

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. BOUSSINESQ

Complément à un récent mémoire des « Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure » sur la poussée des terres et l'état ébouleux, avec quelques idées générales sur la mécanique des semi-fluides et application de ces idées aux corps plastiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 35 (1918), p. 1-128

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1918_3_35__1_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

COMPLÉMENT A UN RÉCENT MÉMOIRE

DES

« ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE »

SUR

LA POUSSÉE DES TERRES ET L'ÉTAT ÉBOULEUX ⁽¹⁾,

AVEC QUELQUES IDÉES GÉNÉRALES SUR LA MÉCANIQUE DES SEMI-FLUIDES
ET APPLICATION DE CES IDÉES AUX CORPS PLASTIQUES;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

SOMMAIRE. — I. Équations aux dérivées partielles, pour les états ébouleux par détente horizontale voisins de la solution Rankine-Levy, dans le cas d'un terre-plein à surface libre sans pente moyenne. — II. Mise en compte, en première approximation, des conditions relatives à une surface libre horizontale et à une paroi plane. — III. Calcul de deuxième approximation de la poussée-limite exercée sur un mur vertical par un terre-plein à surface libre horizontale. — IV. Profil de rupture d'un terre-plein horizontal, à couches plus rugueuses dans le voisinage de son mur vertical de soutènement qui commence à se renverser. — V. Coup d'œil sur le même cas d'un terre-plein horizontal, soutenu encore par un mur vertical qui commence à se renverser, mais, en outre, par une paroi limitant le massif à l'arrière, parallèlement au mur. — VI. Intégration graphique, dans le cas d'un terre-plein à surface libre ondulée, indéfini à l'arrière et maintenu à l'avant par un mur courbe. — VII. Rappel sommaire de résultats antérieurs, concernant soit l'état ébouleux de masses pulvérulentes, soit leur état élastique : uniformité de l'écoulement dans les sabliers; extinction du son par un milieu inconsistant; etc. — VIII. Aperçus et hypothèses sur la Mécanique des semi-fluides en général. — IX. Application aux corps plastiques : lois approchées de Tresca sur le poinçonnage et l'écoulement des solides.

(1) Numéros de janvier, février et mars 1917.

I. — Équations aux dérivées partielles, pour les états ébouleux par détente horizontale voisins de la solution Rankine-Levy, dans le cas d'un terre-plein à surface libre sans pente moyenne.

1. Le Mémoire que je me propose ici de compléter avait pour but d'établir les lois et les formules qui se sont montrées les plus utiles pour la pratique, dans la théorie presque nouvelle encore de l'état ébouleux des masses pulvérulentes, telles que du sable. J'y ai surtout insisté sur le cas d'un massif à surface libre plane, déformé pareillement dans tous les plans verticaux parallèles qui le coupent suivant ses *lignes de pente* et contenu en avant par un mur ou une paroi de forme également plane, perpendiculaire à ces plans verticaux ou coupant la surface libre suivant une horizontale. Il suffisait de considérer, à partir de cette intersection où se prenait l'origine de deux axes coordonnés rectangulaires des x et des y contenus dans un des plans verticaux, la coupe du massif par ce plan ou, plutôt, la couche sablonneuse de largeur constante τ qu'il bissecte.

Puis, en faisant abstraction des perturbations dues au voisinage du fond solide sur lequel repose le massif homogène et pesant proposé, celui-ci pouvait être supposé indéfini en profondeur soit vers le bas, soit en arrière. Et, lors de l'état ébouleux provoqué par un commencement de renversement du mur, chaque tranche mince fictivement découpée dans le massif, suivant l'intersection du mur et de la surface libre, par deux plans infiniment voisins ainsi émanés de l'origine, offrait des dispositions mécaniques analogues sur toute la longueur du rayon vecteur r qu'on y menait dans le plan des xy , et que son angle polaire θ , fait avec les x positifs, y définissait. Car, en tous les points (x, y) , ou (r, θ) , de ce rayon vecteur, la plus petite *pression principale* (proprement dite) était simplement *proportionnelle à la distance* r à l'origine et *orientée de même*, ou affectait la direction définie par un azimut (angle polaire) χ *constant d'un bout à l'autre*, c'est-à-dire *fonction uniquement de θ* . Il y avait donc lieu de préférer aux deux variables indépendantes x et y les coordonnées polaires r, θ . Et c'est ce que j'ai fait dans toute la suite du Mémoire.

2. Mais soit quand surface libre ou paroi, cessant d'être planes,

deviennent des cylindres à génératrices toujours normales au plan des xy , soit quand, avec paroi et surface libre restées planes, on introduit une nouvelle surface (encore normale au plan des xy), comme, par exemple, une seconde paroi à quelque distance en arrière de la première, la parité ou, plutôt, la *similitude* des conditions de l'équilibre aux divers points d'un rayon r disparaît; et les coordonnées polaires perdent leur supériorité. C'est pourquoi je reviendrai ici aux coordonnées rectilignes x et y , dans l'étude plus complète, que je me propose d'y faire, des modes d'équilibre-limite voisins de la solution Rankine-Levy.

Toutefois, pour conserver aux formules le maximum de simplicité possible, je me bornerai au cas d'un massif s'écartant peu (ou médiocrement) d'un terre-plein horizontal; de sorte que l'axe des x normal à la direction générale de la surface libre soit *vertical* et devienne un *axe de symétrie* dans la solution Rankine-Levy. Autrement dit, le profil de la surface libre pourra bien être une courbe ondulée (irrégulièrement même), mais il aura sa *pente moyenne* nulle. L'axe des x ainsi vertical sera d'ailleurs dirigé vers le bas à partir de l'intersection horizontale du mur et de la surface libre, tandis que l'axe des y , encore normal à la même intersection, sera horizontal et, partout, plus ou moins voisin de la surface libre.

Dans la solution Rankine-Levy correspondante, ou applicable au terre-plein horizontal, la pression principale proprement dite la plus forte, verticale par raison de symétrie, ou sollicitant en chaque point l'élément plan horizontal, équilibrera le poids Πx de la colonne sablonneuse superposée, et aura ainsi la valeur Πx , tandis que la pression principale la plus faible, *d'état ébouleux par détente*, sollicitant l'élément plan *vertical*, sera, comme on sait, le produit de Πx par le facteur

$$\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Pour abrégier, nous appellerons α la racine carrée positive de ce facteur, c'est-à-dire que nous poserons

$$(1) \quad \alpha = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}}.$$

Les trois composantes *principales* de pression *relatives aux axes*, N_x , T , N_y , seront donc respectivement, dans la solution Rankine-Lévy,

$$-\Pi x, \quad \text{zéro}, \quad -a^2 \Pi x.$$

Ajoutons-leur les *petites parties*

$$\Pi n_x, \quad \Pi t, \quad \Pi n_y,$$

fonctions inconnues de x et de y , qu'il faut y joindre pour obtenir les solutions *voisines* cherchées; et nous aurons d'abord à porter ces valeurs totales

$$(2) \quad N_x = \Pi(-x + n_x), \quad T = \Pi t, \quad N_y = \Pi(-a^2 x + n_y),$$

dans les équations indéfinies ordinaires de l'équilibre,

$$(3) \quad \frac{dN_x}{dx} + \frac{dT}{dy} = -\Pi, \quad \frac{dT}{dx} + \frac{dN_y}{dy} = 0$$

Il vient simplement

$$(4) \quad \frac{dn_x}{dx} + \frac{dt}{dy} = 0, \quad \frac{dt}{dx} + \frac{dn_y}{dy} = 0.$$

Quelle que soit la fonction continue t de x et de y , elle admet toujours une certaine intégrale ϖ en x et en y , ou fonction primitive $\int dy \int t dx$; et l'on peut écrire

$$(5) \quad t = \frac{d^2 \varpi}{dx dy}.$$

Dès lors, les équations (4) prennent les formes

$$\frac{d}{dx} \left(n_x + \frac{d^2 \varpi}{dy^2} \right) = 0, \quad \frac{d}{dy} \left(n_y + \frac{d^2 \varpi}{dx^2} \right) = 0$$

et montrent que n_x , n_y ont les valeurs $-\frac{d^2 \varpi}{dy^2}$, $-\frac{d^2 \varpi}{dx^2}$, respectivement augmentées de deux certaines fonctions $f''(y)$, $f_1''(x)$ ne dépen-

dant, la première, que de y et, la seconde, que de x . Ajoutons implicitement à $-\varpi$ deux fonctions primitives $f(y)$, $f_1(x)$ dont $f''(y)$, $f_1''(x)$ soient les dérivées deuxièmes, ou, en d'autres termes, désignons désormais par $-\varpi$ la somme qui s'appelait $-\varpi + f(y) + f_1(x)$; ce qui ne changera rien à la dérivée seconde *oblique* en x et y de la fonction ϖ et laissera, par suite, subsister l'équation (5). Il viendra en tout, comme intégrales obligées de (4), les trois relations

$$(6) \quad n_x = -\frac{d^2\varpi}{dy^2}, \quad t = \frac{d^2\varpi}{dx dy}, \quad n_y = -\frac{d^2\varpi}{dx^2}.$$

Les petites inconnues n_x , t , n_y du problème s'exprimeront donc au moyen d'une fonction auxiliaire unique ϖ ou, plutôt, de ses trois dérivées partielles secondes; et les formules (2) de N_x , T , N_y seront

$$(7) \quad N_x = -\Pi\left(x + \frac{d^2\varpi}{dy^2}\right), \quad t = \Pi \frac{d^2\varpi}{dx dy}, \quad N_y = -\Pi\left(a^2x + \frac{d^2\varpi}{dx^2}\right).$$

3. Il reste, pour régir la fonction ϖ elle-même, la troisième équation indéfinie de l'équilibre-limite, celle qui caractérise l'état ébouleux ou exprime, pour chaque point du corps, l'égalité, à l'angle de frottement intérieur donné φ , de l'angle le plus grand φ' qu'une pression y fasse avec la normale à l'élément plan qu'elle sollicite. Or, si l'on prend $\sin\varphi'$ comme mesure de cette *obliquité maxima* des pressions au point (x, y) , on sait que son carré est donné par la formule

$$(8) \quad \sin^2\varphi' = \frac{(N_x - N_y)^2 + 4T^2}{(N_x + N_y)^2} = 1 - \frac{4(N_x N_y - T^2)}{(N_x + N_y)^2}.$$

Substituons donc, dans cette formule, à φ' l'angle connu φ , ou bien à $\sin\varphi'$ la fraction $\frac{1-a^2}{1+a^2}$, et, de plus, à N_x , T , N_y les expressions (7); puis effectuons les calculs et réduisons. Il viendra pour l'équation cherchée en ϖ , aux dérivées partielles du second ordre,

$$(9) \quad \left(\frac{d^2\varpi}{dx^2} - a^2 \frac{d^2\varpi}{dy^2}\right) \left[(1-a^4)x + \left(\frac{d^2\varpi}{dy^2} - a^2 \frac{d^2\varpi}{dx^2}\right) \right] = (1+a^2)^2 \left(\frac{d^2\varpi}{dx dy}\right)^2.$$

Comme nous supposons petites les dérivées secondes de ϖ , le deuxième membre, *non linéaire*, est du second ordre de petitesse; et l'équation, résolue par rapport à la première parenthèse du premier membre, montre que celle-ci est aussi du second ordre; que, par suite, son produit par la partie $\frac{d^2\varpi}{dy^2} - a^2 \frac{d^2\varpi}{dx^2}$ de la quantité entre crochets est du *troisième* ordre et sera négligeable *même à une deuxième approximation*. En divisant par la quantité entre crochets, il vient donc :

1° A une première approximation, l'équation simple de d'Alembert,

$$(10) \quad \frac{d^2\varpi}{dx^2} = a^2 \frac{d^2\varpi}{dy^2};$$

2° A une deuxième approximation, l'équation, des moins complexes (ce semble) parmi celles qui ne sont pas linéaires,

$$(11) \quad \frac{d^2\varpi}{dx^2} - a^2 \frac{d^2\varpi}{dy^2} = \frac{1+a^2}{1-a^2} \frac{1}{x} \left(\frac{d^2\varpi}{dx dy} \right)^2 = \frac{1}{x \sin \varphi} \left(\frac{d^2\varpi}{dx dy} \right)^2.$$

II. — Mise en compte, en première approximation, des conditions relatives à une surface libre horizontale et à une paroi plane.

4. Laissons pour le moment de côté le terre-plein à surface libre courbe, ou prenons, comme équation du profil supérieur, $x = 0$; et voyons ce que donne alors la relation (10) de première approximation, applicable dans tout l'angle des coordonnées x, y positives, du moins quand le mur est vertical.

L'intégrale classique de l'équation (10) de d'Alembert est, avec deux fonctions arbitraires d'une seule variable chacune, f, f_1 , dont la dérivée seconde seule, figurant dans les pressions, aura de l'importance,

$$(12) \quad \varpi = f(y - ax) + f_1(y + ax).$$

Il en résultera, d'après (7),

$$(13) \quad \begin{cases} N_x = -\Pi [x + f''(y - ax) + f_1''(y + ax)], \\ T = \Pi a [-f''(y - ax) + f_1''(y + ax)], \\ N_y = -\Pi a^2 [x + f''(y - ax) + f_1''(y + ax)]. \end{cases}$$

Et si l'on porte ces valeurs dans le second membre de (8), pour voir jusqu'à quel point elles rendent différente de $\sin \varphi$, en (x, y) , l'obliquité maxima $\sin \varphi'$ des pressions, puis que l'on divise le résultat par la valeur $\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^2$ de $\sin^2 \varphi$, en observant que $\frac{1-a^2}{2a}$ est $\tan \varphi$, il vient immédiatement

$$(14) \quad \frac{\sin^2 \varphi'}{\sin^2 \varphi} = 1 + \frac{1}{\tan^2 \varphi} \left[\frac{f''(y-ax) - f_1''(y+ax)}{x + f''(y-ax) + f_1''(y+ax)} \right]^2.$$

Cette formule montre que l'écart entre φ' et φ est bien du second ordre de petitesse, c'est-à-dire de l'ordre des carrés et produits de $f''(y-ax)$, $f_1''(y+ax)$.

5. Déterminons maintenant les fonctions f'' et f_1'' par les conditions relatives soit à la surface libre $x = 0$, soit à la paroi, dont le profil sera une ligne descendante émanée de l'origine et plus ou moins voisine de la verticale.

L'annulation pour $x = 0$, dans (13), de N_x et de T , donnera $f''(y) = 0$, $f_1''(y) = 0$ pour toutes les valeurs positives de y et aussi, par suite, $f''(y-ax) = 0$, $f_1''(y+ax) = 0$ en tous les points du massif où passent respectivement les deux familles de droites $y - ax = \text{const.}$, $y + ax = \text{const.}$ issues de la surface libre $x = 0$. Les secondes, $y + ax = \text{const.}$, de ces droites, toutes descendantes, qui font *d'arrière en avant* l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ avec les x positifs, *balaiant* évidemment tout le massif; de sorte que la fonction f_1'' disparaît partout des formules. Quant aux premières, $y - ax = \text{const.}$, qui, en descendant, font encore l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ avec les x positifs, mais *d'avant en arrière*, elles balaiant toute la région des x et y positifs, à l'exception du coin, ayant sa pointe en haut et la grandeur d'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, compris entre la première verticale $y = 0$ et la droite $y - ax = 0$ émanée de l'origine.

Si donc le mur n'est pas confiné dans ce coin, s'il a un *fruit intérieur* excédant a , c'est-à-dire $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$, la fonction $f''(y-ax)$ elle-

même sera nulle dans tout le massif. Et il n'existera pas de solution voisine de celle de Rankine-Lévy, qui, par suite, contienne quelque élément arbitraire ou disponible, pour permettre de vérifier la condition relative à un tel mur.

6. Ainsi se trouve démontré, tout autrement que par l'emploi des coordonnées polaires, le fait que la solution Rankine-Lévy est *isolée* pour les murs rugueux à *fruit intérieur excédant* une limite déterminée (ici α). D'où il suit qu'on ne peut pas alors exprimer le glissement du massif contre le mur.

D'ailleurs, les deux familles de droites $y \pm ax = \text{const.}$ faisant l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ avec le profil (ici vertical) des plans soumis à la plus faible pression principale proprement dite, c'est sur les éléments plans ayant pour profils ces droites mêmes que se produisent les pressions les plus obliques, celles qui font avec eux l'angle minimum $\frac{\pi}{2} - \varphi$, ou avec leur normale prolongée l'angle maximum φ .

En particulier, la seconde famille, $y - ax = \text{const.}$, donne la direction des plans sur lesquels la pression exercée, en arrière d'eux, par le gros du massif, est dirigée *vers le bas* ou indique le glissement correspondant au renversement du mur en avant et à la chute de la masse sablonneuse. Si alors on mène celui de ces plans qui monte à partir du bas du mur, il sera le *plan naturel de rupture* le plus voisin possible du mur, tandis que l'autre plan de rupture issu aussi, inférieurement, de la même arête de base du mur, appartiendra à la seconde famille, $y + ax = \text{const.}$, sur laquelle la matière du gros du massif situé à l'arrière agit, au contraire, de bas en haut; en sorte que ce sera la matière même du *coin* compris (avec sa pointe au fond) entre les deux plans de rupture, qui pressera de haut en bas ce gros du massif situé à son arrière.

Quant au sable compris entre le mur et le premier plan de rupture, il est empêché de rouler vers le bas du mur par le frottement surabondant de celui-ci et fait corps avec lui, du moins durant les premiers instants de la chute.

7. Passons au cas d'un mur à fruit intérieur moindre que α , et sup-

posons-le, par exemple, vertical, afin de nous borner au cas le plus pratique. Alors les droites descendantes $y - ax = \text{const.}$ de la première famille, issues du mur $y = 0$ en avant de l'origine, ou entrant dans le massif non plus par l'axe des y et la surface libre, mais par l'axe des x et la paroi, fournissent tout autant de valeurs de $f(y - ax)$, disponibles pour exprimer, en y faisant $y = 0$, la condition relative à cette paroi *rugueuse*. Elle consiste en ce que le rapport de la composante T, dirigée vers le bas, de la poussée \mathcal{Q} du massif sur le mur, à sa composante normale ($-N_y$), devra égaler la tangente de l'angle φ du frottement *extérieur*. Les formules (13), d'où $f'_1(y + ax)$ a déjà disparu, et où l'on fera ainsi $y = 0$, donneront

$$(15) \quad \text{tang } \varphi = \frac{-af''(-ax)}{a^2[x + f''(-ax)]},$$

d'où

$$f''(-ax) = \frac{(-ax) \text{ tang } \varphi}{1 + a \text{ tang } \varphi}.$$

Il en résulte que la fonction $f''(y - ax)$, nulle pour les valeurs positives de sa variable $y - ax$, aura, pour les valeurs négatives de cette variable, l'expression

$$(16) \quad f''(y - ax) = \frac{(y - ax) \text{ tang } \varphi}{1 + a \text{ tang } \varphi},$$

laquelle, à la limite $y - ax = 0$, s'annule elle-même et se trouve, par conséquent, continue de part et d'autre de la droite $y - ax = 0$, où change sa loi de variation.

Et la composante normale $P = -N_y$, par unité d'aire, de la poussée d'équilibre-limite exercée sur le mur sera, à la profondeur x , en faisant $y = 0$ dans la troisième formule (13),

$$(17) \quad P = \Pi a^2 x \left(1 - \frac{a \text{ tang } \varphi}{1 + a \text{ tang } \varphi} \right) = \Pi x \frac{a^2}{1 + a \text{ tang } \varphi}.$$

Continuons à appeler k le rapport constant $\frac{P}{\Pi x}$ et, en nous rappo-

tant que

$$a = \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}},$$

d'où

$$1 + a \tan \varphi = 1 + \frac{\sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \frac{1 + 2 \sin \varphi}{1 + \sin \varphi},$$

il viendra

$$(18) \quad k = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + 2 \sin \varphi},$$

comme nous l'avions trouvé tout autrement dans le Mémoire que complète celui-ci [première formule (80)].

8. Toutefois, nous n'obtenons ainsi qu'une première approximation, approchée *par défaut*. En effet, nos formules attribuent bien au massif son vrai angle φ tant de frottement extérieur contre le mur rugueux, que de frottement intérieur dans toutes les parties du massif autres que le coin d'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ contigu au mur, avec sa pointe en haut. Mais, dans ce coin même, où *la plus grande obliquité* accordée par nos équations à ses pressions intérieures est la valeur variable de $\sin \varphi'$ définie par la formule (14), cette formule montre que le sable dont elle exprimerait l'équilibre-limite serait hétérogène quant à ses frottements intérieurs et aurait justement, en chaque endroit, comme angle de ces frottements, l'angle même φ' qui s'y trouve réalisé.

Or, on voit que φ' y excède partout φ , mais de moins en moins, le long de chaque droite $y - ax = \text{const.}$, à mesure qu'on s'y enfonce dans le massif. Car la formule (13) de N_y , changée de signe, représente une pression *proprement dite*, c'est-à-dire essentiellement positive, ce qui exige que la somme sans cesse grandissante $x + f''(y - ax)$, où $f''(y - ax)$ ne varie pas en chemin, soit déjà positive au départ (pour $y = 0$). Le dénominateur $x + f''(y - ax)$, au dernier terme de (14), fait donc décroître, de haut en bas, ce terme vers la limite zéro, et φ' y tend vers φ . Ainsi l'angle φ' reçoit ses plus fortes valeurs à la paroi $y = 0$, où la formule (14) devient, vu (16),

$$\frac{\sin^2 \varphi'}{\sin^2 \varphi} = 1 + a^2 = \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}$$

et donne, par conséquent,

$$(19) \quad \sin \varphi' = \frac{\sin \varphi}{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

L'équilibre-limite exprimé par nos équations est donc celui d'un massif idéal, hétérogène quant à son angle de frottement intérieur dans le coin sablonneux contigu au mur, où il met en jeu des frottements plus forts que ceux de notre massif homogène et propres à réduire ou abaisser la poussée-limite exercée sur le mur. Celle-ci, telle que l'évaluent nos formules (17) ou (18), se trouve donc inévitablement trop faible, dans un rapport d'autant plus sensible (du moins à en juger par l'écart relatif de $\sin \varphi'$ à $\sin \varphi$), que le cosinus de l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ du coin est plus au-dessous de l'unité.

Ainsi, ce serait tout au plus pour des angles φ donnés, de frottement intérieur, dépassant de beaucoup les angles usuels, et tels, par exemple, que $\varphi = 74^\circ$ (qui réduit $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ à 8° et son cosinus à 0,99), que l'on pourrait se contenter de cette première approximation. Et cela même est douteux; car, dans le voisinage de $\varphi = 90^\circ$, les sinus varient beaucoup moins vite que les angles, et ce n'est plus par l'écart relatif de $\sin \varphi'$ à $\sin \varphi$ qu'il convient alors d'apprécier celui de φ' à φ (1).

III. — Calcul de deuxième approximation de la poussée-limite exercée sur un mur vertical par un terre-plein à surface libre horizontale.

9. Il y a donc lieu de passer à une deuxième approximation, en recourant à l'équation aux dérivées partielles correspondante (11). On observera que le dernier membre de celle-ci, étant du second ordre de petitesse, ne se trouvera pas altéré dans une proportion qui soit sensible à ce degré d'approximation, si l'on y substitue à la dérivée $\frac{d^2\sigma}{dx dy}$ sa première valeur approchée, actuellement connue.

(1) On verra effectivement plus loin (n° 14) que ce n'est pas au voisinage de la valeur $\varphi = 90^\circ$ que notre première approximation est la plus précise.

Cette valeur est, d'après (12), en observant que $f''_1(y+ax)$ s'est annulé partout et que $f''(y-ax)$ a l'expression (16) dans la seule région où il ne s'annule pas (savoir, le coin $y-ax < 0$ contigu au mur),

$$(20) \quad \frac{d^2 \varpi}{dx dy} = -a f''(y-ax) = -\frac{a \operatorname{tang} \varphi}{1+a \operatorname{tang} \varphi} (y-ax).$$

Si l'on pose, pour abrégé,

$$(21) \quad c = \frac{1+a^2}{1-a^2} \left(\frac{a \operatorname{tang} \varphi}{1+a \operatorname{tang} \varphi} \right)^2 = \frac{\sin \varphi}{(1+2 \sin \varphi)^2},$$

et que l'on appelle $F(x, y)$ la fonction

$$(22) \quad F(x, y) = c \frac{(y-ax)^2}{x},$$

le dernier membre de l'équation (11) prendra la forme $F(x, y)$, explicite en x et y ; et l'équation (11), devenue non seulement linéaire, mais presque aussi facile à intégrer que celle de d'Alembert, sera

$$(23) \quad \frac{d^2 \varpi}{dx^2} - a^2 \frac{d^2 \varpi}{dy^2} = F(x, y).$$

10. Nous n'aurons à la considérer que dans le coin, indéfini vers le bas, où est négative la variable $y-ax$; car on a vu que, hors de cet espace angulaire compris entre l'axe des x (paroi) et la droite $y-ax=0$, les conditions relatives à la surface libre annulent en toute rigueur les trois dérivées secondes de ϖ en x et y , y réduisant ϖ à une fonction linéaire de x et y qu'il n'y a même aucun inconvénient à annuler elle-même pour plus de simplicité. En effet, les dérivées secondes seules entrent dans les formules (7) des pressions.

Il n'y aura donc plus de surface libre à considérer ici; mais, le long du côté $y-ax=0$, les pressions seront les mêmes de part et d'autre; ce qui obligera les dérivées secondes de ϖ à s'y annuler et aussi, par suite, si on le désire, les dérivées premières, puisqu'il est fait abstraction de la partie linéaire de ϖ . Les conditions définies qu'il faudra

adjoindre à (23) seront donc, outre celle qui concerne la paroi,

$$(24) \quad (\text{pour } y - ax = 0) \quad \left(\varpi, \frac{d\varpi}{dx}, \frac{d\varpi}{dy}, \frac{d^2\varpi}{dx^2}, \frac{d^2\varpi}{dx dy}, \frac{d^2\varpi}{dy^2} \right) = 0.$$

11. Pour intégrer, il sera commode de substituer aux deux variables indépendantes x et y les paramètres, que j'appellerai u et v , des deux familles de droites $y \pm ax = \text{const.}$, en posant

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = y + ax, \quad v = y - ax; \\ \text{d'où} \\ x = \frac{u - v}{2a}, \quad y = \frac{u + v}{2}. \end{array} \right.$$

Les formules pour transformer les dérivées partielles seront donc

$$\frac{d}{dx} = a \left(\frac{d}{du} - \frac{d}{dv} \right), \quad \frac{d}{dy} = \frac{d}{du} + \frac{d}{dv}$$

et

$$\frac{d}{du} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} \frac{d}{dx} + \frac{d}{dy} \right), \quad \frac{d}{dv} = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{a} \frac{d}{dx} + \frac{d}{dy} \right).$$

Ces deux dernières montrent que les dérivées premières et secondes de ϖ en u et v s'annulent sur tout le côté $v = 0$ du coin comme le font, en vertu de (24), ses dérivées en x et y . Quant aux deux précédentes, elles donnent à l'équation (23), divisée par $-4a^2$, la forme

$$-\frac{1}{4} \left(\frac{d^2\varpi}{du^2} - 2 \frac{d^2\varpi}{du dv} + \frac{d^2\varpi}{dv^2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{d^2\varpi}{du^2} + 2 \frac{d^2\varpi}{du dv} + \frac{d^2\varpi}{dv^2} \right) = -\frac{1}{4a^2} F(x, y),$$

c'est-à-dire

$$(26) \quad \frac{d^2\varpi}{du dv} = -\frac{1}{4a^2} F \left(\frac{u - v}{2a}, \frac{u + v}{2} \right).$$

Multiplions par dv et intégrons le long des droites $u = \text{const.}$ (qui balayent tout l'espace angulaire considéré), à partir du côté même $v = 0$ où s'annulent ϖ et ses premières dérivées, jusqu'à un point intérieur quelconque. Il viendra

$$(26 \text{ bis}) \quad \frac{d\varpi}{du} = \frac{1}{4a^2} \int_v^0 F \left(\frac{u - v}{2a}, \frac{u + v}{2} \right) dv.$$

Celle-ci, multipliée par du , pourra être intégrée à son tour, le long d'une droite quelconque $v = \text{const.}$, jusqu'à un point (u, v) quelconque du coin, en partant, pour fixer les idées, de la droite $u = 0$ (ou $y + ax = 0$) extérieure au massif, mais en ajoutant une fonction arbitraire, $f(v)$, de la variable qui ne change pas durant cette intégration. On n'emploiera d'ailleurs la formule obtenue que dans le coin même où $u, v, u - v$ (c'est-à-dire $2ax$) sont continus et ne donneront lieu qu'à des intégrales finies. Nous aurons donc, avec la fonction arbitraire $f(v)$, à déterminer tout le long du côté $y = 0$ par la condition relative à la paroi,

$$(27) \quad \varpi = f(v) + \frac{1}{4a^2} \int_0^u du \int_v^0 F\left(\frac{u-v}{2a}, \frac{u+v}{2}\right) dv.$$

On pourra, une fois effectuée l'intégration double, y réintroduire, grâce aux formules (25), les variables x et y .

12. Substituons donc dans (27) à $F(x, y)$ l'expression (22), c'est-à-dire $2ac \frac{v^2}{u-v}$. La première intégration, en v , donne

$$2ac \left(uv + \frac{v^2}{2} - u^2 \log \frac{u}{u-v} \right),$$

comme le vérifie une différentiation immédiate par rapport à v ; et, grâce à l'intégration en u , vérifiable de même, l'équation (27) prend la forme, explicite en u et v ,

$$(28) \quad \varpi = f(v) + \frac{c}{6a} \left(u^2 v + \frac{uv^2}{2} - u^2 \log \frac{u}{u-v} + v^3 \log \frac{u-v}{u-v} \right).$$

Portons enfin dans celle-ci les valeurs (25) de u, v , et nous aurons

$$(29) \quad \varpi = f(y - ax) + \frac{c}{6a} \left[(y^2 - a^2 x^2) \frac{3y + ax}{2} + (y - ax)^2 \log \frac{ax - y}{2ax} - (y + ax)^2 \log \frac{y + ax}{2ax} \right].$$

Il en résulte, par de doubles différentiations assez laborieuses, mais

ne présentant aucune difficulté :

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \varpi}{dx^2} = a^2 f''(y-ax) + ca \left[\frac{y^2}{ax} - \frac{y+ax}{2} + (y-ax) \log \frac{ax-y}{2ax} - (y+ax) \log \frac{y+ax}{2ax} \right], \\ \frac{d^2 \varpi}{dx dy} = -a f''(y-ax) - c \left[-\frac{y-ax}{2} + (y-ax) \log \frac{ax-y}{2ax} + (y+ax) \log \frac{y+ax}{2ax} \right], \\ \frac{d^2 \varpi}{dy^2} = f''(y-ax) + \frac{c}{a} \left[\frac{3}{2} (y-ax) + (y-ax) \log \frac{ax-y}{2ax} - (y+ax) \log \frac{y+ax}{2ax} \right]. \end{cases}$$

Ces formules, à part leur terme en $f''(y-ax)$, contiennent bien, partout, ou le facteur $y-ax$, ou le facteur $\log \frac{y+ax}{2ax}$, comme il le fallait pour leur annulation sur le côté $y=ax$ du coin; car les deux termes de la première qui semblent faire exception,

$$c \frac{y^2}{x} \quad \text{et} \quad -ca \frac{y+ax}{2},$$

reviennent ensemble à $c \frac{(y-ax)(2y+ax)}{2x}$.

On portera donc ces trois dérivées secondes de ϖ dans les formules (7) de N_x , T , N_y , pour avoir les trois composantes cherchées de pression.

13. Bornons-nous à évaluer celles-ci contre la paroi $y=0$. Les dérivées (30), en désignant par e la base des logarithmes naturels qui figurent dans les formules, s'y réduisent beaucoup et donnent

$$(31) \quad \begin{cases} -N_x = \Pi \left[f''(-ax) + x \left(1 + c \log \frac{4}{\sqrt{e^3}} \right) \right], \\ T = -\Pi a \left[f''(-ax) + x \frac{c}{2} \right], \\ -N_y = \Pi a^2 \left[f''(-ax) + x \left(1 + c \log \frac{4}{\sqrt{e}} \right) \right]. \end{cases}$$

Le rapport (pour $y=0$) $\frac{T}{-N_y}$ devant y égalé $\text{tang } \varphi$, on trouve aisément que cela revient à prendre

$$(32) \quad f''(-ax) = \frac{(-ax)}{a + \cot \varphi} \left[1 + \frac{c}{2a} \left(\cot \varphi + 2a \log \frac{4}{\sqrt{e}} \right) \right],$$

ou, par suite, à choisir comme fonction arbitraire f'' ,

$$(33) \quad (\text{pour } y - ax < 0) \quad f''(y - ax) \\ = \frac{y - ax}{a + \cot \varphi} \left[1 + \frac{c}{2a} \left(\cot \varphi + 2a \log \frac{4}{\sqrt{e}} \right) \right].$$

En comparant celle-ci à (16), on voit que la deuxième approximation y a ajouté les termes en c (1).

La fonction $f''(y - ax)$ s'évanouit d'ailleurs tout le long du côté $y - ax = 0$ du coin. Par conséquent, les formules (30) des dérivées secondes de ϖ y annulent complètement ces dérivées. Et les pressions s'y réduisent bien, comme hors du coin et comme il le fallait, à celles de la solution Rankine-Levy.

Les pressions (31) près de la paroi deviennent finalement :

$$(34) \quad (\text{pour } y = 0) \quad \left\{ \begin{array}{l} -N_x = \frac{\Pi x}{1 + a \tan \varphi} \left[1 - c \left(a \tan \varphi + \log \frac{e^2}{4} \right) \right], \\ T = \frac{\Pi x \cdot a^2 \tan \varphi}{1 + a \tan \varphi} \left(1 + c \log \frac{4}{e} \right), \\ -N_y = \frac{\Pi x \cdot a^2}{1 + a \tan \varphi} \left(1 + c \log \frac{4}{e} \right). \end{array} \right.$$

14. Comme $(-N_y)$ désigne la composante normale P de la poussée par unité d'aire, la deuxième approximation a pour effet, comme on voit, de multiplier cette composante par le facteur binôme

$$(35) \quad 1 + c \log \frac{4}{e} = 1 + (-1 + \log 4)c = 1 + (0,3863)c,$$

ou de l'accroître de la fraction $(0,3863)c$ de sa première valeur approchée. Notre coefficient k , c'est-à-dire le rapport $\frac{P}{\Pi x}$, devient

(1) Vu (33) et (30), les expressions générales (7) de N_x , N_y , T sont encore, comme à la première approximation, homogènes du degré 1 en x et y ; d'où il suit que, le long d'un même rayon vecteur r , elles sont proportionnelles à r et ont ainsi leurs rapports mutuels fonction seulement de l'angle polaire θ . Il en est donc de même de l'azimut des pressions principales et de celui des surfaces de rupture, encore homothétiques par rapport à l'origine O .

donc, vu la formule (21) de c ,

$$(36) \quad k = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + 2 \sin \varphi} \left[1 + \left(\log \frac{4}{e} \right) \frac{\sin \varphi}{(1 + 2 \sin \varphi)^2} \right]$$

$$= \frac{1 - \sin \varphi}{1 + 2 \sin \varphi} \left[1 + (0,3863) \frac{\sin \varphi}{(1 + 2 \sin \varphi)^2} \right].$$

Le terme qui suit l'unité dans le facteur entre crochets mesure, en quelque sorte, l'utilité de la seconde approximation, puisqu'il exprime le rapport dans lequel cette approximation modifie le résultat cherché; mais ce serait plutôt sa petitesse qui garantirait la rapidité de convergence des approximations successives et leur légitimité.

A cet égard, on voit que ce terme tend vers zéro, assurant ainsi la sécurité de la méthode, pour les petites valeurs de φ , mais nullement pour celles qui sont voisines de 90° , contrairement à ce qu'une vue superficielle de l'équation (19) aurait pu faire augurer. Et il y a lieu de remarquer qu'il atteint ses valeurs les moins petites pour des angles φ de frottement voisins des angles usuels. Car, en écrivant ainsi son facteur variable,

$$(37) \quad \frac{\sin \varphi}{(1 + 2 \sin \varphi)^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}} + 2 \sqrt{\sin \varphi} \right)^{-2},$$

on voit que la quantité entre parenthèses est la somme de deux nombres positifs ayant le produit constant 2, somme minimum quand ces deux nombres sont égaux ou quand chacun est $\sqrt{2}$; ce qui a lieu pour $\varphi = 30^\circ$. Le facteur (37), ainsi maximum pour $\varphi = 30^\circ$, est d'ailleurs très peu variable pour toutes ses valeurs usuelles; car il décroît seulement de $\frac{1}{8}$ à $\frac{1}{9}$ quand φ grandit de 30° à 90° .

Par exemple, pour $\varphi = 45^\circ$, il vaut

$$\frac{1}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})^2} = \frac{1}{3\sqrt{2} + 4} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2 = 0,1213,$$

quantité que le maximum $\frac{1}{8}$ ou 0,125 dépasse seulement de 0,0037.

Et l'expression (36) de k , devenue

$$\left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\right) \left[1 + (0,3863) \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\right)\right],$$

est accrue d'une fraction de sa valeur

$$k_0 = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2 = 0,1213$$

de première approximation, exprimée par

$$(0,3863) \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\right) = 0,04686,$$

ou valant en tout

$$(0,3863) \left(\frac{3}{2}\sqrt{2} - 2\right)^2 = 0,00568.$$

Cela porte sa valeur à 0,1270.

Pour $\varphi = 34^\circ$, cas du sable expérimenté par M. Gobin, le facteur (37) est 0,1246, bien peu au-dessous du maximum 0,125, comme on voit. Son produit par 0,3863 étant 0,04813, le dernier facteur de l'expression (36) de k est 1,04813; et la seconde approximation renforce la valeur $k_0 = 0,2081$, trouvée antérieurement, de ses 4813 cent-millièmes; soit, en tout, de 0,01002; ce qui la porte à 0,2181.

15. Pour juger du degré d'approximation ainsi réalisé, on peut chercher à quel point font varier φ' , dans la relation (8), les nouvelles formules des pressions, qui seraient évidemment exactes s'il s'agissait d'un massif hétérogène où l'angle de frottement extérieur serait φ , mais, l'angle φ' de frottement intérieur, partout égal à ce que donne cette équation (8). Il faut surtout considérer la valeur de φ' à la paroi, le plus loin possible de la région d'homogénéité (à angle de frottement φ) qui comprend le gros du massif, savoir, tout ce qui est hors du coin ou au delà du plan $\gamma = ax$. Or, à la paroi, φ' résultait, à une première approximation, de la formule (19), revenant à prendre $\varphi' = 49^\circ 56',4$ pour $\varphi = 45^\circ$ et $\varphi' = 39^\circ 17',8$ pour $\varphi = 34^\circ$, soit des écarts $\varphi' - \varphi$ respectifs de $4^\circ 56',4$ et $5^\circ 17',8$.

Le calcul est beaucoup plus long à la deuxième approximation, où les formules (34) donnent des valeurs de $(-N_x)$, $(-N_y)$ et T respectivement proportionnelles à

$$\frac{1}{a^2} \frac{1 - (0,6137 + a \operatorname{tang} \varphi) c}{1 + (0,3863) c}, \quad 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \varphi,$$

ou bien, proportionnelles, en appelant K le premier de ces trois nombres, à

$$(37 \text{ bis}) \quad K = \frac{1}{a^2} \frac{1 - (0,6137 + a \operatorname{tang} \varphi) c}{1 + (0,3863) c}, \quad 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \varphi,$$

a et c ayant les valeurs (1) et (21). Il est visible que la formule (8) devient

$$(38) \quad \sin^2 \varphi' = \left(\frac{K-1}{K+1} \right)^2 + \left(\frac{2 \operatorname{tang} \varphi}{K+1} \right)^2.$$

Le calcul donne, pour $\varphi = 45^\circ$,

$$a = a \operatorname{tang} \varphi = 0,4142, \quad c = 0,1213, \quad K = 4,8733, \quad \sin^2 \varphi' = 0,55087, \\ \varphi' = 47^\circ 55', 2, \quad \varphi' - \varphi = 2^\circ 55', 2;$$

et, pour $\varphi = 34^\circ$,

$$a = 0,5317, \quad a \operatorname{tang} \varphi = 0,3586, \quad c = 0,1246, \quad K = 2,9659, \\ \sin^2 \varphi' = 0,36143, \quad \varphi' = 36^\circ 57', 3, \quad \varphi' - \varphi = 2^\circ 57', 3.$$

On voit que l'écart $\varphi' - \varphi$, qui serait nul pour une solution exacte, décroît respectivement, quand on passe de la première approximation à la deuxième, de $4^\circ 56', 4$ à $2^\circ 55', 2$ et de $5^\circ 17', 8$ à $2^\circ 57', 3$, ou, en d'autres termes, de $296', 4$ à $175', 2$ et de $317', 8$ à $177', 3$. La diminution excède les $\frac{2}{3}$ pour $\varphi = 45^\circ$, les $\frac{44}{100}$ pour $\varphi = 34^\circ$; et la deuxième approximation n'a pas été inutile. Mais elle nous laisse encore loin du but, qui consisterait à annuler l'écart $\varphi' - \varphi$.

16. On pourrait donc tenter une troisième approximation, où l'équation (9), divisée par le facteur entre crochets du premier

membre, prendrait la forme

$$(39) \quad \frac{d^2 \varpi}{dx^2} - a^2 \frac{d^2 \varpi}{dy^2} = \frac{1+a^2}{1-a^2} \frac{1}{x} \left(\frac{d^2 \varpi}{dx dy} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{(1-a^4)x} \left(\frac{d^2 \varpi}{dy^2} - a^2 \frac{d^2 \varpi}{dx^2} \right) \right]$$

et où, au deuxième membre de celle-ci (39), on substituerait aux trois dérivées de ϖ leurs précédentes valeurs (30), dans lesquelles $\varpi''(y-ax)$ a l'expression (33). Cette équation (39) rentrerait donc encore dans le type (23) et admettrait de même l'intégrale (27), mais avec une forme bien plus compliquée pour la fonction explicite $F(x, y)$ et, par suite, avec des dérivées secondes de la nouvelle fonction ϖ bien plus pénibles encore à évaluer.

Aussi, comme déjà les calculs de deuxième approximation devenaient parfois rebutants, concluons-nous ce Chapitre de nos recherches par une simple application de l'antique *règle de double fausse position* (ou plutôt *supposition*) à notre coefficient k de poussée, en faisant l'hypothèse naturelle que *d'assez petites erreurs sur φ' sont proportionnelles aux erreurs correspondantes sur k* .

Pour un angle de frottement φ de 45° , une première approximation nous a donné

$$k \text{ (ou } k_0) = 0,1213 \quad \text{avec un écart} \quad \varphi' - \varphi = 296',4;$$

et la deuxième a accru k de 0,00568 en faisant décroître $\varphi' - \varphi$ de $296',4 - 175',2 = 121',2$. Une réduction de 296',4, qui aurait annulé l'écart $\varphi' - \varphi$, aurait par suite accru, *proportionnellement*, k de la quantité

$$0,00568 \times \frac{296,4}{121,2} = 0,0139.$$

D'où résulte pour k la valeur, ainsi rendue (en quelque sorte) *probable*,

$$k = 0,1213 + 0,0139 = 0,1352,$$

quand $\varphi = 45^\circ$. Or la moyenne des deux estimations les plus resserrées faites, l'une par défaut, l'autre par excès, dans le précédent Mémoire que complète celui-ci, avait donné (à la fin du n° 36), $k = 0,1360$, qui se trouve, comme on voit, plus fort seulement de 0,0008.

Pour $\varphi = 34^\circ$, ce qui est peut-être le cas le plus usuel d'un massif sablonneux, l'accord est encore meilleur. La première valeur approchée k_0 de k y ayant été $k = 0,2081$, avec $\varphi' - \varphi = 317',8$, la deuxième y a ajouté $0,01002$ et a réduit de $140',5$ l'écart $\varphi' - \varphi$. On aura donc, comme correction totale à faire sur k_0 ,

$$0,01002 \times \frac{317,8}{140,5} = 0,0227;$$

et il viendra $k = 0,2308$.

Nous avons trouvé dans le Mémoire précédent (n° 50, p. 75, à la note) $k = 0,231$; mais c'est, avec une décimale de plus, $k = 0,2309$, résultat à peine supérieur au nombre actuel (1).

IV. — Profil de rupture d'un terre-plein horizontal, à couches plus rugueuses dans le voisinage de son mur vertical de soutènement qui commence à se renverser.

17. La complication et en même temps l'insuffisance de la deuxième approximation font ressortir l'utilité des massifs fictifs à *équilibre-limite facilement calculable*, quoique hétérogènes quant au frottement intérieur dans la région contiguë à une paroi, du moins toutes les fois que l'on peut, pour ainsi dire, intercaler, comme je l'ai fait dans le Mémoire précédent, le massif homogène proposé entre deux, pas trop différents, de ces massifs hétérogènes de même figure que lui, mais dont l'un développe des frottements plus intenses que les siens et, l'autre, des frottements moins intenses. Aussi, me bornant encore au cas du terre-plein horizontal maintenu par une paroi verticale, revien-drai-je à un tel massif hétérogène, pour y étudier la *surface de rupture* qui, à partir du bas de la paroi censée un peu ébranlée par détente ou vers l'avant, s'y produit en s'éloignant de la paroi et en remontant jusqu'à la surface libre.

(1) J'avais déjà effectué cette seconde approximation dans une Note publiée en 1884 au Recueil des *Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille* (4^e série, t. XIII, 1885, p. 705 à 712).

Nous savons que le profil ascendant de cette surface fait partout, dans le plan des xy , l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}$, du côté des y positifs ou du gros du massif, avec le profil même, dirigé aussi vers le haut, de l'élément plan soumis à la pression principale proprement dite la plus faible, et qui se trouve vertical au sortir de la région d'hétérogénéité, là où φ' se réduit à φ .

Les modes d'équilibre-limite considérés acceptant toujours les formules (13), le rapport, a^2 , de N_y à N_x y est *constant*, tandis que celui des deux forces principales correspondantes P_2 , P_1 , qui se confondent avec N_y , N_x sur la droite $y = ax$ et au delà (ou plus loin du mur), prend une valeur variable a' , si l'on désigne par a' la quantité

$$(40) \quad a' = \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'}},$$

analogue à

$$a = \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Appelons β , au point (x, y) , l'angle, compté positivement en tournant vers les y positifs ou vers le gros du massif, que fait avec la verticale ascendante menée en (x, y) , le profil (tiré vers le haut) de l'élément plan *le moins pressé*, angle nul à la limite $y = ax$ et s'éloignant graduellement de zéro à mesure qu'on se rapproche du mur (ou pour $y < ax$). La force principale correspondante P_2 sur son côté regardant les y positifs, considérée uniquement dans sa direction telle qu'elle serait si cette force était une *traction* (alors qu'elle est une traction *négative*, une pression *proprement dite*), fait donc les deux angles respectifs $\frac{\pi}{2} - \beta$, β avec les x et les y . L'élément plan perpendiculaire, sur sa face regardant les x positifs, est soumis à l'autre force principale P_1 , qui, assimilée de même à une traction, fait les angles β , $\frac{\pi}{2} + \beta$ avec les x et les y .

Dès lors, *par rapport au système des axes rectangulaires* P_1 , P_2 , les x positifs ont les cosinus directeurs $\cos \beta$, $\sin \beta$, et les y positifs ont les cosinus directeurs $-\sin \beta$, $\cos \beta$. Par suite, d'après des formules élé-

mentaires de Cauchy, bien connues, les deux composantes, suivant P_1 et P_2 , de la pression que subit l'élément plan normal aux x , sont

$$P_1 \cos \beta, \quad P_2 \sin \beta;$$

et celles de la pression sur l'élément plan normal aux y ,

$$-P_1 \sin \beta, \quad P_2 \cos \beta.$$

Il faut projeter sur les x et les y les composantes de la première de ces pressions pour avoir ses deux composantes normale et tangentielle N_x et T , projeter de même les composantes de la seconde pour avoir T et N_y . Il viendra donc

$$N_x = P_1 \cos^2 \beta + P_2 \sin^2 \beta = \frac{P_1 + P_2}{2} + \frac{P_1 - P_2}{2} \cos 2\beta,$$

$$N_y = P_1 \sin^2 \beta + P_2 \cos^2 \beta = \frac{P_1 + P_2}{2} - \frac{P_1 - P_2}{2} \cos 2\beta,$$

$$T = (-P_1 + P_2) \cos \beta \sin \beta = \frac{P_2 - P_1}{2} \sin 2\beta.$$

On peut remplacer ces relations par leurs trois combinaisons évidentes

$$(41) \quad \begin{cases} N_x + N_y = P_1 + P_2, & N_y - N_x = (P_2 - P_1) \cos 2\beta, \\ \frac{2T}{N_y - N_x} = \tan 2\beta, \end{cases}$$

où il importe d'observer que, toutes les forces étant ici des pressions *proprement dites*, les quantités P_1 , P_2 , N_x , N_y sont négatives, mais les deux différences $P_2 - P_1$, $N_y - N_x$ positives; car il est entendu que $(-P_2)$ est la plus petite des deux valeurs absolues de P_1 et de P_2 , et $(-N_y)$, la plus petite des deux valeurs absolues de N_x et de N_y .

18. Divisons maintenant la seconde équation (41) par la première, en tenant compte du fait que, dans la question étudiée, N_x , N_y sont entre eux comme 1 est à α^2 , et P_1 , P_2 comme 1 est à α'^2 . Si, en outre,

nous nous souvenons des deux formules

$$\frac{1-a^2}{1+a^2} = \sin \varphi, \quad \frac{1-a'^2}{1+a'^2} = \sin \varphi',$$

nous aurons

$$(42) \quad \sin \varphi = \sin \varphi' \cos 2\beta \quad \text{ou} \quad \cos 2\beta = \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'}.$$

Donc l'arc 2β , nul à la limite $y = ax$ du coin sablonneux contigu au mur, sera aigu à l'intérieur de ce coin et s'y trouvera d'ailleurs positif ou négatif, suivant que, dans la troisième équation (41), la valeur (13) de T sera positive ou négative.

Pour traiter la question avec toute la généralité désirable, nous attribuerons à l'angle de frottement *extérieure*, ou angle de frottement du massif contre le mur, toute valeur constante possible φ_1 , distincte, par conséquent, de φ ; et alors les équations (15), (16), qui déterminent la fonction f'' , contiendront $\text{tang} \varphi_1$ au lieu de $\text{tang} \varphi$. L'équation (16) prendra ainsi la forme

$$(43) \quad (\text{pour } y < ax) \quad f''(y-ax) = \frac{\text{tang} \varphi_1}{1+a \text{tang} \varphi_1} (y-ax).$$

La fonction f'' sera donc négative dans tout le coin d'inclinaison \bar{a} contigu au mur, circonstance liée évidemment au fait que l'équilibre-limite considéré se fait par détente horizontale, avec glissement des couches vers le bas. Comme, d'autre part, la fonction $f'_1(y+ax)$ s'annule partout, la formule (13) de T donnera $T > 0$.

Ainsi l'angle aigu 2β sera positif; et il viendra, d'après (42), comme angle β fait avec la verticale ascendante, du côté des y positifs, par le profil montant de l'élément plan le moins pressé,

$$(44) \quad \beta = \frac{1}{2} \text{arc} \cos \frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'}.$$

Or les deux systèmes d'éléments plans séparatifs de deux couches sablonneuses qui soient sur le point de glisser mutuellement font l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}$, respectivement, de part et d'autre de cet élément plan

principal; et comme il s'agit ici des éléments plans de celui des deux systèmes dont le profil ascendant s'éloigne du mur ou est du côté des y positifs, l'angle de ce profil avec la verticale ascendante excédera β de $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}$. Appelons α cet angle total, dont la tangente sera visiblement le coefficient angulaire, changé de signe, ou le rapport $\frac{dy}{(-dx)}$, de la courbe demandée de rupture; et l'on aura, tout à la fois,

$$(45) \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang} \alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2} + \beta,$$

formules dans lesquelles β recevra la valeur (44) ou mieux encore sera relié à φ' par la première (42). Comme φ est constant, une différentiation immédiate de (42) donne

$$\frac{d}{d\beta} \frac{\varphi'}{2} = \operatorname{tang} \varphi' \operatorname{tang} 2\beta;$$

et il vient, par suite, en dérivant l'expression (45) de α ,

$$(46) \quad \frac{d\alpha}{d\beta} = 1 - \operatorname{tang} \varphi' \operatorname{tang} 2\beta.$$

Le dernier membre de celle-ci vaut 1 à la limite $y = ax$ du coin, où $\beta = 0$. Il est donc positif dans le coin même, tout au moins à l'entrée; et α y grandit avec β quand on va vers le mur.

19. Mais reconnaissons que ce second membre de (46) y sera même positif partout, jusqu'au contact du mur. Et, à ce propos, pour chaque point (x, y) du coin, évaluons l'angle φ' , qui a ici un rôle essentiel, en fonction de l'azimut θ du point (x, y) , azimut dont la tangente est le rapport de y à x . La formule (14), où f''_1 s'annule et où l'on portera la valeur (43) de f'' , le fait connaître; et il vient immédiatement

$$(47) \quad \sin^2 \varphi' = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \left(\frac{\alpha - \operatorname{tang} \theta}{\cot \varphi_1 + \operatorname{tang} \theta} \right)^2.$$

On voit que si, à partir de l'entrée du coin où $\text{tang } \theta = a$, le point (x, y) recule vers le mur, ou que $\text{tang } \theta$ décroisse de a à zéro, le dernier terme grandira de zéro à $a^2 \cos^2 \varphi \text{ tang}^2 \varphi_1$; et φ', β croîtront sans cesse, jusqu'à deux limites supérieures, se réalisant contre le mur (pour $\theta = 0$), que nous appellerons respectivement Φ et β_0 . En particulier, la valeur de φ' la plus grande, Φ , aura, vu l'expression $\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$ de a^2 , le carré de son sinus donné à volonté par l'une ou l'autre des deux formules

$$(48) \quad \sin^2 \Phi = \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi \text{ tang}^2 \varphi_1 = \sin^2 \varphi + (1 - \sin \varphi)^2 \text{ tang}^2 \varphi_1.$$

Visiblement, dès que φ_1 diffère de zéro, Φ excède φ et croît avec φ_1 . Mais une circonstance plus cachée consiste en ce que φ_1 atteint Φ quand $\sin \varphi_1$ devient $\sqrt{\sin \varphi}$, sans cesser d'ailleurs, au delà, de se maintenir analytiquement au-dessous de Φ .

Éliminons, en effet, par (42), $\sin \varphi'$ de l'équation (47) préalablement divisée par $\sin^2 \varphi$. Nous aurons

$$\frac{1}{\cos^2 2\beta} = 1 + \frac{\text{tang}^2 \varphi_1}{\text{tang}^2 \varphi} \left(\frac{a - \text{tang } \theta}{1 + \text{tang } \varphi_1 \text{ tang } \theta} \right)^2,$$

ou bien, en remplaçant le premier membre par $1 + \text{tang}^2 2\beta$, puis supprimant le terme commun 1, extrayant les racines carrées et observant que $\text{tang} 2\beta$ est positif comme $\cos 2\beta$,

$$(49) \quad \text{tang} 2\beta = \frac{\text{tang} \varphi_1}{\text{tang} \varphi} \left(\frac{a - \text{tang } \theta}{1 + \text{tang} \varphi_1 \text{ tang } \theta} \right).$$

À la limite $\theta = 0$, où $\beta = \beta_0$ et $\varphi' = \Phi$, cette formule devient

$$(50) \quad \text{tang} 2\beta_0 = a \cot \varphi \text{ tang} \varphi_1; \quad \text{d'où} \quad \text{tang} \varphi_1 = \frac{\text{tang} \varphi}{a} \text{ tang} 2\beta_0.$$

Or, l'équation (42) donnant, à la limite $\theta = 0$,

$$(51) \quad \sin^2 \Phi = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 2\beta_0} \quad \left(\text{d'où, } \text{tang}^2 \Phi = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 2\beta_0 - \sin^2 \varphi} \right),$$

il résultera aisément, des secondes équations (50) et (51),

$$1 - \frac{\tan^2 \varphi_1}{\tan^2 \Phi} = \frac{\cos^2 2\beta_0 + \sin^2 \varphi \tan^2 2\beta_0 + a^2 \cos^2 \varphi - 1}{a^2 \cos^2 \varphi}.$$

Le second membre de celle-ci, multiplié *haut et bas* par $\cos^2 2\beta_0$, devient, en y remplaçant $a^2 \cos^2 \varphi$ par $(1 - \sin \varphi)^2$ et $\sin^2 2\beta_0$ par $1 - \cos^2 2\beta_0$, puis réduisant,

$$\left[\frac{\cos^2 2\beta_0 - \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi) \cos 2\beta_0} \right]^2.$$

On a donc, en définitive, pour relier $\tan \varphi_1$ à $\tan \Phi$, la formule simple

$$(52) \quad \frac{\tan^2 \varphi_1}{\tan^2 \Phi} = 1 - \left[\frac{\cos^2 2\beta_0 - \sin \varphi}{(1 - \sin \varphi) \cos 2\beta_0} \right]^2,$$

qui n'est, du reste, que l'application, à notre terre-plein horizontal, d'une formule générale du Mémoire précédent (1).

Elle montre que, si l'angle φ_1 du frottement extérieur, évidemment incapable, au point de vue physique, d'excéder jamais Φ , atteint cette limite supérieure, la valeur la plus faible de $\cos 2\beta$, celle qui se produit contre le mur, $\cos 2\beta_0$, égalera précisément $\sqrt{\sin \varphi}$.

20. Cela posé, l'angle φ_1 sera toujours censé pris tel que $\sin \varphi_1$ se trouve compris entre zéro et $\sqrt{\sin \varphi}$, et que, par suite, $\sin \Phi$ (plus grand que $\sin \varphi$) le soit entre $\sin \varphi$ et $\sqrt{\sin \varphi}$. Or, dans ces conditions, le second membre de (46) sera bien partout positif dans le coin d'hétérogénéité, ainsi qu'il a été dit, près du mur comme à l'entrée où $\beta = 0$. Car, si, en s'éloignant de l'entrée, φ' et 2β , qui croissent alors ensemble, grandissaient assez pour annuler le second membre

(1) Page 44. C'est la formule figurant à la note de cette page 44, où ε se confond ici avec $2\beta_0$, d'après la formule (44) ci-dessus et la définition même de $\cos \varepsilon$ (rapport de $\sin \varphi$ à $\sin \Phi$).

de (46), c'est, visiblement, parce que φ' et 2β deviendraient complémentaires, ou qu'on aurait $\cos 2\beta = \sin \varphi'$ et, par suite, d'après (42), $\sin^2 \varphi' = \sin \varphi$; ce qu'on voit n'être possible *tout au plus* que contre le mur même, pour $\varphi' = \Phi$.

Ainsi l'angle α varie dans le même sens que β et grandit sans cesse, quand la tangente de l'azimut ou angle polaire θ du point (x, y) varie de a à zéro.

C'est dire que cet angle α de la surface de rupture avec la verticale ascendante décroîtra, en même temps que β , quand, partant du bas du mur et montant vers la surface libre, on suivra le *profil de rupture*. Celui-ci sera ainsi *concave vers le haut* jusqu'au sortir du coin d'hétérogénéité par le plan $y = ax$, où il deviendra la droite d'inclinaison a (sur l'axe des x négatifs), symétrique de $y = ax$ par rapport à la verticale menée au point de sortie.

21. Étudions maintenant l'équation différentielle (45) du profil de rupture. L'angle α y étant la somme de β et de $\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right)$ dont la tangente a' est définie par la formule (40), on aura

$$(53) \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{a' + \operatorname{tang} \beta}{1 - a' \operatorname{tang} \beta}.$$

Substituons-y, d'une part, à a' sa valeur tirée de (40), où $\sin \varphi'$ sera $\frac{\sin \varphi}{\cos 2\beta}$ d'après (42); d'autre part, à $\operatorname{tang} \beta$, son expression classique en $\cos 2\beta$. Bref, faisons-y

$$(54) \quad a' = \sqrt{\frac{\cos 2\beta - \sin \varphi}{\cos 2\beta + \sin \varphi}}, \quad \operatorname{tang} \beta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\beta}{1 + \cos 2\beta}}.$$

Le second membre de (53) sera ainsi une fonction explicite de l'unique variable $\cos 2\beta$, fonction compliquée, il est vrai, de radicaux carrés multipliés entre eux. Or, pour déterminer cette unique variable auxiliaire, l'équation (14), par exemple, donne, en éliminant $\frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi}$ par (42) et $f''(y - ax)$ par (43), puis extrayant une racine carrée et

appelant, pour abrégé, m le rapport donné $\frac{\text{tang } \varphi_1}{\text{tang } \varphi}$,

$$(55) \quad \cos 2\beta = \frac{x + y \text{ tang } \varphi_1}{\sqrt{(x + y \text{ tang } \varphi_1)^2 + m^2(y - ax)^2}}.$$

Introduisons à la place de x , comme nouvelle variable indépendante u , qui croîtra de zéro à 1 entre la paroi $y = 0$ et la limite $y = ax$ du coin d'hétérogénéité, le rapport

$$(56) \quad u = \frac{y}{ax}; \quad \text{d'où} \quad y = axu \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = a \left(u + x \frac{du}{dx} \right).$$

La valeur (55) de $\cos 2\beta$ deviendra

$$(57) \quad \cos 2\beta = \frac{ua \text{ tang } \varphi_1 + 1}{\sqrt{(ua \text{ tang } \varphi_1 + 1)^2 + m^2 a^2 (1 - u)^2}}.$$

D'ailleurs, le second membre de l'équation différentielle (53) est maintenant, grâce aux formules (54) et (57) de a' , $\text{tang } \beta$ et $\cos 2\beta$, une fonction irrationnelle mais tout à fait explicite, $-aF(u)$, de la nouvelle variable indépendante, si l'on pose

$$(58) \quad \text{tang } \alpha \quad \text{ou} \quad \frac{a' + \text{tang } \beta}{1 - a' \text{ tang } \beta} = aF(u);$$

et cette équation (53), où x sera désormais la fonction de u à calculer, admettra immédiatement la séparation des variables, puis l'intégrale générale, réductible à une quadrature unique, avec la constante arbitraire l d'intégration,

$$(59) \quad \log \frac{x}{l} = - \int_0^u \frac{du}{u + F(u)}.$$

Il est visible que l désigne la profondeur (sous la surface libre) d'où l'on veut que parte, contre le mur $u = 0$, le profil de rupture demandé. Il émane en effet, évidemment, un tel profil d'une profondeur l quelconque; et tous ces profils sont homothétiques, par rapport à l'origine située à l'intersection du mur avec la surface libre.

22. La différentielle qui reste à intégrer dans (59) contient deux radicaux carrés, qui portent eux-mêmes, rationnellement, sur le radical figurant au second membre de (57) et où la fonction soumise au radical est du second degré. L'intégrale en est donc hyperelliptique, sinon même (plus probablement) abélienne, et d'un calcul difficile. Aussi me bornerai-je au cas où le paramètre a de la question sera censé assez petit, par rapport à l'unité, pour qu'on puisse négliger partout ses puissances supérieures à la moins élevée qui apparaîtra.

Souvenons-nous que $\sin \varphi$, exprimé en fonction de a , est $\frac{1-a^2}{1+a^2}$; d'où il suit que

$$\cos \varphi = \frac{2a}{1+a^2}, \quad a \operatorname{tang} \varphi = \frac{1-a^2}{2} \quad \text{et} \quad a \operatorname{tang} \varphi_1 = m \frac{1-a^2}{2}.$$

Cela posé, la formule (57), qui peut s'écrire

$$\cos 2\beta = \left[1 + \frac{m^2 a^2 (1-u)^2}{(1+ua \operatorname{tang} \varphi_1)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 + \frac{m^2 a^2 (1-u)^2}{\left(1 + \frac{1-a^2}{2} mu\right)^2} \right]^{-\frac{1}{2}},$$

deviendra successivement, par une application finale de la formule du binôme,

$$\cos 2\beta = \left[1 + 4m^2 a^2 \left(\frac{1-u}{2+mu} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = 1 - 2m^2 a^2 \left(\frac{1-u}{2+mu} \right)^2.$$

Les expressions (54) de a' , $\operatorname{tang} \beta$, où $\sin \varphi$ se trouvera réduit à $1 - 2a^2$, deviendront

$$(60) \quad a' = \frac{a}{2+mu} \sqrt{(4-m^2) + (4+2m)mu}, \quad \operatorname{tang} \beta = a \frac{m-mu}{2+mu};$$

d'où il résultera d'après (58), pour $F(u)$, en négligeant au dénominateur le terme en a^2 , l'expression

$$(61) \quad F(u) = \frac{m - mu + \sqrt{(4-m^2) + (4+2m)mu}}{2+mu} \quad (1).$$

(1) Voir, dans une note, à la fin du Mémoire, ce que serait l'expression de $F(u)$, si l'on ne supposait plus a très petit.

La quadrature à effectuer dans (59) sera donc

$$(62) \quad \int_0^u \frac{du}{u + F(u)} = \int_0^u \frac{(2 + mu) du}{m + (2 - m)u + mu^2 + \sqrt{(4 - m^2) + (4 + 2m)mu}}.$$

23. Achéons le calcul dans le cas le plus intéressant et à peu près le seul qui soit pratique, celui où l'on prend $\varphi_1 = \varphi$ et, par suite, $m = 1$. Il vient alors

$$(63) \quad \frac{du}{u + F(u)} = \frac{(2 + u) du}{1 + u + u^2 + \sqrt{3 + 6u}}.$$

Faisons

$$(64) \quad \sqrt{3 + 6u} = t; \quad \text{d'où} \quad u = \frac{1}{6}(t^2 - 3), \quad du = \frac{1}{3}t dt.$$

Nous aurons

$$(65) \quad \frac{du}{u + F(u)} = \frac{2(t^2 + 9)t dt}{t^4 + 36t + 27} = \frac{2(t^2 + 9)t dt}{(t + 3)(t^3 - 3t^2 + 9t + 9)}.$$

Or l'équation

$$t^3 - 3t^2 + 9t + 9 = 0,$$

résolue en posant d'abord, pour faire évanouir le terme du second degré, $t = \tau + 1$ (ce qui donne la transformée $\tau^3 + 6\tau + 16 = 0$) et en appliquant ensuite la méthode de Cardan, conduit à la racine réelle

$$\tau = \sqrt[3]{2} \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right),$$

où γ désigne

$$\sqrt[3]{3 - 2\sqrt{2}} = 0,5557 \text{ environ,}$$

et, par suite,

$$t = \tau + 1 = -0,759 \text{ à très peu près.}$$

On reconnaît alors, en introduisant le nouveau facteur réel $t + 0,759$, que l'expression à intégrer devient sensiblement

$$\frac{du}{u + F(u)} = \frac{2(t^2 + 9)t dt}{(t + 3)(t + 0,759)(t^2 - 3,759t + 11,853)}.$$

Enfin, la fraction rationnelle du second membre, décomposée en fractions réelles aussi simples que possible, donne, à très peu près,

$$(66) \quad \frac{du}{u + F(u)} = \frac{(1,5) dt}{t + 3} - \frac{0,4244 dt}{t + 0,759} + \frac{0,9247 t dt + 0,7022 dt}{t^2 - 3,759 t + 11,853}.$$

L'intégrale indéfinie en est

$$\int \frac{du}{u + F(u)} = (1,5) \log(t + 3) - (0,4244) \log(t + 0,759) \\ + (0,9247) \log \sqrt{t^2 - 3,759 t + 11,853} + 0,8461 \operatorname{arc tang} \frac{t - 1,88}{2,884}.$$

La quantité sous le radical revenant évidemment à $\frac{t^3 - 3t^2 + 9t + 9}{t + 0,759}$, nous prendrons en tout, comme intégrale indéfinie,

$$\log \left[(t + 3)^{1,5} (t + 0,759)^{-0,887} (t^3 - 3t^2 + 9t + 9)^{0,462} e^{0,846 \operatorname{arc tang} \frac{t - 1,88}{2,884}} \right].$$

Faisons partir l'intégrale de la limite $u = 0$, c'est-à-dire de $t = \sqrt{3}$, et passons des logarithmes aux nombres. L'équation (59) fournira enfin, à très peu près, la solution cherchée du problème :

$$(67) \quad \frac{x}{l} = \left(\frac{\sqrt{3} + 3}{t + 3} \right)^{1,5} \left(\frac{t + 0,759}{\sqrt{3} + 0,759} \right)^{0,887} \left(\frac{12\sqrt{3}}{t^3 - 3t^2 + 9t + 9} \right)^{0,462} \\ \times e^{-0,846 \left(\operatorname{arc tang} \frac{t - 1,88}{2,884} + \operatorname{arc tang} \frac{1,88 - \sqrt{3}}{2,884} \right)}.$$

24. Il importe surtout, dans la question, de connaître l'abscisse x du point où le profil de rupture atteint la limite $y = ax$, ou $u = 1$, du champ d'hétérogénéité; car, au delà de ce point où se termine la partie courbe du profil, le reste de celui-ci est la droite symétrique de la limite même $y = ax$ par rapport à la verticale ascendante qu'on y mène. Et l'ordonnée finale y du profil, sur la surface libre, vaut, par suite, le double de l'ordonnée même ax du point en question. Il suffit donc de faire $u = 1$ ou, d'après (64), $t = 3$, dans la formule (67).

Or, en remplaçant

$$\frac{\sqrt{3} + 3}{t + 3} \text{ par } \frac{4,732}{6} = 0,7887; \quad \frac{12\sqrt{3}}{t^3 - 3t^2 + 9t + 9} \text{ par } \frac{\sqrt{3}}{3} = 0,5773;$$

$$\frac{t + 0,759}{\sqrt{3} + 0,759}, \quad \text{ou} \quad \frac{3,759}{2,491}, \text{ par sa valeur } 1,509,$$

$$\frac{t - 1,88}{2,884} \text{ par } \frac{1,12}{2,884} = 0,38835; \quad \frac{1,88 - \sqrt{3}}{2,884} \text{ par } \frac{0,148}{2,884} = 0,05132.$$

cette formule (67) devient

$$\frac{x}{l} = (0,7887)^{1,5} (1,509)^{0,887} (0,5773)^{0,462} \\ \times e^{-0,846 (\text{arc tang } 0,38835 + \text{arc tang } 0,05132)}.$$

On trouve respectivement, pour les deux arcs tangente, $21^{\circ}13',41$ et $2^{\circ}56',27$; soit, en tout, $24^{\circ}10'$ ou $1450'$, et $0,422$ en multipliant par la valeur absolue $\frac{\pi}{10800} = 0,002909$ d'une minute. On aura donc

$$\frac{x}{l} = (0,7887)^{1,5} (1,509)^{0,887} (0,5773)^{0,462} e^{-0,357}.$$

Enfin, le logarithme décimal de $0,5773$ étant ($-0,23860$), son produit par l'exposant $0,462$ sera ($-0,11023$) ou $\bar{1},88977$; et l'on aura, d'autre part, comme logarithme décimal de $e^{-0,357}$, le produit ($-0,357$)($0,43429$), c'est-à-dire ($-0,15504$) ou $\bar{1},84496$. Le reste du calcul n'offrant aucune difficulté, il vient finalement

$$(68) \quad \frac{x}{l} = 0,5478.$$

Par suite, l'ordonnée correspondante $y = ax$ de l'extrémité de la partie courbe du profil de rupture aura, à très peu près, la valeur $0,548 al$; et celle de l'extrémité du profil total de rupture, sur la surface libre, en sera le double, ($1,096$) al . Ce sera la distance, au mur même, de la *faille* qui se trouvera dessinée sur la surface libre, si le profil de rupture part bien de la *base* du mur, située à une profondeur

donnée l . La pente moyenne du profil de rupture par rapport à la verticale ascendante en est le quotient par l . On aura donc, vu qu'ici les tangentes sont assez petites pour pouvoir être confondues avec leurs arcs,

$$(69) \quad \text{moy. } \alpha = (1,096)\alpha = (1,096) \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

25. Cette valeur se confond presque avec l'estimation que j'en avais faite (bien avant d'avoir dégagé l'équation différentielle explicite du profil de rupture) dans les deux articles des *Annales des Ponts et Chaussées*, de 1883 et 1884, cités (n^{os} 45 et 46) au Mémoire dont celui-ci est un complément. J'y avais obtenu, en appelant Φ la plus forte valeur de φ' , celle qui se produit à la paroi et dont le sinus résulte, dans notre analyse actuelle, de la formule (19),

$$(70) \quad \text{moy. } \alpha = \frac{9}{8} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) - \frac{1}{8} (\Phi - \varphi).$$

Or, ici où

$$\sin \varphi = \frac{1 - a^2}{1 + a^2} = 1 - 2a^2$$

et où

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} = 1 - \frac{a^2}{2},$$

on a

$$\sin \Phi = 1 - \frac{3}{2} a^2;$$

d'où

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \Phi \right) = 3a^2 \quad \text{et} \quad \Phi = \frac{\pi}{2} - a\sqrt{3}.$$

De même

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = 1 - \sin^2 \varphi = 4a^2;$$

d'où

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2a \quad \text{et} \quad \Phi - \varphi = (2 - \sqrt{3})a.$$

La formule (70) devient donc

$$(70 \text{ bis}) \quad \text{moy. } \alpha = \frac{7 + \sqrt{3}}{8} a = (1,0915) \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Le coefficient numérique 1,0915 n'est guère inférieur à celui, 1,096, que nous a donné l'intégration de l'équation théorique (53).

J'étais arrivé à la formule (70), d'une part, en admettant que le profil de rupture avait, même dans sa partie courbe, une direction moyenne *assez peu différente de sa direction finale*, pour atteindre la limite $\gamma = ax$ vers le milieu de la hauteur l , et, d'autre part, en assimilant à un arc de cercle cette partie courbe. Malgré l'imparfaite justification de ces hypothèses, dont la première est, d'après (68), erronée d'un dixième environ, leur ensemble se trouve, on le voit, assez bien confirmé, au moins quand on se borne aux petites valeurs de a .

V. — Coup d'œil sur le même cas d'un terre-plein horizontal, soutenu par un mur vertical qui commence à se renverser, mais, en outre, par une paroi limitant le massif à l'arrière, parallèlement au mur.

26. D'après ce qu'on a vu vers la fin (Article X, p. 71 à 76) du Mémoire complété ici, il y a tout lieu de penser qu'un massif sablonneux, sur le point de s'ébouler de haut en bas, se comporte comme s'il était indéfini au-dessous et en arrière de sa surface de rupture, pourvu qu'il s'étende effectivement jusqu'aux régions où se forme cette surface lorsqu'il existe bien au delà. Il suffira donc que le profil de rupture construit ci-dessus ne rencontre aucune paroi ni surface libre, en arrière du mur, pour que l'équilibre-limite comporte les lois obtenues.

Mais supposons maintenant qu'une seconde paroi verticale, parallèle au mur même, ne laisse, en arrière de celui-ci, au massif sablonneux, qu'une largeur uniforme L , inférieure à l'étendue horizontale du profil de rupture *naturel*, c'est-à-dire, par exemple, à $1,096aH$ pour les petites valeurs de a et une hauteur H de mur. Que cette seconde paroi soit fixe, ou qu'elle soit, elle aussi, mobile autour de sa base et (par exemple) en sens inverse de la première, il sera alors impossible

que le profil de rupture reste le même; et il semble inévitable que, partant toujours du bas du mur, il joigne à un certain niveau au-dessus la nouvelle paroi, pour côtoyer ensuite celle-ci jusqu'à la surface libre. L'équilibre-limite cherché devra donc satisfaire à une *condition définie* de plus, savoir, celle de glissement du sable contre cette paroi, sur une étendue qui comprendra tout au moins la partie verticale ou finale de la surface de rupture. Nous supposerons d'abord, pour fixer les idées, que le glissement du sable s'y fasse vers le bas; ce qui arrivera inévitablement si la seconde paroi commence, elle aussi, à s'ébranler en se renversant en arrière, mais ce qui pourrait également arriver, dans certains cas, sans qu'elle fût ébranlée.

Admettons à l'avance dans les régions adjacentes du massif, partout où l'exigeront les formules (8) ou (14), les degrés précis d'hétérogénéité nécessaires, quant à l'angle variable φ' de frottement, pour que nos intégrales (12), (13) de l'équation linéaire (10) et des équations indéfinies de l'équilibre continuent à être applicables, rendant ainsi relativement facile le calcul de l'état ébouleux que l'on a en vue.

Alors les conditions d'annulation de N_x , N_y , T à la surface libre continueront à donner $f''(y - ax) = 0$, $f'_1(y + ax) = 0$, tout le long des deux faisceaux de droites $y \mp ax = \text{const.}$ issus de cette surface libre, ou, par conséquent, pour les valeurs de $y \mp ax$ comprises entre 0 et L . C'est donc seulement dans les deux *coins* contigus aux parois, ayant leur pointe en haut et leur côté oblique incliné de $\pm a$ par rapport à la paroi respective, que l'une ou l'autre des deux fonctions f'' , f'_1 différera de zéro, pour y prendre une valeur arbitraire sur chaque horizontale de la paroi correspondante, valeur transmise ensuite, dans le massif, tout le long de la droite $y \mp ax = \text{const.}$ qui en émane, jusqu'à son intersection par l'autre paroi à un niveau plus bas de $\frac{L}{a}$.

27. Nous supposerons ici la hauteur totale, H , du mur mobile $y = 0$, depuis sa base jusqu'à la surface libre, plus grande que le quotient $\frac{L}{a}$; de sorte que le coin contigu à la seconde paroi $y = L$ englobe à son intérieur toute la partie inférieure du mur $y = 0$ dont la distance à la

surface libre excède $\frac{L}{a}$, ou que cette partie du mur $y = 0$ soit atteinte par les droites $y + ax = \text{const.}$ issues du haut de la seconde paroi $y = L$, et soit, pour ainsi dire, atteinte aussi par les valeurs correspondantes de la fonction $f_1''(y + ax)$, préalablement déterminées sur cette paroi à un niveau plus élevé de $\frac{L}{a}$ que leur point d'aboutissement.

Admettons d'abord, par contre, que *la hauteur totale H ne dépasse pas le double de $\frac{L}{a}$* . Alors les valeurs de l'autre fonction arbitraire $f''(y - ax)$, qui se déterminent de même au haut du mur $y = 0$ et se transmettent ensuite le long des droites $y - ax = \text{const.}$ en émanant, s'y transmettront effectivement jusqu'à la paroi fixe $y = L$, à la profondeur $\frac{L}{a}$; et, n'y étant pas nulles, elles contribueront à déterminer les nouvelles valeurs de $f_1''(y + ax)$ s'y produisant à cette profondeur. Mais l'influence indirecte ou ultérieure qu'elles auront ainsi, sur f_1'' , après cette sorte de réflexion contre la paroi $y = L$, ne s'exercera pas sur le mur $y = 0$, qu'elles n'atteindraient qu'à la profondeur $2\frac{L}{a}$, jusqu'où il ne se prolonge pas.

Sur ce mur $y = 0$, la fonction $f''(y - ax)$, qui s'y réduit à $f''(-ax)$, paraîtra donc seule jusqu'à la profondeur $\frac{L}{a}$; mais, au-dessous, il y figurera aussi les valeurs de f_1'' qui auront été déterminées sur les parties hautes de la seconde paroi $y = L$. De même, près de celle-ci $y = L$, f_1'' existera seule (en tant que différent de zéro) jusqu'à la profondeur $x = \frac{L}{a}$, pour être, plus bas, associée aux valeurs de la fonction f'' issues du haut du mur $y = 0$.

28. Nous aurons toute la généralité désirable, en attribuant aux angles de frottement extérieur du massif, contre le mur $y = 0$ et contre la paroi $y = L$, deux valeurs constantes φ_1, φ_2 , distinctes de φ et entre elles. La formule (16) deviendra donc (43), comme au n° 18, mais seulement jusqu'à la profondeur $\frac{L}{a}$ contre le mur $y = 0$, c'est-à-dire

entre les limites $y - ax = 0$ et $y - ax = -L$; et il viendra

$$(71) \quad (\text{de } y - ax = 0 \text{ à } y - ax = -L) \quad f''(y - ax) = \frac{\text{tang } \varphi_1}{1 + a \text{ tang } \varphi_1} (y - ax).$$

De même, pour $y = L$, l'action du massif sur la seconde paroi aura comme composante tangentielle, dirigée encore de haut en bas, $-T$; et si l'angle de frottement extérieur y est φ_2 (comme il vient d'être dit), $\text{tang } \varphi_2$ y exprimera le rapport de $-T$ à $-N_y$, c'est-à-dire, d'après les formules (13) prises avec $f'' = 0$ jusqu'à la limite $ax = L$, le rapport de

$$\Pi a[-f_1''(L + ax)] \quad \text{à} \quad \Pi a^2[x + f_1''(L + ax)].$$

On aura donc

$$(\text{de } ax = 0 \text{ à } ax = L) \quad \frac{-f_1''(L + ax)}{a[x + f_1''(L + ax)]} = \text{tang } \varphi_2,$$

relation d'où l'on tire

$$(72) \quad (\text{de } ax = 0 \text{ à } ax = L) \quad f_1''(L + ax) = \frac{-ax \text{ tang } \varphi_2}{1 + a \text{ tang } \varphi_2} \\ = \frac{\text{tang } \varphi_2}{1 + a \text{ tang } \varphi_2} [L - (L + ax)].$$

Et cette formule donnera l'expression de la fonction f_1'' entre les limites $L, 2L$ de sa variable $y + ax$, si l'on observe simplement que L est la valeur de y sur la seconde paroi, ou que $y + ax$ varie de L à $L + ax$ le long de celle-ci.

Nous aurons, en résumé, comme expressions de f_1'' nécessaires à considérer dans notre étude actuelle des circonstances qu'offriront les pressions au voisinage du mur $y = 0$, les deux suivantes :

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\text{de } y + ax = 0 \text{ à } y + ax = L) \quad f_1''(y + ax) = 0, \\ (\text{de } y + ax = L \text{ à } y + ax = 2L) \\ f_1''(y + ax) = \frac{\text{tang } \varphi_2}{1 + a \text{ tang } \varphi_2} [L - (y + ax)]. \end{array} \right.$$

29. Considérons maintenant la fonction $f''(y - ax)$, que nous avons déjà déterminée : 1° entre les limites $y - ax = L$ et $y - ax = 0$, c'est-à-dire à la surface libre $x = 0$ où elle s'annule; 2° entre les limites $y - ax = 0$ et $y - ax = -L$, c'est-à-dire contre le mur $y = 0$ jusqu'à la profondeur $\frac{L}{a}$. Pour pouvoir évaluer les poussées d'équilibre-limite exercées par le massif sur les parties du mur plus profondes, il nous faut encore connaître la même fonction f'' pour les valeurs de sa variable allant de $y - ax = -L$ à $y - ax = -2L$. Nous observerons, à cet effet, que la fonction $f_1'' y$ a les secondes valeurs (73), réduites, vu $y = 0$, à

$$(74) \quad f_1''(ax) = \frac{\text{tang } \varphi_2}{1 + a \text{ tang } \varphi_2} (L - ax).$$

Or la condition de glissement relative au mur $y = 0$, savoir

$$\frac{T}{-N_y} = \text{tang } \varphi_1,$$

y devient, d'après les formules (13) (p. 6),

$$\frac{-f''(-ax) + f_1''(ax)}{x + f''(-ax) + f_1''(ax)} = a \text{ tang } \varphi_1,$$

ou bien, en résolvant par rapport à $f''(-ax)$,

$$(75) \quad f''(-ax) = \frac{(-ax) \text{ tang } \varphi_1}{1 + a \text{ tang } \varphi_1} + \frac{1 - a \text{ tang } \varphi_1}{1 + a \text{ tang } \varphi_1} f_1''(ax).$$

Substituons-y à $f_1''(ax)$ la valeur (74) et nous trouverons

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(de } ax = L \text{ à } ax = 2L) \\ f''(-ax) = \frac{\text{tang } \varphi_1}{1 + a \text{ tang } \varphi_1} (-ax) \\ \quad + \frac{(1 - a \text{ tang } \varphi_1) \text{ tang } \varphi_2}{(1 + a \text{ tang } \varphi_1)(1 + a \text{ tang } \varphi_2)} (L - ax). \end{array} \right.$$

Enfin, en remplaçant $-ax$ par $y - ax$, nous aurons la formule

cherchée de la fonction f'' entre les limites $-L$ et $-2L$ de sa variable :

$$(77) \left\{ \begin{array}{l} \text{(de } y - ax = -L \text{ à } y - ax = -2L) \\ f''(y - ax) = \frac{\operatorname{tang} \varphi_1}{1 + a \operatorname{tang} \varphi_1} (y - ax) \\ \quad + \frac{(1 - a \operatorname{tang} \varphi_1) \operatorname{tang} \varphi_2}{(1 + a \operatorname{tang} \varphi_1)(1 + a \operatorname{tang} \varphi_2)} [L + (y - ax)]. \end{array} \right.$$

On voit que l'influence de la partie supérieure de la paroi $y = L$, où s'est déterminée la fonction f''_1 employée ici, se répercute, pour ainsi dire, sur la partie inférieure du mur $y = 0$, où vient de se déterminer la nouvelle expression (77) de f'' , et que cette sorte de réflexion d'influences d'une paroi sur l'autre s'est traduite par l'addition, aux deux équations (76) et (77), de leur dernier terme.

30. Reconnaissons enfin comment de telles transmissions d'influences, entre les deux parois parallèles, modifieront la composante normale, $(-N_y)$ ou P , de la poussée par unité d'aire, sur la partie inférieure du mur $y = 0$ assimilé à une paroi mince et rigide mobile autour de sa base. La troisième équation (13) y donnant

$$P = \Pi a^2 [x + f''(-ax) + f''_1(ax)],$$

il résultera de la dernière formule (73) et de (76) ou (77), en introduisant finalement, comme nous l'avons fait jusqu'ici, le rapport k de P à Πx ,

$$(78) \left(\text{pour } x > \frac{L}{a} \right) \frac{P}{\Pi x} \text{ ou } k = \frac{a^2}{1 + a \operatorname{tang} \varphi_1} \left[1 - \frac{2a \operatorname{tang} \varphi_2}{1 + a \operatorname{tang} \varphi_2} \left(1 - \frac{L}{ax} \right) \right].$$

On voit que l'influence de la seconde paroi $y = L$ réduit la poussée par unité d'aire, sur la partie inférieure du mur $y = 0$, d'une certaine fraction de la valeur qu'elle y aurait eue dans le cas d'un massif indéfini, fraction exprimée par le rapport

$$(79) \frac{2a \operatorname{tang} \varphi_2}{1 + a \operatorname{tang} \varphi_2} \left(1 - \frac{L}{ax} \right),$$

et que ce rapport lui-même, nul pour $ax = L$, croit avec la profondeur x , à partir du niveau $x = \frac{L}{a}$, jusqu'à la limite

$$(79 \text{ bis}) \quad \frac{a \operatorname{tang} \varphi_2}{1 + a \operatorname{tang} \varphi_2},$$

atteinte à la base du mur, pourvu toutefois que la hauteur totale H soit précisément le double de $\frac{L}{a}$ que nous avons choisi (actuellement) comme limite supérieure de hauteur.

Pour apprécier l'ordre de grandeur de la fraction (79 bis), on peut fixer les idées en prenant

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi, \quad \text{d'où} \quad a \operatorname{tang} \varphi = \frac{1 - a^2}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a \operatorname{tang} \varphi}{1 + a \operatorname{tang} \varphi} = \frac{1 - a^2}{3 - a^2}.$$

Cette fraction décroît de $\frac{1}{3}$ à zéro quand a grandit de zéro à son maximum 1, ou quand φ varie de 90° à zéro.

Si l'on multiplie la formule (78) soit par $\Pi x dx$, soit par $\Pi x dx (H - x)$, puis que, après avoir dédoublé le second membre en ses deux termes, on intègre le premier terme depuis $x = 0$ jusqu'à la limite supérieure H (excédant $\frac{L}{a}$) et le deuxième terme jusqu'à la même limite, mais en y partant seulement de la valeur $\frac{L}{a}$ où ce terme commence à exister, on aura soit la composante normale tout entière, $\mathcal{Q} \cos \varphi_1$, de la poussée par unité de longueur du mur $y = 0$, soit le moment de cette poussée. Et l'on reconnaîtra facilement que, d'une part, cette poussée, d'autre part, son moment, sont réduits, par l'influence de la seconde paroi $y = L$, de deux certaines fractions des valeurs respectives qu'ils auraient eues avec un massif indéfini, fractions exprimées, pour la poussée, par

$$(80) \quad \frac{2a \operatorname{tang} \varphi_2}{1 + a \operatorname{tang} \varphi_2} \left(1 - \frac{L}{aH}\right)^2$$

et, pour son moment, par

$$(81) \quad \frac{2a \operatorname{tang} \varphi_2}{1 + a \operatorname{tang} \varphi_2} \left(1 - \frac{L}{aH}\right)^3.$$

Le moment étant ainsi diminué dans un moindre rapport que la poussée même, le point d'application de la poussée résultante sera plus haut que le tiers de la hauteur au-dessus de l'axe de rotation, censé placé à la base même du mur $y = 0$, c'est-à-dire à la base de la face postérieure de ce mur.

31. Nous avons supposé dirigé de haut en bas le frottement ($-T$) du massif contre la seconde paroi $y = L$, ou attribué au rapport de ($-T$) à ($-N_y$), pour $y = L$, la valeur positive $\text{tang } \varphi_2$, comme il y a tout lieu de l'admettre quand cette paroi, en s'ébranlant pour tourner vers l'arrière autour de sa base et s'écarter du massif, ou encore en s'en éloignant par translation, tend à créer entre elle-même et le massif un vide où la pesanteur ne peut manquer d'entraîner vers le bas les couches sablonneuses contiguës. Le cas contraire où l'ébranlement, dirigé vers l'avant, aurait poussé cette paroi $y = L$ contre le massif et fait refluer vers le haut le sable voisin, de manière à renverser la direction de son frottement ($-T$), se déduira évidemment de la même analyse, grâce à un simple changement du signe de φ_2 . Et alors ce sera un accroissement de poussée, représenté d'ailleurs par les mêmes formules (79) à (81), que subira le bas du mur $y = 0$ par le fait de la seconde paroi.

Cet accroissement se produirait sans doute encore si cette seconde paroi, au lieu de se transporter en avant par rotation ou par translation, se déplaçait un peu vers le bas, *dans son propre plan*, et y entraînait les couches sablonneuses, qui réagiraient dès lors vers le haut; de même qu'un léger déplacement de la paroi vers le haut aurait sans doute fait réagir le sable vers le bas et rendu positif le frottement ($-T$).

Il importe d'observer, à cet égard, que nos équations d'état ébouleux, étant des formules de *simple équilibre* entre le poids du sable et les pressions *statiques* qu'il subit, ne portent aucune trace des mouvements à l'occasion desquels se produisent ces dernières forces. Et voilà pourquoi les mêmes équations en N_x , N_y et T peuvent convenir à des mouvements très divers, mais presque imperceptibles tous. Les différences qu'ils offrent entre eux jouent ici le rôle de simples nuances modifiant très peu les formules, ou sont représentées par des

inerties négligeables en comparaison de la pesanteur. L'élément *proprement dynamique* des phénomènes, qu'elles constituent, ne deviendrait sensible qu'à un degré plus élevé d'approximation, au sujet duquel je me contenterai d'apporter, vers la fin de ce *Complément* (Article VIII, n° 60), quelques indications ou suggestions bien imparfaites. Celles-ci même auront surtout pour but la mise en œuvre des vitesses, quand elle sera possible sans introduire les inerties, c'est-à-dire les produits des accélérations par les masses.

Ces réflexions ne s'appliquent d'ailleurs pas uniquement à l'état ébouleux. Elles s'étendent, comme on le verra, à l'état *plastique* des corps malléables, autre genre d'équilibre-limite, qu'offrent les solides *lentement* déformés, par d'assez fortes pressions, d'une manière continue mais pouvant, à la longue, comprendre les changements de figure les plus étendus.

32. Cherchons encore comment on pourrait déterminer les *profils de rupture* qui dépendent à la fois des deux fonctions f'' et f_1'' . Bornons-nous, du moins en premier lieu, à la région supérieure du massif, et même aux niveaux, $x < \frac{1}{2} \frac{L}{\alpha}$, où il existe, entre les deux coins hétérogènes d'inclinaison α contigus aux deux parois, une région homogène où s'annulent f'' et f_1'' , région dans laquelle les deux profils de rupture possibles font, en chaque point (x, y) , de part et d'autre de la verticale ascendante et en montant eux-mêmes, l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$. On a déjà vu, aux nos 19 et 20, que si, de cette région intermédiaire, on pénètre dans le premier coin d'hétérogénéité, en s'approchant du mur $y = 0$, l'angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$ de ces deux directions devient $\frac{\pi}{2} - \varphi'$, et se rapetisse jusqu'à $\frac{\pi}{2} - \Phi$ contre le mur $y = 0$, tandis que sa bissectrice s'incline, par rapport à la verticale ascendante et vers le gros du massif, d'un angle positif β croissant jusqu'à la valeur β_0 dont le double a comme cosinus $\frac{\sin \varphi}{\sin \Phi}$.

Par suite, en chaque point (x, y) du coin sablonneux, les deux profils de rupture possibles et montant font avec la verticale ascendante,

du côté du gros du massif, les deux angles $\beta \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right)$. Le premier profil, que nous aurons d'abord ici à considérer comme aux n^{os} 19 et 20, et qui s'éloigne du mur $y=0$, correspond au signe supérieur +.

Quant au second profil, l'angle $\beta - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right)$ qu'il fait avec la verticale ascendante, négatif dans la région d'homogénéité où β s'annule, approche de zéro à l'intérieur du coin considéré où β et φ' grandissent, mais en restant négatif jusqu'au près du mur. Car, s'il pouvait quelque part s'abaisser jusqu'à zéro, 2β et φ' y seraient complémentaires : $\cos 2\beta$ y égalerait donc $\sin \varphi'$, et l'équation (42) y donnerait $\sin \varphi' = \sqrt{\sin \varphi}$; ce qu'on a vu, au n^o 20 (p. 28), être possible tout au plus contre le mur.

Dès lors, ce second profil, suivi en montant, est dirigé *vers le mur* $y=0$; et la valeur absolue, que j'appellerai α' , de son angle avec la verticale ascendante, a la grandeur

$$(82) \quad \alpha' = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi'}{2}\right) - \beta,$$

β étant le même, comme φ' , pour les deux profils possibles qui se croisent au point (x, y) . Cet angle α' du second profil avec la verticale ascendante décroît donc à mesure qu'on s'approche, tout en montant, de la paroi $y=0$; en sorte que *le second profil possible de rupture est, comme le premier, concave vers le haut.*

33. Cela posé, notre profil de rupture, censé parti d'un point de cette paroi $y=0$ assez haut pour atteindre la région d'homogénéité qui existe jusqu'au niveau $x = \frac{L}{2\alpha}$, la parcourra suivant une partie rectiligne d'inclinaison α , c'est-à-dire faisant avec la verticale ascendante l'angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$; et il arrivera ainsi à la surface libre, vu qu'il est en avant du bord oblique du coin d'hétérogénéité relatif à la paroi $y=L$ et que, cheminant parallèlement à ce bord, il ne pourra le traverser ou pénétrer dans le coin.

Mais imaginons qu'il vienne juste d'assez bas pour aboutir comme asymptotiquement à ce bord même; et supposons qu'une minime irrégularité accidentelle du massif le déplace très peu vers l'intérieur du coin d'hétérogénéité, en lui en faisant franchir presque tangentiellement le bord oblique. Une fois devenu ainsi intérieur au coin, il ne pourra y suivre que le second des deux systèmes de profils se rapportant à la paroi $y=L$, le seul qui se dirige, en montant, vers cette seconde paroi. Ce sera donc *une deuxième partie courbe* du profil total, concave vers le haut comme la partie inférieure de début, et qui se terminera plus ou moins haut à la seconde paroi.

Arrêtons-nous un instant sur ce profil de rupture *composé*. Soient: d'une part, β_0 et β'_0 les deux valeurs de β relatives respectivement au mur $y=0$ et à la paroi $y=L$, valeurs définies, d'après (50), par les deux formules

$$(83) \quad \text{tang } 2\beta_0 = a \cot \varphi \text{ tang } \varphi_1 \quad \text{tang } 2\beta'_0 = a \cot \varphi \text{ tang } \varphi_2;$$

d'autre part, Φ_1 et Φ_2 les deux valeurs correspondantes de Φ , que détermine la relation (51) en donnant

$$(84) \quad \sin \Phi_1 = \frac{\sin \varphi}{\cos 2\beta_0}, \quad \sin \Phi_2 = \frac{\sin \varphi}{\cos 2\beta'_0}.$$

Les deux angles α_0 et α'_0 faits avec la verticale ascendante par le profil *complexe* ou *composé*, à ses deux extrémités inférieure et supérieure, seront dès lors, d'après la seconde (45) et d'après (82),

$$(85) \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_1}{2} + \beta_0, \quad \alpha'_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\Phi_2}{2} - \beta'_0.$$

La tangente au profil total tourne donc en tout d'une paroi à l'autre, pour se rapprocher de la verticale, de l'angle

$$\alpha_0 - \alpha'_0 = \beta_0 + \beta'_0 + \frac{1}{2}(\Phi_2 - \Phi_1).$$

Par exemple, si l'on fait les hypothèses usuelles,

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi,$$

d'où

$$\operatorname{tang} 2\beta_0 = \operatorname{tang} 2\beta'_0 = \alpha \quad \text{et} \quad \beta_0 = \beta'_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right),$$

cette rotation atteint la valeur $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$, soit 28° dans le cas du sable ordinaire où $\varphi = 34^\circ$. Et l'équation (84) donne alors

$$\Phi_1 = \Phi_2 = 39^\circ 17', 8; \quad \alpha_0 = 39^\circ 21', 1; \quad \alpha'_0 = 11^\circ 21', 1.$$

34. Au-dessous du niveau $x = \frac{L}{2a}$, les deux coins d'hétérogénéité se pénètrent mutuellement jusqu'au delà du milieu de la largeur L , tout en laissant encore près de chaque paroi, tant que le niveau ne s'abaisse pas jusqu'à $x = \frac{L}{a}$, un espace angulaire de plus en plus rétréci (avec sa pointe en bas) où existe seule une des deux fonctions f'' , f_1'' et où sont, par suite, des profils de rupture partiels, respectivement homothétiques de ceux qui existent, plus haut, sur les rayons vecteurs émanés de l'intersection de la surface libre par la paroi voisine.

Mais la partie intermédiaire, maintenant courbe, par laquelle se rejoignent ces fragments ou bouts de profils, a son équation différentielle (45), ou (53) avec les valeurs (54) de d' et de $\operatorname{tang} \beta$, d'apparence un peu plus compliquée. La raison en est que, dans l'équation définissant $\cos 2\beta$, tirée de (42) et de (14), savoir

$$(86) \quad \cos 2\beta = \left\{ 1 + \frac{[f''(y - ax) - f_1''(y + ax)]^2 \cot^2 \varphi}{[x + f''(y - ax) + f_1''(y + ax)]^2} \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

les fonctions f'' et f_1'' ont actuellement l'expression (71) et la deuxième (73), dont aucune ne s'annule.

Toutefois, si l'on transporte l'origine en un point (A, B) convenable et qu'on appelle ξ , η les nouvelles coordonnées courantes, en posant

$$x = A + \xi, \quad y = B + \eta,$$

on pourra déterminer A et B de manière que, dans (86), les deux

expressions linéaires placées entre crochets deviennent, de plus, homogènes en ξ et η , par l'annulation des deux termes constants; et alors $\cos 2\beta$ ne dépendra, finalement, que du rapport $\frac{\eta}{a\xi} = u$, analogue au rapport $\frac{y}{ax}$ du n° 21. Vu que $dx = d\xi$ et que $dy = d\eta$, l'équation différentielle en ξ et η sera donc intégrable par le même procédé qu'à ce n° 21 l'équation différentielle en x et y .

Par exemple, si, faisant les hypothèses usuelles $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, on désigne par λ la fraction $\frac{2a \operatorname{tang} \varphi}{1 + a \operatorname{tang} \varphi}$, qu'on a vu (au n° 30, p. 41) être toujours inférieure à la limite $\frac{2}{3}$ qu'elle atteint pour $a = 0$, les expressions indiquées de f'' et f_1'' deviendront

$$f'' = \frac{\lambda}{2a}(y - ax), \quad f_1'' = \frac{\lambda}{2a}(L - y - ax);$$

d'où

$$(87) \quad f'' - f_1'' = \frac{\lambda}{a}\left(y - \frac{L}{2}\right), \quad x + f'' + f_1'' = (1 - \lambda)\left(x + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{L}{2a}\right).$$

Dès lors, transportons l'origine au point, plus élevé que la surface libre et équidistant des deux parois, dont les coordonnées sont

$$(88) \quad A = -\frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{L}{2a}, \quad B = \frac{L}{2};$$

et l'expression (86) de $\cos 2\beta$ deviendra, en ξ et η ,

$$(89) \quad \cos 2\beta = \left[1 + \frac{\lambda^2 \cot^2 \varphi}{(1 - \lambda)^2} u^2\right]^{-\frac{1}{2}},$$

où

$$\frac{\lambda \cot \varphi}{1 - \lambda} \quad \text{a la valeur} \quad \frac{4a}{1 + a^2} = 2 \cos \varphi.$$

En raison de l'évidente symétrie des pressions par rapport à la verticale équidistante des deux parois, cette expression (89) est bien moins compliquée que (57).

35. De plus, si l'on suppose *a* petit, comme aux n^{os} 22 à 25, l'écart $1 - \cos 2\beta$ est très sensiblement $8a^2u^2$, tandis que, $\sin \varphi$ étant $1 - 2a^2$ à très peu près, les formules (54) donnent environ

$$a' = a\sqrt{1-4u^2}, \quad \text{tang} \beta = 2au.$$

Par suite, l'équation (53), où $dy = d\eta$, $dx = d\xi$, devient

$$(89 \text{ bis}) \quad -\frac{d\eta}{d\xi} = a(2u + \sqrt{1-4u^2}).$$

On observera que, vu l'expression (88) de A , sensiblement égale à $-\frac{L}{a}$, et la grandeur des abscisses x à considérer ici, qui excèdent $\frac{L}{2a}$, les valeurs de ξ seront plus grandes que $3\frac{L}{2a}$, tandis que η ne varie que dans une partie de l'intervalle compris entre $\mp \frac{1}{2}L$. Le rapport u n'atteint donc pas la valeur absolue $\frac{1}{3}$ et le radical $\sqrt{1-4u^2}$, restant supérieur à $\frac{\sqrt{5}}{3} = 0,7454$, dépasse toujours notablement $2u$ en valeur absolue.

Le petit coefficient angulaire, $\frac{d\eta}{d(-\xi)}$, de la tangente au profil de rupture qui s'éloigne du mur $y=0$, inclinaison, partout positive, de ce profil par rapport à la verticale ascendante, augmente avec u , comme on voit par (89 bis), entre le plan $L-y=ax$, limitant le coin émané de la paroi $y=L$, et le plan $y=ax$ limitant le coin émané du mur $y=0$; de sorte que, dans la région dont il s'agit ici, *intérieure à la fois aux deux coins, le profil de rupture* en question n'est plus concave vers le haut, *comme aux deux bouts*, mais bien *convexe*. La courbure γ change donc de sens. Il n'y a, d'ailleurs, à aucune des deux limites $L-y=ax$, $y=ax$, discontinuité de la tangente; car celle des deux fonctions f_1'' , f'' , qui disparaît au delà, atteint graduellement la valeur zéro à la limite même.

Posons dans (89 bis) $\eta = a\xi u$; et éliminons η pour former entre ξ et u une relation analogue à (59). En appelant ξ_0 la valeur, que l'on

peut supposer donnée, de ξ sur l'axe vertical de symétrie $y = \frac{1}{2} L$ du massif, nous aurons

$$\log \frac{\xi}{\xi_0} = - \int_0^u \frac{du}{3u + \sqrt{1 - 4u^2}}.$$

L'intégrale figurant au second membre s'obtiendrait sans difficulté en y égalant le radical à $1 - 2ut$, où t serait une nouvelle variable. Mais cette quadrature ne paraît pas offrir assez d'intérêt pour que nous nous y arrêtions.

36. Au-dessous du niveau $x = \frac{L}{a}$, les calculs deviennent plus compliqués, puisque chacune des deux fonctions f'' , f_1'' s'y accroît de termes dus à la répercussion, sur chaque paroi, d'influences issues des points de l'autre plus élevés de $\frac{L}{a}$. Aussi nous abstiendrons-nous d'y entrer dans les détails. Nous remarquerons seulement que les valeurs extrêmes β_0 et β'_0 , Φ_1 et Φ_2 , de β et de φ' , valeurs relatives aux parois $y = 0$ et $y = L$, continueront à être les mêmes que près de la surface libre. Cela résulte de ce que, pour $y = 0$, par exemple, la condition relative à la première paroi donne directement $T = -N_y \tan \varphi_1$, et que, d'ailleurs, d'après (13), N_y égale partout $a^2 N_x$. La troisième formule (41) donne dès lors $\tan 2\beta_0$; et, en y joignant (42), on a

$$(90) \quad \tan 2\beta_0 = \frac{2a^2 \tan \varphi_1}{1 - a^2}, \quad \frac{\sin \Phi_1}{\sin \varphi} = \frac{1}{\cos 2\beta_0},$$

formules d'où l'on conçoit que $2\beta_0$ et Φ_1 se déduisent, de proche en proche, par de simples considérations de continuité, en faisant croître graduellement x .

Si, en particulier, $\varphi_1 = \varphi_2$, il y aura symétrie de l'état physique de part et d'autre de la verticale $y = \frac{L}{2}$, sur laquelle l'angle β ne pourra que s'annuler.

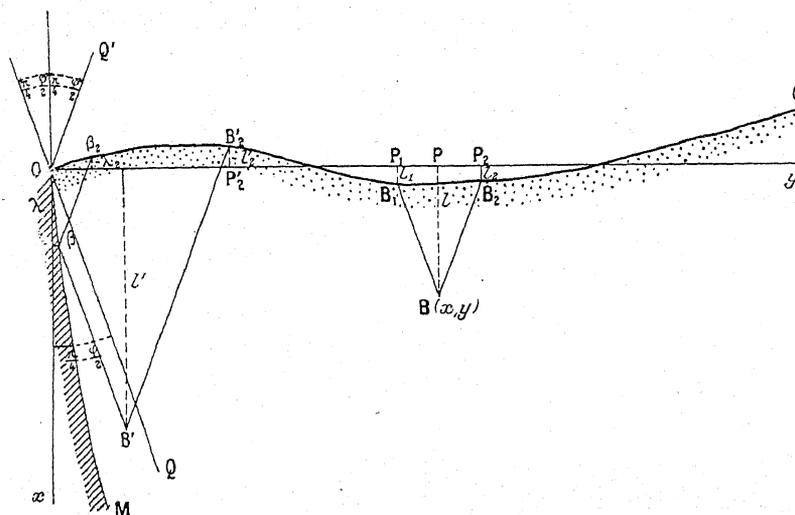
Il est probable qu'à des profondeurs x assez grandes, après un nombre plus ou moins élevé de répercussions d'influences d'une paroi à l'autre, avec addition, chaque fois, de nouveaux termes aux deux

fonctions f'' , f_1'' , les angles β et φ' se régleraient de manière à ne plus dépendre sensiblement de x , tandis que les pressions N_x , N_y , T tendraient à croître, le long de chaque verticale, proportionnellement à la profondeur x (1).

VI. — Intégration graphique, dans le cas d'un terre-plein à surface libre ondulée, indéfini à l'arrière et maintenu à l'avant par un mur courbe.

37. Abordons enfin l'étude d'un terre-plein dont la surface libre a son profil $O\beta_2B'_2B_1B_2C\dots$ (fig. 1) affecté d'ondulations assez longues

Fig. 1.



ou à pentes modérées, de part et d'autre de l'axe horizontal des y , et dont le mur de soutènement est également courbe. Pour simplifier et

(1) J'avais déjà résumé plusieurs des résultats établis dans cet article V du présent Mémoire, au n° III d'une étude déjà ancienne ayant pour titre *Sur la poussée d'une masse de sable, à surface supérieure horizontale, contre une paroi verticale ou inclinée*, que contiennent, aux dates des 17, 24, 31 mars et 7 avril 1884, les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*.

aussi pour fixer les idées, nous supposerons que le profil $O\beta M$ de ce mur s'éloigne de plus en plus, à partir du haut, de la droite OQ du massif inclinée de $\alpha = \text{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ par rapport à la verticale descendante Ox ; en sorte que toute parallèle à OQ , telle que $\beta B'$, issue d'un point du mur, ne rencontre ce dernier en aucun autre point.

Soit OQ' la symétrique de OQ par rapport à l'horizontale Oy , ou la droite d'inclinaison $-\alpha$ quand on la suit en descendant de Q' vers O ; et imaginons que, d'un point quelconque $B(x, y)$ du massif, on mène deux parallèles BB_1, BB_2 , à OQ et à OQ' , jusqu'à la rencontre, ou de la surface libre, en B_1 et B_2 , si le point B est pris au-dessus de OQ , ou de la surface libre, pour BB_2 , et du mur, pour BB_1 , si le point B est pris au contraire dans l'angle QOM . En d'autres termes, BB_1 et BB_2 sont les chemins ascendants des deux familles de droites $y - ax = \text{const.}$ et $y + ax = \text{const.}$, qui conduisent du point intérieur quelconque B à la frontière du massif. Nous appellerons respectivement l, l_1, l_2 les ordonnées verticales x des trois points B, B_1 et B_2 , ordonnées se terminant en P, P_1, P_2 sur l'axe des y et positives quand elles sont menées ainsi de bas en haut, comme dans la figure, négatives dans le cas contraire.

Cela posé, nos intégrales (12) et (13) s'appliqueront à l'équilibre-limite provoqué, chez un tel massif, par un commencement de renversement du mur, pourvu que les deux fonctions $f''(y - ax), f''_1(y + ax)$ aient leurs carrés négligeables ou que, s'il n'en est pas ainsi, le massif présente, quant à son angle φ' de frottement intérieur, précisément les degrés d'hétérogénéité exigés aux divers points par l'équation (14) (p. 7).

Admettons que cela soit. Alors l'annulation de N_x, N_y et T à la surface libre y exigera, d'après la seconde (13), l'égalité partout des deux fonctions f'', f''_1 , tandis que la première et la troisième (13) demanderont leur égalité commune à $-\frac{1}{2}x$, si x désigne l'ordonnée verticale du point considéré quelconque de la surface libre.

38. On aura dès lors, évidemment, pour notre point intérieur B ,

quand il appartient à l'espace principal QOC,

$$(91) \quad x = l, \quad f''(y - ax) = -\frac{l_1}{2}, \quad f_1''(y + ax) = -\frac{l_2}{2};$$

et, par suite, d'après (13),

$$(92) \quad \begin{cases} (-N_x) = \Pi \left(l - \frac{l_1 + l_2}{2} \right), & T = \Pi a \frac{l_1 - l_2}{2}, \\ (-N_y) = \Pi a^2 \left(l - \frac{l_1 + l_2}{2} \right). \end{cases}$$

Quand le point B est pris, au contraire, dans l'angle QOM contigu au mur, en B' (par exemple), les valeurs de x et de $f_1''(y + ax)$ sont encore (91), ou représentées sur notre figure par l' et par $-\frac{l_2}{2}$. Mais il n'en est plus de même pour $f''(y - ax)$, qui reçoit, en B', sa valeur relative au point du mur β où aboutit la parallèle à QO issue de B'; et cette valeur de f'' en β reste justement disponible pour permettre de satisfaire à la condition de glissement du sable contre le mur.

A cet effet, supposons, pour simplifier, le mur vertical en β , de sorte que la poussée, par unité d'aire, du massif contre le mur ait la composante tangentielle T et la composante normale $(-N_y)$. Nous devons avoir, si φ_1 est l'angle donné de frottement extérieur,

$$(en \beta) \quad T = (-N_y) \operatorname{tang} \varphi_1 \quad \text{ou} \quad -f'' + f_1'' = a(x + f'' + f_1'') \operatorname{tang} \varphi_1,$$

c'est-à-dire, en appelant λ, λ_2 les deux ordonnées verticales x des points β et β_2 , puis substituant à x, f_1'' leurs valeurs (91) et multipliant par 2,

$$-2f'' - \lambda_2 = a(2\lambda + 2f'' - \lambda_2) \operatorname{tang} \varphi_1;$$

d'où

$$(93) \quad (en \beta) \quad f'' = -\frac{a \operatorname{tang} \varphi_1}{1 + a \operatorname{tang} \varphi_1} \lambda - \frac{1 - a \operatorname{tang} \varphi_1}{1 + a \operatorname{tang} \varphi_1} \frac{\lambda_2}{2}.$$

On voit comment, une fois dessinés, ou définis *graphiquement*, les deux profils de la surface libre OB, B₂C et de la face postérieure OM du mur, des constructions géométriques extrêmement simples feront

connaître les pressions d'équilibre-limite existant en tous les points du massif.

Celui-ci sera homogène à très peu près (avec φ pour angle de frottement intérieur) dans sa partie principale QOC, pourvu que les pentes de la surface libre et, par suite, des sécantes comme B_1, B_2 joignant ses divers points, n'aient partout que de petites valeurs. Car, s'il en est ainsi, la différence des deux ordonnées l_1, l_2 sera toujours faible comparativement à leur distance, qui est de l'ordre de la distance même, $l - \frac{l_1 + l_2}{2}$ sensiblement, du point intérieur considéré B à la surface libre. Le rapport $\frac{f'' - f_1''}{x + f'' + f_1''}$ sera donc petit dans ces conditions; et l'on pourra négliger son carré au second membre de l'équation (14), ou réduire φ' à φ .

39. Évaluons maintenant la composante normale $(-N_y) = P$ de la poussée sur le mur par unité d'aire de sa face postérieure, en nous bornant au cas simple où cette face, verticale, a son profil OM suivant l'axe des x .

Donnons-nous l'équation de la surface libre sous la forme $x = F(y)$. Et observons qu'ici, pour les divers points β du mur, à abscisse verticale $x = \lambda$, la seule ordonnée verticale à considérer de la surface libre sera celle, λ_2 , du point β_2 correspondant, dont la distance y à l'axe des x est sensiblement $O\beta \times a$ ou $a\lambda$. On aura donc, pour les points β_2 ,

$$\lambda_2 = F(a\lambda).$$

Par suite, la première et la troisième des équations (91), complétées par (93), donneront ensemble, pour tous ces points β ,

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda, \quad f'' = -\frac{a \operatorname{tang} \varphi_1}{1 + a \operatorname{tang} \varphi_1} \lambda - \frac{1 - a \operatorname{tang} \varphi_1}{1 + a \operatorname{tang} \varphi_1} \frac{F(a\lambda)}{2}, \\ f_1'' = -\frac{\lambda_2}{2} = -\frac{F(a\lambda)}{2}. \end{array} \right.$$

Enfin, la composante normale cherchée P ou $(-N_y)$ de la poussée par unité d'aire, en β , sera, d'après la troisième formule (13), toutes

réductions faites,

$$(95) \quad P = \Pi \frac{a^2}{1 + a \operatorname{tang} \varphi_1} [\lambda - F(a\lambda)].$$

Aux diverses profondeurs λ , elle est en raison directe du facteur $\lambda - F(a\lambda)$, projection verticale de la distance $\beta\beta_2$, qu'il y a du point considéré β du mur au point correspondant β_2 de la surface libre. Comme toutes les droites $\beta\beta_2$ sont parallèles, c'est, en définitive, *la distance même à la surface libre, estimée suivant la direction des droites de la famille $y + ax = \text{const.}$* , qui mesure proportionnellement la poussée par unité d'aire aux divers points β du mur, comme si le massif était divisé en longs filets prismatiques infiniment minces, tous orientés suivant cette direction unique, et que chaque élément superficiel du mur dût porter une fraction déterminée du poids de la colonne sablonneuse qui s'y appuie ou dont il est la base oblique. Et l'on trouve naturel qu'il en soit bien ainsi; car c'est suivant les directions $\pm a$ des deux familles $y \mp ax = \text{const.}$, directions se réduisant à la seconde pour les points du mur, que paraissent se transmettre intégralement efforts ou influences dans les questions abordées ici.

40. Il viendra pour la composante normale tout entière,

$$Q \cos \varphi_1 = \int P \, d\lambda,$$

de la poussée par unité de longueur du mur, depuis $\lambda = 0$ jusqu'à une profondeur donnée H , et pour son moment total,

$$\mathfrak{M} = \int P(H - \lambda) \, d\lambda,$$

les expressions suivantes :

$$(96) \quad \left\{ \begin{array}{l} Q \cos \varphi_1 = \Pi \frac{a^2}{1 + a \operatorname{tang} \varphi_1} \left[\frac{H^2}{2} - \int_0^H F(a\lambda) \, d\lambda \right], \\ \mathfrak{M} = \Pi \frac{a^2}{1 + a \operatorname{tang} \varphi_1} \left[\frac{H^3}{6} - \int_0^H (H - \lambda) F(a\lambda) \, d\lambda \right]. \end{array} \right.$$

Si, par exemple, le profil OC est la sinusoïde

$$x = -A \sin \frac{\pi y}{L},$$

à ondulations de période $2L$, débutant par une convexité et d'une demi-amplitude verticale A petite en comparaison de L , on aura

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} \cos \varphi_1 = \Pi \frac{a^2}{1 + a \operatorname{tang} \varphi_1} \left[\frac{H^2}{2} + \frac{AL}{\pi a} \left(1 - \cos \frac{\pi a H}{L} \right) \right], \\ \mathcal{N} = \Pi \frac{a^2}{1 + a \operatorname{tang} \varphi_1} \left[\frac{H^3}{6} + \frac{AL}{\pi a} \left(H - \frac{L}{\pi a} \sin \frac{\pi a H}{L} \right) \right]. \end{array} \right.$$

La poussée est accrue en moyenne par le fait de la première convexité, comme on pouvait le prévoir, tandis qu'elle serait diminuée si A changeait de signe ou si la convexité était remplacée par un creux.

41. On peut voir, au paragraphe IX de mon travail de l'*Académie royale de Belgique*, souvent cité dans le Mémoire précédent, travail de 1873-1875 ayant pour titre *Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, comparé à celui de massifs solides, et sur la poussée des terres sans cohésion*, aux pages 127 à 133, que la même intégration graphique des équations de l'équilibre-limite ramenées à celle (10) de d'Alembert, s'applique au cas non seulement de notre terre-plein à pente moyenne nulle, mais aussi d'un talus ondulé d'une pente moyenne quelconque. Le système d'axes rectangulaires des x et des y qui maintient à l'équation en ϖ sa forme simple (10), et qui se trouve toujours orienté suivant les directions principales de la solution Rankine-Lévy, devient alors oblique par rapport à la verticale; ce qui, à raison des deux composantes X et Y qu'acquiert la pesanteur, complique assez notablement les formules des pressions.

VII. — Rappel sommaire de résultats antérieurs concernant soit l'état ébouleux des masses pulvérulentes, soit leur état élastique : uniformité de l'écoulement dans les sabliers; extinction du son par un milieu inconsistant; etc.

42. Le même Mémoire de l'Académie de Belgique contient encore d'autres problèmes assez intéressants d'état ébouleux, parmi lesquels il en est deux (§ X, p. 145 à 156) qui fournissent des applications de l'équation en χ , aux dérivées partielles du second ordre, propre aux massifs sans pesanteur, équation portant le n° 11 (p. 11) dans mon récent Mémoire des *Annales*, dont celui-ci est un *complément*. C'est rigoureusement que cette équation (11) les régit, à la différence de l'équation (9) du même récent Mémoire, aussi du second ordre en χ , mais où figure de plus p , et qui y est devenue à très peu près (p. 77 et 78), pour les états ébouleux *voisins de la solution Rankine-Lévy*, l'équation linéaire (38) ou (40) en χ seul, parce qu'on a pu alors y remplacer, sans erreur relative *sensible*, p par sa valeur de cette solution même. Au contraire, dès qu'on fait abstraction de la pesanteur, la même équation (9) se réduit rigoureusement à (11) et permet parfois de déterminer à part l'azimut χ , c'est-à-dire l'orientation, partout, des deux pressions principales, avant de s'occuper de leur grandeur ou de la pression moyenne p .

Or il est permis de négliger ainsi la pesanteur, quand on exerce en tous sens, du dehors, sur le massif, des pressions très supérieures à son poids. Tel sera, par exemple, et c'est justement le premier problème dont il s'agit ici, le cas d'une masse sablonneuse, indéfinie (ou censée y remplir l'espace) entre les deux faces d'un angle dièdre, et comprimée fortement par deux plaques rigides qui, occupant ces faces, sont mobiles autour de la charnière constituée par leur intersection, lorsque, en outre, des contre-pressions extérieures convenables, exercées sur les parties du massif très distantes de cette intersection, se trouvent sur le point ou de faire *ouvrir* l'angle dièdre, ou de le laisser, au contraire, *se fermer*. Ce sont évidemment deux équilibres-limite analogues, le premier, à celui de la *poussée* des terres contre un mur, le second, à celui de leur *butée*.

43. On y prend l'intersection fixe des deux plans rigides comme axe des z ou, dans le plan normal des déformations, comme origine des x et des y . L'équation (11) à appliquer est alors

$$(98) \quad \frac{dD}{dy} - \frac{dE}{dx} - k \Delta_2 \gamma = 0,$$

où D , E , $\Delta_2 \gamma$ désignent les expressions

$$D = \frac{1}{2} \left(\frac{d \cos 2\gamma}{dx} + \frac{d \sin 2\gamma}{dy} \right),$$

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{d \sin 2\gamma}{dx} - \frac{d \cos 2\gamma}{dy} \right), \quad \Delta_2 \gamma = \frac{d^2 \gamma}{dx^2} + \frac{d^2 \gamma}{dy^2}.$$

Mais, en raison de ce que la divergence *rectiligne* des profils des deux parois, à partir de l'origine, permet de supposer semblables, dans le plan des xy , les états physiques tout le long d'un même rayon r émané de cette origine, l'azimut γ de la pression principale (proprement dite) la plus faible ne varie qu'avec l'angle polaire θ du rayon; en sorte que les dérivations en x et y de γ , ou de ses dérivées en θ se font par les formules

$$\frac{d}{dx} = -\frac{\sin \theta}{r} \frac{d}{d\theta}, \quad \frac{d}{dy} = \frac{\cos \theta}{r} \frac{d}{d\theta}.$$

D'autre part, les deux dérivées de r en x et y sont, comme l'on sait, $\cos \theta$, $\sin \theta$. On aura ainsi, presque immédiatement,

$$D = \frac{\cos(2\gamma - \theta)}{r} \frac{d\gamma}{d\theta}, \quad E = \frac{\sin(2\gamma - \theta)}{r} \frac{d\gamma}{d\theta}$$

et, ensuite,

$$\frac{dD}{dy} - \frac{dE}{dx} = \frac{\cos(2\gamma - 2\theta)}{r^2} \frac{d^2 \gamma}{d\theta^2} + \frac{\sin(2\gamma - 2\theta)}{r^2} \left(2 - 2 \frac{d\gamma}{d\theta} \right) \frac{d\gamma}{d\theta},$$

$$\Delta_2 \gamma = \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \gamma}{d\theta^2}.$$

L'équation (98) devient donc, après suppression du dénominateur

commun r^2 ,

$$[\cos(2\chi - 2\theta) - k] \frac{d^2\chi}{d\theta^2} + \frac{d\chi}{d\theta} \frac{d \cos(2\chi - 2\theta)}{d\theta} = 0$$

ou

$$\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{d\chi}{d\theta} [\cos(2\chi - 2\theta) - k] \right\} = 0;$$

et elle a comme intégrale générale

$$(99) \quad \frac{d\chi}{d\theta} [\cos(2\chi - 2\theta) - k] = \text{const.}$$

Or telle est précisément, aux notations près, la formule (158) de mon Mémoire cité de Belgique, formule d'où se déduit aisément la loi des azimuts, donnant χ soit par un arc tangente ou circulaire, ou hyperbolique, soit par un arc cotangente hyperbolique, qui ont cette tangente ou cotangente proportionnelle à la tangente circulaire de $\chi - \theta$. La différence $\chi - \theta$, qui joue ici le rôle de variable indépendante et que j'appelle α dans le Mémoire cité, est l'angle fait, en chaque point, avec le rayon vecteur r prolongé, par la pression principale la plus faible.

La même intégrale (99), mais réduite à la solution singulière ou asymptotique $\chi - \theta = \text{const.}$, s'étend (p. 150 et 137 à 139) à l'anneau sablonneux remplissant l'intervalle de deux cylindres circulaires solides coaxiaux, de longueur indéfinie, l'un plein, l'autre creux, sur lesquels s'exerceraient deux pressions normales uniformes, et dont l'un serait, par exemple, fixe, mais, l'autre, susceptible de se contracter ou dilater uniformément suivant les rayons, de manière à faire varier en longueur les lignes matérielles *radiales* et, par suite, également, mais en sens inverse (vu l'incompressibilité), les lignes matérielles circulaires normales à ces rayons.

44. On peut considérer aussi (p. 145) le même anneau sablonneux remplissant l'intervalle des deux cylindres, mais soumettre l'un de ces cylindres (l'autre étant, par exemple, censé fixe) à un couple de rotation croissant autour de leur axe commun, jusqu'à production de l'équilibre-limite de glissement du massif contre ce cylindre tournant,

Il est évident qu'alors l'angle $\chi - \theta = \alpha$ de la pression principale la plus faible avec le rayon vecteur r est indépendant de θ , ou le même partout à égale distance r de l'axe, mais fonction de cette distance r . Il faut donc, dans l'équation (98), composer 2χ de deux parties, l'une, 2θ , se différenciant en x et y comme le faisait χ ci-dessus, l'autre, 2α , se différenciant par les formules

$$\frac{d}{dx} = (\cos \theta) \frac{d}{dr}, \quad \frac{d}{dy} = (\sin \theta) \frac{d}{dr}.$$

Il vient, successivement,

$$\begin{aligned} D &= \frac{\cos(\theta + 2\alpha)}{r} - \frac{d\alpha}{dr} \sin(\theta + 2\alpha), \\ E &= \frac{\sin(\theta + 2\alpha)}{r} + \frac{d\alpha}{dr} \cos(\theta + 2\alpha) \end{aligned}$$

et, après quelques réductions immédiates,

$$\begin{aligned} \frac{dD}{dy} - \frac{dE}{dx} &= -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\sin 2\alpha + r \frac{d\alpha}{dr} \cos 2\alpha \right), \\ \Delta_2 \chi &= \Delta_2(\theta + \alpha) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\alpha}{dr} \right). \end{aligned}$$

L'équation (98), multipliée par r et changée de signes, devient donc

$$(100) \quad \frac{d}{dr} \left[\sin 2\alpha + r \frac{d\alpha}{dr} (\cos 2\alpha + k) \right] = 0.$$

Intégrée, elle donne, en appelant c' la constante arbitraire, puis séparant les variables, multipliant par 2 et intégrant une seconde fois (avec une nouvelle constante arbitraire c),

$$\log \frac{r^2}{c} + \int \frac{(\cos 2\alpha + k) d. 2\alpha}{\sin 2\alpha - c'} = 0.$$

La quadrature s'y fait exactement par l'introduction de $\tan \alpha$ comme

variable d'intégration. Or telle est bien, précisément, la première des deux équations (156) (p. 145) du Mémoire cité.

Je n'insisterai pas davantage sur cette question; car mon but n'était ici que de montrer comment l'équation (98) peut permettre de déterminer (plus ou moins complètement, suivant les cas) l'azimut des pressions principales, dans les déformations planes des massifs pulvérulents sans pesanteur à l'état ébouleux.

45. Un autre exemple, plus important mais sans doute difficile à calculer, d'état ébouleux est fourni par l'écoulement du sable dans un de ces *sabliers* dont se servaient les anciens pour mesurer le temps, vase de révolution à axe vertical et à paroi latérale polie convergeant inférieurement, sous d'assez fortes pentes, vers un *orifice* horizontal d'un diamètre très faible par rapport à celui des parties supérieures du vase même. On remplit celui-ci, du moins jusqu'à une certaine hauteur h au-dessus de l'orifice, d'un sable homogène dont les grains aient leur diamètre un peu comparable au diamètre de l'orifice, de manière à permettre la sortie simultanée de plusieurs grains, tout en rendant insignifiantes leurs vitesses de chute à travers les sections horizontales, bien plus grandes que l'orifice, situées au-dessus de celui-ci à des hauteurs très faibles par rapport à h , mais supérieures au diamètre de l'orifice même.

Dans ces conditions, on peut admettre que presque tout le sable du vase, à l'exception de celui que contient le bas du *goulot*, est à l'état *ébouleux* en ce sens que les accélérations y sont négligeables tout en maintenant l'*équilibre-limite*, ou que les pressions y neutralisent à très peu près la pesanteur.

L'expérience a montré depuis longtemps (sans quoi l'usage des sabliers n'aurait pu s'établir) que la vitesse verticale moyenne à travers l'orifice y devient vite *quasi permanente*, et qu'elle se règle ainsi, pour un sable d'une finesse donnée, d'après la figure et les dimensions du vase au voisinage de l'orifice, *mais non, sensiblement, d'après la hauteur h du sable dans le vase*, tant que celle-ci reste un peu grande par rapport au diamètre de l'orifice. L'écoulement se trouve donc assez uniforme, pour que cet orifice débite des volumes de sable à très peu près proportionnels aux temps et susceptibles de les mesurer.

46. Il y a lieu, dès lors, de penser que nulle pression appréciable n'est exercée par la masse pulvérulente sur les *filets semi-fluides* de sable, à leur naissance un peu plus haut que l'orifice, ou, en d'autres termes, à la traversée de la surface inférieurement concave, en forme de calotte intérieure au vase avec contour appuyé sur le contour même de l'orifice, où les vitesses, insensibles à *l'amont*, cessent de l'être à *l'aval*. Car une telle pression intérieure, qui serait transmise sur la calotte, par la masse pulvérulente, aux grains de sable libérés et leur imprimerait une vitesse *initiale* perceptible, ne pourrait qu'être en rapport de grandeur avec les pressions générales s'exerçant sur les couches inférieures mais encore étendues de cette masse, pressions de l'ordre des poids superposés ou des hauteurs h de charge.

Appelons σ , pour abrégé, la calotte fixe en question, convexe vers le vase, au-dessus et autour de laquelle il y a équilibre-limite sans vitesses appréciables; et admettons que l'orifice, d'abord fermé, avec repos partout dans le vase et son goulot, soit ouvert à un moment donné. Cette surface σ deviendra évidemment, à l'instant où passage sera livré au sable sous-jacent, le siège de pressions décroissantes provoquant, dans les parties du vase qui entourent le goulot depuis et sous un certain plan horizontal fixe, l'établissement d'une série d'états d'équilibre où le poids des couches pulvérulentes supérieures à ce plan, poids représenté sur celui-ci par des pressions verticales p proportionnelles à h , sera transmis de plus en plus aux parois entourant la calotte et de moins en moins à la calotte même, de manière à la décharger tout à fait dès que l'écoulement est réglé.

Malheureusement, l'expression analytique de ces équilibres-limite doit excéder nos moyens d'intégration de leurs équations aux dérivées partielles; et il est difficile de savoir si quelqu'un de ces équilibres-limite permettrait à la pression sur σ de s'annuler tout à fait.

S'il en était un qui fût dans ce cas, il resterait utilisable pour des hauteurs de charge h quelconques, ne dépassant pas toutefois les limites au-dessus desquelles se trouveraient modifiées les propriétés de la matière pulvérulente. En effet, le poids du sable entourant le goulot est insignifiant, eu égard à la grandeur des pressions p exercées sur le plan horizontal qui limite supérieurement la région considérée ici. On peut donc le négliger; ce qui rend homogènes les équations de

l'équilibre-limite pour cette région, soit *indéfinies*, soit *définies* ou relatives tant aux parois, où il y a glissement, qu'à la calotte σ supposée sans aucune pression. Dès lors, elles ne cessent pas d'être satisfaites quand on accroît dans un même rapport, proportionnel à h , toutes les composantes des pressions exercées aux divers points (x, y, z) , à commencer par celles, p , existant à la base supérieure (1).

Toutefois, l'impossibilité à la fois pratique et théorique, pour un *talus* sablonneux censé indéfini en longueur, de se soutenir sous des pentes supérieures au coefficient de frottement, rendrait fortement improbable l'existence d'un tel mode d'équilibre-limite, s'il s'agissait d'orifices d'un diamètre comme infini par rapport à celui des grains de sable. Mais il faut justement observer que, dans les sabliers, l'orifice et même la calotte σ qui le recouvre ne sont pas d'une étendue telle qu'il faille, pour les occuper, beaucoup de grains de sable; et l'on conçoit que ceux-ci, se présentant à la fois pour sortir, *s'arc-boutent* mutuellement, à la manière de voûtes capables, par leur résistance momentanée, de neutraliser la petite fraction, encore subsistante peut-être jusque-là, de la *poussée intérieure*. Ce rôle doit leur être puissamment facilité par le fait que les déformations de la masse sont, ici, *de révolution*, et non pas *planes* comme dans nos calculs; en sorte que les grains n'ont, pour se dégager, qu'une dimension sur *trois*, la dimension verticale, et non plus *une* sur *deux*. D'où une bien plus grande difficulté (de l'écoulement) qui suffirait peut-être, à elle seule, pour permettre l'annulation des pressions sur l'orifice sans faire intervenir l'étrécissement de celui-ci.

Les grains de sable semblent donc ne devoir, à la surface σ , se détacher ou tomber qu'*isolément*, en quelque sorte, faute d'un enduit léger pour les unir; et la petite vitesse sensible qui les anime à la traversée de l'orifice serait uniquement due à leur hauteur de chute depuis le point de σ d'où elles descendraient.

(1) C'est à peu près ainsi que j'ai raisonné au n° 42 bis (p. 103 et 104) de mon Mémoire de Belgique, où j'ai abordé cette difficile question de l'écoulement du sable par un orifice, en contraste si marqué avec l'écoulement d'un liquide et avec la loi de Torricelli.

47. Le raisonnement suivant permet de se rendre compte, presque sans calculs, de la différence profonde qui existe, à ce point de vue de la transmission des pressions, entre un fluide en équilibre, où la pression se transmet intégralement dans les sens horizontaux, malgré des parois verticales quelconques interposées mais laissant toutefois subsister dans le milieu des trajets *de niveau* continus, et une masse sablonneuse où, au contraire, de telles parois verticales, même infiniment polies, permettent de réduire autant qu'on veut la pression.

Pour ne pas sortir du cas simple de déformations planes, imaginons une longue auge rectangulaire, à parois latérales infiniment polies comme son fond horizontal; et, après avoir enlevé une de ses deux plus petites faces verticales, divisons-la par des cloisons également polies rectangulaires, parallèles à l'autre petite face, mais n'atteignant pas tout à fait le fond, en un certain nombre n d'auges partielles, dont chacune communiquera avec la suivante par l'orifice vertical de fond que présentera, sur toute la largeur, le bas de la cloison intermédiaire. Nous admettrons que le fond commun se prolonge encore un peu après le $n^{\text{ième}}$ orifice, de manière à y former, sur toute la largeur, un rebord extérieur horizontal, capable de porter une couche sablonneuse de faible épaisseur.

Cela posé, appelons h, h', h'', h''', \dots les hauteurs uniformes de sable que nous déposerons dans ces auges respectives; et cherchons comment devront être réglées ces hauteurs, à part la première h qui sera arbitraire, pour que l'écoulement soit sur le point de s'y faire de la première auge à la seconde, de la seconde à la troisième; et ainsi de suite, jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ auge, où le sable intérieur sera, de même, tenu juste en équilibre par une épaisseur, $h^{(n)}$, de sable déposé contre le $n^{\text{ième}}$ orifice sur le prolongement extérieur du fond.

Les pressions verticales uniformes exercées, par unité d'aire, sur la plus basse couche sablonneuse de ces auges seront, évidemment, Πh pour la première, $\Pi h'$ pour la deuxième, $\Pi h''$ pour la troisième, etc. Si donc nous considérons le prisme élémentaire (ou mince bouchon) de sable occupant, par exemple, le premier orifice, avec ses deux bases matérielles verticales d'*amont* et d'*aval*, légères couches superficielles pulvérulentes donnant respectivement dans la première et la seconde auges, et sollicitées (vu l'équilibre) par deux pressions horizontales F

égales et contraires, qui sont *pressions principales* en corrélation avec Πh et $\Pi h'$ dans les deux auges, la première de ces bases tendra à sortir de la première auge et, la deuxième, à entrer dans la seconde.

La matière sablonneuse se trouvera donc, à l'arrière de la première base, localement dilatée suivant le sens horizontal, mais contractée verticalement; et le rapport

$$\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) = \alpha^2$$

de la plus petite de ces pressions principales proprement dites, à la plus grande, sera celui de la force horizontale F à la force verticale Πh . On aura donc

$$F = \Pi h \alpha^2.$$

Mais, au contraire, la seconde base, qui tend à pénétrer dans la deuxième auge, y comprime localement devant elle le sable, qui se détend dès lors verticalement; en sorte que F y est la plus forte pression et $\Pi h'$ la plus faible, ou qu'on y a

$$F = \frac{\Pi h'}{\alpha^2}.$$

Par suite, les deux valeurs de F , égalées, donnent

$$(101) \quad h' = \alpha^4 h.$$

On aura de même, en considérant les orifices suivants et la tendance, qui s'y produit, à l'écoulement vers le dernier orifice,

$$h'' = \alpha^4 h' = \alpha^8 h, \quad h''' = \alpha^4 h'' = \alpha^{12} h, \quad \dots, \quad h^{(n)} = \alpha^{4n} h.$$

Comme α est moindre que 1, les hauteurs successives de sable maintenant l'équilibre-limite tendent vers zéro et, pour n assez grand, une légère couche pulvérulente, obstruant le dernier orifice sur le rebord extérieur du fond, suffira pour empêcher partout l'écoulement.

Par exemple, s'il s'agit de sable ordinaire, où $\varphi = 34^\circ$, $\alpha = \tan 28^\circ = 0,5317$ et $\alpha^4 = 0,08$ (environ), il suffira de deux

auges ou deux orifices pour donner $a^{12} = a^8 = 0,006388$, c'est-à-dire pas beaucoup plus qu'un demi-centième.

48. La première et majeure partie de mon Mémoire de Belgique concerne les états d'équilibre élastique se produisant dans les couches supérieures, c'est-à-dire peu profondes, d'un long talus plan sablonneux où l'état mécanique est censé ne varier qu'avec la distance à la surface libre, lorsqu'on suppose la masse d'abord sans pesanteur et *tout entière à l'état naturel*, puis soumise peu à peu à une pesanteur lentement croissante, de manière à passer par une suite d'états d'équilibre n'outrepasant jamais ses primitives limites d'élasticité, contrairement à ce qui arrive aux massifs ordinaires de sable, dont les éléments sont déposés successivement les uns sur les autres, avec d'innombrables chocs et sans que jamais leur ensemble se trouve à l'état naturel. On ne pourrait, ce semble, expérimenter ce phénomène avec quelque approximation qu'en composant le massif d'une poudre insoluble dont les grains auraient une densité à peine supérieure à celle de l'eau, et en le laissant non seulement se déposer, mais aussi se tasser peu à peu sous une eau en repos (et, par conséquent, à *de très faibles pressions entre les grains de sable*), puis se sécher par lente évaporation superficielle ou par lente infiltration du liquide dans les couches profondes du sol.

Sans me préoccuper de l'extrême difficulté, sinon de l'impossibilité, que présenterait la réalisation de conditions pareilles, mais me plaçant aux points de vue habituels, hypothétiques, de la *Mécanique rationnelle*, j'ai pris comme expressions des forces élastiques du sable celles qu'a démontrées la grande Note (n° 4, p. 2 à 7) du récent Mémoire dont celui-ci est le complément, c'est-à-dire les formules convenant à un solide élastique beaucoup plus déformable que compressible (conservant ses volumes) et où le *coefficient de rigidité* (μ de Lamé), au lieu d'être constant, se trouverait partout proportionnel à la pression moyenne actuelle p .

J'ai reconnu que le talus indéfini proposé admet alors, suivant un ensemble de circonstances produites au loin, une infinité de modes d'équilibre élastiques, fonctions d'un certain paramètre ε , où pressions et déformations, partout orientées de même et ne variant tout au plus

qu'avec la distance à la surface libre, lui sont simplement proportionnelles, quant aux pressions, mais n'en dépendent pas ou *sont uniformes*, quant aux déformations. Le paramètre ε y représente l'angle que font respectivement, avec la verticale et avec l'horizon, dans chaque mode d'équilibre, les deux systèmes, perpendiculaires l'un à l'autre, de droites matérielles non contractées ni dilatées (par la petite déformation), inclinées à 45° sur les pressions principales ou les dilatations principales, et dont l'un, le plus voisin de la verticale, pourrait donner, par une de ses droites, le profil d'un mur plan immobilisant les grains contigus du massif dans leurs situations d'état naturel.

Lorsqu'on tient compte de la limite (supposée invariable) d'élasticité pour la dilatation principale positive, l'angle ω du talus avec l'horizon est toujours inférieur à φ ; et ces modes d'*équilibre élastique*, pour chaque valeur de ω , se trouvent tous compris entre les deux modes d'*équilibre-limite* découverts par Macquorn-Rankine, qui n'en sont que les cas extrêmes (1).

Il y a même, sauf toutefois quelques différences ou particularités notables, une pareille série de tels équilibres, aussi avec limites analogues de pente de la surface libre, pour les solides élastiques et isotropes ayant cette forme de talus plans indéfinis, et qui se seraient également trouvés à l'état naturel avant d'être soumis à leur poids (notes des pages 31, 45, 63, 87 et 88 de ce Mémoire de 1876).

49. Enfin, considérant que les ébranlements accidentels auxquels est fréquemment exposé un massif sablonneux doivent, à la longue, altérer sa contexture ou changer l'état naturel de ses particules, j'é mets, au paragraphe VIII du Mémoire, l'opinion qu'un massif soutenu par un mur doit finir par atteindre le mode d'équilibre le plus stable possible, c'est-à-dire le plus voisin de l'état naturel ou comportant les moindres déformations élastiques, compatible avec le degré de résistance de son mur de soutènement. J'apprécie d'ailleurs ce degré d'après le moment de la poussée qui renverserait en bloc le mur, par rotation autour d'un axe donné tel qu'est, notamment, le bord

(1) Voir les nos 8 et 9 (p. 13 et 14) du Mémoire que complète celui-ci.

antérieur de sa base. Je peux alors déterminer aisément la valeur de ε pour laquelle la déformation élastique est la plus voisine de zéro, ou quel est, dans chaque cas, le plus stable des modes simples d'équilibre élastique considérés ci-dessus (modes où la déformation est partout uniforme).

Je fixe ainsi, pour un mur rectangulaire vertical ne résistant au renversement que par son poids, soit l'épaisseur minimum qu'il doit avoir pour ne pas tomber, eu égard à sa densité, et à la pente $\tan \omega$ du talus qui l'affleure, soit aussi l'épaisseur beaucoup plus grande qui permet l'établissement du mode le plus stable compatible avec la déclivité ω .

Mais je n'avais pas assez remarqué, lors de la rédaction de ce paragraphe VIII, que les choses sont loin d'être aussi simples dans la nature. Car il doit être infiniment rare : 1°-que, près d'un mur soutenant un massif en talus plan, l'état physique du massif soit indépendant de la distance à ce mur et seulement fonction de la distance à la surface libre ; 2° que la contexture qui se produit à la longue comporte l'existence d'un état naturel *pour l'ensemble du massif*. De telles hypothèses équivalent à des simplifications énormes, capables de dénaturer les problèmes en les idéalisant outre mesure et en supprimant d'importants détails. Il est possible cependant qu'elles fournissent une *esquisse* des phénomènes, précieuse en attendant mieux.

50. Les mêmes réflexions critiques atteignent, jusqu'à un certain point, bien des calculs d'équilibre élastique, faits par les géomètres relativement aux petites déformations que produit la pesanteur dans les solides. On y admet d'ordinaire l'existence, pour un tel corps tout entier, d'un état *naturel* logiquement antérieur à l'application de cette force. Or cette hypothèse n'est cependant justifiable, elle ne comporte de contrôle, que chez des solides ou très légers, ou de faibles dimensions, assez petits, en un mot, pour que les déformations dues à leur poids soient insignifiantes, comparativement à celles dont leur élasticité les rend capables sans dépassement de ses limites. Alors seulement nous pouvons les faire entrer dans des constructions beaucoup plus grandes qu'eux-mêmes, où ils figurent presque comme de simples éléments de volume ; et les poids, les déformant notablement, qu'ils y supportent, ne sont plus leur poids propre, dont on ne saurait les

débarrasser qu'en les transportant loin du globe, dans les espaces célestes.

Supposés même ainsi petits, on ne peut guère y admettre un état naturel, c'est-à-dire l'absence de pressions tant intérieures qu'extérieures, que lorsque, si ce sont, par exemple, des matériaux de construction, ils ont été extraits du milieu d'une vaste carrière d'apparence uniforme, où la vraisemblable variation graduelle d'état entre points voisins permette de les assimiler à de véritables particules, constituées de même dans toute leur étendue; en sorte qu'il suffise d'y annuler les pressions de superficie pour y faire évanouir en même temps les pressions intérieures. Et si ce sont des métaux, des corps produits après fusion, il faut que leur solidification ait eu lieu lentement, sans courants, presque à la fois dans toute leur étendue; sans quoi on ne peut guère y atténuer suffisamment les disparités, les inégalités intérieures et, plus tard, les particularités (comme écrouissage, énervement, etc.) dues à l'histoire propre de chaque région, que par l'opération du *recuit*, c'est-à-dire par une multitude de fusions partielles y ramollissant et fluidifiant successivement toute la matière, de façon à uniformiser peu à peu sa contexture et à effacer les tensions purement locales.

51. Mon Mémoire de Belgique a passé presque complètement sous silence les phénomènes de mouvement pouvant se produire, dans les masses pulvérulentes, avec *accélérations sensibles* dont il faille tenir compte, comme seraient, par exemple, les mouvements vibratoires. C'est seulement dans une Note (p. 96) que j'en ai parlé, pour observer qu'à l'état naturel (ou abstraction faite de la pesanteur) leurs composantes de pression, non linéaires par rapport aux déformations et à la pression moyenne p considérées à la fois, sont impuissantes à leur donner une élasticité appréciable, analogue à celle des solides ou des fluides compressibles, apte, en un mot, à leur faire transmettre, avec une vitesse ou *célérité* finie, les ondes d'amplitude infiniment petite, c'est-à-dire (plutôt) très faible. Vu la petitesse extrême de p , dans ces mouvements où p s'évanouit avec les déplacements mêmes; vu aussi, par suite, l'annulation, avec p , du coefficient de rigidité μ qui lui est proportionnel, ces milieux s'y comportent donc, à très peu près,

comme un solide isotrope sollicité à vibrer transversalement, mais où le coefficient d'élasticité mis en jeu par de tels mouvements serait infiniment petit : circonstance d'où résulterait l'évanouissement de la vitesse de propagation et, par suite, l'impossibilité, pour les *ondes*, de se transmettre, à peu près intégralement, dans le milieu. Aussi l'expérience prouve-t-elle, comme je l'ai observé dans la Note dont il s'agit, qu'un massif pulvérulent étouffe le son.

52. Toutefois, s'il en est ainsi dans les couches supérieures du massif, où p n'a pas de partie *permanente* notable p_0 due à leur poids et, par conséquent, antérieure aux vibrations considérées, cette partie permanente p_0 , proportionnelle, dans un terre-plein horizontal, à l'ordonnée verticale comptée en partant de la surface libre, devient, au contraire, suffisante, aux profondeurs assez grandes, pour conférer au milieu une élasticité $\mu = mp_0$ appréciable et permettant ainsi, aux feuilletés matériels parallèles qui s'y trouvent, de réagir contre des glissements mutuels qui leur seraient imprimés. D'où une étude, qui reste encore à faire, d'un genre d'ondes complètement inconnu tant aux physiciens qu'aux géomètres. On pourrait s'y borner, en premier lieu, au cas d'un terre-plein horizontal et qui, aux époques t négatives, se trouverait en repos, avec surface libre choisie comme plan des xy et même, d'abord, avec pressions réduites à la pression moyenne d'équilibre $p_0 = -\Pi z$, pour se mettre en mouvement à l'instant $t = 0$, par l'effet d'une perturbation rapidement survenue à la superficie. En s'y guidant sur l'analogie avec les ondes dues, dans un liquide pesant, à un trouble initial de la surface libre, on formerait sans doute assez aisément les équations aux dérivées partielles de ces sortes de petits mouvements (1). On remarquera qu'elles deviennent identiques à celles des ondes liquides ainsi rappelées (dites *ondes par éersion* et *ondes par impulsion superficielle*), quand on pose $m = 0$ et, par suite, $\mu = 0$; ce qui réduit le massif pulvérulent à un fluide incompressible.

(1) On y emploierait les formules générales que j'ai données au paragraphe I de mon Mémoire de 1869-1872 sur la *Théorie des ondes liquides périodiques* et vers la fin de la Note complémentaire 3 de ce Mémoire (Tome XX du *Recueil des Savants étrangers* de l'Académie des Sciences de Paris).

VIII. — Aperçus et hypothèses sur la mécanique des semi-fluides en général.

53. Une assez lointaine analogie de toute particule sablonneuse, tassée jusqu'à un certain point, avec une particule solide isotrope beaucoup plus déformable que compressible, nous a permis, au début de ces études (1), d'obtenir, pour la particule sablonneuse ou, plus généralement, pulvérulente, des formules de pressions élastiques où subsistent la dépendance et la développabilité des pressions, en fonction entière des déformations éprouvées à partir de l'état naturel, mais sans la loi de quasi-proportionnalité ou de quasi-linéarité due à l'abbé Mariotte ou à Hooke, et à la condition de mettre en compte, pour tenir lieu de cette loi, le fait de l'absence de rigidité à *pression nulle*. Cela a suffi pour faire attribuer à la particule pulvérulente, tant que les pressions sont modérées, une rigidité $\mu = mp$ proportionnelle à la pression moyenne p ; après quoi, l'extension, à la même particule sensiblement incompressible et soumise à des déformations planes, de la notion d'une limite Δ d'élasticité quant à la dilatation principale positive d_1 , nous a conduit à l'équation caractéristique de l'état *ébouleux*, ou à la connaissance de l'*angle de frottement intérieur*, que ne peut dépasser, sans amener l'*éboulement* de la particule, l'*obliquité* d'aucune pression *intérieure* ou *superficielle*. Et, du moins pour les déformations planes, la mécanique de cette catégorie de corps *semi-fluides* que sont les masses pulvérulentes, s'est ainsi trouvée ébauchée, unifiée même, en quelque sorte, avec celle des solides isotropes.

Or on ne voit pas qu'il ait été fait, jusqu'à présent, sur les masses pulvérulentes, des observations, comme seraient par exemple des mesures de la troisième (ou intermédiaire) pression principale P_3 , obligeant à sortir de l'hypothèse simple des déformations planes. On est, en attendant, assez porté à penser que, si la pression intermédiaire principale P_3 différait de la *pression moyenne* ($-p$), l'*angle de frottement intérieur* n'éprouverait pas de grandes variations, ou que l'équa-

(1) Voir (p. 2 à 7) le précédent Mémoire que complète celui-ci.

tion d'état ébouleux, entre P_1 et P_2 , resterait sensiblement la même (1).

54. Mais les solides, eux aussi, peuvent constituer une seconde catégorie de semi-fluides, c'est-à-dire *couler*, se laisser déformer ou pétrir indéfiniment, avec plus ou moins de lenteur, sans tendance notable vers les formes ou structures antérieures, et même sans se briser, grâce à des pressions suffisantes en tous sens qui s'y opposeraient à la *rupture*, à la brusque séparation des particules contiguës. Et ces écoulements, où se conserve encore, très sensiblement, la densité de la matière, mieux même que dans les masses pulvérulentes, comportent des lois approximatives accessibles à nos observations, ainsi qu'à nos calculs, lorsqu'il s'agit de corps *mous* ou malléables, isotropes, comme le plomb, les pâtes céramiques, etc. Leur *fluidité*, leur *équilibre-limite* interne, dit *état plastique*, paraît se produire, de même que chez les masses pulvérulentes l'équilibre-limite *ébouleux*, dès que les trois petites dilatations élastiques principales $\delta_1, \delta_3, \delta_2$ des particules, à somme algébrique supposable encore nulle, vérifient une certaine relation où la plus grande d'entre elles (en valeur relative) δ_1 atteint une limite positive Δ d'élasticité, sans doute fonction, jusqu'à un certain point, du rapport des deux autres δ_3, δ_2 .

Dans le cas de déformations planes où l'une de celles-ci, δ_3 , s'annule et où, par suite, $\delta_2 = -\delta_1$, l'état plastique semble donc devoir se réaliser quand la différence $\delta_1 - \delta_2$ des deux dilatations principales extrêmes devient le double de la limite Δ d'élasticité. Or la théorie générale des petites déformations continues d'une particule nous apprend : 1° que la différence $\delta_1 - \delta_2$ mesure précisément le plus grand glissement relatif G de couches parallèles de la particule, les unes devant les autres, ou, ce qui revient au même, la plus forte inclinaison (*obliquité* relative) prise par deux fibres de la particule issues d'un même point et rectangulaires *primitivement* (à l'état naturel), l'une de ces fibres étant primitivement normale aux couches parallèles dont il s'agit et l'autre étant prise, dans l'une des couches, suivant

(1) On trouvera ci-après une Note sur cette question, à la fin du n° 55 (p. 74).

le sens des glissements; 2° que ces fibres de plus grand glissement mutuel (ou mieux *changement angulaire*) G , sont les deux bissectant, dans l'état naturel, les quatre angles droits des deux *fibres principales extrêmes* (à dilatations ∂_1, ∂_2) suivant lesquelles s'exercent, après la déformation, les deux *pressions* (ou plutôt *tractions*) *principales* la plus grande et la plus petite, P_1, P_2 .

Celles-ci, et la pression principale intermédiaire P_3 (dirigée suivant la troisième fibre principale, normale aux deux autres, et à dilatation ∂_3), admettent, comme on sait, vu la quasi-incompressibilité admise qui donne sensiblement $\partial_1 + \partial_3 + \partial_2 = 0$, les trois formules

$$(102) \quad (P_1, P_2, P_3) = -p + 2\mu(\partial_1, \partial_2, \partial_3),$$

où μ désigne le coefficient de rigidité du solide. Et ces équations (102) font bien voir que, dans le cas de déformations planes où $\partial_3 = 0$ et $\partial_2 = -\partial_1$, la pression principale intermédiaire P_3 égale, comme chez un milieu pulvérulent, la moyenne arithmétique des deux pressions principales extrêmes P_1, P_2 , ainsi que la pression moyenne p , changée de signe.

D'ailleurs, la plus forte composante tangentielle T_m de pression, en chaque point de toute particule élastique isotrope, est celle que supporte l'élément plan normal à l'une quelconque des deux fibres à plus grand glissement mutuel (ou changement angulaire) G , et se trouve dirigée suivant le sens de l'autre fibre, en faisant un angle de 45° avec la traction maxima P_1 au même point. Enfin, sa valeur est

$$(103) \quad T_m = \frac{1}{2}(P_1 - P_2) = \mu(\partial_1 - \partial_2) = \mu G.$$

Ici, où $G = 2\Delta$ lors de déformations planes produisant l'équilibre-limite ou état plastique, on aura donc

$$(104) \quad T_m = 2\mu\Delta.$$

Ainsi, dans un solide malléable isotrope soumis à des déformations planes, *l'état de fluidité ou plastique sera caractérisé* par une valeur constante $2\mu\Delta$, que j'appellerai K , de la plus forte composante tan-

gentielle de pression à l'intérieur de chaque particule, ou, ce qui revient au même, par la valeur constante $2K$ de la différence γ existant entre les deux pressions principales extrêmes P_1, P_2 .

55. Or de nombreuses expériences de Tresca sur le poinçonnage du plomb tendent à montrer qu'il en est approximativement de même, dans d'assez larges limites, sans que les déformations restent planes ou sans que la troisième dilatation principale δ_3 (intermédiaire entre δ_1 et δ_2) s'annule : K s'y est toujours montré, pour le plomb, plus ou moins voisin de 200^{ks} par centimètre carré.

Pour concevoir la vraisemblance ou, plus exactement, la possibilité d'un tel résultat d'observation, il convient d'observer que le rapprochement des molécules dans les deux sens perpendiculaires à celui de la dilatation δ_1 , et non pas seulement dans celui de la plus forte contraction ($-\delta_2$), doit naturellement accroître la *cohésion* de la particule, c'est-à-dire γ favoriser la conservation de la contexture actuelle ou la tendance de la matière à y revenir (quand elle n'en est que peu écartée) et, par conséquent, retarder la production de l'état plastique ou faire grandir la limite Δ d'élasticité. Or voyons quelle est précisément la proportion suivant laquelle Δ devrait croître ainsi avec ($-\delta_3$), pour maintenir K constant.

La contraction ($-\delta_3$), quand elle est positive, se trouve moindre que ($-\delta_2$) et, à plus forte raison, moindre que $\delta_1 - \delta_2$. Quand elle est négative, ou que δ_3 est positif, δ_3 est moindre que δ_1 et, à plus forte raison, moindre encore que $\delta_1 - \delta_2$. Donc le rapport, que j'appellerai ε , de ($-\delta_3$) à $\delta_1 - \delta_2$ a toujours sa valeur absolue inférieure à l'unité. Cela étant, posons

$$(105) \quad (-\delta_3) = \varepsilon(\delta_1 - \delta_2).$$

Dès lors, l'annulation de la somme $\delta_1 + \delta_3 + \delta_2$ exprime l'égalité de $(1 - \varepsilon)\delta_1$ à $(1 + \varepsilon)(-\delta_2)$; et l'on forme aisément la suite de rapports égaux

$$(106) \quad \frac{\delta_1}{1 + \varepsilon} = \frac{-\delta_2}{1 - \varepsilon} = \frac{\delta_1 - \delta_2}{2} = \frac{-\delta_3}{2\varepsilon}.$$

Il en résulte, pour la deuxième expression (103) de T_m , $\frac{2\mu\lambda_1}{1+\varepsilon}$; et l'on a, quand λ_1 atteint la limite Δ de fluidité,

$$(107) \quad T_m \text{ ou } K = \frac{2\mu\Delta}{1+\varepsilon}.$$

Donc, quand les déformations cessent d'être planes, ou que s'écarte de zéro la contraction principale intermédiaire $-\lambda_3$, il faut, pour la conservation de l'action déformatrice K de fluidité, que la limite d'élasticité Δ grandisse comme le binôme $1+\varepsilon$, lui-même croissant avec cette contraction intermédiaire ($-\lambda_3$). On voit qu'une telle proportionnalité approximative de Δ à $1+\varepsilon$ n'avait rien d'impossible, puisqu'on avait prévu pour Δ des variations de mêmes sens que pour $1+\varepsilon$ (¹).

56. Quelque chose d'analogue doit se produire dans les corps *durs* et *cassants*, aussi peu déformables que compressibles : parlons-en un

(¹) Les mêmes considérations s'appliqueraient évidemment à une particule pulvérulente, en faisant alors $\mu = mp$. La relation (107), doublée, donnerait

$$P_1 - P_2 = 2p \frac{2m\Delta}{1+\varepsilon}.$$

Et il résulterait, d'autre part, de deux formules (102), vu finalement (106) où $\lambda_1 = \Delta$,

$$P_1 + P_2 = -2p(1 + m\lambda_3) = -2p \left(1 - \frac{2m\varepsilon\Delta}{1+\varepsilon} \right).$$

En divisant celle-ci par la précédente et appelant φ l'angle de frottement intérieur, dont le sinus est le quotient de $P_2 - P_1$ par $P_2 + P_1$, il vient

$$\frac{1}{\sin \varphi} = \frac{1+\varepsilon}{2m\Delta} - \varepsilon$$

ou bien

$$\frac{1}{2m\Delta} = 1 + \frac{1 - \sin \varphi}{\sin \varphi} \frac{1}{1+\varepsilon}.$$

La constance de $\sin \varphi$ exige encore, on le voit, que Δ et ε varient dans les mêmes sens, comme on a jugé vraisemblable qu'ils font,

instant, quoique ce soit peut-être en dehors de notre sujet propre, qui est la *semi-fluidité*. On sait que, si la particule rigide considérée est isotrope, et que θ y désigne la dilatation cubique $\vartheta_1 + \vartheta_3 + \vartheta_2$, où figurent les trois dilatations principales $\vartheta_1, \vartheta_3, \vartheta_2$ rangées ici par ordre de grandeur décroissante, les formules des trois pressions élastiques principales correspondantes P_1, P_3, P_2 seront, avec les deux coefficients usuels d'élasticité de Lamé, λ, μ , reconnus sensiblement égaux dans les corps durs (verre, acier, etc.),

$$(108) \quad (P_1, P_2, P_3) = \lambda\theta + 2\mu(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3).$$

Il est assez naturel de penser que la rupture s'y produit, comme les états ébouleux et plastique dans les équilibres-limite des masses ou pulvérulentes ou molles, au moment environ où la plus grande dilatation principale ϑ_1 va y dépasser la limite positive Δ d'élasticité de la particule, et que cette limite elle-même croît quand ϑ_3, ϑ_2 sont ou deviennent des contractions cubiques de plus en plus accusées. Toutefois, l'expérience montre, comme l'a remarqué Barré de Saint-Venant en plusieurs endroits de ses Ouvrages, que l'on se forme une idée approximative, assez juste, de leurs ruptures *statiques* (amenées lentement) par *extension*, compression longitudinale ou *écrasement*, glissement simple ou *cisaillement*, et aussi de leurs ruptures analogues par *flexion* et *torsion* qui sont réductibles aux modes précédents, en y admettant pour ϑ_1 une même limite Δ d'élasticité dans tous ces cas, sorte de *constante spécifique* de la particule tant qu'y subsiste la contexture actuelle.

Soit d'abord le phénomène de simple extension suivant ϑ_1 , avec pressions P_3, P_2 nulles *entre fibres longitudinales contiguës*. Si ϑ désigne la dilatation ϑ_1 de celles-ci et $(-\vartheta')$ leur contraction latérale commune $(-\vartheta_3)$ ou $(-\vartheta_2)$, on aura $\theta = \vartheta + 2\vartheta'$ dans les formules (108); et l'annulation de P_3 ou de P_2 donnera

$$\lambda\vartheta + 2\mu\vartheta' = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \lambda\vartheta + 2(\lambda + \mu)\vartheta' = 0;$$

d'où

$$(109) \quad \frac{(-\vartheta')}{\vartheta} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

Après quoi, la traction longitudinale,

$$P_1 = \lambda\theta + 2\mu\delta = \left[\left(\lambda + 2\mu + 2\lambda \frac{\delta'}{\delta} \right) \right] \delta,$$

devient, par l'élimination de δ' grâce à (109),

$$(110) \quad P_1 = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu\delta.$$

Exprimons-y que, δ atteignant la valeur Δ , P_1 *égale la résistance* \mathcal{R} des fibres à la rupture (par unité d'aire de leur section droite); et faisons finalement $\lambda = \mu$. Nous aurons

$$(111) \quad (\text{Rupture par extension}) \quad \mathcal{R} = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu\Delta = \frac{5}{2} \mu\Delta.$$

Si, au contraire, la fibre est, longitudinalement, non plus tirée, mais *pressée*, ou que δ soit négatif, ce sera alors δ' , *positif*, qui égalera Δ au moment de l'*écrasement*; et $(-\delta)$ vaudra, d'après (109), le produit de Δ par $2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda}$. Appelons-y alors \mathcal{R}' la résistance $(-P_1)$ à cet écrasement; et il viendra, d'après (110) et (111),

$$(112) \quad (\text{Rupture par écrasement}) \quad \mathcal{R}' = 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda} \mathcal{R} = 4\mathcal{R},$$

c'est-à-dire *le quadruple de la résistance à l'extension* (l'isotropie étant admise).

Enfin, le cas de rupture par cisaillement ou glissement simple de couches parallèles (l'une devant l'autre), est celui où, la dilatation cubique θ s'annule, ce qui réduit les forces élastiques (108) du corps dur à celles (102) d'un corps malléable *sans pression moyenne* p , les fibres longitudinales de notre particule subissent uniquement sur leur section droite, d'après la formule (103), l'action tangentielle $T_m = \mu G = 2\mu\Delta$, amenée par le glissement G (petite obliquité *actuelle* de ces fibres sur leurs sections normales *naturelles*). L'obliquité G dont il s'agit est, en effet, corrélative à une dilatation Δ d'un système

de lignes matérielles de la particule inclinées à 45° sur ces sections, en même temps qu'à une contraction égale $(-\gamma) = \Delta$ de la famille de leurs trajectoires orthogonales, dans le plan du glissement. La résistance à la rupture, que j'appellerai \mathcal{R}'' , n'y est donc autre chose que T_m au moment où G atteint la valeur extrême 2Δ ; et l'on a

$$(113) \quad (\text{Rupture par cisaillement}) \quad \mathcal{R}'' = 2\mu\Delta.$$

Cette résistance \mathcal{R}'' , comparée à celle, \mathcal{R} , de rupture par extension, donne donc le rapport

$$(114) \quad \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}} = \frac{2\lambda + 2\mu}{3\lambda + 2\mu} = \frac{4}{5}.$$

Et, en effet, des fils de fer où l'on avait, par millimètre carré, $\mathcal{R} = 40^{\text{kg}}$, ont fourni la résistance au cisaillement $\mathcal{R}'' = 32^{\text{kg}}$ (¹).

57. La complication devient plus grande pour les particules ductiles admettant, dans leurs déformations sous des efforts lentement croissants, une période étendue d'*élasticité imparfaite*, où leur contexture interne se modifie sans cesse et où elles *s'écrouissent*, c'est-à-dire accroissent peu à peu leur limite d'élasticité *pour le genre d'efforts auquel elles sont soumises*. Elles les subissent ainsi sans se rompre et en cessant peu à peu de couler, pourvu toutefois qu'ils ne grandissent que jusqu'à un certain point. C'est dire qu'il existe alors un vaste champ de phénomènes où se produit, avec des valeurs de K (ou de T_m) *très inégales*, la *semi-fluidité*, la déformation *permanente*, c'est-à-dire non suivie de retour (si ce n'est très incomplet) à une configuration antérieure, quand on supprime les efforts.

On sait toutefois, depuis Coulomb et Gerstner, que si, à un moment quelconque de ces périodes, on compte les déformations à partir de *l'état naturel* de la particule pour la contexture actuelle ou effectivement existante, d'une part, cette contexture ne cesse pas d'être

(¹) Une note ultérieure (à la fin du n° 78) permettra de s'expliquer comment le fer, sans être cassant, peut offrir le même rapport qu'un corps cassant, entre ses deux résistances à la rupture par cisaillement et à la rupture par extension.

voisine de l'isotropie, et que, d'autre part, les deux coefficients d'élasticité λ , μ se conservent à peu près les mêmes, comme la densité; seules, les limites d'élasticité changent notablement (1).

58. Mais revenons aux masses ou pulvérulentes, ou plastiques, et à l'équation caractéristique de leur équilibre-limite, qui est, en appelant φ l'angle de frottement des premières, K la pression tangentielle T_m de fluidité des secondes,

$$(115) \quad \frac{P_2 - P_1}{P_2 + P_1} = \sin \varphi, \quad P_1 - P_2 = 2K.$$

Dans le cas particulier où le plan des deux pressions principales extrêmes P_1 , P_2 est parallèle à un plan coordonné, à celui des xy par exemple, ces équations s'expriment aisément au moyen des composantes ordinaires de pression, N_x , N_y , N_z , T_x , T_y , T_z , relatives aux axes. La première est, d'après (8) (p. 5),

$$(116) \quad (N_x - N_y)^2 + 4T_z^2 - (N_x + N_y)^2 \sin^2 \varphi = 0$$

et la seconde, grâce à des calculs analogues,

$$(117) \quad (N_x - N_y)^2 + 4T_z^2 = 4K^2.$$

Mais supposons quelconque la direction du plan de P_1 , P_2 . Alors,

(1) D'après d'assez nombreuses observations micrographiques, faites sur la structure et les déformations tant élastiques que permanentes du cuivre, du fer, de l'acier et d'autres métaux, cette période d'élasticité imparfaite ou d'écroutissage tiendrait à la dissémination, dans leur pâte amorphe, d'assez nombreux cristaux microscopiques, dont les couches parallèles glisseraient, à densité constante, les unes sur les autres, suivant leurs plans de clivage, et d'autant plus, ou avec de fines stries d'autant plus nombreuses, que les pressions déformatrices et, par suite, la limite d'élasticité ou l'écroutissage croitraient davantage. Un métal où la pâte amorphe ne serait pas mêlée de pareils cristaux, resterait donc beaucoup plus isotrope et pareil à lui-même, après de lentes déformations permanentes quelconques : ce qui y entraînerait non seulement la conservation des coefficients d'élasticité, qui existe déjà (à fort peu près) dans les métaux précédents, *mais aussi celle des limites d'élasticité*. Tel paraît être notamment le plomb, auquel, par suite, nos théories simples exposées ici devront s'appliquer bien mieux qu'au fer et au cuivre.

pour former l'équation exprimant sous forme entière, au moyen des six données N, T, l'état ou ébouleux, ou plastique, on partira de l'équation bien connue du troisième degré en P, dont les trois coefficients, pris alternativement avec signes contraires et avec leurs signes, ont les valeurs respectives

$$(118) \quad P_1 + P_2 + P_3, \quad P_2P_3 + P_3P_1 + P_1P_2, \quad P_1P_2P_3,$$

et sont d'ailleurs des fonctions entières homogènes des premier, second et troisième degrés en $N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z$. Puis, on réduira à une fraction unique l'une ou l'autre des deux sommes de trois carrés

$$(119) \quad \begin{cases} \left(\frac{P_2 - P_3}{P_2 + P_3} \right)^2 + \left(\frac{P_3 - P_1}{P_3 + P_1} \right)^2 + \left(\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} \right)^2, \\ (P_2 - P_3)^2 + (P_3 - P_1)^2 + (P_1 - P_2)^2, \end{cases}$$

fonctions rationnelles et *symétriques* qui doivent être exprimables au moyen des trois (118); et l'on fera de même pour les deux sommes des produits deux à deux, et pour les deux produits trois à trois, des mêmes carrés respectifs, au nombre de trois dans chacun des deux cas. Alors on pourra (sauf la longueur des calculs) former assez aisément, en $N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z$, les coefficients des deux équations du troisième degré qui ont comme racines soit les trois premiers carrés, soit les trois derniers. Il suffira donc, finalement, de substituer à l'inconnue, dans ces deux équations respectives du troisième degré, les valeurs $\sin^2 \varphi$ ou $4K^2$ qui sont, d'après (115), l'un des mêmes carrés.

Il ne serait, d'ailleurs, pas facile d'utiliser ces équations générales du troisième degré; et nous n'en ferons ci-après aucun usage.

59. Comme, en outre, l'écoulement des semi-fluides considérés se fera presque toujours avec des accélérations négligeables, les pressions exercées sur chaque élément de volume neutraliseront la pesanteur, dont nous appelons ici X, Y, Z les composantes (par unité de volume); et l'on aura les trois équations indéfinies d'équilibre

$$(120) \quad \begin{cases} \frac{dN_x}{dx} + \frac{dT_z}{dy} + \frac{dT_y}{dz} + X = 0, & \frac{dT_z}{dx} + \frac{dN_y}{dy} + \frac{dT_x}{dz} + Y = 0, \\ \frac{dT_y}{dx} + \frac{dT_x}{dy} + \frac{dN_z}{dz} + Z = 0. \end{cases}$$

A ces équations se joindra, si u , v , w désignent d'ailleurs les petites composantes actuelles de la vitesse en (x, y, z) , la relation ordinaire de quasi-incompressibilité ou de conservation des volumes matériels,

$$(121) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Cela fait déjà *cinq* équations indéfinies entre les *neuf* fonctions inconnues u , v , w , N_x , N_y , N_z , T_x , T_y , T_z . Et il ne reste plus qu'à en trouver encore *quatre*.

60. On les formera en essayant de rattacher les déformations effectives ou totales de chaque particule, indéfinies en grandeur et jamais terminées quoique opérées lentement, à ses presque imperceptibles déformations *élastiques actuelles*, productrices des six pressions ou mieux *tensions* N , T , et qui distinguent la configuration interne *présente* de la particule de ce qu'elle serait si l'on y supprimait actuellement ces six forces. Sa *situation* même ne changerait alors que peu, pourvu que son centre de gravité restât en place et que les trois fibres *rectangulaires principales* actuelles, à dilatations élastiques ∂_1 , ∂_2 , ∂_3 , y conservassent leurs directions effectives.

Les *six* déformations élastiques relatives aux axes coordonnés, lesquelles comprennent les dilatations ∂_x , ∂_y , ∂_z des trois fibres qui sont parallèles aux x , y , z dans l'état naturel ainsi considéré, et leurs glissements relatifs (ou petites *obliquités* présentes) g_x , g_y , g_z , se trouvent, comme on sait, reliées aux *six* forces N , T par les deux formules triples d'isotropie

$$(122) \quad \begin{cases} (N_x, N_y, N_z) = \lambda(\partial_x + \partial_y + \partial_z) + 2\mu(\partial_x, \partial_y, \partial_z), \\ (T_x, T_y, T_z) = \mu(g_x, g_y, g_z), \end{cases}$$

qui donnent, notamment,

$$(123) \quad \frac{\partial_y - \partial_z}{N_y - N_z} = \frac{\partial_z - \partial_x}{N_z - N_x} = \frac{g_x}{2T_x} = \frac{g_y}{2T_y} = \frac{g_z}{2T_z}.$$

D'autre part, si l'on appelle ∂ la dilatation élastique de tout élément rectiligne matériel de la particule, émané de (x, y, z) suivant le sens

dont les cosinus directeurs (actuels, par exemple) sont α , β , γ , on a aussi la formule connue

$$(124) \quad \vartheta = \vartheta_x \alpha^2 + \vartheta_y \beta^2 + \vartheta_z \gamma^2 + g_x \beta \gamma + g_y \gamma \alpha + g_z \alpha \beta.$$

Enfin, la vitesse effective ou totale D avec laquelle s'écartent, durant l'instant dt , les deux extrémités matérielles de cette fibre ou élément rectiligne, est, comme on le sait aussi,

$$(125) \quad D = \frac{du}{dx} \alpha^2 + \frac{dv}{dy} \beta^2 + \frac{dw}{dz} \gamma^2 + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \beta \gamma + \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \gamma \alpha + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) \alpha \beta.$$

Cela posé, il est naturel d'admettre que, *des diverses fibres émanant du centre de gravité de notre particule isotrope, les plus étendues élastiquement sont aussi celles qui s'allongent actuellement le plus vite*; en sorte qu'il y ait proportionnalité, quels que soient α , β , γ , du sextinome D , ou (125), au sextinome ϑ , ou (124). Or, si l'on fait successivement les doubles hypothèses $(\beta, \gamma) = 0$, $(\gamma, \alpha) = 0$, $(\alpha, \beta) = 0$, il vient ainsi les trois rapports égaux

$$(126) \quad \frac{1}{\vartheta_x} \frac{du}{dx}, \quad \frac{1}{\vartheta_y} \frac{dv}{dy}, \quad \frac{1}{\vartheta_z} \frac{dw}{dz}.$$

Cela permet de faire abstraction désormais, dans le rapport $\frac{D}{\vartheta}$, des trois premiers termes des sextinomes. Après quoi, l'annulation alternative d'un seul des trois cosinus α , β , γ donne à son tour, pour le rapport constant, les trois nouvelles expressions

$$(127) \quad \frac{1}{g_x} \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right), \quad \frac{1}{g_y} \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right), \quad \frac{1}{g_z} \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right).$$

Mais dès lors, des six rapports égaux (126), (127), on peut extraire les cinq suivants :

$$(128) \quad \frac{\frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}}{\vartheta_y - \vartheta_z} = \frac{\frac{dw}{dz} - \frac{du}{dx}}{\vartheta_z - \vartheta_x} = \frac{\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}}{g_x} = \frac{\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}}{g_y} = \frac{\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}}{g_z};$$

et il suffira de substituer dans ceux-ci, aux dénominateurs, les déno-

minateurs proportionnels des cinq fractions (123), pour obtenir, entre les vitesses u , v , w et les forces N , T inconnues, les *quatre* équations indéfinies du problème qui manquaient encore :

$$(129) \quad \frac{\frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz}}{N_y - N_z} = \frac{\frac{dv}{dz} - \frac{du}{dx}}{N_z - N_x} = \frac{\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}}{2T_x} = \frac{\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dz}}{2T_y} = \frac{\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}}{2T_z}.$$

C'est Barré de Saint-Venant qui a posé le premier ces relations remarquables. Il y arrivait en admettant que la pression exercée sur chaque élément plan matériel, dans le corps plastique en train de se déformer, a sa composante tangentielle suivant la direction même où glissent actuellement, sur cet élément plan, les couches contiguës qui lui sont parallèles (¹).

La proportionnalité admise chez les diverses fibres matérielles émanant d'un même point, entre leurs vitesses *présentes* de dilatation et leurs petites dilatations élastiques *actuelles*, entraîne non seulement les égalités (128) et (129) de rapports, mais aussi, évidemment, la coïncidence, dans l'espace, des trois directions rectangulaires *principales*, tant pour les déformations élastiques que pour les pressions et pour les *vitesses de déformation*. Il y aura donc, en particulier, continuité de l'état physique et des pressions, dans les couches minces séparant la matière pulvérulente ou plastique devenue *semi-fluide*, de celle qui ne serait déformée qu'*élastiquement*.

(¹) Si, l'équation caractéristique (115) continuant à subsister, on n'admettait pas, dans le cas d'un corps plastique, la conservation des volumes semi-fluides, d'une part, les trois premières (122), d'autre part, les six rapports égaux (126) et (127), permettraient de compléter, respectivement, les proportions (123) et (128) par les sixièmes rapports

$$\frac{\partial_x + \partial_y + \partial_z}{\frac{2\mu}{3\lambda + 2\mu} (N_x + N_y + N_z)} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}}{\partial_x + \partial_y + \partial_z}.$$

Il s'adjoindrait donc à la proportion (129) le nouveau membre

$$(129 \text{ bis}) \quad \frac{\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}}{\frac{2\mu}{3\lambda + 2\mu} (N_x + N_y + N_z)}.$$

L'équation (121) correspond au cas limite $3\lambda + 2\mu = \infty$.

61. Outre les équations indéfinies, il y aura des conditions *définies*, c'est-à-dire spéciales à la surface des corps. Elles consisteront : 1° pour les points où la pression extérieure sera connue, à égaler les composantes respectives des forces que supporteront les deux faces d'une couche superficielle; 2° contre une paroi *fixe* où glissera la matière *semi-fluide*, à y supposer la vitesse de même sens que la composante tangentielle de la poussée exercée sur l'élément de paroi contigu, et à égaler à un coefficient constant, censé connu, de frottement extérieur, le rapport de cette composante tangentielle à la composante normale de la poussée; 3° pour les autres points, à s'y donner, à chaque époque, les petites composantes u , v , w de la vitesse. Ces derniers seront notamment les points d'application des organes rigides opérant la déformation ou le pétrissage d'une matière plastique (tels qu'un piston ou un poinçon qui refouleraient cette matière, les tenailles ou l'étau qui l'étireraient, etc.).

On remarquera l'absolue nécessité de ces troisièmes conditions pour le calcul des grandeurs absolues de u , v , w et des déplacements; car les équations indéfinies (121) et (129), homogènes par rapport à u , v , w ou plutôt à leurs dérivées premières en x , y , z , sont propres à déterminer tout au plus les rapports mutuels de ces composantes de vitesse entre elles ou aux divers points de la masse.

Enfin, le corps reste généralement à l'état stable, ou de contexture persistante, dans une région plus ou moins grande. On obtient l'équation de la surface variable qui sépare cette région de celle de semi-fluidité, en exprimant que la limite d'élasticité Δ commence précisément à y être atteinte, ou qu'elle l'est presque un peu à côté, là où la matière ne coule pas.

Il faut remarquer, en effet, que les déformations soit *persistantes*, soit *élastiques* varient, comme je viens de le dire (p. 82), avec continuité dans toute l'étendue du corps, dont l'état se transforme graduellement d'un point aux points voisins (pourvu qu'il n'y ait pas rupture): seulement, les secondes sont insensibles ou peu s'en faut, tandis que les premières, à raison de leur durée indéfinie, peuvent dépasser des limites quelconques. On voit d'ailleurs que nous continuons à supposer négligeable, dans nos corps plastiques (n° 54), la région intermédiaire, si étendue chez certains métaux, où la matière, à

l'état d'élasticité imparfaite, serait en voie ou de *s'écrourir* ou de *s'énerver*, c'est-à-dire de modifier ses limites d'élasticité incessamment atteintes.

62. On peut voir dans un Mémoire de Barré de Saint-Venant, au Tome de 1871 (2^e série, t. XVI) du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1), comment les formules ci-dessus conduisent aisément aux lois de la *torsion d'un cylindre circulaire* et à celles de la *flexion égale d'un prisme*, quand les déformations dépassent les limites d'élasticité. D'autres travaux du même éminent ingénieur et académicien, insérés dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, ont traité : 1^o un cas particulier très remarquable de déformations planes, savoir (t. LXXIV, 15 avril 1872) celui d'un anneau cylindrique dont les fibres parallèles à l'axe s'écartent de cet axe, symétriquement tout autour, en conservant leur parallélisme et leur hauteur; 2^o encore la torsion d'un cylindre circulaire (t. LXXIII, 20 novembre 1871), avec calcul de la *détorsion* qui se produira si l'on abandonne finalement à lui-même le cylindre tordu (2).

Je publiai vers la même époque, en y employant, dans le plan des xy (plan de déformation), les coordonnées curvilignes orthogonales définies par les deux familles de cylindres *isostatiques* (ou plutôt *orthostatiques*) auxquels donnent lieu les déformations planes d'une matière *semi-fluide*, de poids négligeable, à équilibre-limite caractérisé par une relation finie de la forme $f(P_1, P_2) = 0$, une série de travaux, mettant en vue d'intéressantes propriétés de ces cylindres (3), ainsi

(1) *Complément aux Mémoires du 7 mars 1870, de M. de Saint-Venant, et du 12 juin 1870, de M. Lévy, sur les équations différentielles indéfinies du mouvement intérieur des solides ductiles : équations définies ou relatives aux limites de ces corps ; applications ;* par M. de SAINT-VENANT. (Voir, pour la torsion et la flexion égale, les nos 12 et 13 de ce Mémoire.)

(2) Ce dernier calcul me semble néanmoins devoir être complété, à raison de ce qu'il n'y est pas tenu compte de l'état de *tension élastique maximum* des couches *semi-fluides* ou en équilibre-limite.

(3) Mêmes *Comptes rendus* : t. LXXIV, 22 et 29 janvier 1872, p. 242 et 318; t. LXXVII, 22 septembre 1873, p. 667; t. LXXVIII, 16 et 23 mars 1874, p. 757 et 786; t. LXXX, 1^{er} et 15 mars 1875, p. 546 et 623. Les intégrations n'y aboutissent (en série de solutions simples à termes de forme trigonométrique et exponentielle ou logarithmique) qu'à la

qu'une équation aux dérivées partielles du second ordre, analogue à celle des cordes vibrantes, mais à coefficient variable ⁽¹⁾, condensant en elle les équations (121) et (129) ci-dessus, pour les déformations planes.

Malgré la simplicité au moins apparente de ces équations, presque toutes binomes ou au plus trinomes, et souvent intégrables, il n'en a été tiré jusqu'ici aucun résultat pratique ⁽²⁾ : aussi me contenterai-je de renvoyer le lecteur qui désirerait en pousser plus loin l'étude aux endroits indiqués des *Comptes rendus*.

IX. — Application aux corps plastiques : lois approchées de Tresca sur le poinçonnage et l'écoulement des solides.

63. Je me contenterai ici de démontrer, dans la mesure où il semble possible de le faire, les formules par lesquelles Tresca a essayé de représenter les résultats de ses nombreuses expériences de poinçonnage sur les métaux et principalement sur le plomb.

Dans une première catégorie d'observations, le bloc qu'il s'agissait de poinçonner, à surface tant supérieure que latérale libre de toute pression (sauf le fragment de la première partie occupé par la base du poinçon), consistait en un cylindre circulaire plein, de rayon donné R_1 ,

condition de renverser le problème, c'est-à-dire de se donner comme variables indépendantes, par exemple, la pression principale minimum avec son azimut, qui définissent chaque état physique, et, comme fonctions, les deux coordonnées x, y du point où se trouve réalisé l'état physique dont il s'agit.

⁽¹⁾ *Comptes rendus*, t. LXXIV, 12 février 1872, p. 450.

⁽²⁾ Toutefois, les deux dernières Notes citées (des 1^{er} et 15 mars 1875) concernent une question d'un caractère sinon pratique, du moins assez concret, mais que j'ai reprise peu après, à la fin de mon Mémoire de l'Académie de Belgique, par l'emploi des simples coordonnées polaires. C'est le problème, dont il a été parlé plus haut (nos 42 et 43), de l'état ébouleux produit dans l'angle dièdre de deux plans rigides, mobiles autour de leur intersection. La formule (99) ci-dessus (n° 43), qui s'intègre en prenant la coordonnée θ pour fonction inconnue et l'azimut relatif $\chi - \theta$ de la pression la plus faible comme variable indépendante, donne bien un exemple de ce renversement des rôles naturels signalé à l'avant-dernière Note, quand il s'agit d'intégrer les équations de ce genre d'équilibres-limite.

posé sur un large plateau horizontal, rigide et poli. Celui-ci était souvent percé, sur toute son épaisseur, d'un orifice circulaire à bord vertical, dont l'axe coïncidait avec le prolongement inférieur de l'axe du bloc, que nous prendrons pour axe des z . Enfin, le poinçon, placé au-dessus, rigide et poli comme le plateau, était constitué par un autre cylindre circulaire de même axe que le bloc, et d'un rayon donné, R_0 , à peu près égal à celui de l'orifice.

La hauteur ou épaisseur H du bloc à poinçonner se trouvait suffisante pour que, tout au moins dans une première et assez longue phase du poinçonnage, la région supérieure du bloc, dans sa partie en contact avec le poinçon et devenue semi-fluide sous une épaisseur notable, se déformât comme si le plateau, relativement éloigné de toute cette région, était continu ou sans orifice, les couches horizontales de cette région supérieure s'aplatissant, *dans leur partie placée directement sous le poinçon*, et s'y dilatant uniformément en longueur et largeur, sans cesser d'être horizontales, ou les fibres verticales s'y contractant en hauteur, mais grossissant de même dans les deux sens latéraux, sans cesser d'être verticales; et, cela, dans tout ou presque tout l'espace entouré par le prolongement inférieur de la surface latérale cylindrique du poinçon à travers ces couches semi-fluides.

Quant aux parties des mêmes couches horizontales primitives du bloc, situées *actuellement* (durant l'opération) hors de ce prolongement inférieur de la surface latérale du poinçon, ou dont les distances r à l'axe des z excèdent R_0 , nous imaginerons leur matière fictivement décomposée, à chaque époque t et pour un instant infiniment petit dt , en nouvelles couches horizontales, d'épaisseur actuelle dz , qui seront, d'instant en instant, remaniées de manière qu'on puisse considérer sans cesse, dans un plan méridien quelconque où ils se meuvent, les points matériels venant y occuper successivement chaque point (r, z) de l'espace. Comme ces couches ne subissent sur leur face supérieure aucune traction ou pression sensible N_z , il ne doit y avoir chez elles aucune tendance (du moins notable) à s'aplatir. Mais, sous la pression *proprement dite*, $-N_r$, des parties centrales, latéralement dilatées, qui les compriment suivant les rayons r issus de l'axe, leurs anneaux élémentaires conaxiques, de rayon intérieur r , de largeur horizontale dr et de hauteur dz , s'éloignent de l'axe et, agran-

dissant d'autant leur rayon, s'allongent et se tendent en provoquant sur leurs sections méridiennes $dr dz$ une traction normale, que nous appellerons N_0 par unité d'aire, de signe généralement contraire à la pression *proprement dite*, $-N_r$, s'exerçant (aussi par unité d'aire) sur la face verticale interne ou concave $2\pi r dz$ de chaque anneau.

64. Le difficile était d'établir la transition entre le *cylindre central* ou *axial*, censé uniformément soumis à l'écrasement, et la partie *annulaire* du bloc, dilatée sans doute par la partie centrale, comme on le suppose, mais ayant aussi chacune de ses couches horizontales entraînée vers le bas par leurs parties centrales qui s'abaissent, et soumise par conséquent, sur sa tranche ou face concave $2\pi R_0 dz$, à une action verticale tangentielle, négligée ici. Pour éluder la difficulté, du moins quant au cylindre central, Tresca imagine (implicitement) *le bloc déjà divisé en ces deux parties, axiale et annulaire*, qu'il conçoit susceptibles *de glisser, l'une sur l'autre, sans frottement mutuel dans le sens vertical*, et se transmettant seulement pression et vitesse *normales* actuelles à travers leur surface cylindrique commune. D'ailleurs, la matière du cylindre central sortant, à chaque instant, à travers le prolongement inférieur de la surface latérale du poinçon, est censée *aussitôt incorporée* à la partie annulaire, de manière à assurer la fixité, en projection horizontale, de la *frontière séparative* des deux blocs partiels.

La difficulté paraissant insoluble, à raison des impossibles calculs qu'amènerait sans doute la mise en compte des vraies actions tangentielles exercées à travers cette frontière, acceptons l'*hypothèse simplificatrice d'une pareille division* en deux blocs partiels sans frottement l'un sur l'autre, malgré l'altération profonde qu'elle apporte au problème.

Dès lors, sous le poinçon, ou pour $r < R_0$, la pression d'écrasement P_z du poinçon provoquera, sur tous les éléments plans verticaux de chaque couche horizontale semi-fluide, une pression uniforme P_0 horizontale aussi, et évidemment inférieure à P_z de la constante de fluidité $2K$. Or cette pression P_0 , ainsi transmise à la face concave verticale $2\pi R_0 dz$ des couches horizontales extérieures, va comprimer horizontalement, pour $r > R_0$, les anneaux élémentaires successifs, à

rayons r de plus en plus grands, de ces mêmes couches. Pour un tronçon d'anneau, de longueur interne $r d\omega$, compris entre deux plans méridiens voisins à azimuts respectifs ω , $\omega + d\omega$, et ayant comme section normale, suivant son plan de symétrie vertical mené par l'axe des z , un rectangle $dr dz$, les trois pressions (ou plutôt *tensions*) principales seront sensiblement, en un point (r, z) de cette section normale, N_r suivant dr , N_z suivant dz , enfin N_ω suivant la normale au plan de symétrie, avec N_r négatif, N_ω généralement positif et N_z à peu près nul. La différence $2K$ des deux forces principales extrêmes sera donc, ici, $N_\omega - N_r$.

65. Cela posé, le même tronçon ou élément de volume, $r d\omega dr dz$, est ainsi soumis presque uniquement, sur ses faces, à quatre forces normales, s'exerçant, deux, dans son plan de symétrie et suivant dr , savoir

$$(130) \quad - N_r r d\omega dz \quad (\text{sur sa face interne ou concave}),$$

$$(131) \quad \left(r N_r + \frac{d.r N_r}{dr} dr \right) d\omega dz \quad (\text{sur sa face externe ou convexe});$$

mais, les deux autres, $N_\omega dr dz$, de valeur pareille, suivant deux normales extérieures aux deux faces planes $dr dz$ qui font l'angle $\frac{1}{2} d\omega$ de part et d'autre du plan méridien de symétrie. Or la résultante de ces dernières est visiblement dirigée aussi suivant dr , dans le plan de symétrie, et vaut

$$(132) \quad 2 dr dz N_\omega \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{d\omega}{2}\right) = - N_\omega dr dz d\omega.$$

Enfin, les trois forces (130), (131), (132) s'exerçant suivant le même rayon r , la condition de leur équilibre est que leur somme algébrique soit nulle; ce qui donne

$$(133) \quad \frac{d.r N_r}{dr} - N_\omega = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dN_r}{dr} = \frac{N_\omega - N_r}{r} = \frac{2K}{r}.$$

Multiplions par dr et intégrons à partir de la limite inférieure

$$r = R_0, \quad \text{où} \quad N_r = -P_0 = -P_z + 2K.$$

Il vient

$$(134) \quad N_r = -P_0 + 2K \log \frac{r}{R_0} = -P_z + 2K \left(1 + \log \frac{r}{R_0} \right).$$

La poussée déformatrice exercée par le poinçon augmentera, naturellement, jusqu'à ce que l'état semi-fluide ait atteint le bord $r = R_1$, où la pression ($-N_r$) s'annule sur la surface latérale. Supposons que l'observation ait lieu à ce moment, où la poussée déformatrice *devient constante*. Alors la formule (134) s'applique même pour $r = R_1$, et le troisième membre de (134) s'y annule. On aura ainsi la pression P_z (par unité d'aire) de la base du poinçon, qui est capable d'opérer le poinçonnage du bloc. Et la *charge* totale, ou force $F = \pi R_0^2 P_z$, qu'il faudra imposer pour cela au poinçon, sera, par suite,

$$(135) \quad (\text{surface latér. libre}) \quad F = 2K\pi R_0^2 \left(1 + \log \frac{R_1}{R_0} \right).$$

Telle est la première formule donnée par Tresca, comme résumant toute une série de ses expériences, et à laquelle il est parvenu au moyen d'évaluations de travaux assez obscures ou difficilement intelligibles.

66. Essayons maintenant de nous former une idée approchée des déformations, que nous supposerons très petites, subies par les mêmes anneaux, en nous bornant d'ailleurs au cas simple d'un plateau continu infiniment poli, $z = 0$, et d'un bloc d'assez faible hauteur H pour devenir, presque dès le début, semi-fluide dans sa totalité.

Alors, sous le poinçon, où la contraction en hauteur sera partout pareille et la dilatation latérale, uniforme en longueur et en largeur, le principe de la conservation des volumes donnera évidemment une dilatation linéaire, suivant les rayons r , moitié de la contraction verticale. Si α désigne le petit abaissement *donné* du poinçon jusqu'à une époque quelconque t , ou $\frac{\alpha}{H}$ cette contraction, la dilatation linéaire

correspondante du rayon du cylindre central, qui était primitivement R_0 , sera donc $\frac{\alpha}{2H}$; et il en résultera, pour le petit accroissement qu'aura subi ce rayon, $\frac{\alpha R_0}{2H}$. C'est l'expression des parcours, vus en projection horizontale dans leurs plans méridiens respectifs, le long desquels aura été refoulée par le cylindre central la face verticale ou concave de l'anneau le plus extérieur de chaque couche, celui dont la distance à l'axe était $r = R_0$.

Pour chaque point matériel (r, z) des anneaux considérés, où r, z seront *ici* les *coordonnées primitives* (distances initiales, r , à l'axe et, z , au plateau), variables indépendantes caractérisant ou définissant, à toute époque, ce point mobile, nous appellerons, d'une part, δ , le petit *déplacement horizontal*, accroissement de la distance à l'axe, d'autre part, δ' , le petit *déplacement vertical* (accroissement de l'ordonnée z), déplacements se produisant tous les deux dans le plan méridien primitif.

Les trois petites dilatations éprouvées par la matière d'un anneau quelconque, suivant la verticale dz , suivant le prolongement dr du rayon r et suivant un élément $r d\omega$ de longueur de l'anneau, seront respectivement

$$\frac{d\delta'}{dz}, \quad \frac{d\delta}{dr} \quad \text{et} \quad \frac{\delta}{r},$$

cette dernière s'obtenant par la comparaison de la longueur actuelle $2\pi(r + \delta)$ de l'anneau à sa longueur primitive $2\pi r$.

Les deux inconnues δ et δ' se détermineront : en premier lieu, par les deux conditions *définies*, l'une, déjà obtenue ci-dessus, l'autre, évidente,

$$(136) \quad (\text{pour } r = R_0) \quad \delta = \delta_0 = \frac{\alpha R_0}{2H}, \quad (\text{pour } z = 0) \quad \delta' = 0;$$

en deuxième lieu, par l'équation indéfinie (121) et par le système de proportions (129).

Formons celui-ci, pour le point (r, z) , en imaginant, par exemple, un axe des x parallèle à l'arc élémentaire $r d\omega$, qui pourra dès lors s'appeler dx , et un axe des y parallèle au prolongement dr du rayon r ,

prolongement s'y confondant avec dy ; et observons d'ailleurs que, pour toutes les fibres matérielles émanées d'un même point, leurs petites vitesses simultanées de dilatation et de glissement mutuel sont, à chaque instant, proportionnelles aux minimales dilatations et glissements totaux depuis le début : ce qui permet de remplacer, dans toutes ces équations qui sont homogènes, les vitesses de déformation par les déformations mêmes. En raison de la parité des phénomènes tout autour de l'axe des z , les relations indiquées (121) et (129) se réduiront, en (r, z) , aux trois suivantes, seules distinctes :

$$(137) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{d\delta'}{dz} = \frac{d\delta}{dr} + \frac{\delta}{r} = \frac{1}{r} \frac{d.r\delta}{dr}, \\ \frac{d\delta}{dr} - \frac{d\delta'}{dz} = \frac{d\delta'}{dz} - \frac{\delta}{r} = \frac{d\delta}{dz} + \frac{d\delta'}{dr}, \\ \frac{N_r - N_z}{N_r - N_z} = \frac{N_z - N_\omega}{N_z - N_\omega} = \frac{0}{0}, \end{array} \right.$$

où le dénominateur zéro du dernier membre tient à l'hypothèse $T_x = 0$ qu'on a faite, c'est-à-dire à la qualité de *pression principale* attribuée ici à N_r et, par suite, à N_z (1).

67. Cette hypothèse simplificatrice, qui nous a déjà conduits à admettre la division du bloc poinçonné en un cylindre central de rayon R_0 et un bloc partiel annulaire, susceptibles de glisser verticalement sans frottement l'un contre l'autre, offre donc aussi l'inconvénient de donner, pour le bloc annulaire, trois équations indéfinies distinctes entre deux inconnues seulement, δ et δ' ; ce qui va nous obliger à sacrifier quelque chose des données du problème et à introduire ainsi de nouvelles hypothèses, pour rendre compatibles ces équations. En vue de ne rien compliquer, renonçons à sauvegarder la liberté complète de la surface supérieure, en nous permettant d'intro-

(1) On n'a pas à s'occuper des deux dernières équations (137) pour le cylindre central, qui les vérifie identiquement par le fait même de son écrasement uniforme dans le sens vertical, avec parité d'expansion latérale en longueur et largeur. Car, δ s'y trouvant proportionnel à r et indépendant de z , δ' indépendant de r , enfin N_ω égal à N_r , les deux premiers membres sont identiques et le troisième a la forme $\frac{0}{0}$.

duire des pressions verticales N_z , les mêmes sur toutes les couches, c'est-à-dire indépendantes de z , afin qu'elles se fassent exactement équilibre sur les deux bases de tout anneau élémentaire et ne modifient ni n'ajoutent rien aux deux équations indéfinies (133) existant entre les pressions. Toutefois, gardons l'essentiel de cette liberté de la surface supérieure, en nous imposant l'annulation moyenne de ces pressions N_z sur toute la surface, c'est-à-dire la condition

$$(138) \quad 2\pi \int_{R_0}^{R_1} N_z r dr = 0, \quad \text{ou} \quad \int_{r=R_0}^{r=R_1} N_z d.r^2 = 0.$$

Enfin, pour continuer à n'introduire ni glissements, ni, par suite, composantes tangentielles T_x , T_y ou T_z , astreignons les dilatations verticales $\frac{d\delta'}{dz}$ à recevoir partout une valeur constante $\frac{c}{H}$ (1), ce qui, vu la seconde condition définie (136), donnera

$$(139) \quad \delta' = c \frac{z}{H}.$$

Alors, les déplacements δ ne dépendant d'ailleurs que de r , le dernier membre de (137) prendra la forme $\frac{0}{0}$; et il ne restera, d'après (137), pour déterminer δ et N_z en fonction de r , que deux équations indéfinies. La première sera

$$\frac{d.r\delta}{dr} = -c \frac{r}{H};$$

et, avec la première (136), elle donnera

$$(140) \quad \delta = \frac{\alpha + c}{2H} \frac{R_0^2}{r} - \frac{c}{2H} r.$$

La seconde est une proportion, que l'on simplifiera en y remplaçant le deuxième rapport par un nouveau, résultant de l'addition, *haut et bas*,

(1) On pourrait d'abord supposer seulement δ' et c indépendants de r . On obtiendrait alors l'équation (144) ci-après, qui implique la constance de c .

des termes de cette proportion. Il vient ainsi, vu la valeur $2K$ de $N_\omega - N_r$,

$$(141) \quad 2K \left(\frac{d\delta}{dr} - \frac{c}{H} \right) = (N_z - N_r) \left(\frac{d\delta}{dr} - \frac{\delta}{r} \right);$$

N_r y est donné par la première formule (134), qui, en éliminant P_0 de manière à faire annuler N_r pour $r = R_1$, devient

$$(142) \quad N_r = K \log \frac{r^2}{R_1^2}.$$

Substituons de plus à δ , dans (141), sa valeur (140); puis résolvons par rapport à N_z . Il viendra la formule de cette pression normale, à exercer sur la base supérieure,

$$(143) \quad N_z = K \left(1 + \log \frac{r^2}{R_1^2} + \frac{3c}{\alpha + c} \frac{r^2}{R_0^2} \right).$$

Enfin, la constante c s'y déterminera par la condition (138). Or, on trouve, grâce à une intégration par parties, comme valeur du premier membre de la seconde (138),

$$\begin{aligned} & K \left[(R_1^2 - R_0^2) + \left(r^2 \log \frac{r^2}{R_1^2} - r^2 \right)_{r=R_0}^{r=R_1} + \frac{3c}{\alpha + c} \frac{R_1^4 - R_0^4}{2R_0^2} \right] \\ & = K \left(\frac{3c}{\alpha + c} \frac{R_1^4 - R_0^4}{2R_0^2} - R_0^2 \log \frac{R_0^2}{R_1^2} \right); \end{aligned}$$

et il résulte, de son annulation,

$$(144) \quad \frac{3c}{\alpha + c} = \frac{2R_0^2}{R_1^4 - R_0^4} \log \frac{R_0^2}{R_1^2}.$$

Après quoi, la formule (143) de N_z devient complètement explicite :

$$(145) \quad N_z = K \left(1 + \log \frac{r^2}{R_1^2} + \frac{2R_0^2 r^2}{R_1^4 - R_0^4} \log \frac{R_0^2}{R_1^2} \right).$$

68. Retranchons-en la valeur (142) de N_r et nous aurons, pour la

différence $N_z - N_r$,

$$(146) \quad N_z - N_r = K \left(1 + \frac{R_0^2 r^2}{R_1^2 - R_0^2} \log \frac{R_0^2}{R_1^2} \right),$$

expression qui décroît quand r grandit; car le logarithme qui y figure est visiblement négatif. Sa plus grande valeur correspond donc à $r = R_0$ et sa plus petite valeur, à $r = R_1$. Si, pour abrégé, on appelle $1 + \nu$ le quotient, supérieur à l'unité, de R_0^2 par R_1^2 , ces deux valeurs extrêmes de la différence $N_z - N_r$ seront

$$(147) \quad K \left[1 - \frac{\log(1 + \nu)}{\nu} \right], \quad K \left[1 - \frac{\sqrt{1 + \nu} \log(1 + \nu)}{\nu} \right].$$

Considérons-y les deux fractions $\frac{\log(1 + \nu)}{\nu}$, $\frac{\sqrt{1 + \nu} \log(1 + \nu)}{\nu}$, qui, à la limite inférieure $\nu = 0$, valent l'unité. Leurs dérivées premières en ν ont le signe des expressions

$$(148) \quad \nu - (1 + \nu) \log(1 + \nu), \quad \nu - \nu \log \sqrt{1 + \nu} - \log(1 + \nu),$$

qui figurent à leurs numérateurs respectifs et qui s'annulent pour $\nu = 0$. Mais les propres dérivées de (148) sont

$$(149) \quad -\log(1 + \nu), \quad \frac{\nu - (1 + \nu) \log(1 + \nu)}{2(1 + \nu)}.$$

La première est négative et, par suite, la première expression (148) l'est aussi, pour $\nu > 0$. Or, de là, il résulte que la seconde (149) et puis la seconde (148) le sont également. Donc les fractions considérées

$$\frac{\log(1 + \nu)}{\nu}, \quad \frac{\sqrt{1 + \nu} \log(1 + \nu)}{\nu}$$

décroissent constamment, à partir de leur valeur initiale 1, quand ν grandit à partir de zéro; et comme elles restent visiblement positives, les deux expressions (147) sont toujours comprises entre zéro et K . Ainsi, la différence $N_z - N_r$ n'atteint jamais la valeur absolue $2K$ qui pourrait seule lui permettre de se substituer à $N_\infty - N_r$ comme plus

grande différence entre forces principales, et, par suite, rendre douteuse l'équation $N_\omega - N_r = 2K$ admise à la base de nos calculs.

69. La valeur (145) de N_z a, comme dérivée par rapport à r^2 , le produit

$$(150) \quad \frac{K}{R_1^2} \left(\frac{R_1^2}{r^2} + \frac{R_0^2 R_1^2}{R_1^4 - R_0^4} \log \frac{R_0^4}{K_1^4} \right) = \frac{K}{R_1^2} \left[\frac{R_1^2}{r^2} - \frac{\sqrt{1+\nu} \log(1+\nu)}{\nu} \right],$$

dont le signe est celui de son facteur binome, décroissant, comme on voit,

$$\text{de } \sqrt{1+\nu} \left[1 - \frac{\log(1+\nu)}{\nu} \right] \quad \text{à} \quad 1 - \frac{\sqrt{1+\nu} \log(1+\nu)}{\nu}$$

(pour r allant de R_0 à R_1), et, par conséquent, toujours positif. Cette dérivée étant ainsi positive, N_z grandit depuis $r = R_0$ jusqu'à $r = R_1$, en prenant aux deux limites les valeurs respectives

$$(151) \quad K \left[1 - \log \sqrt{1+\nu} - \frac{\log(1+\nu)}{\nu} \right], \quad K \left[1 - \frac{\sqrt{1+\nu} \log(1+\nu)}{\nu} \right].$$

La seconde est comprise entre zéro et K . Quant à la première, qui est nulle pour $\nu = 0$, sa dérivée en ν a le signe de

$$1 - (1+\nu)^2 + 2(1+\nu) \log(1+\nu),$$

expression nulle pour $\nu = 0$ et dont la propre dérivée a le signe du facteur

$$-\nu + \log(1+\nu),$$

encore nul pour $\nu = 0$, mais évidemment décroissant et négatif (car sa dérivée a le signe de $-\nu$). Par conséquent, la première expression (151), négative, se trouve bien avoir signe contraire à la seconde; et *la force N_z est une pression proprement dite près du cylindre central, une traction près du bord extérieur $r = R_1$.*

Telles sont donc les actions verticales N_z qui rendent possible *la conservation de la forme plane*, à chaque couche horizontale de la partie annulaire du bloc. Par suite, la liberté complète de la surface

supérieure autour du poinçon, par la suppression des poussées ($-N_z$) que nous y supposons ainsi exercées autour du cylindre central, et des tractions équivalentes N_z près du contour, entraînerait un *soulèvement* de la première région et un *abaissement* de la seconde, ou rendrait comme tronconique, avec pente en dehors, cette surface supérieure annulaire.

Si la pente que prendrait la surface supérieure rendue ainsi libre se trouve dirigée vers le dehors, c'est en conséquence de notre hypothèse d'un cylindre central *sans action tangentielle sur la partie annulaire*. Le sens en est effectivement renversé par l'entraînement qu'exerce sur celle-ci, de haut en bas, le cylindre central.

70. Tirons enfin de l'équation (144), écrite

$$(152) \quad \frac{c}{\alpha + c} = -\frac{\log(1 + \nu)}{3\nu} \quad \left(\text{où } \nu = \frac{R_1^4}{R_0^4} - 1\right),$$

la valeur de la constante c à introduire dans les expressions (139) et (140) des déplacements vertical et horizontal δ' , δ . Il vient

$$(153) \quad \begin{cases} \frac{c}{\alpha} = \frac{-\log(1 + \nu)}{3\nu + \log(1 + \nu)}, & \delta' = \frac{-\log(1 + \nu)}{3\nu + \log(1 + \nu)} \frac{\alpha z}{H}, \\ \delta = \frac{\alpha R_0}{2H} \left[\frac{3\nu}{3\nu + \log(1 + \nu)} \frac{R_0}{r} + \frac{\log(1 + \nu)}{3\nu + \log(1 + \nu)} \frac{r}{R_0} \right]. \end{cases}$$

Les couches horizontales s'abaissent; car on voit que δ' est négatif. En appelant α' l'abaissement de la surface supérieure annulaire, valeur de $(-\delta')$ pour $z = H$, nous aurons, aux limites respectives $r = R_0$, $r = R_1$, $z = H$, vu la valeur $\sqrt[4]{1 + \nu}$ du rapport $\frac{R_1}{R_0}$,

$$(154) \quad \begin{cases} \delta_0 = \frac{\alpha R_0}{2H}, & \delta_1 = \frac{\delta_0}{\sqrt[4]{1 + \nu}} \frac{3\nu + \sqrt{1 + \nu} \log(1 + \nu)}{3\nu + \log(1 + \nu)}, \\ \alpha' = \frac{\alpha \log(1 + \nu)}{3\nu + \log(1 + \nu)} = \delta_0 \frac{\log(1 + \nu)}{3\nu + \log(1 + \nu)} \frac{2H}{R_0}. \end{cases}$$

Le volume,

$$\pi(R_1^2 - R_0^2)\alpha' \quad \text{ou} \quad \pi R_0^2(-1 + \sqrt{1 + \nu})\alpha',$$

de la matière appartenant à la partie annulaire primitive et refoulée au-dessous du niveau final de sa surface supérieure, égale bien l'excédent de l'anneau total $2\pi R_1 \delta_1 H$ sorti par la surface latérale primitive $2\pi R_1 H$, sur celui, $2\pi R_0 \delta_0 H$, qui est sorti du cylindre central. Car on a, d'après la seconde (154),

$$R_1 \delta_1 \quad \text{ou} \quad R_0 \delta_1 \sqrt{1+\nu} = R_0 \delta_0 \frac{3\nu + \sqrt{1+\nu} \log(1+\nu)}{3\nu + \log(1+\nu)};$$

d'où

$$2\pi H(R_1 \delta_1 - R_0 \delta_0) = 2\pi H R_0 \delta_0 \frac{(-1 + \sqrt{1+\nu}) \log(1+\nu)}{3\nu + \log(1+\nu)}.$$

Or, ici, le second membre est identiquement

$$\pi R_0^2 (-1 + \sqrt{1+\nu}) \alpha',$$

en raison de la dernière valeur (154) de α' .

Remarquons, sur la troisième formule (154), la petitesse de l'abaissement de surface, α' , de la partie annulaire, par rapport à celui, α , de la partie centrale. Par exemple, dans le cas simple $R_1 = 2R_0$, où $\nu = 15$, le logarithme népérien de 16 valant 2,7726, α' n'est environ que les 58 millièmes de α .

71. Tresca a contrôlé, pour le plomb, la formule (135) en mesurant directement R_0 , R_1 et F dans chaque observation. Et, dans ses deux dernières séries d'expériences, faites avec un soin particulier, il a obtenu des valeurs de K comprises entre 190^{kg} et 211^{kg} par centimètre carré; ce qui donne $K = 200^{\text{kg}}$ en moyenne, avec écarts possibles d'un vingtième environ en plus ou en moins (1).

Mais il a opéré aussi le poinçonnage d'autres blocs cylindriques massifs et épais, en enchâssant ces blocs dans un cylindre creux rigide,

(1) Voir le Tableau de la page 191 du *Mémoire sur le poinçonnage des métaux*, par H. TRESCA, au Tome XX (1872) du *Recueil des Savants étrangers de l'Académie des Sciences de Paris*: la partie théorique, où sont considérées les forces en jeu, comprend les pages 160 à 222 du *Mémoire*.

poli, d'un rayon intérieur égal à leur propre rayon R_1 , et limité inférieurement par le même plateau rigide avec ou sans orifice central.

L'expansion de la matière semi-fluide ne pouvait donc se faire que par reflux au-dessus de la surface supérieure annulaire, du moins dans cette première phase du phénomène où les parties inférieures du bloc ne sont pas encore atteintes par la déformation permanente (et même toujours quand il n'y a pas d'orifice inférieur).

Voyons comment nous pourrons, au prix d'hypothèses simplificatrices analogues à celles du cas précédent, mais encore plus larges peut-être, aborder par la théorie cette catégorie de faits.

72. Et d'abord, nous continuerons à admettre la division spontanée de la matière devenue semi-fluide (sous une épaisseur notable) en un cylindre central, de rayon R_0 , écrasé uniformément par le poinçon, et un cylindre annulaire de pareille hauteur, glissant sans frottement sur lui (dans le sens vertical) et dont il refoule encore horizontalement, suivant les rayons r , la face concave de rayon R_0 . Le cylindre central presse donc cette face concave, de contour $2\pi R_0$, encore avec une force normale $P_0 = P_z - 2K$ (par unité d'aire), contre les anneaux élémentaires extérieurs $2\pi R_0 dr dz$ des couches annulaires, de hauteur actuelle dz à l'époque t .

Sous cette pression, les anneaux successifs $2\pi r dr dz$, à rayons intérieurs r compris entre R_0 et R_1 , éprouvent durant un temps assez court, dans tous leurs points matériels, un petit déplacement horizontal positif δ , suivant les rayons r . Or ce déplacement, fonction de r et qui porte de $2\pi r$ à $2\pi(r + \delta)$ la longueur de leur face concave ou interne, imprime ainsi à un arc élémentaire $r d\omega$ du contour de cette face la petite dilatation $\frac{\delta}{r}$, en même temps qu'il fait contracter la largeur des anneaux, suivant dr , de $\left(-\frac{d\delta}{dr}\right)$ et qu'il soulève les mêmes points, suivant les z , d'un petit déplacement δ' , généralement fonction de r et de z , impliquant la dilatation $\frac{d\delta'}{dz}$ des fibres verticales.

Seulement, ici où la face extérieure convexe $2\pi R_1 dz$ est empêchée de se dilater en longueur par le cylindre rigide l'enchâssant (et qu'on suppose, d'ailleurs, infiniment poli ou sans frottement), on aura $\delta = 0$

pour $r = R_1$; d'où, pour pareils déplacements δ_0 de la face concave, diminutions bien plus rapides de δ quand r grandit, c'est-à-dire contractions $\left(-\frac{d\delta}{dr}\right)$ plus fortes suivant les rayons, et dilatations $\frac{\delta}{r}$ plus faibles suivant les arcs $r d\omega$, que dans le cas d'un bloc à surface latérale libre. Mais, par contre, vu la conservation des volumes, dilatations $\frac{d\delta'}{dz}$ plus grandes dans le sens vertical, suivant lequel s'exercent, maintenant encore, des pressions N_z insignifiantes.

Toutefois, pour pouvoir garder N_r et N_z comme forces principales et satisfaire ensuite à la dernière équation (137), nous devons supposer δ' indépendant de r , comme dans le cas précédent, et, afin de maintenir ainsi horizontales les couches de la région annulaire qui l'étaient à l'origine, introduire sur toutes ces couches de mêmes pressions normales N_z , réglées convenablement en fonction de r . Seule, la valeur moyenne de N_z , sur toute l'aire $\pi(R_1^2 - R_0^2)$ de chaque couche, sera annulée, pour sauvegarder autant que possible l'état de liberté admis de la surface supérieure.

73. Dans ces conditions, appelons C , sur une couche annulaire déterminée, la valeur constante de $\frac{d\delta'}{dz}$; et considérons les deux équations (137) subsistantes. La première, multipliée par $r dr$ et intégrée à partir du bord extérieur $r = R_1$, où s'annule δ , donnera

$$(155) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta = \frac{C}{2} \left(\frac{R_1^2}{r} - r \right); \\ \text{d'où} \\ \frac{d\delta}{dr} = -\frac{C}{2} \left(\frac{R_1^2}{r^2} + 1 \right), \quad \frac{\delta}{r} = \frac{C}{2} \left(\frac{R_1^2}{r^2} - 1 \right); \end{array} \right.$$

et la deuxième équation (137) deviendra, en y remplaçant encore le second rapport par celui que donne l'addition, *haut et bas*, des termes des deux,

$$(156) \quad \frac{N_z - N_r}{R_1^2 + 3r^2} = \frac{N_\omega - N_r}{2R_1^2}.$$

Cette proportion montre que les deux différences $N_z - N_r$, $N_\omega - N_r$, dont la première est positive (puisque N_z est peu différent de zéro et N_r fortement négatif), ont le même signe *plus*, et que la première est la plus grande tant que r excède $\frac{1}{3}R_1\sqrt{3}$, c'est-à-dire $0,5773R_1$, mais la plus petite au-dessous de cette limite. Quant à la troisième différence entre les forces principales, savoir $N_z - N_\omega$, il est visible que, tantôt positive, tantôt négative, elle n'est, en valeur absolue, qu'une partie de la plus grande des deux premières à l'endroit considéré.

Il y aurait donc lieu d'égaliser à la constante $2K$ de fluidité, tantôt $N_z - N_r$ (près du bord convexe), tantôt $N_\omega - N_r$ (près du bord concave, ou de $r = R_0$ qui sera, en général, notablement inférieur à $0,5773R_1$); et ces *doubles* formules, se raccordant d'ailleurs pour $r = 0,5773R_1$, entraîneraient inévitablement une certaine complication des résultats (1). Mais comme déjà la question a comporté la substitution d'une moyenne aux valeurs individuelles de la fonction N_z (dans l'expression de l'état de liberté de la surface supérieure), on peut bien admettre aussi la parité de N_z et de N_ω , de manière à garder les équations (133) et (134) du cas précédent, en y ajoutant la nouvelle relation, à *peu près vérifiée en moyenne*,

$$(157) \quad N_z = N_\omega = 2K + N_r = (2K - P_0) + K \log \frac{r^2}{R_0^2}.$$

Ici, P_0 ne se déterminera plus par la condition d'annuler N_r sur la surface latérale $r = R_1$, qui n'est pas libre maintenant, mais par celle qui consiste dans l'annulation moyenne de N_z sur toute la surface $\pi(R_1^2 - R_0^2)$ des couches annulaires. On aura donc

$$2 \int_{R_0}^{R_1} N_z r dr = 0,$$

(1) On verra au n° 83 (p. 114), où les vraies équations seront mises en œuvre, que la complication des calculs y est moindre qu'on ne pouvait le craindre et, surtout, que le principal résultat reste simple.

ou, vu le dernier membre de (157),

$$(P_0 - 2K)(R_1^2 - R_0^2) = K R_0^2 \int_{r=R_0}^{r=R_1} \log \frac{r^2}{R_0^2} d \frac{r^2}{R_0^2};$$

et, comme la fonction primitive de $\log u$ est $u \log u - u$, il viendra

$$(P_0 - 2K)(R_1^2 - R_0^2) = K \left(r^2 \log \frac{r^2}{R_0^2} - r^2 \right)_{r=R_0}^{r=R_1} = K R_1^2 \log \frac{R_1^2}{R_0^2} - K(R_1^2 - R_0^2),$$

c'est-à-dire, en réduisant, puis résolvant par rapport à P_0 ,

$$(158) \quad P_0 = K \left(1 + \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \log \frac{R_1^2}{R_0^2} \right).$$

On en déduit P_z , qui vaut $P_0 + 2K$, et enfin la pression totale F , ou $P_z(\pi R_0^2)$, capable d'effectuer le poinçonnage du bloc :

$$(159) \quad (\text{surf. latér. inextensible}) \quad F = K \pi R_0^2 \left(3 + \frac{2R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \log \frac{R_1^2}{R_0^2} \right).$$

C'est précisément la seconde formule qu'a obtenue Tresca, encore par des évaluations assez obscures de travaux des forces intérieures en jeu dans la déformation. A cause de l'égalité admise ci-dessus de N_z à N_ω , qui n'existe, même en moyenne, qu'avec une assez grossière approximation, on ne doit pas s'attendre à trouver cette formule aussi bien vérifiée que la précédente (135) du cas où le bord était libre. Aussi les meilleures observations de Tresca (1) y ont-elles donné pour le plomb des valeurs de K variables depuis 176^{kg} par centimètre carré jusqu'à 221^{kg}, valeurs présentant, avec la moyenne précédente 200^{kg}, des écarts, en plus ou en moins, deux fois plus forts environ que ceux qu'avait offerts la formule (135).

74. Substituons dans (157) la valeur (158) de P_0 et nous aurons la pression variable N_z à exercer sur les bases des couches annulaires

(1) Voir, comme plus haut (p. 97), le Tableau de la page 191 de son Mémoire.

pour maintenir leur horizontalité :

$$(160) \quad N_z = K \left(1 + \log \frac{r^2}{R_1^2} - \frac{R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} \log \frac{R_1^2}{R_0^2} \right) \\ = K \left[1 - \log \frac{R_1^2}{r^2} - \frac{\log(1+\nu)}{2(-1+\sqrt{1+\nu})} \right].$$

Quand r grandit de R_0 à R_1 , cette force N_z croît de

$$(161) \quad K \left[1 - \frac{\sqrt{1+\nu} \log(1+\nu)}{2(-1+\sqrt{1+\nu})} \right] = K \left[1 - \sqrt{1+\nu} \frac{1+\sqrt{1+\nu}}{2} \frac{\log(1+\nu)}{\nu} \right]$$

à

$$(162) \quad K \left[1 - \frac{\log(1+\nu)}{2(-1+\sqrt{1+\nu})} \right] = K \left[1 - \frac{1+\sqrt{1+\nu}}{2} \frac{\log(1+\nu)}{\nu} \right].$$

La seconde de ces limites est positive; car la fraction qui s'y trouve retranchée de 1 dans la parenthèse est la moyenne de deux,

$$\frac{\log(1+\nu)}{\nu} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{1+\nu} \log(1+\nu)}{\nu},$$

qui ont été reconnues plus haut (p. 94) inférieures à l'unité. Mais la première, (161), où la même moyenne se trouve multipliée par $\sqrt{1+\nu}$, est, au contraire, négative. Autrement dit, on a, en multipliant par 2ν ,

$$(163) \quad 2\nu - (\sqrt{1+\nu} + 1 + \nu) \log(1+\nu) < 0;$$

et, en effet, d'une part, le premier membre de cette inégalité s'annule pour $\nu = 0$. D'autre part, sa dérivée en ν , calculée et réduite, a le signe du facteur

$$2(-1+\sqrt{1+\nu}) - (1+2\sqrt{1+\nu}) \log(1+\nu),$$

nul lui-même pour $\nu = 0$, mais dont la propre dérivée,

$$-\frac{1}{\sqrt{1+\nu}} - \frac{1}{1+\nu} - \frac{\log(1+\nu)}{\sqrt{1+\nu}},$$

a tous ses termes négatifs. Donc, le premier membre de (163) est essentiellement négatif et décroissant (vers $-\infty$) quant ν y va de zéro à ∞ .

Ainsi, la force verticale N_z propre à maintenir l'horizontalité des couches annulaires est encore (comme au n° 69) une *pression proprement dite près du cylindre central, une traction près du contour*.

Supposant enfin continu ou sans orifice le plateau inférieur, et assez petite la hauteur H du bloc pour que la déformation se produise, presque dès le début, jusqu'au fond $z = 0$, cherchons le petit déplacement vertical δ' de la couche horizontale quelconque dont l'ordonnée primitive était z .

Pour un petit enfoncement α de la base du poinçon, le refoulement latéral δ_0 du bord concave de chaque couche annulaire sera évidemment donné, comme dans le cas précédent, par la première formule (136), ou vaudra $\frac{\alpha R_0}{2H}$. Ce sera donc la valeur du second membre de (155) pour $r = R_0$; et l'on tirera de là, comme dilatation verticale $C = \frac{d\delta'}{dz}$,

$$(164) \quad C = \frac{R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} \frac{\alpha}{H}; \quad \text{d'où} \quad \delta' = \frac{R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} \frac{\alpha z}{H}.$$

En faisant $z = H$, on aura le relèvement de la couche supérieure; et le volume soulevé au-dessus de la surface libre primitive en égalera le produit par $\pi(R_1^2 - R_0^2)$, savoir $\pi R_0^2 \alpha$, comme il était évident.

Observons que les déplacements δ , δ' , uniquement liés à δ_0 , R_0 , R_1 , ne dépendent pas des pressions N_r , N_ω , N_z , ni, par suite, de l'hypothèse approximative $N_z = N_\omega$ faite ci-dessus.

75. La méthode précédente sacrifie la proportion (156) ou, du moins, la réduit à ce qu'elle est pour $r = 0,5773R_1$. Si l'on voulait en tenir compte sans accroître sensiblement la complication, on pourrait substituer aux deux différences $N_z - N_r$, $N_\omega - N_r$, qui sont constantes à tour de rôle, leur moyenne arithmétique, moins variable avec r , dans chaque région, que celle d'entre elles qui y change : et on lui attribuerait alors, quel que soit r , sa valeur relative à $r = 0,5773R_1$; de

sorte qu'on négligerait la variabilité de cette moyenne, au lieu de celle de $N_z - N_\omega$.

En appelant $2U$ cette différence $N_z - N_\omega$, on aurait ainsi

$$(165) \quad N_z - N_r = 2K + U, \quad N_\omega - N_r = 2K - U.$$

Après quoi, la proportion (156) donnerait

$$(166) \quad U = \frac{2K}{3} \frac{3r^2 - R_1^2}{R_1^2 + r^2}; \quad \text{d'où aussi} \quad \frac{N_\omega - N_r}{r} = \frac{8K}{3} \frac{R_1^2}{R_1^2 + r^2} \frac{1}{r}.$$

Dès lors, la première équation (133) (p. 88), toujours vérifiée pourvu que la pression principale N_z ne dépende pas de z , deviendrait immédiatement intégrable en r . Et l'on aurait, en observant que $-P_0$ est la valeur de N_r à la limite inférieure $r = R_0$,

$$(167) \quad N_r = -P_0 + \frac{4K}{3} \log \frac{(R_1^2 + R_0^2)r^2}{R_0^2(R_1^2 + r^2)}.$$

Enfin, la première (165) donnerait à son tour

$$(168) \quad N_z = -P_0 + 4K + \frac{4K}{3} \left[\frac{-2R_1^2}{R_1^2 + r^2} + \log \frac{(R_1^2 + R_0^2)r^2}{R_0^2(R_1^2 + r^2)} \right];$$

et, grâce à l'intégration indéfinie, qui se vérifie immédiatement,

$$\int \left[\log \frac{(R_1^2 + R_0^2)u}{R_0^2(R_1^2 + u)} \right] du = u \log \frac{(R_1^2 + R_0^2)u}{R_0^2(R_1^2 + u)} - R_1^2 \log(R_1^2 + u) + \text{const.},$$

la condition $\int_{r=R_0}^{r=R_1} N_z d.r^2 = 0$ ferait connaître P_0 . En réduisant la partie logarithmique du résultat et divisant par $R_1^2 - R_0^2$, il vient

$$(169) \quad P_0 = 4K - \frac{4K}{3} \frac{2R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \log \left(\frac{2R_1^2}{R_1^2 + R_0^2} \frac{2R_1 R_0}{R_1^2 + R_0^2} \right).$$

Finalement, la pression sous le poinçon, pression qu'on peut appeler P'_z , étant $2K + P_0$, on aurait, pour la poussée totale $F' = \pi R_0^2 P'_z$

du poinçon,

$$(170) \quad F' = 2K\pi R_0^2 \left[3 - \frac{2}{3} \frac{2R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \log \left(\frac{2R_1^2}{R_1^2 + R_0^2} \frac{2R_1 R_0}{R_1^2 + R_0^2} \right) \right] \quad (1).$$

(1) Pour calculer dans (170) la quantité entre crochets, on posera

$$R_1^2 = \mu(1 + \varepsilon), \quad R_0^2 = \mu(1 - \varepsilon); \quad \text{d'où} \quad \mu = \frac{R_1^2 + R_0^2}{2}, \quad \varepsilon = \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_1^2 + R_0^2};$$

et cette quantité entre crochets sera

$$3 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \log [(1 + \varepsilon) \sqrt{1 - \varepsilon^2}].$$

Le logarithme y figurant est naturel ou népérien, c'est-à-dire que, si, réservant la notation log pour les logarithmes décimaux ou vulgaires, on désigne par L ce logarithme népérien, il s'obtiendra par l'une ou l'autre des formules

$$\log L \left(x \text{ ou } \frac{1}{x} \right) = 0,36222 + \log \log \left(x \text{ ou } \frac{1}{x} \right),$$

dont on choisira la première si x excède l'unité et la seconde si x est moindre que 1.

Première expérience de Tresca signalée dans le texte (p. 106). — On trouve que ε y vaut 0,54776 et, son inverse, 1,8256. La quantité entre crochets étant, par suite,

$$3 - (1,8837) L(1,2949) = 2,5132,$$

la formule (170) attribuée à F' la valeur

$$(5,0264) K\pi R_0^2.$$

Quant à (171), où la parenthèse vaut

$$3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) L \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

c'est-à-dire, ici,

$$3 + (1,4128) L(3,4224) = 4,7382,$$

cette formule donne

$$F = (4,7382) K\pi R_0^2;$$

le coefficient 4,7382 y atteint les 0,9427 du précédent 5,0264.

Deuxième expérience signalée dans le texte. — On y avait $\varepsilon = 0,92308$. La quantité entre crochets, dans (170), devient alors

$$3 - (1,3889) L(0,7396) = 3,4189,$$

et la formule (170) est

$$F' = (6,8378) K\pi R_0^2.$$

Or, dans (171), la quantité entre parenthèses est, en même temps,

$$3 + (1,04166) L(25) = 6,3531; \quad \text{d'où} \quad F = (6,3531) K\pi R_0^2.$$

Le coefficient, 6,3531, est ici les 0,9291 de celui, 6,8378, qui figure dans F' .

La formule de Tresca (159), plus simple, était

$$(171) \quad F = K\pi R_0^2 \left(3 + \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \log \frac{R_1^2}{R_0^2} \right).$$

J'ai comparé leurs résultats ⁽¹⁾ pour deux expériences que mentionne Tresca ⁽²⁾, où l'on avait, dans l'une, $R_0 = 1^c$, $R_1 = 1^c,85$ et, dans l'autre, $R_0 = 1^c$, $R_1 = 5^c$. Pour toute valeur donnée de K , la formule (171) y conduit à des poussées un peu plus faibles que la formule (170); elles en sont la fraction 0,9427 dans la première expérience et 0,9291 dans la seconde. Tresca ayant déduit, pour le plomb, de sa formule (171) les deux valeurs de K respectives 176 et 221, il est clair que la formule (170) l'aurait conduit aux valeurs

$$176 \times 0,943 = 166 \quad \text{et} \quad 221 \times 0,929 = 205.$$

La seconde aurait été très proche de la valeur moyenne générale 200, mais la première, 166, beaucoup trop faible.

Une raison d'un tel écart, raison plausible aussi pour la valeur assez inexacte 176 de Tresca, est que *les deux formules (170) et (171) s'y trouvent peut-être employées trop en dehors de leur champ légitime d'applicabilité*. Leur démonstration a supposé, en effet, que la partie annulaire du bloc comprend le rayon $r = 0,5773 R_1$, et même que celui-ci est une sorte de moyenne au-dessous de laquelle r s'abaisse notablement. Or, dans le premier exemple, R_0 atteint $0,54 R_1$ et le rayon $r = 0,5773 R_1$ est bien près de la limite inférieure ⁽³⁾.

76. On peut, en résumé, s'expliquer avec quelque approximation les phénomènes de poinçonnage, en négligeant les composantes tangentielles de pression exercées, dans le sens du mouvement du poinçon, entre les fibres contiguës du bloc poinçonné parallèles à ce mouvement. Pour pouvoir annuler les composantes en question, et même les glissements correspondants entre fibres (sauf à travers le

⁽¹⁾ Note ci-dessus.

⁽²⁾ Dans le Tableau, cité plus haut, de sa page 191.

⁽³⁾ On trouvera au n° 83 (p. 117) la formule générale exacte; elle porte le n° 187.

prolongement, dans le bloc, de la surface latérale du poinçon), on introduit sur les faces de ce bloc, supposées toutes parallèles ou perpendiculaires au mouvement, des pressions uniquement normales, réglées convenablement et se neutralisant au total sur chaque surface *libre*; en sorte que les deux parties du bloc, l'une centrale, l'autre annulaire, séparées par ce prolongement de la surface latérale du poinçon, n'éprouvent que des déformations simples, laissant invariable dans chacune l'orientation tant des fibres parallèles au mouvement que des couches perpendiculaires.

Dans ces conditions, les pressions principales y sont aussi, partout, parallèles aux fibres ou aux couches considérées; et l'on y exprime aisément l'égalité à $2K$ de la différence des deux pressions principales extrêmes : ce qui est la relation admise comme caractérisant la semi-fluidité d'un corps plastique.

Il faut dès lors que les glissements mutuels, *finis et inévitables*, des deux parties centrale et annulaire, se fassent *sans frottement*, ou qu'il y ait (fictivement) *rupture* entre elles, avec *poli parfait* de leur surface séparative, *fixe dans l'espace*; car la matière qui franchit celle-ci est censée, à chaque instant, incorporée à la partie vers laquelle elle se porte, et dissociée ou désagrégée de celle qu'elle quitte.

Sans doute ces hypothèses, *hors desquelles le problème semble inabordable*, suppriment une circonstance importante, en jeu dans le phénomène; mais elles laissent subsister les deux les plus capitales, qui sont l'écrasement continu de la partie centrale, avec l'expansion, soit principalement latérale, soit latérale et en sens inverse du mouvement du poinçon, dans la partie annulaire. Et elles font du poinçonnage un mode de déformation assez simple, accessible au calcul.

77. Mais quand la plaque rigide supportant le bloc poinçonné porte en son centre un orifice de même rayon R_0 que le poinçon, comme nous avons dit, un second mode, encore plus simple, s'offre à l'esprit, en tant que possible au moins théoriquement. C'est le *cisaillement* du cylindre central par le poinçon, c'est-à-dire le glissement de toute la surface latérale $2\pi R_0 H$ du cylindre central suivant les génératrices, avec production sur elle de la force tangentielle maximum $T_m = K$, réalisant la rupture de ce cylindre d'avec la partie annulaire et

l'expulsion d'une *débouchure* qui se détache sans avoir éprouvé un changement de figure notable. Bref, ce second mode est constitué précisément par l'exagération de la composante tangentielle (même et surtout à travers la surface séparant les deux parties du bloc) qu'on négligeait dans le poinçonnage, composante qui devient à son tour prédominante et simplifie le phénomène en mettant dans l'ombre l'expansion de la partie annulaire.

Appelons \mathcal{F} la poussée du poinçon capable d'opérer ce cisaillement. Elle y est équilibrée par la résistance contraire $K(2\pi R_0 H)$ de la partie annulaire que maintient fixe le plateau sous-jacent; et il vient

$$(172) \quad \mathcal{F} = 2\pi K R_0 H.$$

Cette poussée, au lieu de dépendre, comme celle, F , de poinçonnage, du rayon R_1 du bloc, est proportionnelle à son épaisseur actuelle H . Donc, tant que l'épaisseur H rendra \mathcal{F} plus grand que F , l'effort (135) ou (159), exercé pour produire le poinçonnage, sera impuissant à opérer le cisaillement, circonstance bien de nature à indiquer que le rôle des glissements se trouve encore secondaire; et le poinçonnage continue. Par le fait même, les courbures prises par la base inférieure πR_0^2 du cylindre central resteront insignifiantes; et tout s'y passera sensiblement comme si l'orifice était bouché.

Mais, dès que l'épaisseur du bloc sous le poinçon n'aura plus qu'une valeur h rendant \mathcal{F} égal à F , le cisaillement deviendra évidemment possible, puis, aussitôt après, imminent. Car, dans la nature, où les mouvements vibratoires et autres circonstances accidentelles offrent sans cesse des occasions de se produire à toutes les ruptures d'équilibre possibles et, en particulier, aux modifications de figure, dites *les plus faciles*, exigeant les moindres efforts, ou corrélatives, pour des efforts donnés, aux plus grands effets, ce sont celles-là qui surviennent inévitablement (1).

(1) C'est ainsi que, par exemple, la rupture d'un massif terreux soutenu par un mur se fait suivant la surface qui laisse au poids du massif le plus d'action possible pour renverser le mur et amener la déformation maximum du système formé par le mur et le massif.

78. La hauteur h de la *débouchure* détachée par le cisaillement s'obtiendra donc en égalant $2K\pi R_0 h$ à l'un ou à l'autre des seconds membres de (135) et de (159). La constante spécifique K disparaît comme facteur commun et l'on a :

$$(173) \quad (\text{surf. latérale libre}) \quad h = R_0 \left(1 + \log \frac{R_1}{R_0} \right),$$

$$(174) \quad (\text{surf. latérale inextensible}) \quad h = R_0 \left(\frac{3}{2} + \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \log \frac{R_1}{R_0} \right).$$

Telles sont les formules, pareilles chez tous les corps plastiques, qu'a données Tresca pour évaluer la hauteur des débouchures (1). Il a vérifié en particulier la première, (173), sur des blocs d'une suffisante épaisseur et assez larges pour que le poinçon n'en écrasât presque que le cylindre central. Ses expériences à cet effet ont porté (2) non seulement sur le plomb, mais aussi sur la cire à modeler, diverses pâtes céramiques; enfin, même sur le cuivre et le fer.

Les débouchures de ces derniers corps ont accepté sensiblement la même formule (173), quoiqu'il y ait chez eux, quand on les déforme lentement, entre une phase d'élasticité parfaite et le moment de la rupture, une longue période, dite d'*élasticité imparfaite* ou *des déformations permanentes*, que notre théorie néglige, où varient lentement Δ et, par suite, K , qui, d'après (104) (p. 72), égale $2\mu\Delta$. La conservation approchée du coefficient de rigidité μ suffit évidemment, à chaque instant de cette déformation permanente, pour rendre le rapport de \mathcal{F} à F indépendant de Δ et laisser les formules (173), (174) exprimer l'égalité $\mathcal{F} = F$, à quelque moment que survienne le cisaillement (3).

En somme, le *cisaillement* des débouchures, dû à l'exagération de l'action tangentielle du cylindre central sur la partie annulaire des

(1) Il n'a cependant indiqué, explicitement, que (173).

(2) Voir la page 215 de son Mémoire.

Dans une autre partie du même Mémoire (p. 182), il a reconnu que l'étain est beaucoup plus résistant que le plomb et qu'un alliage (à proportion égale) des deux offre environ la résistance $K = 350^{\text{kg}}$ par centimètre carré.

(3) On s'explique d'une manière analogue comment le fer a pu donner le même rapport qu'un corps dur et cassant, entre les résistances respectives à la rupture par cisaillement et par extension (voir la fin du n° 56 ci-dessus, p. 77).

blocs, nous renseigne sur ce que peut cette action tangentielle, dont le rôle prédomine ainsi sous les faibles épaisseurs H . Mais il montre, par le fait même, l'effacement de ce rôle chez les blocs *épais*; ce qui nous justifie de l'avoir négligé dans la théorie du poinçonnage, comparativement à celui de l'expansion latérale.

79. Outre le poinçonnage d'un bloc cylindrique à surface latérale soit libre, soit entourée d'un cylindre creux, rigide et poli, adhérent au plateau qui porte le bloc, Tresca a étudié l'écoulement de celui-ci à travers l'orifice, de rayon R_0 , ouvert au centre du plateau, lorsque le poinçon est remplacé par un piston circulaire rigide, de rayon R_1 , parfaitement poli, poussé contre le plateau et glissant sans frottement le long des génératrices du cylindre creux (1). A ce nouveau problème s'appliquent les mêmes hypothèses simplificatrices, relatives à la distinction et à la non-adhérence mutuelle des deux parties du bloc : l'une, cylindre central de rayon R_0 , l'autre, annulaire, l'entourant et, toutes les deux, soumises, sur les surfaces qui les limitent, à des pressions uniquement normales, même sur la surface cylindrique $2\pi R_0 H$, fixe dans l'espace, séparative des deux parties. Seulement, alors, les mouvements horizontaux se font partout en sens inverse des directions qu'ils avaient dans le cas du poinçonnage, la matière affluant de tous côtés vers l'axe au lieu de s'en éloigner, tandis que les mouvements verticaux ont lieu maintenant de haut en bas (et non plus de bas en haut) dans la partie annulaire, mais continuent à se faire de haut en bas dans le cylindre central.

Il en résulte, dans la partie annulaire, des contractions $\left(-\frac{d\delta'}{dz}\right)$ et $\left(-\frac{\delta}{r}\right)$, à la fois suivant les deux sens (vertical et horizontal) perpendiculaires aux rayons r , mais forcément, par suite (vu la conservation des volumes), une dilatation $\frac{d\delta}{dr}$ vers l'axe. Le rapproche-

(1) Tresca observe qu'on peut considérer cet écoulement comme un poinçonnage, où le piston serait censé fixe et, le plateau, mobile de bas en haut contre le bloc plastique, à la manière d'un *poinçon annulaire* qui entraînerait le cylindre creux, avec afflux de haut en bas, à travers l'orifice inférieur, de la matière expulsée, devenue ainsi une *veine* rappelant les veines liquides.

ment, $-\delta$, de leur centre, qu'éprouvent les anneaux de chaque couche horizontale, entraîne donc une pénétration ($-\delta_0$), à travers toute la surface $2\pi R_0 H$ séparant les deux parties, de la matière de la partie annulaire, dans le cylindre central, avec incorporation instantanée à celui-ci et refoulement plus sensible que jamais vers le bas, jusque sous l'orifice, de cette matière du cylindre central, tant à raison de l'apport qui lui est ainsi fait par la partie annulaire que de l'abaissement directement imprimé à la base supérieure du cylindre central, par le piston descendant.

Comme la seule surface libre, celle, πR_0^2 , de l'orifice, appartient maintenant au cylindre central, on aura $N_z = 0$ pour $r < R_0$. Au contraire, les pressions ($-N_z$) du piston, équilibrées suivant chaque verticale par celles du plateau, donneront, pour $r > R_0$, des valeurs négatives très notables à cette force principale N_z .

Sauf le renversement actuel des sens du mouvement et, par suite, de la dilatation linéaire verticale C dans toute la partie annulaire, les formules du n° 73 s'appliqueront sans changement, y compris celles, (155), du déplacement horizontal δ et des deux déformations principales $\frac{d\delta}{dr}$, $\frac{\delta}{r}$ qui en dépendent, ainsi que les formules soit exactes, soit approchées, (156) et (157), ou encore (165), (166), (167) et (168), entre N_r , N_ω , N_z , mais avec substitution de $-K$ à K , en raison de ce que les pressions déformatrices ou prédominantes sont maintenant, dans la région annulaire, ($-N_z$) et non ($-N_r$) ou ($-N_\omega$). Cette circonstance y assure la valeur absolue $2K$ à $N_r - N_z$ ou à $N_\omega - N_z$ et non plus à $N_z - N_r$ ou à $N_\omega - N_r$.

80. Par exemple, dans l'hypothèse approchée et moyenne $N_z = N_\omega$ qui donne les formules les plus simples, il vient ainsi, à partir de la seconde (133) et de la première (134), avec renversement du signe de K ,

$$(175) \quad N_r = -P_0 - 2K \log \frac{r}{R_0}, \quad N_z = N_\omega = -P_0 - 2K \left(1 + \log \frac{r}{R_0} \right);$$

et la constante P_0 se détermine en observant que cette pression proprement dite, exercée sur la surface latérale du cylindre central, est justement celle, $2K$, qui produit la semi-fluidité de ce cylindre, vu la

valeur nulle qu'y a l'autre force principale extrême N_z . Remplaçant donc P_0 par $2K$ et observant que $(-N_z)$ est, pour $r > R_0$, la pression P_z exercée par l'unité d'aire de la partie annulaire $\pi(R_1^2 - R_0^2)$ de la base du piston, on aura

$$(176) \quad (\text{pour } r > R_0) \quad P_z = K \left(4 + \log \frac{r^2}{R_0^2} \right).$$

Multiplions par l'élément πdr de l'aire *active* considérée, et intégrons depuis $r = R_0$ jusqu'à $r = R_1$, sans oublier que la fonction primitive de $\log u$ est $u \log u - u$. Il viendra, comme poussée totale F du piston, apte à produire l'écoulement du bloc,

$$(177) \quad F = K\pi(R_1^2 - R_0^2) \left(3 + \frac{2R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \log \frac{R_1}{R_0} \right).$$

C'est la formule qu'a obtenue Tresca, encore par ses calculs difficilement intelligibles de travaux ⁽¹⁾. Ses observations sur l'écoulement du plomb l'ont confirmée, mieux même que celles de poinçonnage, (135) et (159); car, dans les deux dernières séries d'expériences qui ont été les plus soignées, K a eu les deux valeurs, presque égales entre elles et à la moyenne générale, 198^{kg} et 201^{kg} par centimètre carré. Malgré l'obscurité de ces problèmes, il semble qu'on aurait pu pressentir, pour elle, une raison de plus grande exactitude: c'est qu'on y a exprimé complètement l'état de liberté de l'orifice, tandis que, dans les deux cas de poinçonnage, le même état de liberté de la surface supérieure annulaire entourant la base du poinçon, n'avait été exprimé qu'en moyenne.

81. Achéons maintenant de déterminer les déplacements δ , δ' éprouvés par la matière du bloc suivant les rayons r issus de l'axe et suivant la verticale ascendante, en admettant que ces déplacements soient encore petits. Si α désigne toujours l'abaissement du piston et, par conséquent, $-\frac{\alpha}{H}$ la dilatation verticale $C = \frac{d\delta'}{dz}$ dans la partie an-

(1) J'avais déjà démontré sommairement cette formule et les autres de Tresca qui portent ci-dessus les nos 133, 139, 173, 174, au paragraphe X de mon Mémoire de Belgique (p. 140 à 145).

nulaire du bloc, on aura, d'après la seconde (136) et la première (155),

$$(178) \quad (\text{pour } r > R_0) \quad \delta' = -\frac{\alpha z}{H}, \quad \delta = -\frac{\alpha}{2H} \left(\frac{R_1^2}{r} - r \right).$$

En faisant $r = R_0$ dans la dernière de celles-ci, on aura la réduction absolue, $-\delta_0$, du rayon du cylindre central primitif, réduction dont le quotient par R_0 sera la contraction linéaire uniforme de ce rayon; car le cylindre central est déformé de même partout, et pareillement suivant tous les sens horizontaux. Puis, en doublant et changeant de signe cette contraction, on aura la dilatation en hauteur, ou l'*étirement relatif*, du cylindre central, étirement qui sera ainsi $\frac{\alpha}{H} \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2}$ et entraînera, pour les points situés à la distance primitive $H - z$ de la base supérieure, l'abaissement

$$\frac{\alpha}{H} \frac{R_1^2 - R_0^2}{R_0^2} (H - z)$$

au-dessous de cette base. Et comme celle-ci, contiguë au piston, s'est elle-même abaissée de α , la somme de ces deux abaissements distincts donnera

$$(179) \quad (\text{pour } r < R_0) \quad \delta' = -\frac{\alpha}{R_0^2} \left[R_1^2 - (R_1^2 - R_0^2) \frac{z}{H} \right].$$

Quant à l'accroissement δ de la distance à l'axe, pour ces mêmes points du cylindre central, il est évidemment proportionnel à l'éloignement primitif r d'avec l'axe, ou égal à $-\frac{\delta_0 r}{R_0}$, vu l'uniformité des déformations en longueur et largeur dans tout ce cylindre. Ainsi

$$(180) \quad (\text{pour } r < R_0) \quad \delta = -\frac{\alpha(R_1^2 - R_0^2)}{2HR_0} \frac{r}{R_0}.$$

82. Sur la surface idéale et fixe πR_0^2 de l'orifice, au-dessus de laquelle N_r et N_z sont toujours censés être des forces principales, il ne peut s'exercer, dans la matière y arrivant et en train de devenir la *veine*, aucune action tangentielle, quoique les feuilletts horizontaux

qui sont au-dessus ne cessent de se contracter, tandis que ceux de la veine ne le font plus, au moins d'une manière appréciable. Or d'un tel contraste résultent évidemment des glissements relatifs suivant les rayons r , entre couches séparées par le plan $z = 0$; et ces glissements donneraient lieu sur elles aux actions tangentielles qu'on veut pouvoir négliger, si la *veine* n'était pas *réputée* dépourvue d'adhérence au cylindre central et sans frottement sur lui.

Donc il en sera du plan $z = 0$, dans notre essai théorique, comme de la surface cylindrique fixe séparant le cylindre central du bloc d'avec la partie annulaire. Ce plan sera censé, à toute époque, diviser en deux corps sans adhésion entre eux, et même sans frottement mutuel, les masses plastiques qu'il séparera; et la matière affluant à la veine sera réputée s'y incorporer instantanément, en perdant son mouvement propre pour n'avoir désormais que la translation descendante commune à toute la veine. Ce n'est donc plus seulement la partie annulaire et le cylindre central que devront distinguer dans le bloc nos formules simples, où N_r , N_ω , N_z sont partout les trois forces principales, mais encore une troisième partie, la *veine*, la partie des z négatifs, où la matière cesse d'être à l'état de semi-fluidité pour redevenir solide.

En faisant $z = 0$ dans la formule (179), on voit que la longueur encore petite de la veine, abaissement éprouvé par la base primitive du cylindre central, est $\frac{\alpha R_1^2}{R_0^2}$, et que son volume, produit, par cette longueur, de l'aire πR_0^2 de l'orifice, égale $\pi R_1^2 \alpha$, comme on pouvait le prévoir; car c'est l'équivalent évident du cylindre matériel plastique, de hauteur α , que la base πR_1^2 du piston a chassé devant elle.

83. Mais revenons encore à cette question d'écoulement, même d'abord à celle du poinçonnage des blocs munis d'une ceinture rigide, pour essayer d'y traiter les vraies équations de ces problèmes, malgré la complication pouvant résulter de la duplicité d'expression de N_r , N_z , N_ω de part et d'autre du rayon $r = 0$, $5773 R_1$. On a vu que la proportion (156) conduit, en effet, à y distinguer, dans la partie annulaire des blocs, deux régions, l'une, interne ou contiguë au cylindre central et s'étendant depuis le bord concave $r = R_0$ jusqu'au cylindre

$r = 0,5773R_1$, l'autre, externe, s'étendant depuis ce cylindre jusqu'au bord convexe $r = R_1$.

Dans la première région où $N_\omega - N_r = 2K$, N_r reçoit la première expression (134). Par suite, la proportion (156) y donne

$$N_z - N_r = K \left(1 + 3 \frac{r^2}{R_1^2} \right);$$

d'où, en éliminant N_r ,

$$N_z = -P_0 + K \left(1 + 3 \frac{r^2}{R_1^2} + \log \frac{r^2}{R_0^2} \right).$$

Dans la seconde région, au contraire, c'est $N_z - N_r$ qui vaut $2K$. La proportion (156) y donne d'ailleurs

$$N_\omega - N_r = \frac{4K R_1^2}{R_1^2 + 3r^2};$$

et la première équation (133) y devient

$$\frac{dN_r}{dr} = \frac{4K}{r} \frac{R_1^2}{R_1^2 + 3r^2} = 2K \left(\frac{2}{r} - \frac{6r}{R_1^2 + 3r^2} \right).$$

Multiplions par dr et intégrons, en introduisant une constante arbitraire γ . Nous aurons

$$N_r = -P_0 + 2K \log \frac{\gamma r^2}{R_1^2 + 3r^2}.$$

Mais comme le cylindre $r = 0,5773R_1$, séparatif des deux régions, supporte sur ses deux faces des pressions N_r pareilles, cette dernière formule de N_r y devient égale à la première (134), circonstance assignant à γ la valeur

$$(181) \quad \gamma = 2\sqrt{3} \frac{R_1}{R_0}.$$

Après quoi, N_z , ou $2K + N_r$, se trouve également déterminé.

Donc, si, pour abrégér les formules, on pose

$$(182) \quad \nu = \frac{r^2}{R_1^2},$$

il viendra, en résumé :

$$(183) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\text{pour } \frac{r^2}{R_1^2} < \frac{1}{3} \text{ ou } \varepsilon < \frac{1}{3} \right) \\ N_r = -P_0 + K \log \frac{R_1^2 \varepsilon}{R_0^2}, \quad N_z = -P_0 + K \left(1 + 3\varepsilon + \log \frac{R_1^2 \varepsilon}{R_0^2} \right); \end{array} \right.$$

$$(184) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\text{pour } \frac{r^2}{R_1^2} > \frac{1}{3} \text{ ou } \varepsilon > \frac{1}{3} \right) \\ N_r = -P_0 + 2K \log \frac{\gamma \varepsilon}{1 + 3\varepsilon}, \quad N_z = -P_0 + 2K \left(1 + \log \frac{\gamma \varepsilon}{1 + 3\varepsilon} \right). \end{array} \right.$$

Enfin, P_0 résultera de la condition

$$\int_{r=R_0}^{r=R_1} N_z d.r^2 = 0.$$

Et l'on aura ainsi

$$(185) \quad P_0 = \frac{K R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \left[\int_{\frac{R_0^2}{R_1^2}}^{\frac{1}{3}} \left(1 + 3\varepsilon + \log \frac{R_1^2 \varepsilon}{R_0^2} \right) d\varepsilon + 2 \int_{\frac{1}{3}}^1 \left(1 + \log \frac{\gamma \varepsilon}{1 + 3\varepsilon} \right) d\varepsilon \right],$$

ou bien

$$P_0 = \frac{K R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \left\{ \left(\frac{3}{2} \varepsilon^2 + \varepsilon \log \frac{R_1^2 \varepsilon}{R_0^2} \right) \frac{1}{R_1^2} + 2 \left[\varepsilon + \varepsilon \log \frac{\gamma \varepsilon}{1 + 3\varepsilon} - \frac{1}{3} \log(1 + 3\varepsilon) \right] \frac{1}{\frac{1}{3}} \right\}.$$

L'effectuation des calculs, avec réduction séparée tant de la partie algébrique que de la partie logarithmique, donne pour P_0 l'expression, d'une simplicité inespérée,

$$(186) \quad P_0 = K \left(\frac{3}{2} \frac{R_1^2 + R_0^2}{R_1^2} + \frac{2 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \log \frac{\sqrt{3} R_1}{2 \sqrt[3]{2} R_0} \right).$$

En ajoutant $2K$ et multipliant par l'aire πR_0^2 de la base du poinçon, on aura donc comme formule de la poussée F , remplaçant à la fois (159)

et (170),

$$(187) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(surface latérale inextensible):} \\ F = K \pi R_0^2 \left(\frac{7}{2} + \frac{3}{2} \frac{R_0^2}{R_1^2} + \frac{2 R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \log \frac{\sqrt{3} R_1}{2 \sqrt[3]{2} R_0} \right). \end{array} \right.$$

84. Elle a la forme de (159), mais avec la partie algébrique du coefficient plus grande de $\frac{3R_0^2 + R_1^2}{2R_1^2}$ et, par contre, la partie logarithmique sensiblement moindre; car le facteur $\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}$ vaut seulement 0,68737, au lieu de l'unité.

Si on l'applique à la première observation, citée plus haut (p. 106), de Tresca, où le rapport de R_1 à R_0 était 1,85, l'expression entre parenthèses de (159) s'y trouve remplacée par

$$3,9383 + (2,8256) \log(1,27162) = 4,6173.$$

Donc la formule (187) y est $4,6173 K \pi R_0^2$. Comparons-la à celle de Tresca pour le même cas, $4,7382 K \pi R_0^2$. Le coefficient de celle-ci, 4,7382, est le produit du sien par 1,0262; de sorte que la formule (187) aurait donné à Tresca, comme valeur correspondante de K , non pas 176, mais le produit de 176 par 1,0262, c'est-à-dire 180,6, valeur un peu plus rapprochée de la moyenne 200.

Dans la seconde observation, où le rapport de R_1 à R_0 était 5, la quantité entre parenthèses de la nouvelle formule (187) est

$$3,56 + (2,0833) \log(3,4368) = 6,1321.$$

Il vient donc $F = 6,1321 K \pi R_0^2$, tandis que la formule de Tresca avait donné $6,3531 K \pi R_0^2$. Le coefficient de celle-ci continue à excéder le coefficient de la nouvelle formule, car il en est le produit par 1,036. Cette expérience, ayant conduit Tresca à la valeur $K = 221$, lui aurait donné 229 avec la nouvelle formule. L'excès sur la moyenne 200, qui était déjà sensible, se serait légèrement exagéré encore.

Des deux formules approximatives (159) et (170), la plus mauvaise, où les valeurs du coefficient dépassent le plus les vraies figurant dans (187), se trouve être la seconde, (170), la moins simple, quoique

paraissant s'écarter moins que (159) des conditions moyennes des faits, mais, il est vrai, pour des blocs où le rayon $r = 0,5773R_1$, pourrait être censé tenir le milieu dans la partie annulaire ⁽¹⁾.

85. On remarquera qu'avec la nouvelle expression (187) de F , la hauteur correspondante h des débouchures serait donnée, non plus par la formule (174), mais par celle-ci :

$$(188) \quad h = \frac{R_0}{2} \left(\frac{7}{2} + \frac{3}{2} \frac{R_0^2}{R_1^2} - \frac{2R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \log \frac{\sqrt{3}R_1}{2\sqrt{2}R_0} \right).$$

Enfin revenons sur les raisonnements des nos 79 et 80, relatifs à l'écoulement du bloc sous la poussée d'un piston le chassant par l'orifice du plateau. On y obtiendrait encore les expressions (183) et (184) des forces N_r , N_z , mais avec changement de signe de $2K$ et,

(1) Nous avons implicitement supposé $R_0 < 0,5773R_1$, ce qui était le cas des expériences de Tresca. Quand, au contraire, R_0^2 dépasse le tiers de R_1^2 , il n'y a plus lieu d'employer les formules (183); et γ se détermine dans (184) par la condition que $N_r = -P_0$ (pour $r = R_0$), ce qui donne

$$\gamma = 3 + \frac{R_1^2}{R_0^2}.$$

Alors, dans (185), la seconde intégrable définie prend tout le champ d'intégration, depuis $r = R_0$ jusqu'à $r = R_1$. Et la formule (187) se trouve finalement remplacée par celle-ci,

$$(187 \text{ bis}) \quad F = 4K\pi R_0^2 \left[1 + \frac{1}{3} \frac{R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \log \left(\frac{R_1^2 + 3R_0^2}{4R_0^2} \frac{R_1^2 + 3R_0^2}{4R_1R_0} \right) \right],$$

qui, dans le cas limite $R_1^2 = 3R_0^2$, se réduit bien à (187).

A cette limite, le calcul de (187) ou de (187 bis) donne $F = (4,5233)K\pi R_0^2$, et, la formule (159) de Tresca, $F = (4,6479)K\pi R_0^2$, résultat où le coefficient numérique est le produit de 4,5233 par 1,0276.

On voit, par comparaison avec les résultats analogues obtenus à la page précédente, 117, que la formule (159) de Tresca conduit à un coefficient numérique excédant d'environ *trois pour cent* celui de la formule théorique (187).

Cet excédent relatif du coefficient de la formule de Tresca sur le vrai vaut encore 0,0327 lorsque le rapport de R_0 à R_1 n'est plus que 0,1. Mais il tend vers zéro avec ce rapport, alors que l'excédent absolu correspondant devient $-\frac{1}{2} + \log \left(\frac{4}{3} \sqrt[3]{4} \right) = 0,2498$.

finalement, avec la valeur $2K$ pour P_0 . Il viendrait donc, comme pression du piston pour $r > R_0$,

$$(189) \quad (-N_z) = \begin{cases} 2K + K \left(1 + 3\varepsilon + \log \frac{R_1^2 \varepsilon}{R_0^2} \right) & \left(\text{pour } \varepsilon < \frac{1}{3} \right), \\ 2K + 2K \left(1 + \log \frac{\gamma \varepsilon}{1 + 3\varepsilon} \right) & \left(\text{pour } \varepsilon > \frac{1}{3} \right). \end{cases}$$

Et la valeur moyenne de cette pression, sur toute l'aire $\pi(R_1^2 - R_0^2)$ qui est à considérer, serait

$$\frac{1}{R_1^2 - R_0^2} \int_{r=R_0}^{r=R_1} (-N_z) d.r^2,$$

c'est-à-dire $2K$ plus le second membre de (185) ou de (186). Et le produit de l'expression ainsi obtenue par $\pi(R_1^2 - R_0^2)$ donnerait la poussée totale F du piston :

$$(190) \quad F = K \pi (R_1^2 - R_0^2) \left(\frac{7}{2} + \frac{3}{2} \frac{R_0^2}{R_1^2} + \frac{2R_1^2}{R_1^2 - R_0^2} \log \frac{\sqrt{3} R_1}{2\sqrt{2} R_0} \right),$$

expression analogue à (177), avec le même coefficient numérique que (187).

Dans les expériences concernant les deux cas où le rapport de R_1 à R_0 était 1,85 et 5, Tresca a déduit de (177), pour le plomb, les deux valeurs respectives $K = 198$ et $K = 201$, indiquées encore au Tableau de sa page 191. Vu les calculs ci-dessus du n° 84, il est clair que la formule (190) lui aurait donné

$$K = 198 \times 1,026 = 203$$

et

$$K = 201 \times 1,036 = 208,$$

valeurs encore voisines de la moyenne 200 (1).

(1) Diverses parties de ce Mémoire ont été résumées dans dix Notes insérées aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris* : t. 166, p. 625, 657, 759, 930, 973, 1016 (22 et 29 avril, 13 mai, 10, 17 et 24 juin 1918); t. 167, p. 186, 221, 253, 285 (29 juillet, 5, 12 et 19 août 1918).

Sur le calcul du profil de rupture d'un terre-plein horizontal avec mur vertical.

Je n'ai pu, à l'article IV, intégrer l'équation différentielle du profil de rupture que dans l'hypothèse de a très petit. Si, au contraire, a est quelconque entre zéro et 1, le calcul devient une quadrature extrêmement ardue à effectuer analytiquement. Il y a lieu de poser alors, par exemple, au troisième membre de l'équation donnant $\cos 2\beta$ (p. 30),

$$U = 2ma(1-u), \quad V = 2 + m(1-a^2)u, \quad R = \sqrt{U^2 + V^2},$$

formules où U, V sont ainsi deux fonctions linéaires données de la variable indépendante u , et R , la racine carrée de la somme de leurs carrés. L'expression indiquée de $\cos 2\beta$ devient simplement $\frac{V}{R}$; et, vu (54), le second membre, $-aF(u)$, de (53), donne

$$F(u) = \frac{1}{a} \frac{\sqrt{(V - R \sin \varphi)(R + V)} + \sqrt{(V + R \sin \varphi)(R - V)}}{\sqrt{(V + R \sin \varphi)(R + V)} - \sqrt{(V - R \sin \varphi)(R - V)}},$$

ou bien, en effectuant, sous les radicaux, les multiplications,

$$F(u) = \frac{1}{a} \frac{\sqrt{-U^2 \sin \varphi + V(1 - \sin \varphi)(R + V)} + \sqrt{U^2 \sin \varphi + V(1 - \sin \varphi)(R - V)}}{\sqrt{U^2 \sin \varphi + V(1 + \sin \varphi)(R + V)} - \sqrt{-U^2 \sin \varphi + V(1 + \sin \varphi)(R - V)}}.$$

Cette formule contient, comme on le voit, sous ses quatre radicaux explicites, outre des expressions du second degré en u , les produits d'expressions du premier degré par le radical R . Or c'est surtout de celui-ci que résultera la difficulté pour effectuer analytiquement la quadrature désirée

$$\int_0^u \frac{du}{u + F(u)}, \quad \text{ou, en particulier,} \quad \int_0^1 \frac{du}{u + F(u)}.$$

On ne pourra probablement l'avoir que par une intégration approchée, ou numérique, ou graphique.

Remarque sur la note de la page 82.

Cette note lie à l'hypothèse, tout à fait vraisemblable pour les corps mous ou plastiques, d'un rapport $\frac{\mu}{\lambda}$ infiniment petit, l'équation (121) de conservation des volumes. On ne pourrait guère éviter cette corrélation, c'est-à-dire garder l'équation (121) sans faire évanouir le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$, qu'en renonçant, dans le n° 60 (p. 81), à la complète proportionnalité, si simple et si séduisante, des D aux λ , pour les diverses fibres d'une même particule, ou bien aux équations linéaires (122) de l'élasticité, dès l'approche de la limite Δ .

*Complément à la théorie du poinçonnage et de l'écoulement
des blocs plastiques : phase élastique de ces phénomènes.*

I. Reprenons les raisonnements des n°s 63 à 70 (p. 85 à 97), consacrés au poinçonnage d'un bloc plastique à surface latérale libre, mais en supposant ici que la pression P_z du poinçon croisse très graduellement, à partir de zéro, de manière à produire d'abord une série d'équilibres *élastiques*, où la différence $P_z - P_0$ entre les deux pressions principales uniformes, *verticale* et *horizontale*, dans le cylindre central, recevra des valeurs, que nous appellerons $2k$, de plus en plus grandes. Ces équilibres élastiques, après s'être étendus à tout le bloc, se localiseront, d'abord, à la partie annulaire, au moment où la différence $P_z - P_0 = 2k$ atteindra son maximum $2K$ *par le passage du cylindre central à l'état plastique*; puis ils se restreindront aux régions de plus en plus périphériques de la partie annulaire, et disparaîtront enfin quand tout le bloc sera à l'état plastique.

Les deux hypothèses de la conservation, d'une part, des volumes, d'autre part, dans *chaque* partie centrale ou annulaire, de l'*horizontalité des couches* (avec *verticalité des fibres*), s'y appliqueront (¹), entraînant

(¹) Toutefois, l'hypothèse du maintien de la verticalité des fibres (ou supposant δ
Ann. Éc. Norm., (3), XXXV. — AVRIL 1918. 16

encore l'existence de l'*unique* pression normale P_0 à la face concave $2\pi R_0 H$ de la partie annulaire. Appelons δ_0 la dilatation linéaire du rayon R_0 commun aux deux parties et, par suite, $2\delta_0$ la *contraction* double des fibres verticales du cylindre central. Les formules (102) des forces élastiques (p. 72) donneront, pour la différence $P_z - P_0$ ou $2k$ des pressions principales dans ce cylindre, le produit de 2μ par l'excédent de $2\delta_0$ sur $-\delta_0$; et l'on aura

$$(a) \quad k = 3\mu \delta_0.$$

II. L'expression (140), toujours subsistante, de la composante horizontale δ des déplacements dans la partie annulaire, où nous appellerons δ' la petite dilatation (indépendante de r) des fibres verticales, s'écrira, un peu plus simplement,

$$(b) \quad \delta = \left(\delta_0 + \frac{\delta'}{2} \right) \frac{R_0^2}{r} - \frac{\delta'}{2} r;$$

et, d'autre part, les formules (102) y donneront, aux endroits où existera un équilibre élastique,

$$(b') \quad (N_r, N_\omega, N_z) = -p + 2\mu \left(\frac{d\delta}{dr}, \frac{\delta}{r}, \delta' \right).$$

Donc la condition $N_z = 0$, *ici vérifiable complètement*, fera p égal à $2\mu\delta'$; ce qui, par l'élimination de p et la substitution à δ de son expression (b), changera les formules de N_r et de N_ω en celles-ci :

$$(c) \quad N_r = -\mu \left[(2\delta_0 + \delta') \frac{R_0^2}{r^2} + 3\delta' \right], \quad N_\omega = \mu \left[(2\delta_0 + \delta') \frac{R_0^2}{r^2} - 3\delta' \right].$$

L'équation indéfinie (133) de l'équilibre (p. 88) est satisfaite.

indépendant de z), nécessaire pour rendre N_r et N_z *pressions principales*, ne l'est pas pour le calcul effectif de δ , δ' , N_r , N_ω , N_z . On n'a eu, et l'on n'aura nulle part ici, à y recourir (en raison, probablement, de ce qu'on annule *a priori* N_z ou, du moins, sa dérivée en z).

Enfin, la condition $N_r = 0$ (pour $r = R_1$) déterminant ν' , il vient :

$$(c') \quad \left\{ \begin{array}{l} \nu' = -\frac{2\delta_0 R_0^2}{R_0^2 + 3R_1^2}, \quad \delta = \frac{\delta_0 R_0^2}{R_0^2 + 3R_1^2} \left(3\frac{R_1^2}{r} + r \right), \\ -N_r = \frac{6\mu\delta_0 R_0^2}{R_0^2 + 3R_1^2} \left(\frac{R_1^2}{r^2} - 1 \right), \quad N_\omega - N_r = \frac{12\mu\delta_0 R_0^2 R_1^2}{(R_0^2 + 3R_1^2)r^2}. \end{array} \right.$$

III. La pression P_0 du cylindre central, sur la face concave de la partie annulaire, n'est autre chose que $(-N_r)$ à la limite $r = R_0$. La troisième formule (c') donnera donc, pour relier cet *effort* P_0 d'*expansion latérale* du cylindre central à la force tangentielle maximum $k = 3\mu\delta_0$ s'y exerçant, la proportion simple

$$(d) \quad \frac{P_0}{k} = \frac{2(R_1^2 - R_0^2)}{R_0^2 + 3R_1^2} = \frac{2\nu'}{4 + 3\nu'}.$$

Pour abrégé, j'y ai désigné par $1 + \nu'$ le rapport de R_1^2 à R_0^2 , racine carrée de celui qui est appelé $1 + \nu$ aux nos 68 et suivants.

A l'état plastique, le rapport analogue de P_0 à K , résultant de l'annulation de N_r pour $r = R_1$ dans la formule (134) (p. 89), est

$$(d') \quad \frac{P_0}{K} = 2 \log \frac{R_1}{R_0} = \log(1 + \nu').$$

Or celui-ci excède le double du précédent (d); car on a

$$\log(1 + \nu') - \frac{4\nu'}{4 + 3\nu'} > 0,$$

inégalité à premier membre nul avec ν' , mais dont la dérivée,

$$\frac{\nu'(8 + 9\nu)}{(1 + \nu')(4 + 3\nu)^2},$$

est ici positive comme ν' .

Considérons l'instant précis où k devient K , par le passage du cylindre central à l'état plastique. A ce moment, les rapports (d) ne sont donc pas encore la moitié des rapports (d'). Et l'on peut dire que *le passage ultérieur à l'état plastique de la partie annulaire fera plus que*

doubler l'effort P_0 d'expansion latérale exercé sur elle par le cylindre central.

IV. On procédera exactement de même, à partir de l'expression (155) de δ (p. 99), où $C = \nu'$, si le bloc est muni d'une ceinture rigide. Et l'on aura immédiatement

$$(e) \quad \delta = \frac{\nu'}{2} \left(\frac{R_1^2}{r} - r \right), \quad -N_r = \mu \nu' \left(\frac{R_1^2}{r^2} + 3 \right), \quad N_\omega = \mu \nu' \left(\frac{R_1^2}{r^2} - 3 \right).$$

L'équation indéfinie (133) de l'équilibre est encore satisfaite; et il ne reste plus qu'à déterminer ν' par la condition $\delta = \nu_0 R_0$ (à la limite $r = R_0$). On trouve

$$(e') \quad \nu' = \frac{2\nu_0 R_0^2}{R_1^2 - R_0^2}, \quad (-N_r) = \frac{2\mu \nu_0 R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} \left(\frac{R_1^2}{r^2} + 3 \right), \quad P_0 = 2\mu \nu_0 \frac{R_1^2 + 3R_0^2}{R_1^2 - R_0^2}.$$

Enfin, au lieu des proportions (d) et (d'), il vient

$$(e'') \quad \frac{P_0}{k} = \frac{2}{3} \frac{4 + \nu'}{\nu'}, \quad \frac{P_0}{K} = \frac{\nu' + 1}{\nu'} \left[\frac{3}{4} \frac{(\nu' + 1)^2 - 2}{(\nu' + 1)^2} + \log(\nu' + 1) \right],$$

formules dont la seconde suppose $\nu' + 1$ au moins égal à 3 et se déduit de (186) (p. 116) en prenant $-\frac{3}{8}$ comme valeur *un peu arrondie* de

$$\log \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -0,37488.$$

À la limite $\nu' + 1 = 3$ ou $\nu' = 2$, ces rapports sont respectivement 2 et 2,5232⁽¹⁾. Mais, à mesure que ν' grandit, les premiers diminuent et les seconds augmentent, *en faisant ainsi croître la grandeur relative de l'effort P_0 d'expansion dû à l'établissement de l'état plastique dans la partie annulaire.*

(1) La dernière décimale 2 est ici obtenue en évitant l'emploi de la valeur arrondie $-\frac{3}{8}$ d'un logarithme népérien.

Lorsque ν' est inférieur à 2, ou R_0 plus grand que $0,5773R_1$, la seconde formule (e'') fait place à une autre déduite de (187 bis) (p. 118) :

$$(e''') \quad \frac{P_0}{K} = 2 + \frac{4}{3} \frac{\nu' + 1}{\nu'} \log \frac{(\nu' + 4)^2}{16\sqrt{\nu' + 1}}.$$

Celle-ci, donnant encore des rapports de P_0 à K croissants avec ν' , ou variables en sens inverse de ceux qu'exprime la première formule (e''), rend le P_0 *élastique* (pour $k = K$) *égal au P_0 plastique* et à $(2,4058)K$, quand $\nu' = 1,5333$ et $R_0 = 0,6283R_1$. Dès lors, *pour les poinçons relativement plus larges* (couvrant près ou plus des $\frac{2}{3}$ du bloc) où R_0 dépasse $0,6283R_1$, le P_0 *élastique devient le plus grand*; et la *résistance à l'écrasement semble devoir être abaissée par le passage à l'état plastique de la partie annulaire* (¹).

V. Arrivons enfin au problème de l'écoulement du bloc, par l'orifice central πR_0^2 ouvert dans le plateau inférieur, sous la pression du piston à base πR_1^2 entouré par la ceinture rigide et y glissant sans frottement de haut en bas. Ici, la pression verticale $-N_z$, censée *élastique* ou encore assez faible pour ébaucher à peine l'écoulement, n'est plus nulle sous la partie annulaire $\pi(R_1^2 - R_0^2)$ du piston : elle l'est seulement *sur* l'orifice, c'est-à-dire sous la partie centrale πR_0^2 , où une contraction horizontale ($-\delta_0$) se produit vers l'axe, par l'effet non plus de la différence $P_z - P_0$, mais de la différence contraire $P_0 - P_z$, ou simplement P_0 (vu que P_z , ou $-N_z$, est zéro sur l'orifice). Et $k = 3\mu\delta_0$ s'y trouve de même remplacé, en valeur absolue, par $-k$ ou $3\mu(-\delta_0)$, δ_0 étant actuellement négatif comme δ' . Il est clair que les formules (a) de k et (e) de δ continuent à s'appliquer malgré ces changements de signe, qui atteignent simultanément ν' , δ_0 et, dans le cylindre central, $P_z - P_0$, k .

La principale différence d'avec le cas précédent du poinçonnage

(¹) Il faudrait toutefois, avant de conclure d'une manière ferme, s'assurer, au point de vue du non-dépassement des limites d'élasticité, que les formules (b') de N_r , N_ω , N_z restent bien applicables.

consistera donc, pour la partie annulaire (comprise entre $r = R_0$ et $r = R_1$), dans ce fait que la relation $N_z = -p + 2\mu\delta'$ y donnera, non plus $p = 2\mu\delta'$, mais

$$p = 2\mu\delta' - N_z.$$

Il en résultera, au lieu des seconde et troisième formules (e),

$$(f) \quad (-N_r) = \mu\delta' \left(\frac{R_1^2}{r^2} + 3 \right) - N_z, \quad N_\omega = \mu\delta' \left(\frac{R_1^2}{r^2} - 3 \right) + N_z;$$

et ces valeurs, portées dans l'équation indéfinie (133) de l'équilibre (toujours subsistante en vertu de l'hypothèse de pressions N_z pareilles sur toutes les couches), n'y satisferont plus identiquement, comme avaient fait $-N_r$, N_ω dans les formules (c), (e) des problèmes de poinçonnage. Car elles la réduiront à ceci

$$(f') \quad r \frac{dN_z}{dr} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dN_z}{dr} = 0, \quad \frac{dP_z}{dr} = 0,$$

qui sera, précisément, l'équation indéfinie en N_z ou en P_z . On voit qu'elle astreint la pression $P_z = -N_z$ des parties annulaires $\pi(R_1^2 - R_0^2)$ du piston et du plateau, à être indépendante de r , c'est-à-dire *uniforme sur toute l'étendue de ces parties annulaires*.

En faisant, dans la première équation (e) et dans la première (f), $r = R_0$, $\delta = \delta_0 R_0$, $-N_r = P_0$, il viendra d'abord, pour relier δ_0 à δ' (qui sera ici donné), la même première relation (e') que dans la question du poinçonnage, mais ensuite, pour rattacher à P_0 la pression uniforme $P_z = -N_z$ de la partie annulaire du piston, la formule

$$(f'') \quad P_z = P_0 - \mu\delta' \frac{R_1^2 + 3R_0^2}{R_0^2} = P_0 - 2\mu\delta_0 \frac{R_1^2 + 3R_0^2}{R_1^2 - R_0^2}.$$

Quant à l'effort P_0 d'expansion latérale, qui, n'étant contre-balancé ici par aucune pression verticale P_z sur le cylindre central, sera plutôt un *effort de contraction vers l'axe*, il se déterminera dans ce cylindre même, où l'annulation de P_z donne simplement $-P_0$ pour la différence $2k$, ou $6\mu\delta_0$, des forces principales P_z , P_0 . On y a donc

$$(g) \quad -P_0 = 6\mu\delta_0 \quad \text{ou} \quad P_0 = 6\mu(-\delta_0).$$

Et la formule (f'') devient

$$(g') \quad (\text{pour } r > R_0) \quad P_z = 2\mu(-\lambda_0) \left(3 + \frac{R_1^2 + 3R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} \right) = 2\mu(-\lambda_0) \frac{4R_1^2}{R_1^2 - R_0^2}.$$

Ce sont maintenant les différences

$$P_z - 2\sqrt{k^2}$$

(où $\sqrt{k^2}$ désigne la valeur absolue de k), et

$$\text{moyenne de } P_z - 2K$$

lorsque le bloc est à l'état plastique, qui jouent le rôle qu'avait l'*effort expansif* P_0 dans la question du poinçonnage. En effet, d'après l'équation (g') et les relations (189), (190) de la page 119, si l'on appelle \mathcal{Q}_0 cette différence

$$P_z - 2\sqrt{k^2} \quad \text{ou} \quad \text{moy. } P_z - 2K,$$

les rapports $\frac{\mathcal{Q}_0}{\sqrt{k^2}}$ et $\frac{\mathcal{Q}_0}{K}$ seront justement exprimés par les seconds membres des formules (e'') ou (e'''), et comporteront les conclusions énoncées vers la fin du n° IV pour $\frac{P_0}{k}$ et $\frac{P_0}{K}$. C'est cette parité qui avait amené le même coefficient numérique dans la formule de poussée du piston produisant l'écoulement du bloc et dans la formule de son poinçonnage.

On aura donc, en particulier,

$$(g'') \quad \frac{P_z - 2\sqrt{k^2}}{\sqrt{k^2}} = \frac{2}{3} \frac{R_1^2 + 3R_0^2}{R_1^2 - R_0^2} = \frac{2}{3} \frac{4 + \nu'}{\nu'};$$

$$(g''') \quad \frac{\text{moy. } P_z - 2K}{K} = \begin{cases} \frac{\nu' + 1}{\nu'} \left[\frac{3}{4} \frac{(\nu' + 1)^2 - 2}{(\nu' + 1)^2} + \log(\nu' + 1) \right] & (\text{si } \nu' > 2), \\ 2 + \frac{4}{3} \frac{\nu' + 1}{\nu'} \log \frac{(\nu' + 4)^2}{16(\nu' + 1)} & (\text{si } \nu' < 2). \end{cases}$$

ERRATUM.

A la page 109, modifier ainsi la phrase qui commence ligne 19 :

« L'existence d'une proportion approchée entre Δ et $1 + \varepsilon$ dans (107), à chaque instant de cette déformation permanente, suffira pour rendre le rapport, etc. »