

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE GEVREY

Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles. Premier mémoire

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 35 (1918), p. 129-190

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1918_3_35__129_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA
NATURE ANALYTIQUE DES SOLUTIONS
DES
ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

(PREMIER MÉMOIRE),

PAR M. MAURICE GEVREY.

SOMMAIRE (1).

- I. *Sur la classe des fonctions indéfiniment dérivables.* — 1. Définition des fonctions de classe donnée. — 2. Propriétés des fonctions de classe ≥ 1 .
- II. *Sur la nature des solutions des équations du second ordre du type elliptique.* — 3. Étude des dérivées des solutions du problème de Dirichlet : (a) fonctions harmoniques; (b) fonction de Green; (c) solutions de l'équation linéaire sous la forme réduite; (d) solutions de l'équation linéaire générale. — 4. Nature des solutions de l'équation linéaire. — 5. Équations non linéaires.
- III. *Équations du second ordre du type parabolique.* — 6. Étude des dérivées des solutions du problème de la chaleur et de ses généralisations : (a) dérivées des solutions de l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$; (b) fonction de Green; (c) solutions de l'équation linéaire sous la forme réduite; (d) solutions de l'équation linéaire générale. — 7. Nature des solutions des équations : (a) par rapport à x ; (b) par rapport à y .
- IV. *Problèmes de Cauchy et problèmes de prolongement.* — 8. Équations du type elliptique. — 9. Équations du type parabolique.

(1) Le présent Mémoire, qui devait paraître fin 1914 et dont la guerre a interrompu la rédaction, est le développement d'une Note insérée aux *Comptes rendus* (8 décembre 1913). Le n° 8 reproduit une leçon faite au Collège de France en 1914.

Il résulte des travaux de Cauchy que les fonctions harmoniques, solutions de l'équation $\Delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, sont analytiques en (x, y) , c'est-à-dire développables en séries entières en $(x - x_0)$, $(y - y_0)$ autour de tout point (x_0, y_0) de leur domaine d'existence. Cette propriété appartient aussi aux solutions de l'équation $\Delta z = f(x, y)$, quand f est analytique en (x, y) ; mais ce n'est qu'en 1890 que M. Picard en a donné une belle généralisation, en l'étendant aux solutions de l'équation linéaire du type elliptique à coefficients analytiques. Dès lors, la voie était ouverte, et les travaux de MM. Holmgren, Bernstein, Lévi, etc. sur les types elliptique et parabolique, ainsi que nos propres recherches, sont venus compléter les résultats précédents.

Or, quand il s'agit de fonctions analytiques, on peut soit utiliser des développements en série (MM. Picard, Bernstein), soit se placer dans le domaine complexe à trois ou quatre dimensions (M. Lévi). Mais on peut aussi, sans utiliser les variables complexes, démontrer l'analyticité d'une fonction en étudiant l'allure de ses dérivées successives dans son domaine réel d'existence; envisagées à ce point de vue, les fonctions analytiques d'une variable, dont la dérivée $n^{\text{ième}}$ croît comme $\frac{n!}{R^n}$, apparaissent comme des cas particuliers de celles dont la dérivée $n^{\text{ième}}$ croît comme $\frac{n!^\alpha}{R^n}$ ($\alpha \geq 1$), et que nous appelons *fonctions de classe α* (définition qui s'étend à plusieurs variables, n° 1). De telles fonctions s'introduisent naturellement dans l'étude des équations aux dérivées partielles : ainsi, les solutions de l'équation de la chaleur $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$ étant analytiques en x , la dérivée $\frac{\partial^n z}{\partial y^n}$, qui est égale à $\frac{\partial^{2n} z}{\partial x^{2n}}$, croît comme $\frac{(2n)!}{R^{2n}}$, et z est donc de classe 2 en y (Holmgren). Or, si z est donnée sur un contour rectangulaire de côtés parallèles aux axes, et si d est la plus courte distance d'un point intérieur aux côtés verticaux, $\frac{\partial z}{\partial x}$ devient infinie sur ceux-ci comme $\frac{1}{d}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ comme $\frac{1}{d^2}$. Je me suis demandé s'il n'existait pas un lien entre l'ordre d'infinitude correspondant à chaque variable et la classe de z par rapport à celle-ci, et

c'est ainsi que, par l'étude des dérivées au voisinage de la frontière (nos 3 et 6), et par la méthode des contours successifs, j'ai pu généraliser les résultats obtenus jusqu'alors (nos 4, 5 et 7), et voici comment :

Dans ce qui suit, nous appellerons *solutions régulières* d'une équation celles qui sont continues ainsi que leurs dérivées premières et celles des dérivées secondes qui figurent dans l'équation; de plus, α et β seront deux nombres positifs, et γ le plus petit des deux : on aura α et $\beta \geq 1$ pour le type elliptique (\mathcal{E}) , (\mathcal{E}_1) , (\mathcal{E}_2) , $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 2$ pour le type parabolique (\mathcal{P}) , (\mathcal{P}_1) , (\mathcal{P}_2) . Soient alors les équations

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}) \quad r + t &= ap + bq + cz + f, & (\mathcal{P}) \quad r - q &= ap + cz + f, \\ (\mathcal{E}_1) \quad r + t &= F(x, y, z, p, q), & (\mathcal{P}_1) \quad r - q &= f(x, y, z, p), \\ (\mathcal{E}_2) \quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) &= 0, & (\mathcal{P}_2) \quad f(x, y, z, p, q, r) &= 0, \end{aligned}$$

sur lesquelles nous faisons les hypothèses suivantes :

1° Dans une région \mathfrak{R} du plan, les coefficients des équations (\mathcal{E}) ou (\mathcal{P}) sont, par rapport à l'ensemble (x, y) , ou de classe α en x et continus en y , ou de classe β en y et continus en x , ou de classe α en x et β en y ;

2° Dans un domaine \mathfrak{D} de variation de leurs arguments, F ou f sont, par rapport à l'ensemble de ceux-ci, ou de classe α en x et continues en y , ou de classe β en y et continues en x , ou de classe α en x et β en y , mais dans tous les cas de classe γ en (z, p, q, r, s, t) .

Dans ces conditions, toute solution régulière de ces équations, envisagée dans \mathfrak{R} ou appartenant à \mathfrak{D} , sera de même nature que les coefficients, que f ou que F , par rapport à x et y .

Pour (\mathcal{E}_2) et (\mathcal{P}_2) on suppose de plus que, quand on remplace z par la solution envisagée, les dérivées $F'_r, F'_s, F'_t, f'_q, f'_r$ deviennent des fonctions de x, y admettant des dérivées premières et satisfaisant aux conditions $4F'_r F'_t - F'^2_s > 0, f'_q f'_r \neq 0$.

L'avantage de la méthode employée est de s'appliquer à un nombre quelconque de variables ou à un degré quelconque d'équation (voir, à ce sujet, une Note des Comptes rendus, t. 158, dont le développement fera l'objet d'un second Mémoire). Enfin, elle prête à des développements intéressants concernant le problème de Cauchy et le problème du prolongement (Chap. IV).

I. — Sur la classe des fonctions indéfiniment dérivables.

1. DÉFINITION DES FONCTIONS DE CLASSE DONNÉE. — Nous dirons qu'une fonction de variable réelle $\varphi(x)$, indéfiniment dérivable dans un intervalle (a, b) , est de classe α dans cet intervalle ⁽¹⁾ si, pour toutes les valeurs de x appartenant à (a, b) , les dérivées de φ admettent la limitation

$$(1) \quad \left| \frac{d^n \varphi}{dx^n} \right| < M \frac{\Gamma(\alpha n)}{R^n},$$

M et R étant deux nombres positifs indépendants de x , Γ la fonction eulérienne bien connue. La forme de cette limitation suppose α positif, mais les propriétés asymptotiques de la fonction Γ , traduites par la formule

$$(2) \quad \Gamma(p+1) = \sqrt{2\pi} p^{p+\frac{1}{2}} e^{-p} \left(1 + \frac{\theta}{\sqrt{2\pi p}} \right) \quad (|\theta| < 1),$$

permettent de remplacer l'inégalité (1) par l'une ou l'autre des suivantes :

$$(3) \quad \left| \frac{d^n \varphi}{dx^n} \right| < M \frac{(n!)^\alpha}{R'^n}, \quad \left| \frac{d^n \varphi}{dx^n} \right| < M \frac{n^{\alpha n}}{R''^n},$$

dans lesquelles on peut supposer α quelconque.

Il résulte de la définition même que toute fonction de classe donnée pourra être considérée comme appartenant à une classe supérieure ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Le mot *classe* a déjà été utilisé par M. Goursat dans le cas particulier où $\alpha = 2$, pour caractériser les fonctions envisagées par M. Holmgren (voir l'Introduction). Cette expression fait évidemment double emploi avec celle qu'a introduite M. Baire dans la classification des fonctions discontinues; mais précisément, comme cette classification est relative aux fonctions *discontinues* (à part celles de classe *zéro*, qui sont toutes les fonctions continues), la confusion paraît impossible, puisqu'il s'agit actuellement de fonctions *indéfiniment dérivables*.

⁽²⁾ La nécessité de la définition adoptée résultera nettement de ce qui suivra; mais on pourrait évidemment, dans d'autres questions, se proposer une définition plus précise et, par exemple, après avoir pris pour chaque valeur de x la plus grande limite de la

Pour $\alpha = 1$, nous obtenons la limitation classique qui caractérise les fonctions analytiques : *une fonction de classe 1 dans un intervalle (a, b) est donc analytique dans cet intervalle*, c'est-à-dire développable en série entière en $x - x_0$ dans le voisinage de toute valeur x_0 appartenant à (a, b) , le rayon de convergence étant R . Quant aux fonctions de classe $\alpha < 1$, ce sont évidemment des *fonctions entières* ; leur ordre est au plus égal à $\frac{1}{1-\alpha}$: d'une façon plus précise, si l'une ou l'autre des inégalités (3) est vérifiée, même pour une seule valeur de x , $\varphi(x)$ est une fonction entière satisfaisant à l'inégalité

$$|\varphi(x)| < e^{K|x|^{1-\alpha}},$$

K étant un nombre positif. La réciproque est d'ailleurs vraie ⁽¹⁾.

La définition que nous avons donnée s'étend immédiatement au cas de p variables x_1, x_2, \dots, x_p : si la fonction $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_p)$, indéfiniment dérivable dans un domaine \mathcal{D} , est telle qu'on ait en tout point

suite $\frac{\log |\varphi^{(n)}(x)|}{n \log n}$, envisager la borne supérieure L de l'ensemble des nombres ainsi trouvés (lequel peut d'ailleurs se réduire au seul nombre L). L satisfait alors aux conditions suivantes, ε et ε' étant deux nombres positifs arbitraires :

1° On a, pour toutes les valeurs de n à partir d'un certain rang,

$$|\varphi^{(n)}(x)| < n^{n(L+\varepsilon)};$$

2° On peut choisir x tel que

$$|\varphi^{(n)}(x)| > n^{n(L-\varepsilon')}$$

pour une infinité de valeurs de n . Il résulte de là que l'on a $\alpha \geq L$, car la seconde condition nous empêche de supposer $\alpha < L$ si les inégalités (3) sont vérifiées. La nature des questions que nous allons envisager ne nous permettrait pas, en général, d'utiliser des conditions telles que 2°.

⁽¹⁾ Voir LE ROY, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1900, p. 262-263, et, pour la réciproque, BOREL, *Fonctions entières*, p. 62. Si l'ordre est le nombre $\frac{1}{1-\alpha}$ lui-même, la fonction entière est donc du *type moyen* de M. Pringsheim. C'est ainsi que les solutions *analytiques* de l'équation de la chaleur $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}$ sont des fonctions entières de x d'ordre ≤ 2 , et du *type moyen* quand leur ordre est 2.

de \mathcal{D}

$$\left| \frac{\partial^{n_1+n_2+\dots+n_p} \Phi}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \dots \partial x_p^{n_p}} \right| < M \frac{n_1!^{\alpha_1} n_2!^{\alpha_2} \dots n_p!^{\alpha_p}}{R_1^{n_1} R_2^{n_2} \dots R_p^{n_p}},$$

nous dirons que Φ est, dans le domaine \mathcal{D} et par rapport à l'ensemble des variables x_1, x_2, \dots, x_p , de classe α_1 en x_1, α_2 en x_2, \dots, α_p en x_p . Si d'ailleurs α est le plus grand des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$, nous pouvons dire également que Φ est de classe α en (x_1, x_2, \dots, x_p) .

Il est clair que, si certains des nombres α sont ≤ 1 , la fonction Φ est analytique par rapport aux variables correspondantes, et elle est même entière si la classe est inférieure à un. Ici notre objet n'est pas d'envisager les fonctions entières, qui d'ailleurs ont été déjà longuement étudiées : dans ce qui va suivre nous ne considérerons que des fonctions de classe au moins égale à un.

2. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DE CLASSE ≥ 1 . — Les fonctions de classe 1 étant analytiques, il convient de se demander si certains de leurs caractères ne s'appliquent pas également aux fonctions de classe supérieure. Une des principales propriétés des fonctions analytiques est en quelque sorte de constituer un groupe : une fonction analytique de fonctions analytiques est elle-même analytique. Nous allons montrer que cet énoncé est un cas particulier d'un théorème général relatif aux fonctions de classe ≥ 1 .

1° Plaçons-nous d'abord dans le cas de fonctions d'une seule variable : soit une fonction $\varphi(u)$, de classe α dans l'intervalle (u_0, u_1) , et remplaçons u par une fonction $u(x)$ qui, dans un intervalle (x_0, x_1) , varie de u_0 à u_1 et est également de classe α en x . Nous allons établir que $\varphi[u(x)]$ est elle-même de classe α en x dans l'intervalle (x_0, x_1) .

Envisageons en effet la formule qui donne la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction de fonction : c'est une somme de termes de la forme

$$(4) \quad \frac{d^n \varphi}{dx^n} = \Sigma A_j \varphi^{(j)}(u) [u']^{\lambda_1} [u'']^{\lambda_2} \dots [u^{(h)}]^{\lambda_h},$$

$A_j, \lambda_1, \dots, \lambda_h$ étant d'ailleurs des entiers positifs (1). Remplaçons

(1) D'une façon plus précise, le signe Σ est étendu à toutes les solutions en nombres

dans cette formule u et φ par les fonctions suivantes :

$$\bar{u}(x) = \frac{m}{1 - \frac{x}{r}}, \quad \bar{\varphi}(\bar{u}) = \frac{\mu}{1 - \frac{\bar{u} - m}{\rho}};$$

puis faisons $x = 0$ et $\bar{u} = \bar{u}(0) = m$. Nous obtenons alors, dans le premier membre de (4), la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\bar{\varphi}[\bar{u}(x)]$ pour $x = 0$, laquelle a pour valeur $M \frac{n!}{R^n}$, en posant

$$(5) \quad M = \frac{\mu \cdot m}{\rho + m}, \quad R = \frac{\rho r}{\rho + m}.$$

Quant au second membre de (4), il faut y remplacer les dérivées de u et de φ par

$$\bar{u}^{(h)} = m \frac{h!}{r^h}, \quad \bar{\varphi}^{(p)} = \mu \frac{p!}{\rho^p}.$$

Nous trouvons ainsi une *somme de termes positifs* ΣL_q , et nous avons

$$\Sigma L_q = M \frac{n!}{R^n}.$$

Revenons maintenant au cas où, dans la formule (4), les fonctions u et φ sont de classe $\alpha \geq 1$, comme il a été dit au début. Ceci se traduira par des inégalités qu'on peut mettre sous la forme

$$(6) \quad |u^{(h)}| < \left(m \frac{h!}{r^h}\right)^\alpha, \quad |\varphi^{(p)}| < \left(\mu \frac{p!}{\rho^p}\right)^\alpha.$$

En remplaçant dans la formule (4) les dérivées par leurs limitations et A_q par A_q^α , qui est au moins égal à A_q puisque $\alpha \geq 1$, nous avons une limitation de $\frac{d^n \varphi}{dx^n}$ dans tout l'intervalle (x_0, x_1) . Or l'expression

entiers positifs des équations

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + h\lambda_h = n, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_h = p.$$

obtenue n'est autre que ΣL_q^α . Mais on a (1)

$$\Sigma L_q^\alpha \leq (\Sigma L_q)^\alpha = \left(M \frac{n!}{R^n} \right)^\alpha.$$

Donc $\left| \frac{d^n \varphi}{dx^n} \right|$ est moindre que $\left(M \frac{n!}{R^n} \right)^\alpha$ dans l'intervalle (x_0, x_1) , et $\varphi[u(x)]$ est bien de classe α dans cet intervalle.

Remarquons ici que les inégalités (6) peuvent se mettre sous la forme (3) en posant

$$m^\alpha = m_1, \quad r^\alpha = r_1, \quad |u^{(h)}| \leq m_1 \frac{h!^\alpha}{r_1^h}, \quad \dots$$

On obtient ainsi

$$\left| \frac{d^n \varphi}{dx^n} \right| < M_1 \frac{n!^\alpha}{R_1^n}$$

avec $R^\alpha = R_1$; on a d'ailleurs $R < r$, d'après (5), et par suite $R_1 < r_1$.

Une démonstration tout à fait analogue s'appliquerait au cas où, dans une fonction $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_q)$, on remplace u_1, u_2, \dots, u_q par des fonctions de x de classe α dans un intervalle donné : si elles y prennent des valeurs constituant un champ de variation où Φ est de classe α par rapport à l'ensemble de ses arguments, on obtient ainsi une fonction composée de classe α en x dans l'intervalle donné.

2° Supposons maintenant que, dans la fonction $\varphi(u)$ du paragraphe précédent, on remplace u par une fonction de plusieurs variables, deux par exemple, x et y , $u(x, y)$ étant, par rapport à (x, y) et dans une région \mathfrak{A} du plan, de classe α en x et β en y , avec $\beta \geq \alpha$. Quand (x, y) varie dans \mathfrak{A} , on suppose que u varie dans (u_0, u_1) et qu'on a

$$(7) \quad \left| \frac{\partial^{h+k} u}{\partial x^h \partial y^k} \right| < m \frac{h!^\alpha k!^\beta}{r_1^h r_2^k}.$$

Lorsque $\alpha = \beta$, on voit immédiatement que $\varphi[u(x, y)]$ est de classe α en (x, y) : il suffit de reproduire la démonstration donnée

(1) Si, en effet, α est > 1 , L_q^α peut s'écrire $L_q L_q^{\alpha-1} < L_q (\Sigma L_q)^{\alpha-1}$. En additionnant, on trouve immédiatement

$$\Sigma L_q^\alpha < (\Sigma L_q)^\alpha.$$

plus haut, en prenant cette fois, comme fonction auxiliaire \bar{u} ,

$$\bar{u}(x, y) = \frac{m}{\left(1 - \frac{x}{r_1}\right) \left(1 - \frac{y}{r_2}\right)}.$$

Pour étudier le cas $\alpha < \beta$, remarquons que la dérivée $\frac{\partial^{n+p}\varphi}{\partial x^n \partial y^p}$ se met sous la forme d'une somme de termes contenant chacun un produit de dérivées $\left(\frac{\partial u^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k}\right)'$ tel que, pour chaque terme, $\Sigma lh = n$ et $\Sigma lk = p$. Soit ΣN_q la somme des termes N_q obtenus en remplaçant les dérivées de φ et de u par leurs limitations dans le cas où $\alpha = \beta$; soit également N'_q le terme correspondant à N_q dans le cas où $\alpha < \beta$. On constate alors immédiatement que

$$N'_q = N_q \cdot \Pi[k!^{(\beta-\alpha)}],$$

Π désignant un produit de factorielles. Mais, pour chaque terme N'_q , on a

$$\Pi[k!'] < (\Sigma lk)! = p!$$

Donc

$$N'_q < N_q p!^{\beta-\alpha}, \quad \Sigma N'_q < p!^{\beta-\alpha} \Sigma N_q.$$

Or ΣN_q , qui est la limitation obtenue dans le cas où $\alpha = \beta$, est une expression de la forme $M \frac{(n! p!)^\alpha}{R_1^n R_2^p}$. Donc, quand $\alpha < \beta$, on peut écrire

$$\left| \frac{\partial^{n+p}\varphi}{\partial x^n \partial y^p} \right| < \Sigma N'_q < M \frac{n!^\alpha p!^\beta}{R_1^n R_2^p},$$

ce qui montre que φ est, par rapport à (x, y) , de classe α en x et β en y (1).

L'extension au cas d'un nombre quelconque de fonctions u et de

(1) On aurait pu prendre, au lieu de \bar{u} , la fonction auxiliaire $\frac{m}{1 - \frac{x}{r_1} - \frac{y}{r_2}}$. On aurait ainsi obtenu une limitation de la forme $M \frac{(n+p)!^\alpha p!^{\beta-\alpha}}{R_1^n R_2^p}$.

variables indépendantes est immédiate, et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Dans une fonction $\Phi(u_1, u_2, \dots, u_q)$ remplaçons u_1, u_2, \dots, u_q par des fonctions de x_1, x_2, \dots, x_p qui, dans un domaine \mathbb{D} et par rapport à l'ensemble (x_1, x_2, \dots, x_p) , sont de classe α_1 en x_1, α_2 en x_2, \dots, α_p en x_p et prennent des valeurs constituant un champ de variation où Φ est de classe γ par rapport à (u_1, u_2, \dots, u_q) : si les α sont ≥ 1 et $\geq \gamma$, la fonction composée Φ est de même nature que les fonctions u dans \mathbb{D} .

Il est clair qu'on peut aussi désigner par γ le plus petit des α .

Remarques. — I. L'hypothèse $\alpha \geq 1$ est, dans ce qui précède, tout à fait essentielle : elle intervient dans l'inégalité $\Sigma L_p^\alpha \leq (\Sigma L_p)^\alpha$. Il est d'ailleurs facile de donner des exemples de la fausseté de notre résultat pour $\alpha < 1$. Soit, par exemple, $\varphi(u) = e^{u^2}$ et $u = e^{x^2}$: ces deux fonctions entières sont d'ordre 2, donc de classe $\frac{1}{2}$, et cependant la fonction $\varphi[u(x)] = e^{e^{2x^2}}$ est de classe $> \frac{1}{2}$ puisque son ordre est infini.

II. La valeur des nombres R qui figurent dans les limitations des dérivées de la fonction composée aura, dans ce qui suivra, une grande importance. Nous avons vu plus haut (1^o) que l'on a $R < r$ ou $R_1 < r_1$. Peut-on avoir $R = r$? Supposons pour cela les fonctions \bar{u} et $\bar{\varphi}$ choisies de la façon suivante (λ et ν étant compris entre 0 et 1) :

$$(8) \quad \bar{u}(x) = m \left[2 - \left(1 - \frac{x}{r} \right)^\lambda \right], \quad \bar{\varphi}(\bar{u}) = \mu \left[2 - \left(1 - \frac{\bar{u} - m}{\rho} \right)^\nu \right].$$

On constate immédiatement que la fonction $\bar{\varphi}[\bar{u}(x)]$, holomorphe autour de $x = 0$, admet un rayon de convergence moindre que r si $\rho < m$, et égal à r si $\rho \geq m$. Si $\rho = m$, la fonction devient

$$\mu \left[2 - \left(1 - \frac{x}{r} \right)^{\lambda\nu} \right]$$

et nous avons

$$\bar{u}^{(h)}(0) = \frac{\rho\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{\Gamma(h-\lambda)}{r^h}, \quad \bar{\varphi}^{(p)}(\rho) = \frac{\mu\nu}{\Gamma(1-\nu)} \frac{\Gamma(p-\nu)}{\rho^p},$$

$$\left[\frac{d^n \bar{\varphi}}{dx^n} \right]_{x=0} = \frac{\mu\lambda\nu}{\Gamma(1-\lambda\nu)} \frac{\Gamma(n-\lambda\nu)}{r^n}$$

[avec $\bar{u}(0) = \rho$, $\bar{\varphi}(\rho) = \mu$]. Ici donc $R = r$, et l'on passerait immédiatement au cas des fonctions de classe α par le même raisonnement que plus haut (1°). Remarquons cependant que l'argument de la fonction Γ dans la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\bar{u}(x)$ est moindre que dans la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $\bar{\varphi}[\bar{u}(x)]$. Or il nous sera utile dans la suite d'avoir *le même argument*; traitons cette question dans le cas de q fonctions de x , par exemple, u_1, \dots, u_q . Pour cela posons

$$\bar{\Phi} = M \left[2\nu \frac{\bar{u}_1 - \rho}{\rho} + \left(1 - \frac{\bar{u}_1 - \rho}{\rho} \right)^\nu \right] \dots \left[2\nu \frac{\bar{u}_q - \rho}{\rho} + \left(1 - \frac{\bar{u}_q - \rho}{\rho} \right)^\nu \right],$$

en supposant $0 < \lambda < 1 < \nu < 2$ (1). $\bar{\Phi}$ est développable en série entière à coefficients positifs suivant les puissances de

$$\frac{u_1 - \rho}{\rho}, \quad \dots, \quad \frac{u_q - \rho}{\rho},$$

et l'on a, pour $u_1 = u_2 = \dots = u_q = \rho$,

$$\frac{\partial^{p_1 + \dots + p_q} \bar{\Phi}}{\partial \bar{u}_1^{p_1} \dots \partial \bar{u}_q^{p_q}} = M \left| \frac{\nu(\nu-1) \dots (\nu-p_1-1)}{\rho^{p_1}} \dots \frac{\nu(\nu-1) \dots (\nu-p_q-1)}{\rho^{p_q}} \right|.$$

Remplaçons, dans $\bar{\Phi}$, $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_q$, par la fonction $\bar{u}(x)$ de la formule (8), avec $m = \rho$. Nous obtenons ainsi une fonction de x

$$\bar{\Phi} = M \left[2\nu - 2\nu \left(1 - \frac{x}{r} \right)^\lambda + \left(1 - \frac{x}{r} \right)^{\lambda\nu} \right]^q,$$

(1) Ceci, pour fixer les idées : avec un choix convenable de \bar{u} et de $\bar{\Phi}$, on peut supposer λ quelconque, *non entier* toutefois (pour éviter des fonctions logarithmiques).

dont le développement en série de Mac Laurin a tous ses coefficients positifs. Or il est facile de vérifier que, si l'on a $\lambda' > \lambda$, $\left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\lambda'}$ admet comme majorante $2 - \left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\lambda}$, à un facteur près qui dépend de λ et λ' . Appliquant cette remarque au développement de la fonction $\bar{\Phi}$, on constate qu'elle a pour majorante

$$xM \left[2 - \left(1 - \frac{x}{r}\right)^{\lambda} \right] = \frac{xM}{\rho} \bar{u},$$

x étant un coefficient numérique fonction de λ, ν, q . Les dérivées de $\bar{\Phi}$ par rapport à x sont donc, à un facteur près, limitées par celles de \bar{u} , et notre objet se trouve réalisé. Si, en effet, nous envisageons une fonction $\Phi(u_1, \dots, u_q)$, de classe α en (u_1, \dots, u_q) , les u étant elles-mêmes des fonctions de classe α en x , il résulte du raisonnement utilisé au 2° que les inégalités (1)

$$(9) \quad \left| \frac{d^h u_i}{dx^h} \right| < x_0 \rho \frac{|\Gamma(h - \lambda)|^\alpha}{r^h}, \quad \left| \frac{\partial^{p_1 + \dots + p_q} \Phi}{\partial u_1^{p_1} \dots \partial u_q^{p_q}} \right| < M \frac{|\Gamma(p_1 - \nu) \dots \Gamma(p_q - \nu)|^\alpha}{\rho^{p_1 + \dots + p_q}}$$

entraînent, pour $h \leq n, p_1 + \dots + p_q \leq n$,

$$(9') \quad \left| \frac{d^n \Phi}{dx^n} \right| < x_1 M \frac{|\Gamma(n - \lambda)|^\alpha}{r^n},$$

x_0 et x_1 étant des coefficients qui dépendent respectivement de λ et de λ, ν, q , et dont la valeur nous importera peu. Ces formules s'étendent aisément au cas où u_i dépend de plusieurs variables x_1, \dots, x_p : il suffit de remplacer, dans $\bar{u}(x)$, $\frac{x}{r}$ par $\frac{x_1}{r_1} + \dots + \frac{x_p}{r_p}$, et l'on écrit ainsi, en supposant que α_i soit le plus petit des α (cf. note p. 137)

$$(10) \quad \left| \frac{\partial^{h_1 + \dots + h_p} u_i}{\partial x_1^{h_1} \dots \partial x_p^{h_p}} \right| < x'_0 \rho \frac{|\Gamma(h_1 + \dots + h_p - \lambda)|^{\alpha_1} |\Gamma(h_2 - \lambda)|^{\alpha_2 - \alpha_1} \dots |\Gamma(h_p - \lambda)|^{\alpha_p - \alpha_1}}{r_1^{h_1} r_2^{h_2} \dots r_p^{h_p}}$$

En supposant $\alpha = \alpha_1$, les dérivées de Φ admettent alors les mêmes

(1) L'argument des fonctions Γ peut être négatif, d'après les formules d'extension analytique de Γ .

limitations que les dérivées correspondantes de u_i , sauf le changement de $x'_0\rho$ en x'_1M . On peut même supposer que Φ dépende aussi de x_1, \dots, x_p , ceci se traduisant par ce fait que, si nous dérivons la deuxième égalité (9) h_i fois en x_1, \dots, h_p fois en x_p , nous aurons à multiplier le second membre par la fraction qui figure dans (10). Ici encore on obtiendra les mêmes limitations pour les dérivées de la fonction composée, avec un coefficient x'_1 dépendant de λ, ν, p, q .

Appliquons ceci au cas d'une fonction *implicite* $u(x_1, \dots, x_p)$ définie par $F(x_1, \dots, x_p, u) = 0$, F étant, par rapport à (x_1, \dots, u) , de classe α_1 en x_1, \dots, α_p en x_p et γ en u (γ étant le plus petit des α) : u sera alors de même classe que F en (x_1, \dots, x_p) . Indiquons seulement la démonstration pour $p = 1$ ($\alpha_1 = \gamma = \alpha$). La fonction

$$\Phi(x, u) = u'_x = -\frac{F'_u}{F'_x}$$

est de même classe que F et satisfait par suite au genre d'inégalités envisagées plus haut. Supposons alors que u vérifie (9) pour $h \leq n$; dérivant n fois $u'_x = \Phi$, on obtient pour $u^{(n+1)}$ le même type de limitation que pour $u^{(n)}$, sauf le changement de $x_0\rho$ en x_1M . Si donc on choisit $r < \frac{x_0\rho}{x_1M} (n - \lambda)^\alpha$ quel que soit n , (9) a lieu pour $h = n + 1$.

III. Le cas d'un produit de fonctions de classe donnée rentre dans ce qui précède. Soit, par exemple, $|u_i^{(m)}(x)| < m_i \frac{|\Gamma(n + \lambda_i)|^\alpha}{r^n}$ ($i = 1, \dots, q$), λ_i étant ou positif, ou négatif non entier : en utilisant des fonctions auxiliaires de la forme (8) ou analogues si $\lambda_i = -\lambda$, ou de la forme $m \left(1 - \frac{x}{r}\right)^{-\lambda}$ si $\lambda_i = +\lambda$, le lecteur trouvera ainsi

$$\left| \frac{d^n(u_1 \dots u_q)}{dx^n} \right| < x m_1 \dots m_q \frac{|\Gamma(n + \nu)|^\alpha}{r^n},$$

ν étant égal à la somme des λ_i positifs, ou au plus grand des λ_i si tous sont négatifs (ceci se voit de proche en proche).

Ajoutons une remarque utile : si $q = 2$, les fonctions auxi-

liaires \bar{u}_1 et \bar{u}_2 vérifient l'inégalité $(\bar{u}_1 \bar{u}_2)^{(n)} - \bar{u}_1^{(n)} \bar{u}_2 < n(\bar{u}_1 \bar{u}_2)^{(n-1)}$. Si donc $\lambda_1 = -\lambda$, $\lambda_2 = -\lambda - 1$, on a

$$(11) \quad |(u_1 u_2)^{(n)} - u_1^{(n)} u_2| < z m_1 m_2 \frac{n |\Gamma(n - \lambda - 1)|^\alpha}{r^n} \quad (1).$$

II. — Sur la nature des solutions des équations du second ordre du type elliptique.

Nous nous proposons d'étudier la classe des solutions des équations du second ordre tout d'abord dans le cas de deux variables et nous allons, dans ce Chapitre, nous occuper du type elliptique. Mais il nous faut pour cela revenir un peu sur le problème de Dirichlet.

3. ÉTUDE DES DÉRIVÉES DES SOLUTIONS DU PROBLÈME DE DIRICHLET. — Commençons par envisager l'équation de Laplace.

a. Dérivées des fonctions harmoniques. — Si les valeurs prises par une fonction harmonique $U(x, y)$ sur un contour fermé constituent simplement une fonction continue, il est clair que les dérivées de U cesseront d'exister quand le point (x, y) viendra sur le contour. Proposons-nous de préciser *l'allure de $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}$ au voisinage du contour.*

Si le contour est un cercle C de centre O et de rayon R , la formule de Poisson nous donne, en désignant par A un point intérieur à C , par N un point de C ,

$$U(A) = \frac{1}{2\pi R} \int_C \frac{R^2 - \overline{OA}^2}{NA^2} U(N) ds.$$

Si le point A vient en O et qu'on prenne la dérivée de U suivant une

(1) Dans toutes les formules que nous venons d'écrire, on peut faire entrer l'exposant z dans l'argument des fonctions Γ et écrire, par exemple dans (9) et (9'), $\Gamma \left[\alpha(h - \lambda) + \frac{\alpha - 1}{2} \right]$ au lieu de $|\Gamma(h - \lambda)|^\alpha$: ceci résulte de (2). Les coefficients z ont alors d'autres valeurs.

direction quelconque Ox , on obtient immédiatement

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} U(N) \cos \theta \, d\theta \quad (\theta = x \widehat{ON});$$

d'où, μ étant le maximum de $|U|$ sur C ,

$$\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|_0 < \frac{\mu}{\pi R} \int_0^{2\pi} |\cos \theta| \, d\theta, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|_0 < \frac{4}{\pi} \frac{\mu}{R}.$$

Soit maintenant \odot un contour fermé quelconque, P un point intérieur, d la plus courte distance de P aux points du contour; le cercle de centre P et de rayon d est intérieur au domaine limité par \odot et, si μ est le module maximum de U sur ce cercle, M est au plus égal au maximum M de $|U|$ sur \odot : on a donc au point P

$$(12) \quad \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial U}{\partial y}\right| < \frac{4}{\pi} \frac{M}{d}.$$

On peut d'ailleurs appliquer cette méthode à la limitation d'une dérivée d'ordre quelconque de U . Reprenons en effet notre cercle C et soient (x_0, y_0) , (ξ, η) les coordonnées des points A et N : un calcul élémentaire nous donne

$$W = \frac{R^2 - \overline{OA}^2}{\overline{NA}^2} = \frac{\xi + i\eta}{\xi - x_0 + i(\eta - y_0)} + \frac{\xi - i\eta}{\xi - x_0 - i(\eta - y_0)} - 1.$$

$$\frac{\partial^{n+p} W}{\partial x_0^n \partial y_0^p} = (n+p)! \left\{ \frac{(\xi + i\eta) i^p}{[\xi - x_0 + i(\eta - y_0)]^{n+p+1}} + \frac{(\xi - i\eta) (-i)^p}{[\xi - x_0 - i(\eta - y_0)]^{n+p+1}} \right\}.$$

Si A vient en O ($x_0 = y_0 = 0$), en posant $\xi = R \cos \theta$, $\eta = R \sin \theta$, il vient

$$\left(\frac{\partial^{n+p} W}{\partial x^n \partial y^p}\right)_0 = 2 \cos \left[(n+p)\theta - \frac{p\pi}{2} \right] \frac{(n+p)!}{R^{n+p}},$$

$$\left(\frac{\partial^{n+p} U}{\partial x^n \partial y^p}\right)_0 = \frac{(n+p)!}{\pi R^{n+p}} \int_0^{2\pi} U(\theta) \cos \left[(n+p)\theta - \frac{p\pi}{2} \right] d\theta,$$

d'où l'on déduit immédiatement qu'on a, au point P envisagé plus haut,

$$\left| \frac{\partial^{n+p} U}{\partial x^n \partial y^p} \right| < \frac{4}{\pi} M \frac{(n+p)!}{d^{n+p}}.$$

On voit donc que *les dérivées d'ordre $n+p$ deviennent en général infinies sur le contour comme $\frac{1}{d^{n+p}}$* . Il est à remarquer d'ailleurs que la théorie des fonctions d'une variable complexe nous permettrait de prévoir ce résultat, puisque le rayon de convergence de $f(z)$, ayant pour partie réelle U, est égal à d au point P; mais ceci ne nous donnerait pas la forme précise de limitation que nous avons obtenue (1).

b. Dérivées de la fonction de Green. — Plaçons-nous dans le cas du cercle : P(x, y) et Π étant deux points intérieurs à C ou sur C, Π' le conjugué de Π , la fonction de Green relative à ces deux points est

$$G(\Pi, P) = \zeta \frac{P\Pi'}{P\Pi} \frac{O\Pi}{R}.$$

Si l'on pose $(P\Pi, O\alpha) = \varphi$, $(P\Pi', O\alpha) = \varphi'$, on a immédiatement

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\cos \varphi}{P\Pi} - \frac{\cos \varphi'}{P\Pi'} = \frac{(P\Pi' - P\Pi)(\cos \varphi + \cos \varphi') - P\Pi' \cos \varphi' + P\Pi \cos \varphi}{P\Pi \cdot P\Pi'}.$$

On a d'ailleurs $P\Pi \leq P\Pi'$ et, d'autre part,

$$|P\Pi' - P\Pi| \leq P\Pi', \quad P\Pi' \cos \varphi' - P\Pi \cos \varphi = P\Pi' \cos(O\Pi, O\alpha).$$

Des deux formes sous lesquelles nous avons mis $\frac{\partial G}{\partial x}$ nous déduisons

(1) Nous pouvons même aller plus loin et montrer que le produit $d^{n+p} \frac{\partial^{n+p} U}{\partial x^n \partial y^p}$ tend vers zéro quand le point P(x, y) tend vers un point P_1 de \mathcal{C} , en supposant U continue sur \mathcal{C} . Soit en effet U_1 la valeur de U en P_1 et posons $U = U_1 + u$. On pourra déterminer un nombre ρ tel que, pour $P_1P < \rho$ (P étant intérieur à \mathcal{C}), on ait, sur le cercle de centre P et de rayon d , $|u| < \varepsilon$ et par suite, en P, les dérivées de u et U étant identiques, $\left| d^{n+p} \frac{\partial^{n+p} U}{\partial x^n \partial y^p} \right| < \frac{4(n+p)!}{\pi} \varepsilon$, ce qui démontre le fait annoncé. Il importe de remarquer que ceci suppose uniquement \mathcal{C} continu et simple.

donc les limitations (1)

$$(13) \quad \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| \leq \frac{2}{P\Pi}, \quad \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| < \frac{3\Pi\Pi'}{P\Pi \cdot P\Pi'}$$

Nous aurons besoin dans la suite d'une limitation de $\frac{d}{\delta} \frac{\partial G}{\partial x}$, d et δ étant les plus courtes distances de P et Π à C. Utilisons pour cela la première formule (13) pour $\delta > \frac{R}{2}$ et la seconde pour $\delta \leq \frac{R}{2}$, en remarquant qu'on a alors $\Pi\Pi' \leq 3\delta$ et $d \leq P\Pi'$. Nous trouvons ainsi que $\frac{d}{\delta} \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right|$ est inférieur à $\frac{4}{P\Pi}$ pour $\delta > \frac{R}{2}$ et à $\frac{9}{P\Pi}$ pour $\delta \leq \frac{R}{2}$. En définitive on peut écrire, quels que soient P et Π dans C ou sur C,

$$(14) \quad \frac{d}{\delta} \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| \quad \text{et} \quad \frac{d}{\delta} \left| \frac{\partial G}{\partial y} \right| < \frac{\lambda}{P\Pi},$$

λ étant un coefficient numérique indépendant de C.

c. *Étude des dérivées dans le cas de l'équation linéaire sous la forme réduite.* — La solution z , en général unique, de l'équation réduite au type canonique

$$(15) \quad \mathfrak{F}(z) \equiv \Delta z + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0,$$

prenant sur un cercle C des valeurs données, satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(15) \quad z_P = z(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{(C)} \left(a \frac{\partial z}{\partial \xi} + b \frac{\partial z}{\partial \eta} + cz \right)_{\Pi} G(\Pi, P) d\xi d\eta + \zeta(x, y),$$

ξ, η désignant les coordonnées de Π et ζ étant la solution de $\Delta\zeta + f = 0$ prenant sur C les valeurs données. Il est à remarquer que cette équation ne suppose nullement l'existence des dérivées premières de z sur C : il suffit, pour s'en convaincre, d'écrire l'équation pour un

(1) Il serait facile de voir que, dans la seconde inégalité, le coefficient 3 est trop élevé, mais ce point n'a pas d'importance.

cercle C' intérieur à C et de faire tendre C' vers C , en remarquant que la fonction de Green varie alors d'une façon continue. Donc, par cela même que z est solution régulière de (\mathcal{E}) , l'intégrale double de (15) a un sens.

On voit de même qu'on peut dériver la formule (15) par rapport à x et y en tout point P intérieur à C , ce qui nous donnerait, avec (15), un système de trois équations intégrales en z , $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$. Mais, si la valeur donnée de z sur C est simplement une fonction continue, les dérivées de z cesseront d'exister sur C . Guidés par l'étude des fonctions harmoniques, nous poserons

$$(16) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z_1}{d}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z_2}{d}.$$

L'équation (15) devient alors

$$(17) \quad z(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{(C)} (a z_1 + b z_2 + c \partial z)_{\Pi} \frac{G(\Pi, P)}{\delta} d\xi d\eta + \zeta(x, y).$$

En dérivant par rapport à x et y , nous obtenons ensuite

$$(17') \quad \begin{cases} z_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{(C)} (a z_1 + b z_2 + c \partial z)_{\Pi} \frac{d}{\delta} \frac{\partial G}{\partial x} d\xi d\eta + d \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ z_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{(C)} (a z_1 + b z_2 + c \partial z)_{\Pi} \frac{d}{\delta} \frac{\partial G}{\partial y} d\xi d\eta + d \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \end{cases}$$

Notre objet immédiat étant l'étude de z_1 et z_2 , nous pouvons les considérer comme données par ces deux équations, la solution z étant supposée connue *a priori*. D'après la formule (14), les équations (17') peuvent s'écrire (avec $i = 1, 2$)

$$z_i(P) = \int \int_{(C)} \frac{K_{i,1}(\Pi, P) z_1(\Pi) + K_{i,2}(\Pi, P) z_2(\Pi)}{P\Pi} dS_{\Pi} + \Phi_i(P);$$

les fonctions K sont bornées dans C et sur C , et d'ailleurs continues, sauf quand P et Π tendent vers un même point de C . Ces deux équations

tions de Fredholm constituent donc un système classique, les pôles des noyaux étant d'ordre un , et nous avons par conséquent

$$(18) \quad |z_i| < \mu \Phi \quad (\Phi > |\Phi_i|),$$

μ étant un coefficient qui dépend de a, b, R et auquel on peut donner une valeur fixe pour $R < R_0$ (1). D'ailleurs, dans le cas où R est assez petit, on peut résoudre les équations (17') par approximations successives, et d'après (14) on obtient ainsi

$$(19) \quad \mu = \frac{1}{1 - \lambda R(A + B)} \quad (A > |a|, B > |b|).$$

Évaluons maintenant Φ : pour $i = 1$, par exemple, nous avons

$$\Phi_1 = \frac{d}{2\pi} \int \int_{\sigma} (cz + f) \frac{\partial G}{\partial x} d\xi dn + d \frac{\partial \zeta_0}{\partial x},$$

ζ_0 étant la fonction harmonique prenant sur le cercle les valeurs données. Or la première inégalité (13) nous montre que $\int \int \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| dS$ est au plus égal à $4\pi R$; nous obtenons donc, d'après (12),

$$|\Phi_1| < 2Rd(CM + F) + \frac{4}{\pi} M = \Phi, \quad (C > |c|, F > |f|),$$

M étant au moins égal au maximum de $|z|$ à l'intérieur du cercle et sur le cercle lui-même. Remplaçant dans (18) Φ par la valeur ainsi trouvée et tenant compte de (16), il vient

$$(20) \quad \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| < \frac{4\mu}{\pi} \frac{M}{d} + 2\mu R(CM + F).$$

Nous pouvons étendre cette formule au cas d'un contour continu fermé σ , si P est un point intérieur dont la plus courte distance d à σ

(1) Nous supposons ici que le système (17') admet une solution, ce qui a lieu quand on envisage la solution z comme donnée *a priori*.

est moindre que R_0 . Appliquons en effet l'inégalité (20) au point P et au cercle γ de centre P et de rayon d ($R = d$) : il vient

$$(21) \quad \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| < \frac{4\mu}{\pi} \frac{M}{d} + 2\mu d(\text{CM} + \text{F}) \leq \frac{\text{LM}}{d} + \text{L}_1 \text{Fd},$$

L et L_1 étant des coefficients qui dépendent de a, b, c et qui restent fixes pour une équation donnée et pour $d < R_0$, dans toute région où a, b, c sont des fonctions continues. M est le maximum de $|z|$ dans et sur γ , ou *a fortiori* dans et sur ε .

Remarques. — Les équations (17) et (17') constituent un système de trois équations intégrales en z, z_1, z_2 , qu'il est aisé de ramener à une seule équation.

Multiplions en effet ces trois équations respectivement par $c_P d, a_P, b_P$ et ajoutons : en posant $z = az_1 + bz_2 + cdz$, il vient

$$(22) \quad z_P = \frac{1}{2\pi} \iint_{(C)} \left(a_P \frac{\partial G}{\partial x} + b_P \frac{\partial G}{\partial y} + c_P G \right) \frac{d}{\delta} z_{\Pi} d\xi d\eta \\ + d \left(a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz \right)_P.$$

z est donc solution d'une *équation de Fredholm* (1); une fois celle-ci

(1) Le noyau de cette équation ne présente pas de difficultés : il contient $\frac{d}{\delta} \frac{\partial G}{\partial x}$, déjà étudié, et $\frac{G}{\delta}$ qui est $< \frac{4}{r}$. En effet,

$$G = \mathcal{L} \left[1 + \frac{d\delta}{r^2 R^2} (2R - d)(2R - \delta) \right] \leq \mathcal{L} \left(1 + \frac{4d\delta}{r^2} \right);$$

or, $d \leq r + \delta$, d'où

$$G \leq \mathcal{L} \left(1 + \frac{4\delta}{r} + \frac{4\delta^2}{r^2} \right),$$

c'est-à-dire

$$G \leq \mathcal{L} \left(1 + \frac{2\delta}{r} \right)^2 < \frac{4\delta}{r}.$$

La résolution de l'équation est donc possible, sauf dans le cas particulier où le déterminant de Fredholm est nul.

résolue, z sera donné par la formule (17). La solution de l'équation (c) prenant sur C une succession continue quelconque de valeurs données s'obtient ainsi *avec le minimum d'hypothèses sur les coefficients, a, b, c, f* : nous verrions en effet que, pour pouvoir revenir de l'équation (22) à l'équation (c), il suffit que ces coefficients satisfassent aux conditions imposées à la densité d'un potentiel logarithmique qui vérifie la relation de Poisson (1). Remarquons enfin que, par la résolution des

(1) Donnons ici quelques brèves indications sur cette question (cf. DINI, *Acta*, 1902; PETRINI, *Journ. de Math.*, 1909). L'intégrale

$$V_P = \frac{1}{2\pi} \iint_{(C)} \frac{\mathcal{L}}{r} f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

[voir formule (25)], où l'on suppose f intégrable et $|f| < F$, n'admet pas en général de dérivées secondes : tout ce que l'on peut montrer, c'est que, pour un accroissement h de x ou de y , l'accroissement des dérivées premières est moindre en valeur absolue que $(K)Fh|\mathcal{L}h|$ [en désignant d'une manière générique par (K) tout coefficient numérique fini]. Pour que les dérivées secondes existent en P et vérifient la relation de Poisson $(\Delta V + f)_P = 0$, il ne suffit pas que f soit continue; mais on peut se contenter d'une condition de continuité pour f , en étendant la signification du symbole ΔV . La formule (25) montre en effet que la relation de Poisson sera vérifiée s'il existe une intégrale particulière de $\Delta z + f = 0$, ce qui aura lieu, par exemple, si f ne dépend que de ξ ou de η ou est constante. Soit alors

$$f_1 = f(\xi, \eta) - f(x, \eta), \quad f_2 = f(\xi, \eta) - f(\xi, y), \quad f_3 = f(\xi, \eta) - f(x, y),$$

et supposons, comme condition de continuité, que l'une de ces quantités f_i ($i = 1, 2, 3$) tende zéro quand le point (ξ, η) tend vers (x, y) ; il nous suffira d'étudier l'intégrale V_i obtenue en remplaçant f par f_i dans V, car V pourra se mettre sous la forme $V_i + V'_i$, avec $(\Delta V'_i + f)_P = 0$. Cela posé, formons l'expression

$$\Delta_{h,k} V_i = \frac{1}{h} \left[\frac{\partial V_i(x+h, y)}{\partial x} - \frac{\partial V_i(x, y)}{\partial x} \right] + \frac{1}{k} \left[\frac{\partial V_i(x, y+k)}{\partial y} - \frac{\partial V_i(x, y)}{\partial y} \right],$$

et soient $C_l, C_{l'}$ deux cercles de centre P et de rayons l et l' , l étant le plus grand des nombres $2h$ et $2k$, et $l' > l$. On peut alors décomposer $\Delta_{h,k}$ en trois parties $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, qui seront trois intégrales étendues respectivement à l'aire de C_l , à l'anneau compris entre C_l et $C_{l'}$, à celui compris entre C_l et C. Si F_i est le maximum de $|f_i|$ dans C_l , on a $|\Delta_1| < (K)F_i$; Δ_2 et Δ_3 se calculent par la formule de Taylor limitée aux deux pre-

équations (22) et (17'), nous pourrions obtenir pour z , z_1 , z_2 des limitations qui, pour une équation donnée et pour $R < R_0$, ne dépendront

miers termes, et l'on démontre ainsi sans difficulté, en utilisant $\Delta \mathcal{L}r = 0$, les inégalités

$$|\Delta_2| < (K)F_l \quad \text{et} \quad |\Delta_3| < (K)F \frac{l}{r}.$$

Par suite, lorsque h et k sont des infiniment petits de même ordre et que l' est un infiniment petit d'ordre inférieur à celui de l , $\Delta_{h,k} V_l$ tend vers zéro (car F_l tend vers zéro). Si donc on envisage le symbole $\Delta' = \lim_{h=0, k=0} \Delta_{h,k}$ (symbole qui se confond avec Δ quand celui-ci existe), on a

$$\Delta' V = \Delta' V_l + \Delta V_l = -f(x, y).$$

Δ' peut donc exister sans que les dérivées secondes de V soient finies. D'ailleurs le procédé de calcul employé (sauf l'emploi du second cercle C_l , qui est alors inutile) donne des conditions suffisantes pour l'existence des dérivées secondes : à l'aide des coordonnées

polaires on montre, en effet, que ces dérivées existent en P si l'une des intégrales $\int_P^\Pi \frac{f_i}{r} dr$,

prise le long du vecteur $P\Pi$, est uniformément convergente quel que soit Π (ce qui aura lieu, par exemple, si l'on a $|f_1| < K|x - \xi|^\alpha$, ou $|f_2| < K|y - \eta|^\alpha$, ou $|f_3| < Kr^\alpha$, avec $0 < \alpha \leq 1$). Si cette condition est vérifiée en chaque point par les coefficients de l'équation (C), la résolution de l'équation (22) donne la solution du problème de Dirichlet; si la condition est vérifiée en tous les points d'un ensemble *partout dense* dans C , les dérivées secondes peuvent devenir infinies aux autres points, mais leurs parties infinies se détruisent dans Δ , parce que, en ces points, Δ tend vers une limite qui est précisément Δ' (en supposant les coefficients continus en x et y). Si enfin les coefficients ne sont astreints qu'à être continus en x , ou en y , ou en (x, y) , la résolution du problème de Dirichlet sera possible à la condition de remplacer Δ par Δ' .

Rappelons d'ailleurs que, lorsque les dérivées $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\frac{\partial b}{\partial y}$ existent dans C et sur C , la solution z est fournie par l'équation de M. Picard (*Annales de l'École Normale*, 1906),

$$z_P = \frac{-1}{2\pi} \int_{(C)} \left(\frac{\partial a_{\Pi} G}{\partial \xi} + \frac{\partial b_{\Pi} G}{\partial \eta} - c_{\Pi} G \right) z_{\Pi} d\xi d\eta + z_P.$$

En partant de cette équation, on pourrait alors, par une itération suivie d'une dérivation, démontrer la formule (21), mais le coefficient L ainsi obtenu dépendrait de $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\frac{\partial b}{\partial y}$, ce qui nous obligerait à des restrictions dans les énoncés que nous avons en vue.

que du maximum \mathfrak{M} de $|z|$ sur C . On démontre ainsi que $\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right|$ et $\left| \frac{\partial z}{\partial y} \right|$ sont moindres que $\frac{\xi \mathfrak{M}}{d} + \xi_1 F$ [cf. formule (21)] (1).

Les remarques que nous venons de faire sont applicables au cas où C est un contour fermé pouvant se transformer en un cercle par représentation conforme.

d. Cas de l'équation linéaire sous sa forme générale. — Soit l'équation

$$(20) \quad a \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0,$$

dont les coefficients sont fonctions de x et y , dans une région \mathfrak{R} où $ac - b^2$ est positif. Le changement de variables qui permet de réduire cette équation au type canonique (c) est classique (voir GOURSAT, *Analyse*, t. III, p. 82-84) : en posant $h^2 = ac - b^2$, nous prendrons comme nouvelles variables ξ, η deux fonctions satisfaisant aux équations

$$(23) \quad a \frac{\partial \xi}{\partial x} + b \frac{\partial \xi}{\partial y} + h \frac{\partial \eta}{\partial y} = a \frac{\partial \eta}{\partial x} + b \frac{\partial \eta}{\partial y} - h \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0.$$

Nous ferons ainsi correspondre à une région \mathfrak{R} entourant le point $P_0(x_0, y_0)$ une région entourant le point (ξ_0, η_0) et, si a, b, c admettent des dérivées premières, ξ et η admettront également des dérivées premières, qu'on peut supposer non toutes nulles au voisi-

(1) Comme dans le cas des fonctions harmoniques, on peut montrer que les produits $d \frac{\partial z}{\partial x}$ et $d \frac{\partial z}{\partial y}$ tendent vers zéro avec d . Envisageons en effet la première équation (17'), et partageons l'aire d'intégration en deux parties par un cercle C' voisin de C : on constate sans effort que l'intégrale étendue à l'aire de C' tend vers zéro avec d et que le reste peut être rendu aussi petit qu'on le veut en prenant C' suffisamment voisin de C . On en déduit que l'intégrale double tend vers zéro ; il en est de même de $d \frac{\partial \xi}{\partial x}$ et par suite de z_1 . La conclusion est valable pour tout contour continu fermé sur lequel on donne z .

nage de P_0 (1). L'équation prend alors la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + a_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} + b_1 \frac{\partial z}{\partial \eta} + c_1 z + f_1 = 0.$$

Il suffit d'écrire les valeurs des nouveaux coefficients pour constater que l'on a

$$(23') \quad |a_1| \quad \text{et} \quad |b_1| < l(A+B) + m, \quad |c_1| < nC, \quad |f_1| < nF,$$

les coefficients l, m, n ne dépendant que de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ et de leurs dérivées premières et restant finis (à cause de l'hypothèse faite sur les dérivées de ξ, η).

Cela posé, soit un contour continu fermé \mathfrak{C} situé dans \mathfrak{R} et entourant P_0 : au cercle de centre P_0 et de rayon d_0 , plus courte distance de P_0 à \mathfrak{C} , la transformation (23) fait correspondre un contour γ entourant le point (ξ_0, η_0) , et, si δ_0 est la plus courte distance de ce point à γ , nous pouvons appliquer en ce point la formule (19), avec $R = \delta_0$, et la première inégalité (21) et écrire

$$\left| \frac{\partial z}{\partial \xi_0} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial z}{\partial \eta_0} \right| < \frac{1}{1 - \lambda \delta_0 (A_1 + B_1)} \left[\frac{4M}{\pi \delta_0} + 2 \delta_0 (C_1 M + F_1) \right];$$

A_1, B_1, C_1, F_1 sont des constantes supérieures ou égales à $|a_1|, |b_1|, |c_1|, |f_1|$: on peut donc les remplacer par les seconds membres des formules (23'). Tout cela suppose d'ailleurs d_0 inférieur à une certaine limite indépendante de la position du point P_0 et, dans ces conditions, on a certainement $\mathfrak{S} d_0 < \delta_0 < \mathfrak{S}_1 d_0$, \mathfrak{S} et \mathfrak{S}_1 étant deux constantes ne dépendant que de $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (2). Si l'on revient alors aux variables (x, y) ,

(1) Ceci peut se voir, par exemple, de la façon suivante : ξ, η sont solutions d'une même équation aux dérivées partielles du second ordre, obtenue en éliminant l'une des deux fonctions entre les équations (23), et qui a les mêmes termes du second ordre que (\mathcal{E}_0) ; or il est facile d'avoir une solution de celle-ci, par exemple la solution fondamentale calculée par la méthode de M. Lévi (*Annali di Matematica*, 1907) et envisagée dans une région ne contenant pas sa singularité. Nous reparlerons de ces solutions fondamentales dans le second Mémoire.

(2) Si, en effet, (x_1, y_1) et (ξ_1, η_1) sont les extrémités des vecteurs d_0 et δ_0 , il nous

on pourra donner à $\frac{\partial z}{\partial x_0}$ et $\frac{\partial z}{\partial y_0}$ la limitation commune

$$\frac{p}{1 - 2\lambda \mathfrak{E}_1 d_0 (lA + lB + m)} \left[\frac{4M}{\pi \mathfrak{E}_1 d_0} + 2n \mathfrak{E}_1 d_0 (CM + F) \right],$$

p étant un coefficient analogue à l, m, n . Ceci peut s'écrire

$$(24) \quad \left| \frac{\partial z}{\partial x_0} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial z}{\partial y_0} \right| < \frac{K}{K_0 - d_0(A + B)} \frac{M}{d_0} + K_1 d_0 (CM + F);$$

d_0 est supposé inférieur à une certaine limite D (au plus égale à $\frac{K_0}{A + B}$); K, K_0, K_1 et D sont des nombres ne dépendant que de a, b, c et qui sont fixes dans la région \mathfrak{R} envisagée. En particulier, la formule s'applique à tout contour situé dans \mathfrak{R} et intérieur à un cercle de rayon D .

4. NATURE DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION LINÉAIRE. — Soit d'abord

$$\Delta z + f(x, y) = 0.$$

La formule fondamentale relative à cette équation est classique : z étant

suffit de vérifier que les quantités $\delta_0^2 = (\xi_1 - \xi_0)^2 + (\eta_1 - \eta_0)^2$ et d_0^2 sont de même ordre. Or

$$\xi_1 - \xi_0 = (x_1 - x_0) \frac{\partial \xi}{\partial x_0} + (y_1 - y_0) \frac{\partial \xi}{\partial y_0} + \dots;$$

on a une formule analogue pour $\eta_1 - \eta_0$. On en déduit que

$$\delta_0^2 = d_0^2 \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x_0} \cos \omega + \frac{\partial \xi}{\partial y_0} \sin \omega \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_0} \cos \omega + \frac{\partial \eta}{\partial y_0} \sin \omega \right)^2 + \varepsilon \right]$$

avec

$$\omega = \left(\widehat{d_0, Ox} \right).$$

Le crochet ne peut s'annuler avec d_0 que si les dérivées de ξ, η (qu'on a supposées non toutes nulles) sont proportionnelles, ce qui est impossible d'après (23). Donc d_0 et δ_0 sont de même ordre.

régulière dans une région \mathfrak{R} , on a

$$(25) \quad z(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left(z \frac{\partial \mathcal{L} \frac{1}{r}}{\partial n} - \mathcal{L} \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial n} \right) ds \\ + \frac{1}{2\pi} \iint_{(C)} \mathcal{L} \frac{1}{r} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = v + V,$$

$P(x, y)$ étant un point intérieur à un contour C , un cercle par exemple, situé dans \mathfrak{R} ; r est la distance $\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, n la normale intérieure à C au point (ξ, η) et v et V désignent respectivement les deux intégrales; v est harmonique dans C , donc analytique en (x, y) , et V vérifie la relation $\Delta V + f(x, y) = 0$. C'est donc la nature de V qu'il nous faut étudier. Remarquant que

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L} \frac{1}{r} = - \frac{\partial}{\partial \xi} \mathcal{L} \frac{1}{r},$$

nous pouvons écrire

$$\frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{1}{2\pi} \int_C \int_{(C)} \frac{\partial \mathcal{L} \frac{1}{r}}{\partial \xi} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ = \frac{-1}{2\pi} \int_C \mathcal{L} \frac{1}{r} f(\xi, \eta) d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_C \int_{(C)} \mathcal{L} \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi d\eta,$$

et l'application répétée de ce procédé bien connu nous donne

$$\frac{\partial^n V}{\partial x^n} = \frac{-1}{2\pi} \int_C \left(\frac{\partial^{n-1} \mathcal{L} \frac{1}{r}}{\partial x^{n-1}} f + \frac{\partial^{n-2} \mathcal{L} \frac{1}{r}}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \dots + \mathcal{L} \frac{1}{r} \frac{\partial^{n-1} f}{\partial \xi^{n-1}} \right) d\eta \\ + \frac{1}{2\pi} \int_C \int_{(C)} \mathcal{L} \frac{1}{r} \frac{\partial^n f}{\partial \xi^n} d\xi d\eta.$$

Donc, si f est indéfiniment dérivable par rapport à x , il en est de même de V et par suite de z . Supposons de plus f de classe $\alpha \geq 1$ en x dans \mathfrak{R} , c'est-à-dire $\left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right| < F \frac{r^{1-\alpha}}{\rho^n}$ dans et sur C . Une intégrale de

la forme $\int_C \frac{1}{r} \varphi(s) d\eta$ étant harmonique dans C et continue sur C , ses dérivées d'ordre p admettent une limitation de la forme $\nu \Phi \frac{\rho!}{d^p}$ ($|\varphi| < \Phi$) (n° 3) : donc, ρ_1 étant le plus petit des nombres ρ et d ,

$$(26) \quad \left| \frac{\partial^n V}{\partial x^n} \right| < \frac{\nu F}{\rho_1^{n-1}} [(n-1)! + \dots + (n-q-1)! q!^\alpha + \dots + (n-1)!^\alpha] + \nu' F \frac{n!^\alpha}{\rho_1^n}.$$

Or $(n-q-1)! q!^\alpha < (n-1)!^\alpha$; donc le crochet, qui a n termes, est inférieur à $n!^\alpha$, d'où

$$\left| \frac{\partial^n V}{\partial x^n} \right| < \nu_1 F \frac{n!^\alpha}{\rho_1^n}.$$

On aurait une limitation analogue en dérivant la formule (25) en y . On en déduit que z est de classe α en x , ainsi que $\frac{\partial z}{\partial y}$. Il est clair que le même procédé permettrait d'établir que, si f est, par rapport à (x, y) , de classe $\alpha \geq 1$ en x et $\beta \geq 1$ en y , il en est de même de z .

Abordons maintenant l'équation linéaire (C), soit $\mathfrak{F}(z) = 0$, a, b, c, f étant continus et de classe $\alpha \geq 1$ par rapport à x dans une région \mathfrak{R} : nous allons montrer que toute solution de (C) régulière dans \mathfrak{R} est de classe α en x , ainsi que $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Donnons d'abord une idée de la méthode. Soit C_0 un cercle de \mathfrak{R} , $P_0(x_0, y_0)$ un point fixe intérieur : il s'agit d'avoir la limitation de $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$. La limitation de $\frac{\partial z}{\partial x}$ s'obtient en fonction du maximum de $|z|$ sur C_0 et des coefficients. Or, C_1 étant un cercle intérieur à C_0 , $\frac{\partial z}{\partial x}$ vérifie l'équation $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = 0$ (1) et prend sur C_1 des valeurs dont la limitation est

(1) A la vérité la solution de $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = 0$ prenant sur C_1 les mêmes valeurs que $\frac{\partial z}{\partial x}$ ne coïncide avec $\frac{\partial z}{\partial x}$ que si les dérivées $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ existent. Ceci est facile à montrer : si

connue, ce qui nous permettra d'avoir celle de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ dans C_1 . Nous choisirons alors un cercle C_2 intérieur à C_1 , et ainsi de suite : la méthode consiste donc à employer *une suite de contours successifs* enveloppant P_0 , et il s'agit de voir si l'on peut choisir leur loi de variation de façon à obtenir une limitation de $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ ayant en P_0 la forme cherchée.

Nous avons vu que les dérivées d'ordre p d'une fonction harmonique déterminée par ses valeurs sur le cercle C devenaient infinies sur C comme d^{-p} . Nous sommes ainsi conduits à établir, en tout point P intérieur à C_0 , des limitations de la forme

$$(27) \quad \left| \frac{\partial^p z}{\partial x^p} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^p z}{\partial x^{p-1} \partial y} \right| < N \frac{p!^\alpha}{(\mu d)^p},$$

μ étant un facteur convenablement choisi. Nous allons donc chercher à montrer que, si les coefficients a, b, c, f sont de classe α en x dans \mathcal{R} et si les limitations (27) sont exactes pour $p = 1, 2, \dots, n$, elles sont vérifiées également pour $p = n + 1$. Pour cela il nous suffira d'établir en P une inégalité de la forme

$$(28) \quad \left| \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y} \right| < N \frac{(n+1)!^\alpha}{(\mu d)^{n+1}} \mu H_n,$$

H_n étant borné quel que soit n : car, si $H_n < H$, nous prendrons $\mu < \frac{1}{H}$.

D'après ce que nous avons dit plus haut, la dérivée $z_n = \frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ existe

l'on pose $\tilde{\mathcal{F}}(z) = \Delta z + \tilde{\mathcal{F}}_0(z)$, on aura sûrement, Δ' étant le symbole déjà utilisé p. 150,

$$\Delta' \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_0}{\partial x} = 0,$$

car $\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}_0}{\partial x}$, qui ne contient que des dérivées d'ordre un et deux, est continue (note de la page 149). D'après les propriétés de la fonction V de la note citée, les dérivées premières de $\frac{\partial z}{\partial x}$ admettent des accroissements d'ordre non nul, ce qui entraîne l'existence des dérivées secondes de $\frac{\partial z}{\partial x}$.

en P et est solution de l'équation

$$\Delta z_n + a \frac{\partial z_n}{\partial x} + b \frac{\partial z_n}{\partial y} + f_n = 0,$$

$$(29) \quad f_n = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f \right) - a \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}} - b \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y};$$

f_n ne contient donc que des dérivées dont l'ordre par rapport à x est $\leq n$.

Soient alors C_n un cercle concentrique à C_0 et contenant P_0 à son intérieur, d_0 et d_n les distances de P_0 à C_0 et C_n , M_n le maximum de $|z_n|$ dans et sur C_n : on a donc, d'après la formule (21),

$$(30) \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial x_0} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial y_0} \right| < \frac{LM_n}{d_n} + L_1 d_n F_n \quad (|f_n| < F_n),$$

les coefficients L et L_1 étant indépendants de n . Or, en remarquant que les limitations maxima fournies par la formule (27) sont atteintes pour les points situés sur C_n , c'est-à-dire pour $d = d_0 - d_n$, on a

$$|z_n| < N \frac{n!^\alpha}{\mu^n (d_0 - d_n)^n}$$

dans et sur C_n . Voyons maintenant la limitation de f_n : nous l'obtiendrons en utilisant celle des dérivées de a , b , c , f et de z jusqu'à l'ordre n . Mais on ne fera qu'augmenter l'expression ainsi obtenue en lui ajoutant la limitation, non encore démontrée, de $a \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}} + b \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^n \partial y}$; d'après (29), ceci revient à calculer la limitation de

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f \right)$$

en utilisant les inégalités (27) jusqu'à l'ordre $n + 1$. Cette remarque nous servira plusieurs fois dans la suite.

Cela posé, nous pouvons écrire

$$(31) \quad \left| \frac{\partial^p a}{\partial x^p} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^p b}{\partial x^p} \right| < A \rho \frac{|\Gamma(p - \lambda)|^\alpha}{\rho^p}, \quad \left| \frac{\partial^p c}{\partial x^p} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial^p f}{\partial x^p} \right| < A \frac{\rho!^\alpha}{\rho^p}.$$

Imposons à μ , comme première condition, de vérifier l'inégalité $\mu d \leq \rho$, quel que soit d . Nous pourrons alors remplacer, dans (31), ρ par $\mu(d_0 - d_n)$ (1). D'après la Remarque III du n° 2, nous aurons donc

$$\left| \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right| < \frac{z A N (n+1)!^\alpha}{\mu^n (d_0 - d_n)^n}, \quad \frac{\partial^n c z}{\partial x^n} < \frac{A N (n+1)!^\alpha}{\mu^n (d_0 - d_n)^n}.$$

Nous pouvons donc poser

$$M_n = N \frac{n!^\alpha}{\mu^n (d_0 - d_n)^n}, \quad F_n = KN \frac{(n+1)!^\alpha}{\mu^n (d_0 - d_n)^n},$$

et la formule (30) nous donne

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial x_0} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial y_0} \right| < \frac{N(n+1)!^\alpha}{\mu^n (d_0 - d_n)^n} \left[\frac{L}{(n+1)^\alpha d_n} + L_1 K d_n \right].$$

Choisissons C_n de telle sorte que $d_n = \frac{d_0}{n}$: le second membre de la formule peut alors s'écrire $\frac{N(n+1)!^\alpha}{(\mu d_0)^{n+1}} \mu H_n$, avec

$$(31') \quad H_n = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n} \left[\frac{L n}{(n+1)^\alpha} + \frac{L_1 K d_0^2}{n} \right].$$

Or, dans cette expression, tous les termes restent bornés, et nous sommes dans les conditions de la formule (28). Notre proposition est donc démontrée, P_0 étant un point quelconque intérieur à C_0 .

La même méthode s'appliquerait au cas où les coefficients de l'équation seraient, par rapport à (x, y) , de classe $\alpha \geq 1$ en x et $\beta \geq 1$ en y . On montrerait alors que, si l'inégalité $\left| \frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r \partial y^s} \right| < N \frac{r!^\alpha s!^\beta}{(\mu d)^{r+s}}$ est vraie pour $r \leq n$ et $s \leq p$, elle subsiste également lorsqu'on y remplace r par $n+1$ ou s par $p+1$. On peut également prendre cette limitation

(1) A la vérité la limitation obtenue ainsi pour a et b ($p=0$) pourra être inexacte, mais ceci importe peu puisque a et b ne figurent pas dans f_n , mais seulement dans le terme ajouté pour faciliter le calcul de la limitation de f_n . Nous aurions une remarque analogue dans le numéro suivant : nous ne la répéterons pas.

sous la forme $N \frac{(r+s)!z_s!^{\beta-z}}{(\mu d)^{r+s}}$ en supposant $\beta \geq \alpha$: on considérera $\frac{\partial^{n+p} z}{\partial x^n \partial y^p}$ comme solution de l'équation obtenue en dérivant (C) n fois en x et p fois en y et l'on calculera les limitations des dérivées premières de cette solution en choisissant comme contour un cercle C_{n+p} tel que $d_{n+p} = \frac{d_0}{n+p}$.

5. ÉQUATIONS NON LINÉAIRES. — Nous allons suivre la même marche que dans le numéro précédent, avec quelques différences de détail. Soit tout d'abord l'équation

$$(C_1) \quad \Delta z + f(x, y, z, p, q) = 0$$

et supposons que la fonction f soit, dans un domaine de variation \mathcal{O} de ses arguments, de classe α en (x, z, p, q) . Il s'agit d'établir que toute solution régulière z appartenant à \mathcal{O} est de classe α en x , ainsi que $\frac{\partial z}{\partial y}$: nous entendons par là une solution z telle que sa valeur, celles de ses dérivées p et q , et les valeurs correspondantes de x et y fassent partie du champ de variation \mathcal{O} . Notre hypothèse est donc, dans \mathcal{O} ,

$$(32) \quad \left| \frac{\partial^{n_1+\dots+n_4} f}{\partial x^{n_1} \partial z^{n_2} \partial p^{n_3} \partial q^{n_4}} \right| < F \rho_1 \frac{|\Gamma(n_1 - \lambda) \Gamma(n_2 - \nu) \dots \Gamma(n_4 - \nu)|^\alpha}{\rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2+n_3+n_4}},$$

avec $0 < \lambda < 1 < \nu < 2$ (cf. n° 2, Remarque II). Nous allons employer, comme plus haut, une suite de cercles C_n , mais ici p et q sont supposés finis dans et sur C_0 , de sorte que d n'apparaîtra en dénominateur qu'à partir de z_2 et que la suite des cercles débute par C_2 . Nous supposons donc qu'on ait, pour $m < n$, α_0 étant le coefficient de la formule (9),

$$(33) \quad \left| \frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^{m+1}} \right| = \left| \frac{\partial^m p}{\partial x^m} \right| < \alpha_0 \rho \frac{|\Gamma(m - \lambda)|^\alpha}{(\mu d)^m},$$

et la même limitation pour $\frac{\partial^{m+1} z}{\partial x^m \partial y} = \frac{\partial^m q}{\partial x^m}$. Nous allons montrer que

ceci est vrai pour $m = n$. Pour cela, dérivons n fois (\mathcal{E}_1) : il vient

$$(34) \quad \Delta z_n + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial z_n}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial z_n}{\partial y} + f_n = 0,$$

f_n ne contenant que des dérivées d'ordre $\leq n$. Si nous employons la lettre d , au lieu de ∂ , pour désigner les dérivées de la fonction composée de x et y , $f(x, y, z, p, q)$, où z, p, q sont remplacés par leurs valeurs en fonction de x et y , nous voyons que $|f_n|$ sera inférieur à la limitation obtenue pour $\frac{d^n f}{dx^n}$ au moyen des formules (9), (9') [p. 140], (32) et (33) (avec $d = d_0 - d_n$). Pour faire ce calcul, on peut supposer μ choisi de telle sorte que la limitation (33) s'applique aussi à $\frac{\partial^m z}{\partial x^m}$ et qu'on puisse remplacer dans (32) ρ , par $\mu(d_0 - d_n)$. On obtient ainsi [d'après (9'), avec $M = F \mu(d_0 - d_n)$],

$$(35) \quad |f_n| < z_1 F \frac{|\Gamma(n - \lambda)|^\alpha}{[\mu(d_0 - d_n)]^{n-1}}.$$

Or la formule (30) s'applique à l'équation (34) en supposant C_0 suffisamment petit : L et L_1 dépendent alors de f'_p et f'_q et sont fixes, quel que soit n . Remplaçant dans cette formule F_n par la limitation (35) et M_n par $z_0 \rho \frac{|\Gamma(n - 1 - \lambda)|^\alpha}{[\mu(d_0 - d_n)]^{n-1}}$, il vient

$$\left| \frac{\partial z_n}{\partial x} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial y} \right| < \frac{z_0 \rho |\Gamma(n - \lambda)|^\alpha}{[\mu(d_0 - d_n)]^{n-1}} \left[\frac{L_1}{(n - 1 - \lambda)^\alpha d_n} + \frac{L_1 z_1 F d_n}{z_0} \right].$$

Si $d_n = \frac{d_0}{n}$, on a ainsi une expression de la forme [cf. (28) et (31)']

$$z_0 \rho \frac{|\Gamma(n - \lambda)|^\alpha}{(\mu d_0)^n} \mu H_n,$$

H_n étant borné, ce qui démontre les formules (33) pour $m = n$.

Passons maintenant à l'étude de l'équation

$$(\mathcal{E}_2) \quad f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \quad (4f'_r f'_t - f'_s{}^2 > 0),$$

f étant, dans un domaine \mathcal{O} , de classe α en (x, z, p, q, r, s, t) . Nous pouvons mettre cette équation sous la forme (n° 2, Remarque II *in fine*)

$$\varphi(x, y, z, p, q, r, s) + t = 0 \quad (4\varphi'_r - \varphi'_s{}^2 > 0),$$

φ étant de classe α en (x, z, p, q, r, s) dans un domaine \mathcal{O}' . Une dérivation par rapport à x nous donne

$$(36) \quad \varphi'_r \frac{\partial r}{\partial x} + \varphi'_s \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x} + \varphi'_p \frac{\partial p}{\partial x} + \varphi'_q \frac{\partial q}{\partial x} + \varphi'_z \frac{\partial z}{\partial x} + \varphi'_x = 0.$$

Les diverses dérivées φ' de φ qui figurent dans cette équation étant de même classe que φ , nous écrirons, comme dans la formule (32),

$$(37) \quad \left| \frac{\partial^{n_1+n_2+\dots+n_6} \varphi'}{\partial x^{n_1} \partial z^{n_2} \dots \partial s^{n_6}} \right| < \Phi \rho_1 \frac{|\Gamma(n_1 - \lambda) \Gamma(n_2 - \nu) \dots \Gamma(n_6 - \nu)|^{\alpha}}{\rho_1^{n_1} \rho^{n_2+\dots+n_6}}.$$

z et ses dérivées premières et secondes étant finies dans \mathcal{O}' , nous supposerons

$$(38) \quad \left| \frac{\partial^{m+2} z}{\partial x^{m+2}} \right| = \left| \frac{\partial^m r}{\partial x^m} \right| < \alpha_0 \rho \frac{|\Gamma(m - \lambda)|^{\alpha}}{(\mu d)^m} \quad (m < n - 1)$$

et la même limitation pour $\frac{\partial^{m+2} z}{\partial x^{m+1} \partial y} = \frac{\partial^m s}{\partial x^m}$; ici donc, la suite des cercles commencera à C_3 . Au cercle C_n correspond l'équation obtenue en dérivant $n - 1$ fois (36),

$$\begin{aligned} & \varphi'_r \frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + \varphi'_s \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} \\ & + \left[(n-1) \frac{d\varphi'_r}{dx} + \varphi'_p \right] \frac{\partial z_n}{\partial x} + \left[(n-1) \frac{d\varphi'_s}{dx} + \varphi'_q \right] \frac{\partial z_n}{\partial y} + \varphi_n = 0, \end{aligned}$$

φ_n ne contenant que des dérivées d'ordre $\leq n$. En supposant $|\varphi'_p|, |\varphi'_q|, \left| \frac{d\varphi'_r}{dx} \right|$ et $\left| \frac{d\varphi'_s}{dx} \right|$ moindres que A et $|\varphi_n| < \Phi_n$, la formule (24), appliquée à cette équation et à C_n , donne en P_0

$$(39) \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial x_0} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial z_n}{\partial y_0} \right| < \frac{K}{K_0 - 2nA} \frac{M_n}{d_n} + K_1 d_n \Phi_n.$$

Pour calculer la limitation Φ_n de φ_n , nous remarquerons que

$$|\varphi_n| < |\psi_n| + |\gamma_n|,$$

avec

$$(40) \quad \begin{cases} \psi_n = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\varphi'_r \frac{\partial r}{\partial x} + \varphi'_s \frac{\partial s}{\partial x} \right) - \varphi'_r \frac{\partial^n r}{\partial x^n} - \varphi'_s \frac{\partial^n s}{\partial x^n}, \\ \gamma_n = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (r \varphi'_p + s \varphi'_q + p \varphi'_s + \varphi'_t), \end{cases}$$

et nous supposons une fois de plus que la limitation (38) s'applique aussi aux dérivées $m^{\text{ièmes}}$ de z , p , q et qu'on puisse remplacer dans (37) ρ_i par $\mu(d_0 - d_n)$. Utilisant alors la Remarque III (n° 2), et en particulier la formule (11) pour ψ_n , on trouve

$$|\psi_n| < \alpha z_0 \Phi \rho \frac{(n-1) |\Gamma(n-1-\lambda)|^\alpha}{[\mu(d_0 - d_n)]^{n-2}}, \quad |\gamma_n| < \alpha z_0 \Phi \rho \frac{|\Gamma(n-1-\lambda)|^\alpha}{[\mu(d_0 - d_n)]^{n-2}}.$$

En remplaçant, dans (39), Φ_n par la somme de ces deux limitations et M_n par $\alpha_0 \rho \frac{|\Gamma(n-2-\lambda)|^\alpha}{[\mu(d_0 - d_n)]^{n-2}}$, on obtient l'expression

$$\alpha_0 \rho \frac{|\Gamma(n-1-\lambda)|^\alpha}{[\mu(d_0 - d_n)]^{n-2}} \left[\frac{K}{(K_0 - 2\Lambda n d_n)(n-2-\lambda)^\alpha d_n} + K_1 n d_n \alpha \Phi \right].$$

Si l'on pose encore $nd_n = d_0$, on trouve une fois de plus une expression de la forme $\alpha_0 \rho \frac{|\Gamma(n-1-\lambda)|^\alpha}{(\mu d_0)^{n-1}} \mu H_n$, H_n étant borné, et les formules (38) sont vraies pour $m = n - 1$: z et $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont donc de classe α en x .

D'après les hypothèses faites pour établir la formule (24), on suppose que, lorsqu'on remplace z par la solution étudiée, les dérivées φ'_r et φ'_s , et par suite f'_r , f'_s , f'_t deviennent des fonctions composées de x , y admettant des dérivées premières.

L'extension des considérations précédentes à l'étude de la classe z par rapport aux deux variables x , y est immédiate. Si, dans l'équation (C₁), on suppose f de classe α en (x, z, p, q, r, s, t) et β en y ($\alpha \leq \beta$), z étant une solution régulière pour laquelle les dérivées f'_r , f'_s , f'_t

satisfont aux conditions énoncées plus haut, on opérera comme il a été dit à la fin du n° 3, en utilisant pour la fonction f les formules du n° 2, Remarque II, relatives aux fonctions de plusieurs variables ; la marche à suivre dans les calculs est la même que dans l'étude par rapport à x . *Nous aboutissons ainsi aux résultats énoncés dans l'Introduction.*

III. — Équations du second ordre du type parabolique.

Nous allons procéder, pour le type parabolique, comme pour le type elliptique.

6. ÉTUDE DES DÉRIVÉES DES SOLUTIONS DU PROBLÈME DE LA CHALEUR ET DE SES GÉNÉRALISATIONS. — Envisageons d'abord l'équation de la chaleur, avec ou sans second membre (*cf.* GOURSAT, *Analyse*, t. III),

$$\delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y).$$

a. Dérivées des solutions de $\delta z = 0$. — Considérons un contour rectangulaire (C), formé d'un segment $A_1 A_2$ parallèle à Ox et de deux demi-droites issues de ses extrémités, parallèles à y et de même sens : un changement de coordonnées qui laisse invariable l'équation permet de supposer $A_1 A_2$ sur Ox , A_1 en O ($\overline{A_1 A_2} = l$). La valeur de la solution de $\delta z = 0$ prenant sur (C) des valeurs données est fournie en tout point $P(x, y)$, intérieur à (C), par la formule (1)

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\pi}z(x, y) = & \int_0^y \left[\frac{\partial G}{\partial \xi}(0, \eta; x, y) z(0, \eta) - \frac{\partial G}{\partial \xi}(l, \eta; x, y) z(l, \eta) \right] d\eta \\ & + \int_0^l G(\xi, 0; x, y) z(\xi, 0) d\xi. \end{aligned}$$

(1) Au sujet des équations paraboliques, voir mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* (1913) : je le désignerai par *J. M.* Rappelons brièvement ici les principaux résultats relatifs à l'équation $\delta z = f$. Les caractéristiques de cette équation sont les

La fonction de Green $G(\xi, \eta; x, y)$, relative au contour rectangulaire,

droites $y = \text{const.}$; un segment $A_1 A_2$ de caractéristique et deux arcs C_1 et C_2 issus de A_1 et A_2 , situés au-dessus de $A_1 A_2$, ne se coupant pas et rencontrés au plus en un point par les caractéristiques, forment ce que nous appellerons *un contour* (C), sur lequel z est donné : on se propose de calculer z en tout point P intérieur à (C), c'est-à-dire appartenant à un segment de caractéristique $M_1 M_2$ limité par les deux arcs. La valeur z_P ne dépend que des valeurs de z sur la portion (C_y) de (C) située au-dessous de $M_1 M_2$, d'ordonnée y ; il est facile de démontrer l'unicité de la solution, et celle-ci s'établit même pour toute portion (\mathcal{C}_y) d'un contour continu simple \mathcal{C} , ayant ses extrémités en M_1, M_2 et située au-dessous. Tout ceci est vrai également pour l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0,$$

a, b, c étant fonctions continues de x, y , avec $b < 0$; de plus, si $f = 0$, on a

$$|z_P| < KM,$$

M étant le maximum de $|z|$ sur (\mathcal{C}_y) et K un coefficient qui dépend de b et c , égal à un pour $\delta z = 0$ (*J. M.*, n° 18).

Pour calculer la solution dans le cas d'un contour (C) et de l'équation $\delta z = f$, on utilise la *solution fondamentale*

$$(41) \quad U(\xi, \eta; x, y) = U(\Pi, P) = \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}},$$

qui dépend des deux points $P(x, y)$ et $\Pi(\xi, \eta)$ et permet d'obtenir la *formule fondamentale*

$$2\sqrt{\pi} z(x, y) = \int_{(C_y)} U z \, d\xi + \left(U \frac{\partial z}{\partial \xi} - z \frac{\partial U}{\partial \xi} \right) d\eta - \int \int_{S_y} U f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta,$$

S_y étant l'aire limitée par (C) et la caractéristique d'ordonnée y . L'emploi de la *fonction de Green*

$$G(\xi, \eta; x, y) \quad \text{ou} \quad G(\Pi, P),$$

solution de l'*adjointe* $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$ en ξ, η (et de $\delta z = 0$ en x, y), nulle sur C_1 et C_2 ,

et admettant en P la même singularité que U, permet d'éliminer les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ sur (C);

la formule ainsi obtenue se déduit de la précédente en remplaçant U par G et supprimant

le terme en $\frac{\partial z}{\partial \xi}$. Dans le cas d'un contour rectangulaire, on a la formule du texte (avec $f = 0$).

est donnée par la formule, obtenue par la méthode des images ⁽¹⁾,

$$(41) \quad G = \mathcal{F}(x - \xi, y - \eta) - \mathcal{F}(x + \xi, y - \eta) \quad \left[\mathcal{F}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(u+2nl)^2}{4v}} \right].$$

Si P_1 et P_2 sont les symétriques de P par rapport à M_1 et M_2 , on peut mettre G sous la forme [voir formule (41'), p. 164]

$$U(\Pi, P) = U(\Pi, P_1) - U(\Pi, P_2) + H,$$

H étant une fonction analytique de ξ, η, x, y pour $y > \eta$ (nulle ainsi que toutes ses dérivées pour $y = \eta$), et cela quels que soient P et Π dans (C) ou sur (C) . Donc, en isolant ce qui provient de H ,

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\sqrt{\pi} z(x, y) &= \int_0^y \frac{x}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{-x^2}{4(y-\eta)}} z(0, \eta) d\eta \\ &+ \int_0^l \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} z(\xi, 0) d\xi + \dots + \bar{z}, \end{aligned} \right.$$

les termes non écrits étant tout à fait analogues aux deux premiers et \bar{z} étant une fonction continue de (x, y) dans (C) et sur (C) , ainsi que toutes ses dérivées. Si, dans les intégrales de la formule obtenue en dérivant (42) par rapport à x , on fait les changements de variables

$$x^2 = 4t(y - \eta), \quad x - \xi = 2s\sqrt{y}, \quad \dots,$$

on constate immédiatement que $\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right|$ est inférieur à

$$K \left(\frac{M_1}{x} + \frac{M_2}{l-x} + \frac{M_0}{\sqrt{y}} \right),$$

⁽¹⁾ VOLTERRA, *Leçons de Stockholm*. Remarquer que la fonction

$$G_1 = \mathcal{F}(x - \xi, y - \eta) + \mathcal{F}(x + \xi, y - \eta)$$

n'est autre que la fonction analogue à la *fonction de Neumann* et relative au cas où l'on donne z sur la caractéristique et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur les côtés verticaux. La solution de ce dernier problème s'obtient en remplaçant dans la formule fondamentale U par G_1 et $\frac{\partial U}{\partial \xi}$ par zéro.

M_0, M_1, M_2 étant respectivement les maxima de $|z|$ sur Ox et sur les deux côtés verticaux et K un coefficient numérique ⁽¹⁾. Par suite si, d'une manière générale, on désigne par d_0, d_1, d_2 les distances d'un point P , intérieur à un contour (C) rectangulaire, aux côtés horizontal et verticaux de celui-ci, on peut écrire

$$(43) \quad \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| < \frac{\lambda M}{t},$$

t étant le plus petit des trois nombres $\sqrt{d_0}, d_1, d_2$, M le maximum de $|z|$ sur (C) , λ un nombre dont la valeur n'importe pas à notre objet. Il résulterait de là, d'après la méthode des contours successifs, que nous appliquerons plus loin, que z est une fonction analytique de x dans (C) , la dérivée $n^{\text{ième}}$ étant limitée par $\lambda M \frac{n!}{(\mu t)^n}$. Mais ceci peut se voir directement, en étudiant dans le plan de la variable complexe x les termes de la formule (42) ou encore de la formule fondamentale relative au contour rectangulaire (*J. M.*, n° 43) : dans ce plan, z est une fonction analytique de x à l'intérieur du carré ayant pour sommet l'origine et une diagonale horizontale égale à l . Nous ne nous attardons pas à ce point de vue. En ce qui concerne la variable y , on a par la même méthode que plus haut

$$\left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| < \frac{\nu M}{t^2}.$$

Ainsi que nous l'avons dit dans l'Introduction, l'analyticité de z par rapport à x montre que z est de classe 2 en y : cette double propriété

(1) Plus généralement, on voit sans peine que $\frac{\partial^n z}{\partial x^n}$ contient des intégrales de la forme

$$\int_0^y \frac{x^p}{(y-\eta)^{\frac{n+p}{2}+1}} e^{\frac{-x^2}{4(y-\eta)}} \varphi(\eta) d\eta, \quad \int_0^l \frac{(x-\xi)^p}{y^{\frac{n+p+1}{2}}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4y}} \psi(\xi) d\xi,$$

qui deviennent infinies sur Ox et Oy comme $y^{-\frac{n}{2}}$ et x^{-n} .

a même lieu *par rapport à l'ensemble* (x, y) , car on a

$$\left| \frac{\partial^{n+p} z}{\partial x^n \partial y^p} \right| < KM \frac{n! 2p!}{R^{n+2p}} \quad (1).$$

Envisageons maintenant l'équation avec second membre : la solution Z_0 s'annulant sur (C) est donnée par la formule

$$Z_0(x, y) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} G(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

et ceci nous conduit à étudier l'intégrale

$$Z(x, y) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} U(\xi, \eta; x, y) f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

qui figure dans la formule fondamentale (note p. 164) et qui est aussi solution de $\delta z = f$. La dérivée $\frac{\partial Z}{\partial x}$ s'obtient par la dérivation de U sous

(1) Une étude plus approfondie dans le domaine complexe montrerait que R est égal au plus petit des trois nombres $\sqrt{d_0}$, $\frac{d_1}{\sqrt{2}}$, $\frac{d_2}{\sqrt{2}}$. La méthode des contours successifs donnerait également $R = \mu t$. Quelle signification faut-il donner à t quand la frontière est un contour continu simple \mathcal{C} ouvert vers le haut ? Il est facile de voir que, si t désigne le minimum de $\sqrt{(x-\xi)^2 + y-\eta}$ quand le point (ξ, η) varie sur (\mathcal{C}_y) , toutes les formules de limitation subsistent. Soit, en effet, la parabole $(x-x')^2 + y-y' = t^2$, x' et y' étant les coordonnées courantes : elle est intérieure à \mathcal{C} d'après la définition de t , et il en sera donc de même *a fortiori* pour le contour (C) rectangulaire ayant ses sommets à l'intersection de la parabole et de la caractéristique $y-y' = \frac{t^2}{2}$. Pour ce contour on a, en P,

$$d_1 = d_2 = \sqrt{d_0} = \frac{t}{\sqrt{2}};$$

en appliquant les formules de limitations à ce contour et remarquant que, sur celui-ci, $|z|$ est inférieur au maximum M de $|z|$ sur \mathcal{C} , le résultat énoncé se trouve établi. Par une méthode calquée sur le cas elliptique (note p. 144), on verrait aussi que $t^{n+2p} \frac{\partial^{n+p} z}{\partial x^n \partial y^p}$ tend vers zéro quand P tend vers un point de \mathcal{C} .

le signe intégral. Un simple changement de variable nous donne, en supposant $|f| < F(\eta - y_0)^\beta$ (*J. M.*, n° 8),

$$(44) \quad |Z| < \frac{F(y - y_0)^{\beta+1}}{\beta + 1}, \quad \left| \frac{\partial Z}{\partial x} \right| < \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma\left(\beta + \frac{3}{2}\right)} F(y - y_0)^{\beta + \frac{1}{2}},$$

limitations valables pour un contour (C) quelconque (p. 164), limité inférieurement par une caractéristique d'ordonnée y_0 , les arcs C_1 et C_2 étant à distance finie ou infinie. Si (C) est rectangulaire, G étant alors égal, comme on l'a vu plus haut, à une somme algébrique de trois fonctions U et d'une fonction régulière H, les limitations de Z_0 et $\frac{\partial Z_0}{\partial x}$ seront les mêmes que (44), à un facteur numérique près (1).

b. *Étude de $\frac{t}{\tau} \frac{\partial G}{\partial x}$.* — Reprenons notre contour rectangulaire de la page 163 (n° 6, a) : τ désignant la quantité analogue à t et relative au point II, nous aurons à envisager dans la suite l'expression $\frac{t}{\tau} \frac{\partial G}{\partial x}$; naturellement, il suffira d'étudier le cas $t > \tau$. Deux circonstances peuvent se présenter suivant que t et τ sont relatifs à un même côté du contour ou à des côtés différents. Il suffit d'envisager la première hypothèse (c'est-à-dire les deux cas $t = x$, $\tau = \xi$ et $t = \sqrt{y}$, $\tau = \sqrt{\eta}$), car dans la seconde, d'après la définition même de t et de τ , $\frac{t}{\tau}$ est plus petit que si t et τ étaient relatifs au même côté. Commençons donc par étudier $\frac{x}{\xi} \frac{\partial G}{\partial x}$, avec $\xi \leq \frac{l}{2}$ et $x > \xi$: nous avons

$$(45) \quad \frac{x}{\xi} \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{x - \xi}{\xi} \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial x};$$

il nous suffira donc d'étudier la limitation de $\frac{x - \xi}{\xi} \frac{\partial G}{\partial x}$. D'après (41),

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 2\xi \frac{\partial^2 \mathcal{F}(x_1, y - \eta)}{\partial x_1^2} \quad (x - \xi < x_1 < x + \xi),$$

(1) En remplaçant G par G_1 dans l'intégrale Z_0 , on obtient l'intégrale Z'_0 telle que $\frac{\partial Z'_0}{\partial x}$ s'annule sur (C) : elle donne lieu aux mêmes limitations que Z_0 .

et nous pouvons poser

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x_1^2} = \frac{1}{(y-\eta)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{x_1^2}{4(y-\eta)} - \frac{1}{2} \right) e^{\frac{-x_1^2}{4(y-\eta)}} + \mathfrak{F}_1(\xi, \eta; x, y).$$

\mathfrak{F}_1 , étant une fonction bornée quand P et II sont dans (C) ou sur (C) : elle s'exprime en effet par une série convergente ne contenant que des exponentielles à exposants tous négatifs. En utilisant l'inégalité

$$ue^{-u} < e^{-\theta u} \quad \left(0 < \theta \leq 1 - \frac{1}{e} \right) \quad (1)$$

et en remplaçant x_1 par $x - \xi$ dans l'exposant de e , nous pourrons donc écrire

$$(46) \quad \left| \frac{x - \xi}{\xi} \frac{\partial G}{\partial x} \right| < \frac{2|x - \xi|}{(y - \eta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\theta(x - \xi)^2}{4(y - \eta)}} + 2|(x - \xi)\mathfrak{F}_1|.$$

On déduit de là la limitation de

$$I_1 = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} \frac{x}{\xi} \frac{\partial G}{\partial x} f d\xi d\eta;$$

d'après (45), cette intégrale se décompose en effet en deux parties : la seconde n'est autre que $\frac{\partial Z_0}{\partial x}$; quant à la première, sa limitation se calcule, à l'aide de la formule (46), exactement comme celle de $\frac{\partial Z}{\partial x}$, puisque le second membre de (46), à un terme borné près, a la même forme que $\frac{\partial U}{\partial x}$. Donc I_1 a la même limitation que $\frac{\partial Z}{\partial x}$, à un facteur près.

De même l'intégrale

$$I_2 = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} \sqrt{\frac{y}{\eta}} \frac{\partial G}{\partial x} f d\xi d\eta$$

(1) On voit immédiatement ceci en multipliant par e^{-u} les deux membres de l'inégalité $u \leq e^{\frac{u}{e}}$, déduite de $e\alpha \leq e^\alpha$ en posant $u = e\alpha$.

a la même limitation que $\frac{\partial Z}{\partial x}$: en effet, si

$$|f| < F r_0^\beta \quad \left[\beta > -\frac{1}{2} \right],$$

la formule (44) nous donne (ici $y_0 = 0$)

$$|I_2| < \frac{\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\beta + 1)} F y^{\beta + \frac{1}{2}} < \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma\left(\beta + \frac{3}{2}\right)} F y^{\beta + \frac{1}{2}}.$$

Si nous désignons d'une manière générale par la notation $[\varphi]$ une limitation de φ , c'est-à-dire une quantité $\geq |\varphi|$ dans le domaine où l'on envisage la fonction φ , nous pourrions donc écrire

$$(44') \quad \left[-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} \frac{t}{\tau} \frac{\partial G}{\partial x} f d\xi dt_1 \right] = \mathbb{H} \left[\frac{\partial Z}{\partial x} \right],$$

\mathbb{H} étant un facteur borné dépendant des dimensions maxima de S_y .

c. Étude des dérivées dans le cas de l'équation linéaire sous la forme réduite. — Ce qui suit va présenter avec le cas elliptique de grandes analogies. La solution de l'équation

$$(46) \quad \delta z = a \frac{\partial z}{\partial x} + cz + f,$$

prenant des valeurs données sur un contour (C) situé dans une région où les coefficients sont continus, est donnée par l'équation fonctionnelle

$$(47) \quad z_P = z(x, y) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} \left(a \frac{\partial z}{\partial \xi} + cz \right)_{\mathbb{H}} G(\mathbb{H}, P) d\xi dt_1 + \zeta(x, y),$$

ζ étant la solution de $\delta z = f$ prenant sur (C) les valeurs données. Comme dans le cas elliptique, cette équation peut être dérivée par rapport à x , ce qui donnerait un système de deux équations intégrales

en z et $\frac{\partial z}{\partial x}$. Supposons le contour rectangulaire et posons $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z_1}{t}$, t ayant toujours la même signification : il vient alors après dérivation

$$(47') \quad z_1(x, y) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} (az_1 + c\tau z)_{\Pi} \frac{t}{\tau} \frac{\partial G}{\partial x} d\xi d\eta + t \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Supposant la fonction z connue *a priori*, z_1 est fournie par l'équation

$$z_1(x, y) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} (az_1)_{\Pi} \frac{t}{\tau} \frac{\partial G}{\partial x} d\xi d\eta + \varphi(x, y),$$

φ étant une fonction connue, avec $|\varphi| < \Phi$. La résolution de cette équation se fait par approximations successives, d'après les formules (44) et (44') (1), ce qui nous donne $|z_1| < \mu\Phi$, μ étant un

(1) Cf. *J. M.*, n° 20. La convergence des approximations est d'ailleurs immédiate : on a

$$z_1 = \Sigma \zeta_n, \quad \text{avec} \quad \zeta_0 = \varphi, \dots, \zeta_n = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} (a\zeta_{n-1})_{\Pi} \frac{t}{\tau} \frac{\partial G}{\partial x} d\xi d\eta,$$

et les formules (44) et (44') nous donnent, en opérant de proche en proche, Π étant un coefficient numérique et $\Lambda > |a|$,

$$|z_1| < \Phi \sum \frac{(\Lambda A \sqrt{y-y_0})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

Ainsi que dans le cas elliptique, nous pouvons utiliser les équations (47) et (47') pour obtenir la solution de l'équation (P) prenant des valeurs données sur un contour rectangulaire, avec le *minimum d'hypothèses sur les coefficients*. En effet la fonction $\zeta = az_1 + c\tau z$ satisfait à l'équation, analogue à (22),

$$\zeta_P = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} \left(a_r \frac{\partial G}{\partial x} + c_r G \right) \frac{t}{\tau} \zeta_{\Pi} d\xi d\eta + t \left(a \frac{\partial \zeta}{\partial x} + c \zeta \right)_P,$$

et l'on en déduit immédiatement la valeur de z grâce à la formule (47) : z sera alors solution de (P) si a, c, f satisfont aux conditions imposées à f pour que l'intégrale Z admette en P des dérivées vérifiant $\partial Z = f$ (*J. M.*, n° 9) : ces conditions sont analogues à celles du cas elliptique, les paraboles de sommet P et d'axe vertical jouant ici le rôle des vecteurs issus de P. La dérivée $\frac{\partial Z}{\partial y}$ se comporte comme la dérivée seconde $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}$: si f est

coefficient fixe quand la hauteur de S_y est inférieure à une certaine limite. Le calcul de Φ est immédiat, car

$$\varphi = \frac{-t}{2\sqrt{\pi}} \int \int_{S_y} (cz + f) \Pi \frac{\partial G}{\partial x} d\xi d\eta + t \frac{\partial \bar{z}}{\partial x},$$

\bar{z} étant la solution de $\delta z = 0$ prenant sur (C) les valeurs données. En supposant $|c| < C$, $|f| < F$, $|z| < M$ dans et sur (C), on a donc, d'après (43) et (44), $\Phi = \frac{2T}{\sqrt{\pi}} (CM + F) \sqrt{y - y_0} + \lambda M$, T étant le maximum de t dans S_y . D'où

$$\left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| < \frac{\lambda \mu M}{t} + \frac{2T \sqrt{y - y_0}}{\sqrt{\pi} t} (CM + F).$$

On peut donner à cette limitation une autre forme, en utilisant le contour rectangulaire tel que, relativement à celui-ci, on ait

intégrable, ces deux dérivées n'existent pas en général, mais $\frac{\partial Z}{\partial x}$ et Z admettent par rapport à x et y des accroissements d'ordre non nul (*J. M.*, n° 13). Si f est continue, on peut donner une extension du symbole δZ semblable à celle que nous avons signalée pour le cas elliptique et conduisant à des remarques analogues, que nous ne répéterons pas ici (*J. M.*, n° 16).

Les conditions d'existence de $\frac{\partial Z}{\partial y}$ sont réalisées en particulier quand f est dérivable en x ou en y , ou encore admet, pour un accroissement de x ou de y , un accroissement correspondant d'ordre non nul (*J. M.*, n° 10). Ces conditions sont évidemment les mêmes pour $\frac{\partial Z_0}{\partial y}$: c'est ainsi, par exemple, qu'on a pour un contour rectangulaire [cf. *J. M.*, *loc. cit.*, formules (26) et (26')]]

$$(48) \quad 2\sqrt{\pi} \frac{\partial Z_0}{\partial y} = - \int_{(C_y)} G_1 f(\xi, \eta) d\xi - \int \int_{S_y} G_1 \frac{\partial f}{\partial \eta} d\xi d\eta \\ = - \int_{(C_y)} G_1 f(\xi, y) d\xi - \int \int_{S_y} \frac{\partial G_1}{\partial y} [f(\xi, \eta) - f(\xi, y)] d\xi d\eta,$$

G_1 étant la fonction de Neumann (note p. 165) : la première formule s'applique quand f'_η existe, et la seconde pour $|f(\xi, \eta) - f(\xi, y)| < K |y - \eta|^\alpha$. En remplaçant dans les intégrales G_1 par G , on obtiendrait l'expression de $\frac{\partial Z'_0}{\partial y}$.

$d_1 = d_2 = \sqrt{d_0} = T = t$ au point P. En appliquant la formule ci-dessus à ce contour, intérieur au premier, et en remarquant que $y - y_0$ est alors égal à t^2 , il vient

$$(50) \quad \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right| < \frac{L_0 M}{t} + L t F,$$

L_0 et L étant des coefficients dépendant de a et c , *fixes pour une équation donnée dans une région bornée où a et c sont continus.*

Voyons maintenant la limitation de $\frac{\partial z}{\partial y}$: cela revient, d'après (4), à limiter $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. Utilisons pour cela un contour rectangulaire (C_1) intérieur à (C) et tel que, au point P, la valeur de t par rapport à (C_1) soit la moitié de sa valeur par rapport à (C) [cf. p. 178]. Dérivons l'équation (4) par rapport à x : $\frac{\partial z}{\partial x}$ sera la solution de l'équation ainsi obtenue prenant sur (C_1) des valeurs connues, dont la limitation sera fournie par (50), qui nous donnera également la limitation de $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ dans (C_1) . On trouve immédiatement ainsi une limitation de la forme

$$(50') \quad \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| < \frac{L'_0 M}{t^2} + L' F + L_1 t F_1 \quad \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| < F_1 \right),$$

L'_0 , L' et L_1 dépendant de a , c et des dérivées a'_x , c'_x . On peut établir une formule analogue, où les coefficients ne dépendent que de a , c , a'_y , c'_y (1) :

$$(51) \quad \left| \frac{\partial z}{\partial y} \right| < \frac{L''_0 M}{t^2} + L'' F + L_2 t^2 F_2 \quad \left(\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| < F_2 \right).$$

(1) Voici comment : calculons la solution de (4) connaissant $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur les côtés verticaux de (C_1) et z sur le côté horizontal. D'après la note (1), p. 165, nous aurons

$$(49) \quad 2\sqrt{\pi}z(x, y) = \int_{(C_1)} G_1 z d\xi + G_1 \frac{\partial z}{\partial \xi} d\eta - \int \int_{S_y} \left(a \frac{\partial z}{\partial \xi} + cz + f \right) G_1 d\xi d\eta.$$

Désignant par z_1 et z_2 les deux intégrales, simple et double, on a donc $z = z_1 + z_2$. Or z_2 admet un accroissement d'ordre voisin de un en y (*J. M.*, n° 13) et z_1

En remarquant que $\frac{\partial z}{\partial y}$ est solution de l'équation obtenue en dérivant (49) par rapport à y , on obtiendrait également, à l'aide du contour (C_1) utilisé plus haut, la formule de limitation

$$(52) \quad \left| \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right| < \frac{L'_0 M}{t^3} + \frac{L'' F}{t} + L_2 t F_2;$$

on peut déterminer les coefficients de façon qu'ils soient les mêmes dans (51) et (52).

d. Cas de l'équation linéaire sous sa forme générale. — Soit l'équation

$$(49) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz + f = 0,$$

dont on envisage la solution prenant des valeurs données sur un contour rectangulaire (C) [$x = x_1, x = x_2, y = y_0$] situé dans une région où b est *négatif*. Le changement de variable

$$x' = \int \sqrt{-b(x, y)} dx = \psi(x, y)$$

a une dérivée $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ de la forme $\frac{z'_1}{t}$, z'_1 étant borné. De même, en dérivant la formule (49) par rapport à x , on voit que $\frac{\partial z_2}{\partial x}$ admet un accroissement d'ordre $\frac{1}{2}$ en y et que $\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = \frac{z''_1}{t^2}$. Pour étudier la dérivée de l'intégrale double z_2 , nous procéderons alors par itération : en y remplaçant z par $z_1 + z_2$, nous aurons une partie relative à z_2 , qui admet une dérivée en y grâce à l'accroissement de z_2 et $\frac{\partial z_2}{\partial x}$ [cf. formule (48)], et une partie relative à z_1 , que nous décomposerons en deux en partageant l'aire au moyen d'un contour (C_2) défini par rapport à (C_1) comme (C_1) l'est par rapport à (C) : l'intégrale étendue à l'intérieur de (C_2) admet une dérivée en y [cf. (48)], et l'autre se dérive directement. Le résultat de ces opérations est d'obtenir pour $\frac{\partial z}{\partial y}$ une limitation de la forme $\frac{LM'}{t} + L'F_2$, avec $M' > \left| \frac{\partial z}{\partial x} \right|$ dans et sur (C_1) . On passe de là à la formule (51) en calculant M' au moyen de (50).

transforme (\mathcal{P}_0) en une équation du type canonique (\mathcal{P}) ⁽¹⁾; le point $P(x, y)$ devient $P'(x', y)$ et (C) devient un contour (C') bordé par deux courbes C_1 et C_2 , d'équations $x' = \mathfrak{w}(x_i, y) = X_i(y)$ [$i = 1, 2$]. Cette transformation suppose que b admette des dérivées premières et, par suite, nous sommes ici dans le cas où

$$|X_i(y) - X_i(y')| < K |y - y'|^{\frac{1+\alpha}{2}} \quad [0 < \alpha \leq 1 \quad (J. M., p. 309)].$$

Envisageons alors le contour rectangulaire (γ) intérieur à (C') , admettant comme côtés verticaux les droites d'abscisses $\frac{x' + X_i(y)}{2}$ et ayant un de ses sommets au moins sur (C') ; soit y'_0 l'ordonnée de la caractéristique inférieure : les formules (51) et (52) s'appliquent à l'équation réduite (\mathcal{P}) , au point P' et à (γ) , en remplaçant t par le plus petit des nombres $\frac{x' - X_i}{2}$ et $\sqrt{y - y'_0}$, soit t' . Si $y'_0 = y_0$, t' est le plus petit des nombres $\frac{x' - X_i}{2}$ et $\sqrt{y - y_0}$, soit t_0 ; si $y'_0 < y_0$, l'un des deux points $(\frac{x' + X_i}{2}, y'_0)$ est sur C_i et l'on a donc

$$\left| \frac{x' - X_i(y)}{2} \right| < K |y - y'_0|^{\frac{1+\alpha}{2}},$$

d'où

$$\sqrt{y - y'_0} > K_1 |x' - X_i(y)|,$$

de sorte que t' est, à un facteur près ne dépendant que de (C) et de b , plus grand que t_0 . Il résulte de là que les formules (50) et (51) s'appliquent au point P' en remplaçant t par t_0 à un facteur près et, si l'on revient au système (x, y) et à l'équation (\mathcal{P}_0) , on en déduit immédiatement des formules complètement analogues à (50), (51) et (52),

(1) Dans cette équation réduite les coefficients dépendent des dérivées premières de b : il semble donc que l'existence de ces seules dérivées ne suffise pas pour calculer une limitation de $\frac{\partial z}{\partial y}$, et qu'il convienne par exemple d'utiliser certaines dérivées secondes de b . En réalité il n'en est pas ainsi, comme nous le verrons dans le second Mémoire à propos de la recherche directe de la solution fondamentale de (\mathcal{P}_0) .

dans lesquelles les coefficients dépendent de a, b, c, b'_x, b'_y , et aussi de a'_x, c'_x pour (50') et a'_y, c'_y pour (51) et (52) (1).

e. Remarque. — Ici nous n'avons pas, comme dans le cas elliptique, explicité les coefficients des formules de limitation. Cela nous sera, en effet, inutile grâce au raisonnement suivant : par le changement de variable $x = \lambda \bar{x}, y = \lambda^2 \bar{y}$, l'équation (Φ_0) devient

$$(\bar{\Phi}_0) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \bar{x}^2} + a \lambda \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} + b \frac{\partial z}{\partial \bar{y}} + c \lambda^2 z + f \lambda^2 = 0.$$

Utilisant une notation déjà employée (p. 170), nous pouvons écrire pour (Φ_0) et ($\bar{\Phi}_0$)

$$(53) \quad \left[\frac{\partial z}{\partial y} \right] = \frac{L_0'' M}{t^2} + L'' F + L_2 t^2 F_2, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial \bar{y}} \right] = \frac{\bar{L}_0'' M}{\bar{t}^2} + \bar{L}'' \bar{F} + \bar{L}_2 \bar{t}^2 \bar{F}_2,$$

les notations s'expliquant d'elles-mêmes. Or

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lambda^2 \frac{\partial z}{\partial \bar{y}}, \quad t = \lambda \bar{t}, \quad \bar{F} = \lambda^2 F, \quad \bar{F}_2 = \left[\frac{\partial f \lambda^2}{\partial \bar{y}} \right] = \lambda^3 F_2.$$

Remplaçant dans la seconde limitation, on trouve ainsi

$$\left[\frac{\partial z}{\partial y} \right] = \frac{\bar{L}_0'' M}{\bar{t}^2} + \bar{L}'' F + \bar{L}_2 \bar{t}^2 F_2,$$

et, en comparant avec la première formule (53), on en déduit $\bar{L}_0'' = L_0''$, $\bar{L}'' = L$, $\bar{L}_2 = L_2$, c'est-à-dire que, lorsqu'on change a, c, f, t respectivement en $a \lambda, c \lambda^2, f \lambda^2, \frac{t}{\lambda}$, les coefficients des formules (51) et (52) ne changent pas. *A fortiori, pour $\lambda > 1$, peut-on conserver les mêmes*

(1) Dans le cas d'un contour continu quelconque \mathcal{E} , on obtient les mêmes formules de limitation en donnant à t la signification indiquée dans la note de la page 167. Comme dans le cas elliptique, on verrait aisément que $t \frac{\partial z}{\partial x}$ et $t^2 \frac{\partial z}{\partial y}$ tendent vers zéro quand P tend vers un point de \mathcal{E} .

valeurs à ces lettres L si l'on effectue sur les coefficients de (Q) une seule des substitutions indiquées (par exemple c en $c\lambda^2$), car les limitations sont évidemment des fonctions croissantes des modules maxima des coefficients de (Q) et des dérivées qu'on leur suppose; on peut également faire varier f d'une façon quelconque puisque les L n'en dépendent pas. [Nous aurions pu employer une méthode analogue dans le cas elliptique, au lieu d'expliciter la limitation (24).]

7. NATURE DES SOLUTIONS DES ÉQUATIONS. — Nous avons maintenant posé tous les jalons nécessaires à l'étude de la nature des solutions. Rappelons tout d'abord rapidement la marche à suivre pour l'équation $\delta z = f$ (pour les détails, voir *J. M.*, *loc. cit.*). Nous procéderons absolument comme dans le cas elliptique : la formule fondamentale, en supposant par exemple le contour (C) rectangulaire, nous donne $z = z_0 + Z$, z_0 étant une solution de $\delta z = 0$, dont la nature est connue, et Z étant l'intégrale double déjà étudiée. Nous traiterons Z comme nous avons traité V [(25) et (26); cf. *J. M.*, nos 47 et 53], ce qui nous montrera que, si f est de classe $\alpha \geq 1$ en x , ou de classe $\beta \geq 1$ en y , ou de classe α en x et β en y , il en est de même de Z . Comme z_0 est analytique en x et de classe 2 en y (p. 167), toute solution de $\delta z = 0$ sera de même nature que f si $\beta \geq 2$; mais si $\beta < 2$, z sera de classe 2 en y comme z_0 . Ainsi donc, si f est analytique en y , Z le sera également, mais non pas forcément z . Nous reviendrons dans le Chapitre suivant sur cette question de l'analyticité en y (1).

a. Étude de la nature des solutions par rapport à x . — Envisageons l'équation (Q), ainsi que les équations

$$\begin{aligned} (\mathcal{Q}_1) \quad & \delta z = f(x, y, z, p), \\ (\mathcal{Q}_2) \quad & f(x, y, z, p, q, r) = 0 \quad (f'_q f'_r < 0), \end{aligned}$$

les fonctions f étant continues en y et de classe α en (x, z, p, q, r)

(1) La fonction Z_0 jouit, par rapport à y , des mêmes propriétés que Z , ce qui se verrait par l'application répétée de la formule (48).

dans un domaine ω . L'équation (\mathcal{E}_2) peut se mettre sous la forme

$$q + \varphi(x, y, z, p, r) = 0 \quad (\varphi'_r < 0),$$

φ étant de classe α en (x, z, p, q) (n° 2, Remarque II, p. 141).

Toute solution régulière z appartenant à ω est de classe α en x , ainsi que $\frac{\partial z}{\partial y}$. Pour le démontrer il suffit de suivre pas à pas la méthode employée dans le cas elliptique (n° 5), la seule différence étant la suivante : au lieu d'utiliser des cercles successifs entourant le point P_0 , on envisage une suite de contours rectangulaires $(C_0), (C_1), \dots, (C_n)$ entourant P_0 et tels que, pour le $n^{\text{ième}}$ contour, les valeurs $d_i^{(n)}$ et t_n de d_i et de t ($i = 0, 1, 2$; voir p. 166), relativement au point P_0 , satisfassent aux conditions

$$d_1^{(n)} = d_2^{(n)} = \sqrt{d_0^{(n)}} = t_n = \frac{t_0}{n},$$

t_0 étant relatif à (C_0) . L'inégalité $\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} > \sqrt{y_1 + y_2}$ montre alors que le t de tout point de (C_n) est au moins égal à $t_0 - t_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)t_0$, et t_0 joue ainsi le même rôle que d_0 dans le cas elliptique. En ce qui concerne spécialement l'équation (\mathcal{E}_2) , nous supposons que φ'_r devient, quand on y remplace z par la solution étudiée, une fonction de x et y admettant des dérivées premières : r s'exprimant en fonction de p et de q , ceci sera réalisé si z et ses dérivées premières et secondes sont continues dans ω ; aussi nous ferons cette hypothèse dans la suite pour l'équation (\mathcal{E}_2) , bien qu'elle ne soit pas indispensable. Pour les équations (\mathcal{E}) et (\mathcal{E}_1) la continuité de z, p, q (et par suite r) suffit : ce sont les hypothèses qui caractérisent une solution régulière.

b. Étude par rapport à y . — Nous donnerons seulement la démonstration dans le cas de l'équation (\mathcal{E}_2) , qui est le plus difficile : f étant supposée de classe $\beta \geq 2$ en (y, z, p, q, r) , nous pouvons mettre l'équation sous la forme

$$r + \varphi(x, y, z, p, q) = 0 \quad (\varphi'_q < 0),$$

φ étant continue en x et de classe β en (y, z, p, q) : nous allons montrer

que toute solution z appartenant à \mathfrak{D} et admettant des dérivées premières et secondes est de classe β en y , ainsi que $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Une dérivation par rapport à y nous donne, en effet,

$$(54) \quad \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \varphi'_p \frac{\partial q}{\partial x} + \varphi'_q \frac{\partial q}{\partial y} + q\varphi'_z + \varphi'_y = 0,$$

et q est la solution de cette équation prenant des valeurs données sur un contour rectangulaire (C) situé dans une région du plan des (x, y) appartenant à \mathfrak{D} . Les coefficients de l'équation (54) étant dérivables en y (d'après les hypothèses faites sur z), $\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y}$ existe dans (C). Or, si nous dérivons une seconde fois en y , il vient

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2} + \varphi'_p \frac{\partial z_2}{\partial x} + \varphi'_q \frac{\partial z_2}{\partial y} + \varphi''_{q^2} z_2^2 + \left(2\varphi''_{pq} \frac{\partial q}{\partial x} + 2q\varphi''_{zq} + 2\varphi''_{yq} + \varphi'_z \right) z_2 + \varphi_2 = 0$$

en posant $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_2$; φ_2 ne contient que des dérivées du premier ordre au plus en y (et aussi en x). Cette équation est linéaire par rapport aux dérivées de l'inconnue z_2 et ses coefficients sont dérivables par rapport à y dans (C), puisque $\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y}$ y existe. Il résulte alors de la théorie des équations du type parabolique que la résolution de l'équation est possible; donc $\frac{\partial z_2}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_2}{\partial y}$, c'est-à-dire $\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}$, existent à l'intérieur de (C). Soit alors (C_3) un contour intérieur à (C) : nous sommes assurés de l'existence de z, p et de leurs dérivées premières et secondes par rapport à y dans et sur (C_3) , et c'est ce contour que nous prendrons comme contour (C_0) initial.

Nos hypothèses sont alors les suivantes : les dérivées φ' , coefficients de l'équation (54), étant de même classe que φ en (y, z, p, q) , on a

$$(55) \quad \left| \frac{\partial^{n_1+\dots+n_s} \varphi'}{\partial y^{n_1} \dots \partial q^{n_s}} \right| < \Phi \rho_1 \frac{|\Gamma(n_1 - \lambda) \Gamma(n_2 - \nu) \dots \Gamma(n_s - \nu)|^\beta}{\rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2+\dots+n_s}},$$

et nous supposons qu'on ait, pour $m < n$, t étant relatif à tout point et

à tout contour intérieurs à (C_3) ,

$$(56) \quad \begin{cases} \left| \frac{\partial^{m+1} z}{\partial y^{m+1}} \right| = \left| \frac{\partial^m q}{\partial y^m} \right| < z_0 \rho \frac{|\Gamma(m-\lambda)|^\beta}{(\mu t^2)^{m-2}}, \\ \left| \frac{\partial^{m+2} z}{\partial x \partial y^{m+1}} \right| = \left| \frac{\partial^{m+1} p}{\partial y^{m+1}} \right| < z_0 \rho \frac{m |\Gamma(m-\lambda)|^\beta}{t(\mu t^2)^{m-2}}. \end{cases}$$

Il nous faut montrer que ceci est vrai pour $m = n$. Or, la fonction $z_n = \frac{\partial^n z}{\partial y^n}$ est solution de l'équation obtenue en dérivant (54) $n - 1$ fois.

$$(57) \quad \frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + \varphi'_p \frac{\partial z_n}{\partial x} + \varphi'_q \frac{\partial z_n}{\partial y} + \left[(n-1) \frac{d\varphi'_q}{dy} + \varphi''_{q^2} \frac{\partial q}{\partial y} + \varphi''_{pq} \frac{\partial q}{\partial x} + q \varphi''_{zq} + \varphi''_{yq} + \varphi'_{z^2} \right] z_n + \varphi_n = 0,$$

la notation d désignant, comme dans le n° 5, la dérivée par rapport à y de la fonction composée φ'_q , et φ_n ne contenant que des dérivées d'ordre $< n$ par rapport à y . La solution z_n est considérée comme déterminée par les valeurs prises sur un contour (C_n) rectangulaire intérieur à (C_3) . Les coefficients de l'équation (57) sont d'ailleurs dérivables en y dans et sur (C_n) , d'après ce que nous avons dit dans le précédent alinéa, et de plus $\frac{d\varphi_n}{dy}$ ne contient que des dérivées du premier ordre au plus en x et du $n^{\text{ième}}$ au plus en y , dont la limitation est par conséquent supposée connue. Les formules (51) et (52), appliquées au contour (C_n) et à un point intérieur fixe $P_0(x_0, y_0)$, nous donnent

$$(58) \quad \left[\frac{\partial z_n}{\partial y_0} \right] = \frac{L_0[z_n]}{t_n^2} + L[\varphi_n] + L_2 t_n^2 \left[\frac{d\varphi_n}{dy} \right], \quad \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x_0 \partial y_0} \right] = \frac{1}{t_n} \left[\frac{\partial z_n}{\partial y_0} \right].$$

D'après la remarque de la page 157, nous obtiendrons des limitations pour φ_n et sa dérivée en ajoutant celles des expressions [cf. (40)]

$$\psi_n = \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left(\varphi'_q \frac{\partial q}{\partial y} \right) - \varphi'_q \frac{\partial^n q}{\partial y^n}, \quad \chi_n = \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \left(\varphi'_p \frac{\partial p}{\partial y} + q \varphi'_z + \varphi'_y \right)$$

et de leurs dérivées par rapport à y . Ce calcul se fait au moyen des formules (55) et (56), en supposant, comme pour (40), μ choisi de telle sorte que la première limitation (56) s'applique aussi à $\frac{\partial^m p}{\partial y^m}$ et $\frac{\partial^m z}{\partial y^m}$ et qu'on puisse, dans (55), remplacer ρ_i par $\mu(t_0 - t_n)$, t_0 étant le t de P_0 par rapport au contour initial. On trouve ainsi

$$\begin{aligned} [\gamma_n] &= x_0 \Phi \rho \frac{|\Gamma(n-1-\lambda)|^\beta}{[\mu(t_0-t_n)^2]^{n-3}}, & \left[\frac{d\gamma_n}{dy} \right] &= x_0 \Phi \rho \frac{|\Gamma(n-\lambda)|^\beta}{[\mu(t_0-t_n)^2]^{n-2}}, \\ [\psi_n] &= (n-1)[\gamma_n], & \left[\frac{d\psi_n}{dy} \right] &= n \left[\frac{d\gamma_n}{dy} \right], \end{aligned}$$

en remarquant que les limitations maxima sont atteintes sur les côtés de (C_n) et utilisant alors la Remarque de la page 178. En remplaçant dans (58) $[z_n]$ par $x_0 \rho \frac{|\Gamma(n-1-\lambda)|^\beta}{[\mu(t_0-t_n)^2]^{n-3}}$ et φ_n par $\psi_n + \gamma_n$, il vient

$$(59) \quad \left[\frac{\partial z_n}{\partial y_0} \right] = x_0 \rho \frac{|\Gamma(n-\lambda)|^\beta}{[\mu(t_0-t_n)^2]^{n-3}} \times \left[\frac{L_0}{(n-1-\lambda)^\beta t_n^2} + \frac{L_1 n x \Phi}{(n-1-\lambda)^\beta} + L_2 (n+1) t_n^2 x \Phi \right].$$

Posons $nt_n = t_0$ et désignons par $(n-1) \frac{d\varphi'_q}{dy} + \theta$ le coefficient de z_n dans (57) : sa limitation est moindre que

$$(n-1) \left[\frac{d\varphi'_q}{dy} \right] + [\theta] < n \left\{ \left[\frac{d\varphi'_q}{dy} \right] + [\theta] \right\}.$$

Par suite, toutes les équations (57) sont des équations du type (\mathcal{Q}_0) pour lesquelles on remplace $[c]$, $[c'_y]$ et t_0 par les valeurs successives de $n[c]$, $n[c'_y]$ et $\frac{t_0}{n}$: donc, d'après la Remarque e du n° 6, les coefficients L de la formule (58) sont *indépendants de n* . Utilisant $\beta \geq 2$, la formule (59) nous donne aisément (cf. nos 4-5),

$$\left[\frac{\partial z_n}{\partial y_0} \right] = x_0 \rho \frac{|\Gamma(n-\lambda)|^\beta}{(\mu t_0)^{n-2}} \mu H_n, \quad \left[\frac{\partial^2 z_n}{\partial x_0 \partial y_0} \right] = \frac{n}{t_0} \left[\frac{\partial z_n}{\partial y_0} \right],$$

H_n étant borné ; d'où résulte, comme on l'a déjà vu plusieurs fois, que

les formules (56) sont vraies pour $m = n : z$ et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sont donc de classe β en y .

L'extension de cette méthode à l'étude de la classe de z par rapport aux deux variables (x, y) ne souffre aucune difficulté et l'on aboutit ainsi aux énoncés donnés dans l'Introduction.

IV. — Problèmes de Cauchy et problèmes de prolongement.

8. ÉQUATIONS DU TYPE ELLIPTIQUE. — Envisageons d'abord le problème de Cauchy relatif à l'équation $\Delta z = f$. Si nous nous donnons les valeurs $\varphi(y)$ et $\psi(y)$ de z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur Oy , la solution correspondante est $z = u + u_0$, avec

$$u = \frac{1}{2} [\varphi(y + ix) + \varphi(y - ix)] + \frac{1}{2} \int_0^x [\psi(y + i\xi) + \psi(y - i\xi)] d\xi;$$

$$(60) \quad u_0 = \int_0^x d\xi \int_0^\xi \frac{f(x - \xi, y + i\eta) + f(x - \xi, y - i\eta)}{2} d\eta;$$

u est la solution de $\Delta u = 0$ répondant aux conditions données et u_0 est la solution de $\Delta u_0 = f$ s'annulant sur Oy , ainsi que sa dérivée par rapport à x : la vérification est immédiate.

Ces formules supposent φ , ψ et f analytiques en y : f peut donc être simplement une fonction continue en x . La solution est, elle aussi, analytique en y , et, pour préciser ce point, nous allons étudier l'intégrale u_0 dans un domaine à trois dimensions (x, y_1, y_2) , en posant $y = y_1 + iy_2$. Pour cela, supposons f analytique dans un prisme Π d'axe Oy_1 , ayant pour section droite un carré dont les diagonales sont parallèles à Ox et Oy_2 ; nous prendrons deux de ces sections comme bases. Soit un point $M(x, y_1, y_2)$ situé dans le prisme; d'après (60), on a $\eta \leq \xi \leq x$: donc les points μ et $\mu'(x - \xi, y_1, y_2 \pm \eta)$, situés dans le plan d'abscisse $x - \xi$, entre ses deux points de rencontre avec les parallèles menées par M aux côtés de la section droite, sont intérieurs à Π , et l'intégrale double u_0 qui porte sur la fonction $f_\mu + f_{\mu'}$ est une

fonction analytique de y dans Π . On a d'ailleurs facilement

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \int_0^x \frac{f(x-\xi, y+i\xi) + f(x-\xi, y-i\xi)}{2} d\xi,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial y} = \int_0^x \frac{f(x-\xi, y+i\xi) - f(x-\xi, y-i\xi)}{2i} d\xi;$$

ce sont deux fonctions analytiques de y dans Π et, si $|f| < F|x|^\lambda$, on a

$$(61) \quad |u_0| < \frac{F|x|^{\lambda+2}}{(\lambda+1)(\lambda+2)}, \quad \left| \frac{\partial u_0}{\partial x} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial u_0}{\partial y} \right| < \frac{F|x|^{\lambda+1}}{\lambda+1}.$$

Il est aisé de déduire de là la solution z de l'équation (c) (p. 131) connaissant z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur Oy , en supposant les coefficients a, b, c, f analytiques en y dans un domaine \mathcal{O} de notre espace à trois dimensions traversé par Oy ; z est solution de l'équation intégrale

$$z(x, y) = u + u_0 + \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_0^\xi \left[\left(a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz \right)_\mu + \left(a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz \right)_{\mu'} \right] d\eta.$$

Appelons $\mathfrak{F}(z)$ l'intégrale double; notre équation se résout très simplement par approximations successives dans un prisme Π intérieur à \mathcal{O} : on a $z = \sum z_n$, avec $z_0 = u_0$ et $z_n = \mathfrak{F}(z_{n-1})$.

En utilisant les limitations (61), qu'on peut remplacer par une limitation commune de la forme $\frac{\mu F|x|^{\lambda+1}}{\lambda+1}$, on voit immédiatement que les modules de z_n et de ses dérivées premières sont inférieurs à

$$M \frac{[\mu(A+B+C)x]^n}{n!} \quad (\text{avec } |z_0| < M, |a| < A, |b| < B, |c| < C);$$

d'où la convergence absolue et uniforme des séries $\sum z_n, \sum \frac{\partial z_n}{\partial x}$, dont les termes sont analytiques en y dans Π et qui représentent par suite des fonctions analytiques dans Π : z est donc solution de l'équation intégrale et par suite de (c).

Une méthode semblable s'appliquerait à l'équation (\mathcal{C}_1) (p. 131) en supposant f analytique en y, z, p, q dans le domaine ω et pour $|z|, |p|$ et $|q| < N$. On procéderait encore par approximations successives, en résolvant les équations $\Delta z_{n+1} = f(x, y, z_n, p_n, q_n)$, et la convergence de la série $z_0 + \Sigma(z_{n+1} - z_n)$ résulterait immédiatement de l'inégalité

$$\begin{aligned} & |f(x, y, z_n, p_n, q_n) - f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})| \\ & < A|z_n - z_{n-1}| + B|p_n - p_{n-1}| + C|q_n - q_{n-1}|. \end{aligned}$$

Nous venons ainsi de résoudre le problème de Cauchy pour les équations (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}_1) , avec Oy ou une parallèle comme frontière, en supposant simplement, relativement aux variables indépendantes, outre la continuité, l'analyticité en y seule. Si la frontière est un arc analytique, il faudra supposer l'analyticité en (x, y) , à moins qu'une transformation conforme puisse nous ramener au cas étudié.

Ce qui précède va nous servir à étudier *le prolongement des solutions*. Rappelons qu'une solution z d'une équation aux dérivées partielles, régulière dans une région \mathcal{R} , est dite *prolongeable* au delà d'une portion Γ de la frontière de \mathcal{R} , s'il existe une solution z' , régulière dans une région \mathcal{R}' contenant à son intérieur la courbe Γ et coïncidant avec z dans la région commune à \mathcal{R} et à \mathcal{R}' .

Cherchons donc dans quel cas une solution des équations du type elliptique sera prolongeable au delà de Γ , et supposons d'abord que Γ soit un segment AB parallèle à Oy . Le problème, pour l'équation $\Delta z = 0$, est classique : *il faut et il suffit que z se réduise sur AB à une fonction analytique de y* . La condition est la même pour une solution de $\Delta z = f(x, y)$ quand f est analytique en y : en effet l'intégrale V de la formule (25), étendue à un domaine contenant AB , est alors analytique en y et, par suite, $z - V$, fonction harmonique analytique sur AB , étant prolongeable au delà de AB , z l'est aussi.

Envisageons maintenant les équations (\mathcal{C}) et (\mathcal{C}_1) , en supposant les coefficients de (\mathcal{C}) analytiques en y et la fonction $f(x, y, z, p, q)$ analytique en (y, z, p, q) de part et d'autre de AB : il résulte immédiatement des nos 4 et 5 que, *pour qu'une solution de (\mathcal{C}) et de (\mathcal{C}_1) , régulière d'un côté de AB , soit prolongeable de l'autre côté, il est nécessaire que z*

soit sur AB une fonction analytique de y , puisqu'elle doit être régulière dans une région contenant AB. Mais il reste à montrer que la condition est suffisante, et nous y arriverons grâce aux théorèmes sur la nature des solutions de (\mathcal{C}) , (\mathcal{C}_1) , (\mathcal{C}_2) par rapport à y . Ceux-ci, en effet, nous ont fourni la même nature analytique pour z et $\frac{\partial z}{\partial x}$. Supposons alors que le contour initial C_0 soit un demi-cercle limité par un diamètre vertical situé sur AB, d'abscisse x_0 , et que $z(x_0, y) = \varphi(y)$ soit de classe $\beta \geq 1$ en y $\left[\left| \varphi^{(n)} \right| < M \frac{n!^\beta}{\rho^n} \right]$; les limitations des dérivées premières de z sont valables dans C_0 et sur AB, car il suffit d'ajouter au second membre des formules (21) ou (24) un terme qui n'est autre, à un facteur près, que la limitation de $\varphi'(y)$ (1), et qu'on peut d'ailleurs combiner avec les autres termes de façon à conserver aux limitations les formes (21) ou (24), les coefficients étant convenablement choisis.

Cela posé, étant donné un point $P_0(x_0, y_0)$ sur AB, nous pourrions prendre comme contours successifs C_n des demi-cercles choisis d'après la loi indiquée aux nos 4-5, ayant leur diamètre sur AB, et obtenir ainsi en P_0 des limitations semblables à celle des nos 4-5, avec des coefficients qui dépendront de ρ . Donc $\frac{\partial z}{\partial x_0}$ est de classe β en y . Ainsi, lorsqu'une des équations (\mathcal{C}) , (\mathcal{C}_1) , (\mathcal{C}_2) admet d'un certain côté de AB une solution régulière z de classe $\beta \geq 1$ en y , si z se réduit sur AB à une fonction de classe β en y , il en est de même de $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Ceci nous démontre donc la condition suffisante que nous avons énoncée pour le prolongement des solutions de (\mathcal{C}) ou de (\mathcal{C}_1) car, z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ étant alors analytiques sur AB ($\beta = 1$), nous pourrions définir z de part et d'autre de AB comme solution d'un problème de Cauchy, que nous avons appris plus haut à résoudre.

Revenons maintenant au cas du prolongement, au delà d'un arc Γ que nous supposons analytique, d'une solution de (\mathcal{C}) , (\mathcal{C}_1) ou (\mathcal{C}_2) , les coefficients ou les fonctions f étant supposés, dans ces équations,

(1) Ceci se voit très simplement en utilisant la fonction de Green pour le demi-cercle et suivant la même méthode qu'au n° 3.

analytiques par rapport à tous leurs arguments et en particulier par rapport à x et y : pour que z soit prolongeable au delà de Γ , il faut et il suffit que les valeurs prises par z sur Γ constituent une fonction analytique. En effet, la condition est nécessaire d'après les nos 4-5, et une transformation conforme qui change Γ en un segment de Oy nous permettra d'appliquer le théorème sur l'analyticité de $\frac{\partial z}{\partial x}$ le long de la frontière et d'avoir encore z comme solution d'un problème de Cauchy, obtenue par la méthode classique (1).

9. ÉQUATIONS DU TYPE PARABOLIQUE. — Nous allons compléter dans ce numéro certains résultats obtenus dans le Mémoire du *Journal de Mathématiques*, 1913 (nos 55-58), auquel le lecteur voudra bien se reporter pour ce que nous ne démontrons pas ici. La solution du problème de Cauchy pour l'équation $\delta z = f$ est égale à $u + u_0$, u étant la solution de $\delta z = 0$ prenant, ainsi que $\frac{\partial z}{\partial x}$, des valeurs données sur Oy , et u_0 étant la fonction

$$u_0(x, y) = \int_0^x \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\partial^p f(\xi, y)}{\partial y^p} d\xi,$$

solution de $\delta z = f$, s'annulant sur Oy ainsi que sa dérivée par rapport à x . La série écrite converge et représente la solution pour $|x| < R$ et $y_1 < y < y_2$, si dans ce domaine on a $\left| \frac{\partial^p f}{\partial y^p} \right| < F \frac{(2p)!}{R^{2p}}$. On déduit de là la solution du problème pour l'équation linéaire (P) (p. 131) : nous avons traité cette question dans le Mémoire cité, mais nous allons la reprendre rapidement par une autre méthode basée sur les résultats du n° 2, et qui s'applique aussi *mutatis mutandis* à l'équation non linéaire (P₁). La solution de (P) est donnée par l'équation

$$(62) \quad z(x, y) = u + u_0 + \int_0^x \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^{2p+1}}{(2p+1)!} \frac{\partial^p}{\partial y^p} \left(a \frac{\partial z}{\partial \xi} + cz \right) d\xi.$$

(1) Dans les équations (C) et (C₁) l'analyticité par rapport aux deux variables primitives n'est pas nécessaire, si la transformation conforme les rend analytiques en y .

Soit $A \frac{\Gamma(\beta p - \frac{1}{2})}{(R-x)^{2p}}$ la limitation, pour $x > 0$, de la dérivée $p^{\text{ième}}$ des coefficients a, c, f , que nous supposons de classe β en y , avec $1 \leq \beta \leq 2$. Montrons qu'on a $z = \Sigma z_n$, avec $z_0 = u + u_0, \dots, z_{n+1} = \mathfrak{F}(z_n)$, $\mathfrak{F}(z)$ désignant l'intégrale de (62) : pour cela supposons démontré que $\left| \frac{\partial^q z_m}{\partial y^q} \right|$

et $\left| \frac{\partial^{q+1} z_m}{\partial x \partial y^q} \right|$ sont moindres que $\frac{M(\lambda x)^m}{m!} \frac{\Gamma(\beta q - \frac{1}{2})}{(R-x)^{2q}}$ pour $m \leq n$ (q étant un entier quelconque), et voyons que ceci est vrai pour $m = n + 1$. On a

$$\frac{\partial^{q+1} z_{n+1}}{\partial x \partial y^q} = \int_0^x \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(x-\xi)^{2p}}{(2p)!} \frac{\partial^{p+q}}{\partial y^{p+q}} \left(a \frac{\partial z_n}{\partial \xi} + c z_n \right) d\xi.$$

D'après le n° 2 (Remarque III et note, p. 142), on peut écrire

$$\left| \frac{\partial^{p+q}}{\partial y^{p+q}} \left(a \frac{\partial z_n}{\partial \xi} + c z_n \right) \right| < \frac{z A M(\lambda \xi)^n}{n!} \frac{\Gamma\left[\beta(p+q) - \frac{1}{2}\right]}{(R-\xi)^{2(p+q)}},$$

et, comme $\Gamma\left(\beta p + \beta q - \frac{1}{2}\right)$ est $\leq \int_0^{\infty} e^{-t} t^{2p+\beta q - \frac{3}{2}} dt$, l'intégrale est limitée par

$$z A M \int_0^x \frac{(\lambda \xi)^n d\xi}{(R-\xi)^{2q}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta q - \frac{3}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{[t(x-\xi)]^{2p}}{(2p)!(R-\xi)^{2p}} dt.$$

La somme Σ étant inférieure à $e^{-t \frac{x-\xi}{R-\xi}}$, la seconde intégrale est moindre que

$$\int_0^{\infty} e^{-t \frac{R-x}{R-\xi}} t^{\beta q - \frac{3}{2}} dt = \left(\frac{R-\xi}{R-x} \right)^{\beta q - \frac{1}{2}} \Gamma\left(\beta q - \frac{1}{2}\right).$$

Substituant et remarquant qu'on a $R-x \leq R-\xi$, on trouve

$$\left| \frac{\partial^{q+1} z_{n+1}}{\partial x \partial y^q} \right| < \frac{z A M x (\lambda x)^n}{(n+1)!} \frac{\Gamma\left(\beta q - \frac{1}{2}\right)}{(R-x)^{2q}}.$$

En multipliant ceci par x (ou même $\frac{x}{n+2}$), on obtient une limitation de $\frac{\partial^q z_n}{\partial y^q}$; si donc λ est le plus grand des deux nombres λA et λAR , notre objet se trouve réalisé. On obtient ainsi des séries uniformément convergentes pour $|x| < R$, et le lecteur en conclura immédiatement que $z = \Sigma z_n$ est bien la solution cherchée.

Nous déduisons de là que, si nous envisageons les équations (\mathcal{Q}) ou (\mathcal{Q}_1) , en supposant a, c, f de classe 2 en y ou $f(x, y, z, p)$ de classe 2 en (y, z, p) , pour qu'une solution z , régulière d'un côté d'un segment vertical AB , soit prolongeable au delà, il faut et il suffit que z se réduise sur AB à une fonction de classe 2 en y . La condition est en effet nécessaire d'après le n° 7 et, pour démontrer qu'elle est suffisante, il suffit de voir que $\frac{\partial z}{\partial x}$ est aussi de classe 2 sur AB . Or, comme dans le cas elliptique, ceci s'établira aisément en utilisant des contours (C_n) ayant tous un côté sur AB . Au cas où AB est un arc d'équation $x = X(y)$, X étant de classe 2 en y , le théorème est encore vrai si, en posant $x = x' + X(y)$, le premier membre de l'équation (mise sous la forme $\mathcal{F} = 0$) devient de classe 2 en (y, z, p') , p' étant la nouvelle valeur de p : ceci aura lieu en particulier si le premier membre de l'équation donnée est de classe 2 en (x, y, z, p) .

Ce qui précède est analogue à l'étude du prolongement dans le cas elliptique, les fonctions de classe 2 en y jouant ici le rôle des fonctions analytiques dans le n° 8. Mais le cas parabolique donne lieu à d'autres problèmes. Supposons, en effet, que dans les énoncés relatifs à (\mathcal{Q}) , (\mathcal{Q}_1) et (\mathcal{Q}_2) (voir Introduction) on ait $1 \leq \beta < 2$, et soit une solution d'une de ces équations définie à l'intérieur d'un rectangle B, A_1, A_2, B_2 et se réduisant sur les côtés verticaux A_1, B_1, A_2, B_2 à deux fonctions de classe β en y . Nous pourrions alors choisir des contours successifs (C_n) ayant leurs deux côtés verticaux sur A_1, B_1 et A_2, B_2 et leur côté horizontal, *seul variable*, parallèle à A_1, A_2 ; pour chaque contour, les limitations (51) et (52) seront valables sur les côtés verticaux, mais t^2 sera égal à d_0 , de sorte qu'à chaque dérivation il s'introduit en dénominateur un facteur du premier degré. On peut alors choisir, comme loi de variation du côté horizontal, $d_0^{(n)} = \frac{d_0}{n}$ et

établir ainsi, par un mécanisme analogue cette fois à celui du cas elliptique, que z et $\frac{\partial z}{\partial x}$ sont de classe β en y dans le rectangle donné.

Ainsi donc les énoncés de la page 131, relatifs à la classe de z en x , en y ou en (x, y) dans le type parabolique et supposant $\beta \geq 2$, subsistent pour $1 \leq \beta < 2$ (et $\alpha \geq 1$) si z est de classe β en y sur les deux côtés verticaux du rectangle (appartenant à ∞). Dans le cas des équations (\mathcal{P}) et (\mathcal{P}_1) , avec $1 \leq \beta \leq 2$, z est d'ailleurs prolongeable au delà des deux côtés verticaux, d'après la résolution du problème de Cauchy que nous avons donnée plus haut.

Nous pouvons d'ailleurs supposer le contour (C) non rectangulaire, mais bordé par deux arcs A_1B_1 , A_2B_2 , ayant pour équations $x = X_1(y)$, $x = X_2(y)$, et sur lesquels z se réduit à deux fonctions $\varphi_1(y)$ et $\varphi_2(y)$ de classe $\beta < 2$ en y ; dans ce cas les énoncés précédents sur la nature de z et sur le prolongement au delà de A_1B_1 et A_2B_2 sont encore exacts si, après le changement de variable $x' = t \frac{x - X_1(y)}{X_2(y) - X_1(y)}$ qui transforme (C) en un contour rectangulaire, on peut mettre l'équation sous la forme $\mathfrak{F} = 0$, le premier membre \mathfrak{F} étant de classe β en y et γ en (z, p', q', r') et p', q', r' désignant les nouvelles dérivées de z . Ceci a lieu en particulier si, X_1 et X_2 étant, comme φ_1 et φ_2 , de classe β en y , le nombre α des énoncés de la page 131 est au plus égal à β (donc $\gamma = \alpha$), c'est-à-dire si, dans les équations (\mathcal{P}) , (\mathcal{P}_1) , (\mathcal{P}_2) , les coefficients ou les fonctions f sont de classe α en (x, z, p, q, r) et β en y , avec $1 \leq \alpha \leq \beta < 2$. Dans ces conditions z est, par rapport à (x, y) , de classe α en x et β en y à l'intérieur de (C) et, dans le cas des équations (\mathcal{P}) et (\mathcal{P}_1) avec $1 \leq \beta \leq 2$, prolongeable au delà de A_1B_1 et A_2B_2 suivant deux fonctions de même nature.

Pour $\beta = 1$ on retrouve les résultats relatifs à l'analyticité en y ou en (x, y) et au prolongement analytique de z (*loc. cit.*, nos 50-51 et 59).

Remarque sur le n° 3. — Dans les calculs de la page 147, nous avons pris, comme valeur de Φ , non pas une constante, mais une expression de la forme $\Phi' + \Phi''d$, Φ' et Φ'' étant des constantes : il convient alors, pour arriver à la formule (20), d'envisager z_1 et z_2 comme sommes

190 MAURICE GEVREY. — SOLUTIONS DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

des solutions de deux systèmes d'équations intégrales, dont les termes connus admettent comme limitations respectives Φ' et $\Phi''d$. On peut éviter cela en remplaçant, dans l'expression de Φ , d par son maximum R et, par suite, dans (20), d par $\frac{R^2}{d}$: on aboutit ainsi à la même formule (21) (cf p. 172).