Baire et de toutes les questions traitées dans ce Chapitre, on consultera avec fruit l'Ouvrage récent de M. de la Vallée Poussin : *Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire*; Paris, Gauthier-Villars, 1916.

satisfaisant à I sans satisfaire à II. En utilisant les ensembles $Z(d, a, b)$ du n° 12, on peut en effet définir dans $(0, 1)$ un ensemble X qui soit à la fois de mesure 1 et de première catégorie; son complémentaire Y sera donc de seconde catégorie et de mesure nulle. Une fonction non mesurable sur X et nulle sur Y serait cependant ponctuellement discontinue sur $(0, 1)$ quand on néglige les ensembles de première catégorie.

Au reste l'énoncé de M. Baire est purement qualitatif, il est peu vraisemblable qu'il soit équivalent au second énoncé qui est purement métrique. Il pourrait au contraire être équivalent au troisième, car, comme je l'ai dit, la qualité d'être mesurable B est une qualité topologique (impliquant la possibilité d'une certaine construction) et non une qualité métrique.

Le second théorème est susceptible de bien des énoncés; il dépend de la forme de définition choisie pour les fonctions mesurables. Celle que j'ai donnée peut, comme on l'a vu au n° 17, être formulée ainsi : $f(x)$ est mesurable si, en tout point, elle diffère de moins de ε de l'une des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, chacune de ces fonctions φ_p n'étant définie que dans un intervalle I_p où elle est constante, et les parties communes à deux I_p ayant une longueur totale inférieure à ε .

Celle de M. Borel, n° 16, consiste à dire : $f(x)$ est mesurable si elle diffère de moins de ε d'une fonction continue $g(x)$ considérée seulement pour les points extérieurs à des intervalles i_p dont la somme des longueurs est aussi petite que l'on veut.

Cette seconde forme conduit de suite à une troisième : $f(x)$ est mesurable si elle est, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, la limite d'une suite de fonctions continues convergeant presque partout.

Bien que la première forme conduise de suite à la seconde, le passage de la première forme au théorème qui constitue la troisième a d'abord été fait par une voie très indirecte, mais donnant un résultat bien plus précis. J'ai prouvé en effet que *toute fonction sommable f est presque partout la dérivée de son intégrale indéfinie F* précisément en montrant que f est, presque partout, la limite de la fonction continue

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \quad (1).$$

(1) *Comptes rendus*, avril 1903, et I., p. 120 et suiv.

Ceci montre bien la différence qu'il y a entre démontrer et découvrir; pour démontrer, le procédé du passage à la limite permet souvent d'arriver tout de suite au but, mais jusqu'ici ce sont les considérations de théorie des ensembles qui ont fait deviner (1).

26. Nous devons rechercher dans les *Leçons sur la Théorie des fonctions* de M. Borel son apport particulier, bien que ces *Leçons* soient surtout un travail d'exposition écrit en vue de la théorie des fonctions de variables complexes. Nous remarquons d'abord l'emploi constant et pour ainsi dire unique de considérations sur les ensembles comme instrument de recherches. Mais il ne s'agit pas d'un emploi de toute la théorie des ensembles, M. Borel ne raisonne jamais au contraire que sur des ensembles dénombrables; ensembles dénombrables de points, d'intervalles, de conditions ou d'opérations. M. Borel écrit à la page 122 de ses *Leçons* : « Nos connaissances précises sur les puissances diverses n'excèdent guère la remarque suivante : il y a des ensembles dénombrables et des ensembles non dénombrables, cette dernière notion étant surtout négative. » Mais, pour lui, la puissance du dénombrable est une notion positive, c'est presque un nombre comme un autre.

Je ferai peut-être mieux saisir ce qu'a de particulier la manière de M. Borel en citant deux faits qui me paraissent l'un une exagération, l'autre un inconvénient de cette manière.

Tandis que M. Borel ne conçoit pas qu'on parle d'une infinité d'éléments sans loi, il l'admet pour les infinités dénombrables et parle de la série de Taylor la plus générale sans loi. [*Lettres sur la théorie des ensembles* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1905).]

(1) La démonstration du théorème, impliqué par la troisième forme d'énoncé, qui est donnée par M. Borel dans son *Mémoire*, est particulièrement simple. Elle repose, comme la démonstration qu'il donne pour la compatibilité des propriétés imposées à la mesure, sur un lemme intéressant qui lui est personnel. M. Borel n'énonce le théorème que pour les fonctions de Baire bornées; sa démonstration s'applique à toutes les fonctions mesurables, bornées ou non.

M. Borel place ce théorème au premier plan pour mettre en évidence, dès le début, les ressemblances entre les fonctions mesurables et les fonctions continues. Cette idée me paraît heureuse, mais il ne faut pas se servir de cette propriété des fonctions mesurables pour diminuer l'emploi de la théorie des ensembles dans l'étude de ces fonctions.

On sait que M. Borel n'a démontré son célèbre théorème fondamental sur les intervalles, que pour le cas où l'ensemble de ceux-ci est dénombrable, laissant ainsi de côté le cas général indispensable cependant aux applications à la théorie des fonctions, cas général que son raisonnement lui donnait de suite, à condition de renoncer à compter les intervalles un à un (1).

Donc M. Borel compte un à un les éléments des sommes qui en contiennent une infinité dénombrable ou un nombre fini. C'est dire qu'il était tout préparé, dès qu'il eut enfermé les points de D (n° 22) dans des intervalles dont la somme des longueurs était inférieure à la longueur totale considérée, à conclure qu'il n'avait pas enfermé toute cette longueur. Ceci est l'application de sa Thèse et, par la façon même dont j'imagine qu'il y fut conduit, il était tout préparé à voir là le premier pas vers une théorie de la mesure des grandeurs, où l'on pourrait diviser celles-ci en une infinité dénombrable de parties et non plus seulement en un nombre fini comme dans la théorie ordinaire.

J'ai fait remarquer plus haut que des considérations topologiques avaient conduit M. Borel à une notion métrique, mais on voit que les raisonnements faits par M. Borel étaient, eux, purement arithmétiques, numériques, si je puis dire. Et c'est parce qu'au cours de ces raisonnements M. Borel y traitait du nombre « infini dénombrable » considéré comme somme d'unités, qu'il est arrivé à parler de la mesure de la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles constituants.

La définition descriptive de la mesure, posée par M. Borel, est sans doute le premier exemple net de l'emploi d'un infini actuel en mathématiques. On peut bien dire, si l'on veut, que la somme d'une série est la somme des termes, mais cela n'est vrai que pour les séries absolument convergentes et les raisonnements que l'on fait pour légitimer alors la considération de l'infini non ordonné des termes permet, en même temps, de ne pas se servir de cette infinité (2).

(1) Voir la note qui termine la Thèse de M. Borel et *I.*, p. 105. C'est à la même préoccupation, compter les éléments un à un, qu'il faut rattacher, je crois, le désir de définir la mesure pour les seuls ensembles mesurables B.

(2) Il n'en est pas moins vrai qu'il y a des rapports étroits entre les nouvelles théories de la mesure et de l'intégrale et la théorie des séries absolument convergentes; c'est

On dit ⁽¹⁾ qu'une fonction $f(e)$, d'éléments e dont on sait définir la somme Σe , est additive, lorsque

$$f(\Sigma e) = \Sigma f(e);$$

jusqu'à M. Borel on n'avait jamais obtenu que des fonctions ayant l'*additivité restreinte* tandis que la mesure possède l'*additivité complète*, c'est-à-dire que l'on peut considérer les sommes Σ formées d'une infinité dénombrable d'éléments.

L'additivité complète est une propriété qui tend à jouer un très grand rôle dans la théorie des fonctions de variable réelle, où on l'a rencontrée sous des formes variées.

La différence entre les définitions descriptives de la mesure posées par M. Jordan et par M. Borel est donc capitale.

Il importe peu que M. Borel ait, comme il l'a fait, ajouté à cette définition son emploi pour le calcul de la mesure des ensembles se déduisant des intervalles par addition et soustraction, c'est-à-dire pour les ensembles mesurables B. Cela allait de soi. Le point important, c'est qu'il ait donné la définition descriptive de la mesure.

Il serait injuste, cependant, de réduire à cela son apport, car ce n'est qu'une application particulière de cette idée directrice : *l'infini dénombrable est presque un nombre entier*. Je suis obligé de me borner à cet énoncé un peu vague, précisément à cause de la variété des utilisations possibles de cette idée.

27. Pour la même raison, je n'essaierai pas de formuler de façon très précise l'idée essentielle autour de laquelle se groupent mes recherches.

Pour avoir une sorte de plan de travail, il nous reste encore à apprendre à quels ensembles, attachés aux fonctions considérées, nous essaierons d'appliquer les procédés de MM. Baire et Borel. Le souci de construire « sur mesure » l'intégrale m'a conduit, comme je l'ai dit,

pourquoi la limitation aux fonctions absolument intégrables, que je me suis parfois imposée, n'est pas artificielle.

(1) LEBESGUE, *Sur l'intégration des fonctions discontinues* (*Annales de l'École Normale*, 1910).

n° 19, à considérer les ensembles $E[a < f(x) < b]$ formés des valeurs de x pour lesquelles la fonction vérifie la relation écrite entre parenthèses. Pour moi, *donner une fonction, ce n'est pas donner la correspondance* $[f(x), x]$, *c'est donner les ensembles* $E[a < f(x) < b]$. Les ensembles $E[a < f(x) < b]$ sont connus, dès que l'on connaît ceux relatifs aux valeurs rationnelles de a et de b ; par suite, les fonctions sont composées par une infinité dénombrable de constituants; nous pourrons utiliser des raisonnements du genre de ceux de M. Borel.

Beaucoup de problèmes se traduisent de suite en problèmes relatifs aux ensembles $E(a < f < b)$; la définition de l'intégrale en a été le premier exemple.

28. Dans l'intégration, un ensemble de mesure nulle est négligeable, comme une valeur de la variable dans l'intégration ordinaire; comme première propriété de l'intégrale, nous trouvons qu'elle admet pour dérivée la fonction intégrée sauf pour un ensemble de points de mesure nulle. C'est là le premier exemple de ces propriétés vraies *presque partout*, de ces développements valables *presque partout* qui se sont présentés en si grand nombre et qui ont permis de comprendre, par exemple, les faits relatifs à la convergence et à la divergence des intégrales singulières.

L'ensemble singulier rencontré est l'équivalent d'une singularité isolée pour une fonction continue.

29. De même qu'un ensemble de mesure nulle est l'équivalent du point dans la théorie ordinaire, un ensemble quelconque est l'équivalent d'un intervalle. L'intégrale indéfinie, dont le principal rôle consiste à fournir l'intégrale dans un intervalle quelconque, deviendra la fonction d'ensemble égale à la valeur de l'intégrale étendue à l'ensemble considéré. C'est la considération de cette fonction d'ensemble qui a permis d'établir une théorie uniforme, quel que soit le nombre des variables, question qui n'était pas traitée, comme on sait, même pour le cas des seules fonctions continues.

Cette fonction d'ensemble, qui se réduit à la mesure quand la fonction intégrée est égale à un, possède comme elle l'additivité complète;

elle est de plus absolument continue ⁽¹⁾. Cette dernière propriété est l'analogie de la continuité uniforme des fonctions de points.

Je n'ai pas l'intention de résumer les résultats obtenus ; ce que je viens de rappeler suffira à faire voir avec quelle simplicité s'est développée la théorie à partir de cette idée que les éléments constituants des fonctions sont des ensembles de valeurs de la variable. En voici une autre conséquence, qui va nous ramener à la considération des ensembles mesurables B.

30. La considération des ensembles $E[a \leq f(x) < b]$ conduit de suite à cette constatation que j'ai donnée dans ma Thèse : toute fonction de Baire est mesurable B. Dans un Mémoire *sur les fonctions représentables analytiquement*, j'ai démontré la réciproque. De plus, j'ai prouvé qu'il y a une correspondance exacte entre la place qu'occupe une fonction $f(x)$ dans la hiérarchie des classes de M. Baire et la complication des procédés donnant, par addition et multiplication effectuées à partir des intervalles, les ensembles mesurables B $E[a < f(x) < b]$ correspondants ⁽²⁾.

C'est dans des problèmes de cette nature, analogues à ceux que pose la classification des irrationnelles algébriques, que les ensembles mesurables B ont un rôle fondamental à jouer ⁽³⁾.

A la fin de cette étude, j'ai défini une fonction non mesurable B et par suite des ensembles non mesurables B. En donnant cette définition

⁽¹⁾ Cette dénomination est due à M. Vitali. En citant un intéressant travail de M. Vitali, dans lequel il montrait l'intérêt de la notion de fonction absolument continue, j'avais cru devoir rectifier un énoncé que je lui attribuais en disant qu'il fallait y remplacer le mot *rettangolo* (rectangle) par le mot *quadrato* (carré). En réalité si, dans toutes les définitions préparatoires, M. Vitali avait employé le mot *rettangolo*, dans l'énoncé final se trouvait bien le mot *quadrato*, ce que j'ai reconnu seulement quand M. Vitali, signalant mon erreur, a écrit ce mot en caractères tellement gros qu'il me devenait impossible de ne pas le voir (VITALI, *R. Acc. d. Sc. di Torino*, 1907-1908. — LEBESGUE, *Annales de l'École Normale*, 1910. — VITALI, *R. della R. Acc. d. Lincei*, 1912).

⁽²⁾ F. R. A.

⁽³⁾ Comme conséquence des résultats de mon Mémoire, M. Alexandroff a prouvé que tout ensemble mesurable B et formé d'une infinité non dénombrable de points contient un ensemble parfait. De sorte que la puissance d'un ensemble mesurable B est, ou finie, ou dénombrable, ou égale à celle du continu. C'est là un résultat d'un intérêt philosophique considérable, que je tenais à citer (*Comptes rendus*, 28 février 1916).

j'ai fait quelques réserves, mais je ne vais pas aussi loin que M. Borel et c'est pourquoi je veux préciser. Supposons que nous disions qu'un nombre x est égal à 0 ou 1 suivant que la constante d'Euler est rationnelle ou non; il est certain que x est ainsi défini logiquement à l'aide d'un nombre fini de prémisses. Cela est *illusoire pour moi*, parce que, moi, je ne sais pas utiliser ces prémisses qui, par suite, ne me font pas connaître, à moi, le nombre défini. Mais la difficulté vient seulement de mon ignorance; elle est tout autre quand, dans le raisonnement de M. Zermelo, on parle d'êtres qui ne sont pas caractérisés par un nombre fini de prémisses, de sorte que, non seulement je ne sais pas, moi, de quels êtres on veut parler, mais personne ne le saura jamais. Comme je ne conçois pas comment on pourrait raisonner à partir d'une infinité de prémisses, je fais à l'occasion de ces raisonnements des réserves formelles. Ici, la difficulté ne vient pas de mon ignorance, elle a un caractère logique.

L'existence d'ensembles non mesurables B me paraît démontrée, mais on ne connaît jusqu'ici aucun ensemble, nommé sans l'emploi du raisonnement de M. Zermelo, qui ne rentre pas dans la classe des ensembles mesurables. Récemment (1), M. Sierpinski a cependant déclaré que l'existence d'ensembles non mesurables lui paraissait tout aussi établie que beaucoup d'autres propositions mathématiques; celle-ci par exemple : L'ensemble des ensembles dénombrables de points a la puissance du continu.

Cette déclaration de M. Sierpinski me conduit à quelques observations. Voici ce que fait M. Sierpinski. Il traduit l'énoncé précédent en disant : à tout ensemble dénombrable de points E on peut faire correspondre un nombre $f(E)$ et, de cette fonction d'ensemble dénombrable, il déduit une fonction ordinaire $\varphi(x)$ qu'il prouve être non mesurable, en imitant ce que j'avais fait ailleurs (2).

Mais, ce que l'on démontre ordinairement, c'est qu'à tout ensemble dénombrable de points E on peut faire correspondre un ensemble dénombrable \mathcal{C} de façon qu'à des E différents correspondent des \mathcal{C} sans nombres communs, et c'est cela seulement qu'on exprime en disant que l'ensemble des E a la puissance du continu; en extrayant de \mathcal{C} un

(1) *Comptes rendus*, 4 juin 1917.

(2) *Bulletin de la Société math. de France*, 1907; *Acc. R. delle Sc. di Torino*, 1907.

nombre déterminé $f(E)$, M. Sierpinski fait précisément le choix d'où viennent les difficultés que soulève le raisonnement de M. Zermelo (1).

31. Un autre résultat fourni par la considération des ensembles

$$E[a < f(x) < b],$$

c'est que toutes les fonctions et tous les ensembles nommés jusqu'ici sont mesurables B. Il ne faut pas confondre ce résultat avec le précédent qui constituait un théorème; le nouvel énoncé n'est que l'aboutissement de toute une série de remarques et, pour cette raison, sa signification doit être précisée.

Pour l'établir il faut : 1° montrer que tous les procédés utilisés pour obtenir des ensembles à partir d'ensembles précédemment définis se ramènent à ceux de M. Borel; en fait, on n'a employé que des procédés peu variés se présentant en général immédiatement sous la forme même considérée par M. Borel; 2° montrer que tous les procédés utilisés pour obtenir une fonction à partir des fonctions antérieurement définies rentrent dans ceux utilisés par M. Baire; cela aussi est immédiat quant aux procédés purement analytiques (2); pour ce qui est des procédés arithmétiques, on peut les ramener à des définitions analytiques et à la troisième opération qu'il me reste à considérer; 3° montrer que tous les procédés utilisés pour définir une fonction à partir d'un ensemble ou un ensemble à partir d'une fonction se ramènent à l'opération qui lie $E[a < f(x) < b]$ à $f(x)$. A partir d'un ensemble E on n'a jamais défini une fonction f qu'en disant : f sera sur E égale à telle fonction connue, en dehors de E elle sera égale à telle autre. Cette opération est facile à examiner.

Les passages de fonctions à ensembles sont autrement variés; ceux qu'on avait utilisés dans la théorie des fonctions consistaient presque tous dans la considération de points qui sont singuliers à un certain titre (ensemble des infinis, des pôles, des points de discontinuité, des

(1) Une observation analogue m'a été faite par M. de la Vallée Poussin. Comparer avec ce que je dis dans le Mémoire du *Journal de Mathématiques*, au bas de la page 215 et aussi au problème de choix traité dans l'article cité du *Bulletin de la Société mathématique*.

(2) C'est d'ailleurs la considération de ces procédés analytiques qui ont conduit M. Baire à la conception de l'ensemble des fonctions de Baire, conception d'où devaient dériver les résultats examinés aux nos 30 et 31.

points de divergence, des points de non intégrabilité, etc.); à tous ceux-là, il faut ajouter l'infinie variété des définitions arithmétiques.

En traitant un certain nombre d'exemples on se *convainc* que tous les procédés rentrent bien dans l'opération indiquée. Le résultat n'a donc que la valeur d'une constatation, d'autant mieux fondée que l'on a examiné plus de cas, mais qui reste indéfiniment révisable, puisqu'à chaque instant on peut imaginer un procédé nouveau (1).

32. C'est pourquoi, les mots « bien définis » ayant déjà un sens précis en Mathématiques, on ne peut accepter la dénomination d'ensembles bien définis à la place de celle d'ensembles mesurables B, qui est adoptée par M. Borel dans son Mémoire récent. Un être est « bien défini » quand il est caractérisé logiquement par un nombre fini de prémisses. Il n'est pas démontré que tous les ensembles non mesurables B sont « insuffisamment définis » et cependant la dénomination adoptée par M. Borel jetterait en quelque sorte la suspicion précisément sur les travaux mêmes qui, en faisant connaître l'étendue des ensembles mesurables B, ont donné à M. Borel les raisons qu'il invoque pour cette dénomination (*voir* p. 244, en note).

Le contraire est même démontré par les exemples de fonctions et d'ensembles mesurables B que j'ai formés; pour adopter sa dénomination, M. Borel modifie le sens habituel des mots bien définis. Un nombre égal à 0 ou à 1, suivant que la constante d'Euler est rationnelle ou non, n'est pas bien défini, avec le sens qu'il adopte.

Il y a plus, M. Lusin et un de ses élèves, M. Souslin, viennent d'annoncer (2) qu'ils avaient réussi à nommer numériquement, par le procédé suivant, un ensemble non mesurable B : ils définissent une série de polynômes $P_n(x)$ convergente; l'ensemble considéré est l'ensemble E_y des valeurs y prises par la somme de la série.

E_y est la projection sur Oy de l'ensemble mesurable B formé des points du plan dont les coordonnées vérifient l'égalité

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x).$$

Ainsi, la projection d'un ensemble mesurable B peut être non mesu-

(1) C'est avec ce sens que je l'ai indiqué dans l'Introduction de *F. R. A.*

(2) *Comptes rendus*, 8 janvier 1917.

nable B; l'opération qui consiste à prendre la projection d'un ensemble ne peut être ramenée à celles considérées par M. Borel.

33. Ce fait est en contradiction avec certaines affirmations de mon Mémoire de 1905 que je vais corriger sur quelques points.

Parmi les opérations analytiques que l'on peut avoir l'idée d'utiliser pour définir de nouvelles fonctions se trouve la résolution des équations, c'est-à-dire le procédé des fonctions implicites. J'ai étudié ce procédé, parce qu'il m'avait servi antérieurement pour étendre des résultats de M. Baire (1).

Soit $f(x, y) = 0$

l'équation à résoudre, qui définit implicitement $y = \varphi(x)$; supposons f mesurable B, il faudrait démontrer que φ l'est aussi. Si a et b sont deux nombres quelconques nous avons à étudier l'ensemble des valeurs de x , $E[a < \varphi(x) < b]$, qui est la projection sur Ox de la partie de l'ensemble $E[f(x, y) = 0]$ pour laquelle y est compris entre a et b ; cette partie est un ensemble mesurable B. Il faudrait donc prouver que tout ensemble mesurable B a une projection mesurable B et, comme un tel ensemble s'obtient par des sommes et des produits d'ensembles précédemment définis, suivre en projection ces opérations. A une somme correspond une somme en projection, mais à un produit ne correspond pas nécessairement un produit. J'ai affirmé à tort le contraire (2); le théorème que j'en déduis (théorème XVIII) : *une fonction définie explicitement à l'aide d'expressions analytiques est exprimable analytiquement d'une manière explicite*, n'est pas démontré.

La projection est un cas particulier des transformations ponctuelles définies par des relations

$$X_1 = F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \dots, \quad X_p = F_p(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

dans lesquelles les F sont des fonctions continues. Les considérations générales sur ces transformations tombent pour la même raison (3).

(1) *Comptes rendus*, 27 mars 1899.

(2) *F. R. A.*, p. 192.

(3) *F. R. A.*, p. 195.

Mais l'énoncé que j'en déduis ⁽¹⁾ peut néanmoins être conservé moyennant cette restriction : à un point X_1, X_2, \dots, X_n correspond seulement un nombre fini de points x_1, x_2, \dots, x_n ⁽²⁾.

Avec cette restriction, à un produit correspond un produit pourvu qu'on s'occupe du produit d'ensembles emboîtés les uns dans les autres, cas auquel on peut toujours se limiter. Les corrections à faire à mon Mémoire se réduisent donc à une restriction à apporter à l'énoncé de la page 197 et à l'abandon du théorème XVIII.

MM. Souslin et Lusin annoncent qu'ils possèdent une démonstration de ce théorème. C'est d'ailleurs en particulier pour l'obtenir que ces auteurs ont créé tout une théorie qui les conduit à une nouvelle classe d'ensembles : les ensembles A. Ces ensembles, qui se conservent en projection, et qui contiennent les ensembles mesurables B, sont toujours mesurables, mais ils ne sont mesurables B qu'exceptionnellement, quand une certaine condition d'unicité est remplie ⁽³⁾.

Des résultats annoncés, le lecteur déduira facilement des opérations géométriques ou fonctionnelles permettant de former des ensembles ou des fonctions non mesurables B à partir d'ensembles ou de fonctions mesurables B :

Projeter un ensemble, joindre ses points deux à deux, lui faire balayer certaines trajectoires et, d'une façon générale, lui faire subir une transformation continue, mais dont l'inverse ne soit pas univoque ; prendre, pour chaque valeur de x , la borne supérieure $\varphi(x)$ de $f(x, y)$ pour y variable, ou l'oscillation, ou faire subir à une fonction $f(x)$ un changement de variable $X = F(x)$, F étant continue.

⁽¹⁾ *F. R. A.*, p. 197.

⁽²⁾ Ce qui entraîne d'ailleurs maintenant $p \geq n$ et exclut par conséquent l'application au cas de la projection. Cette restriction se rencontre dans toutes les applications que je fais, en particulier dans celle de ma note primitive et c'est peut-être parce que j'ai toujours pensé en réalité au cas particulier de cette note que je me suis trompé.

⁽³⁾ Celle-ci est remplie quand il s'agit d'une projection d'un ensemble mesurable B telle que tout point de l'ensemble projection ne soit projection que d'un point de l'ensemble projeté ; d'où le théorème XVIII.

Cette condition est aussi en relation avec la restriction que j'ai dû apporter à l'énoncé de la page 197 et avec les questions de choix soulevées par les travaux de MM. Zermelo et Sierpinski.

Nous avons déjà vu qu'il n'y avait aucun avantage à essayer de limiter les définitions de la mesure et de l'intégrale au seul cas des éléments mesurables B, parce qu'on ne gagnait rien en simplicité et qu'on s'imposait ainsi une restriction logiquement étrangère à la question; la confirmation des résultats de MM. Souslin et Lusin montrerait de plus que cette restriction nous conduirait à laisser de côté des fonctions s'introduisant naturellement en Analyse et bien définies au sens classique usuel de ces mots.

V. — Questions de priorité.

34. Dans ce qui précède, je me suis occupé uniquement de questions pédagogiques et scientifiques; mais, dans son Mémoire de 1912, et dans sa Notice de 1912, M. Borel a soulevé des questions de priorité que je veux élucider.

LA MESURE. — Dans son Livre de 1898, M. Borel traite la question en quelques pages que l'on peut résumer ainsi : si l'on convient que l'ensemble somme d'une infinité dénombrable d'ensembles sans points communs aura pour mesure la somme des mesures des constituants, que l'ensemble obtenu en retranchant un ensemble partiel d'un ensemble qui le contient aura pour mesure la différence des mesures de l'ensemble contenant et de l'ensemble partiel contenu, qu'un intervalle aura pour mesure sa longueur, à chaque ensemble obtenu à partir d'intervalles par les opérations somme et différence on pourra attacher une mesure.

Mais M. Borel ne démontre pas que cette définition n'est pas contradictoire; il se contente de l'affirmer. C'est d'ailleurs ce qu'il rappelait dans une phrase de son Mémoire de 1912 que j'ai déjà eu l'occasion de citer (*voir* p. 224), c'est aussi ce qui ressort de sa Notice de 1912 que je citerai dans un instant. J'ajoute encore que, revenant sur la question dans un Livre publié en 1905, M. Borel renvoie à mes travaux pour la démonstration du fait que la définition de la mesure n'est pas contradictoire (¹).

(¹) *Leçons sur les fonctions de variable réelle et les développements en série de polynômes*, p. 17.

M. Borel ne détermine pas l'étendue de la classe des ensembles qu'il mesure; il ne sait pas, comme je l'ai déjà dit (n° 22), s'il est bien mesurable cet ensemble D qu'il rencontre dans une question de la théorie des fonctions.

Il écrit, à la page 46 de son Livre : « On comparera avec fruit les définitions que nous allons donner avec les définitions plus générales que donne M. Jordan dans son *Cours d'Analyse*. Le problème que nous étudions ici est d'ailleurs tout différent de celui qu'a résolu M. Jordan. »

Enfin M. Borel ne fait prévoir aucune application de la notion de mesure.

J'ai déjà dit qu'une Notice publiée par M. Borel en 1901 fixe nettement l'état des questions avant mes travaux. Cette Notice contient un paragraphe de moins d'une page sur la mesure et encore, dix lignes seulement de ce paragraphe sont-elles seules consacrées à la mesure; le reste traite du théorème de M. Borel sur les ensembles d'intervalles.

On n'y trouve aucune indication relative à une application quelconque de la mesure; le mot *intégrale* n'y figure pas, bien entendu. On y relève cette phrase : « En renonçant ainsi à définir la mesure pour un ensemble quelconque, on constitue une théorie moins générale, c'est-à-dire s'appliquant à des cas moins étendus, mais plus précise dans les cas où elle s'applique. »

35. Dans sa Notice de 1912, M. Borel écrit : « Si l'on observe que tous les ensembles qui ont été considérés par les analystes [et j'ajouterai qui *peuvent* (1) être considérés], rentrent dans la catégorie des ensembles *bien définis*, on voit que le problème de la mesure se trouve

(1) « Je dois ici une explication; pour les mathématiciens qui croient à la possibilité des définitions qui impliquent une infinité de choix arbitraires sans loi (Zermelo), il est possible de définir des ensembles qui ne sont pas, à mon sens, *bien définis*. On peut utiliser pour cela des méthodes analogues à celles qu'a indiquées M. Lebesgue dans son étude si profonde : *Sur les fonctions définissables analytiquement*. ... Mais même pour ces ensembles, à mon sens, *insuffisamment définis*. ... »

J'ai cité cette Note pour avertir le lecteur d'une erreur qu'il pourrait commettre : mon Mémoire cité n'est pas relatif aux ensembles mal définis, c'est au contraire celui dans lequel j'ai étudié systématiquement la classe des ensembles bien définis et montré qu'elle contenait tous les ensembles jusque-là considérés.

entièrement résolu par des méthodes extrêmement simples et intuitives.

« La définition de la mesure des ensembles linéaires bien définis m'est entièrement due ; j'ai indiqué, dès cette première publication, que la propriété fondamentale des ensembles fermés permet de montrer que la définition constructive de la mesure basée sur les opérations (S) et (D) est cohérente avec elle-même et ne peut conduire à aucune contradiction. M. Lebesgue a donné ultérieurement une définition de la mesure, entièrement équivalente à la mienne en ce sens qu'elle s'applique dans les mêmes cas et conduit aux mêmes résultats, mais différente quant à la forme en ce que, au moins en apparence, elle ne suppose pas les ensembles donnés par une définition constructive. De plus, M. Lebesgue a traité le cas des ensembles à plusieurs dimensions. »

L'un des buts de cette phrase est de délimiter étroitement mon apport dans la théorie ; je réponds :

M. Borel mesurait, en effet, tous les ensembles rencontrés par les analystes, mais c'était sans le savoir (n° 34). C'est moi qui le lui ai appris.

M. Borel a affirmé que la définition de la mesure était cohérente. C'est moi qui l'ai démontré.

Enfin, j'ai montré, par des applications, l'intérêt et l'utilité de la nouvelle notion : *d'une remarque plus propre à intéresser le philosophe s'occupant de la mesure des grandeurs que le géomètre, j'ai tiré un bon outil mathématique.*

36. L'INTEGRALE. — Dans la Notice publiée par M. Borel en 1901, je n'ai pu trouver qu'une phrase où il parle d'intégration : « En ce qui concerne les fonctions de variable réelle, on a adopté tour à tour deux partis extrêmes ; d'une part, se contenter de considérer les fonctions analytiques, au sens de Weierstrass ; d'autre part, introduire le moins de restrictions possible dans la définition ; à ce dernier point de vue se rattachent notamment les travaux... de Riemann sur la notion d'intégrale.... Ce dernier point de vue se trouve, dans les applications, être souvent trop large, tandis que le premier est souvent trop étroit, comme j'ai contribué à le montrer. Il y a donc lieu de se demander s'il n'y aurait pas intérêt à adopter un point de vue intermédiaire.... »

Ceci prépare l'indication d'un travail sur des fonctions ayant des dérivées de tous ordres. Cette phrase ne prépare donc en aucune manière l'apparition d'une définition de l'intégrale s'appliquant à une classe de fonctions plus étendue que celle des fonctions intégrables par la méthode de Riemann. *Avant mes recherches, M. Borel n'avait rigoureusement rien publié sur la définition de l'intégrale.*

Dans sa Notice de 1912, M. Borel écrit : « La théorie de la mesure des ensembles équivaut à la théorie de l'intégration des fonctions particulières qui ne prennent que la valeur *zéro* ou la valeur *un*. C'est par cette voie que la théorie de la mesure conduit à étudier celle de l'intégrale définie, sur laquelle M. Lebesgue a fait des travaux bien connus. J'ai dit ailleurs ⁽¹⁾ toute mon admiration pour l'originalité de M. Lebesgue; il a tiré de ses recherches sur l'intégrale des conséquences de la plus haute importance et qui lui sont entièrement personnelles (fonctions dérivées, séries de Fourier, intégrales singulières, etc.); cet ensemble de travaux occupe une place très importante et a eu de très grandes répercussions. Il n'est cependant pas inutile de faire observer que, si la théorie de M. Lebesgue était loin d'être une conséquence évidente de ma théorie de la mesure, du moins entre ces deux théories il n'y a pas de discontinuité logique, tandis qu'il y a un véritable fossé entre ma définition de la mesure et les définitions de la mesure et de l'intégrale qui étaient classiques et universellement admises, avec l'autorité des plus grands noms.

« La différence essentielle consiste en ce qu'on appliquait au calcul de la mesure d'un ensemble ou de l'intégrale d'une fonction une méthode uniforme, indépendante des propriétés de l'ensemble ou de la fonction : c'était à eux de s'arranger de leur mieux dans ce lit de Procuste : c'est la même idée systématique qui est au fond de la théorie des fonctions de Weierstrass. Au contraire, j'ai constaté que nous n'avions jamais affaire en réalité avec l'ensemble en soi, mais seulement avec certains ensembles définis d'une certaine manière, et j'ai cherché dans la définition même de chaque ensemble les éléments de la définition de la mesure de cet ensemble.

⁽¹⁾ *La théorie des ensembles et les progrès récents de théorie des fonctions* (Rev. gén. des Sc., 1909).

« Dans ses travaux sur la mesure et sur l'intégrale définie, M. Lebesgue s'est efforcé d'atteindre la même généralité (apparente) que Riemann; il a eu sans doute raison de procéder ainsi, car ses résultats ont été peut-être mieux compris et plus rapidement acceptés par les analystes habitués à la définition de Riemann; ils ont vu nettement que la nouvelle définition était, à tout point de vue, plus générale que l'ancienne. J'ai repris récemment la théorie de l'intégrale définie, ... » (1).

37. Il est vrai qu'il y a identité entre la mesure d'un ensemble et l'intégration d'une certaine fonction ne prenant que les valeurs *zéro* et *un*. Mais cette identité, c'est moi qui l'ai vue, quand, après m'être posé nettement le problème général de l'intégration, je l'ai analysé. Je suis passé de l'intégration à la mesure en particulierisant la fonction considérée; contrairement à ce que dit M. Borel, ce n'est pas la mesure qui m'a conduit à l'intégration.

J'ajoute que, non seulement je n'ai pas été conduit à l'intégration par cette voie de généralisation, mais qu'il était psychologiquement impossible d'y être conduit par cette voie. Pour passer de la mesure à l'intégration, il aurait fallu tout d'abord avoir l'idée de passer d'énoncés géométriques à leurs traductions dans le langage des fonctions ne prenant que les valeurs 0 et 1 et reconnaître, par exemple, dans cet énoncé: « La mesure attachée à la somme d'une infinité dénombrable de fonctions ne prenant que les valeurs 0 et 1 est la somme des mesures attachées aux fonctions constituantes, lorsque la fonction somme ne prend que les valeurs 0 et 1 », un cas particulier du suivant: « Toute série à termes positifs est intégrable terme à terme. »

On pourrait prétendre, peut-être, que, sans pouvoir formuler d'énoncés précis comme ceux que je cite, on devait sentir l'identité. Mais, à ma connaissance, on ne trouve nulle part une allusion sur ce sujet et cependant des esprits très philosophiques ont longuement scruté la théorie des fonctions de variable réelle. La relation entre la mesure de M. Jordan et l'intégrale de Riemann n'avait même pas été signalée. D'ailleurs, s'il existait quelque part une phrase, qui

(1) J'ai déjà cité cette phrase, n° 21.

m'ait échappé, établissant plus ou moins nettement une relation entre mesure et intégrale, M. Borel ne serait pas fondé à s'en réclamer maintenant et à écrire que la théorie de la mesure conduit à étudier celle de l'intégrale, parce qu'il n'a pas rappelé, au moment où cela aurait pu être utile aux progrès de la science, cette relation à coup sûr peu connue et peu remarquée.

J'ajoute que celui qui aurait pu passer de la mesure à l'intégration des fonctions ne prenant que les valeurs *zéro* et *un*, aurait eu de suite la définition générale, car, pour passer du cas particulier au cas général, il suffit d'un raisonnement très court, classique dès la définition de l'intégration des fonctions continues. Il faut donc réclamer toute la définition de l'intégrale ou rien.

M. Borel parle de la mesure et de l'intégrale comme de notions indissolublement liées. « ... ma définition de la mesure et les définitions de la mesure et de l'intégrale ... »; « ... au calcul de la mesure d'un ensemble ou de l'intégrale d'une fonction ... ». Mais c'est à moi que l'on doit de savoir que ces deux notions sont liées, et c'est pourquoi M. Borel, avant mes recherches, n'avait jamais parlé de la mesure et de l'intégrale comme de notions indissolublement liées.

Si je n'avais pas mis la théorie de la mesure sous la forme la plus propre à l'intégration, on oublierait moins que ces deux notions n'ont pas toujours été liées. Si j'avais publié mes travaux sur la mesure dans un autre Mémoire que ceux sur l'intégration, on se rendrait mieux compte des progrès que les uns et les autres ont fait faire. La relation entre ces deux théories, lien précis ou simple parenté, a été mise en évidence par moi; on n'en peut tirer argument contre moi. Ni dans ses travaux, ni dans sa Notice, M. Borel n'a fait aucune allusion à cette relation. Maintenant que j'ai montré cette relation, mais maintenant seulement, à toute extension de la notion de mesure correspondra, comme corollaire, une extension corrélatrice de la notion d'intégrale.

38. M. Borel déclare que la définition de l'intégrale est en continuité logique avec sa notion de mesure séparée de ce qui est antérieur par un véritable fossé. L'originalité de la définition de la mesure de M. Borel n'est pas en discussion; mais je dois dire, cependant, que

l'étude faite plus haut des rapports logiques entre mesure de M. Jordan et mesure de M. Borel d'une part, entre mesure de M. Borel et intégrale d'autre part, et des efforts qu'il aurait fallu faire pour passer d'une de ces notions à une autre, ne me permet pas d'être d'accord avec M. Borel. Je dois aussi rappeler que ma définition de l'intégrale est une généralisation naturelle des définitions antérieures, comme je l'ai expliqué au Chapitre III. Seulement, elle est faite sur mesure en tout point, tandis que les définitions qui m'ont servi de point de départ n'étaient faites sur mesure qu'au voisinage des points qui s'étaient révélés gênants. Elle est indépendante de la façon dont la fonction est donnée.

Cette définition me paraît n'avoir aucun rapport avec la définition de la mesure de M. Borel, laquelle est basée sur une construction particulière de l'ensemble, construction supposée connue. Cette définition est si peu adaptée à l'ensemble qu'au même ensemble, donné de deux façons différentes, correspondront des procédés différents pour le mesurer.

Enfin, le fait qu'en 1912, dix ans après ma Thèse, M. Borel ait donné pour l'intégrale et la mesure des définitions de formes analogues, ne peut pas non plus m'être opposé. Cette nouvelle forme de la définition de l'intégrale, qui d'ailleurs, n'utilisant plus la théorie des ensembles ni l'identité entre la mesure et l'intégration de certaines fonctions, fait, en quelque sorte, tomber le premier argument de M. Borel, ne pouvait être construite que si l'on possédait un résultat relatif à l'intégration terme à terme des séries, et ce résultat m'est dû.

Bref, on connaît maintenant bien des relations entre les notions de mesure et d'intégrale; mais, avant ma Thèse, M. Borel n'avait jamais parlé d'intégrale, bien que, des deux notions, ce soit la plus importante et que, sans elle, on n'aurait pas encore compris l'intérêt de la mesure. La définition de l'intégrale m'est donc entièrement personnelle.

39. En concluant ainsi, catégoriquement, je ne veux nullement dire que la connaissance des Mémoires de M. Borel ne m'a pas servi. Il serait ridicule, et au reste dépourvu de sens, de prétendre que mes travaux auraient été les mêmes s'il n'avait rien publié.

La définition de l'intégrale, qui d'ailleurs n'occupe que peu de pages de ma Thèse, ne se différencie nullement à cet égard de ceux de mes résultats que M. Borel déclare m'être entièrement personnels; seulement ceux-ci exigeaient des raisonnements mathématiques un peu longs, alors qu'il suffit d'une idée pour relier les notions d'intégrale et de mesure. Mais cette idée est mienne, elle est même ma contribution principale à toute la théorie.

C'est pourquoi, dans le Chapitre précédent, je me suis efforcé de mettre nettement en évidence quel a été son rôle; j'espère avoir montré en même temps tout l'intérêt des travaux de M. Borel.

Je crois, je l'ai dit, que M. Borel se trompe en cherchant dans le fait d'avoir adopté parfois une forme constructive d'exposition la caractéristique de sa contribution et qu'il en diminue ainsi singulièrement l'importance; en m'efforçant de dégager et de formuler le fait mathématique nouveau que nous lui devons, je crois lui avoir rendu plus pleinement justice qu'on ne l'avait encore fait.

Il me reste à souhaiter que cette analyse d'idées qui ont été fécondes serve à les faire mieux connaître et plus utiliser.