ARNAUD DENJOY

Mémoire sur la totalisation des nombres dérivées non sommables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 33 (1916), p. 127-222
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1916_3_33__127_0>

MÉMOIRE

SUR LA

TOTALISATION DES NOMBRES DÉRIVÉS NON SOMMABLES;

PAR M. ARNAUD DENJOY.

Le présent exposé doit être regardé comme constituant la troisième et dernière Partie d'un même travail dont l'objet serait assez exactement défini par ce titre d'ensemble : *Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse*. De cet Ouvrage trop étendu pour trouver place dans un recueil unique, les divisions antérieures ont paru, l'une au *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1915), l'autre au *Bulletin de la Société mathématique de France* (2e et 3e fasc., 1915). Dans la première, intitulée : *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues*, j'ai répondu à un certain nombre de questions dont l'éclaircissement préliminaire m'a paru indispensable à la solution des problèmes étudiés ci-après et constituant l'objet essentiel de toutes ces recherches. Les résultats de ce premier travail se déduisent de deux énoncés d'une application constante dans les théories descriptive et métrique de la différentiation [1] et se résument en la proposition suivante. Appelant (pour un même point) *associés* deux dérivés extrêmes relatifs à un même côté, *opposés* deux dérivés extrêmes de côtés et

---

[1] Je désigne ces propositions sous les noms de *Premier* et de *Second Théorèmes des nombres dérivés*.

de rangs différents, on peut affirmer que, *sur une épaisseur pleine* (1) :

Deux dérivés associés sont égaux s'ils sont finis, inégaux si l'un au moins est infini; deux dérivés opposés sont simultanément finis et égaux, ou infinis et inégaux.

Utilisons les notations adoptées dans ce premier Mémoire. Les associations des quatre nombres dérivés extrêmes d'une fonction continue en un même point se répartissent en quatre types seulement, toujours en négligeant les ensembles minces : 1° $\Delta_d = \Delta_g = +\infty$, $\delta_d = \delta_g = -\infty$; 2° $\Delta_d = -\delta_g = +\infty$; $\delta_d = \Delta_g$, l'un et l'autre étant finis; 3° $\Delta_d = \delta_d = \Delta_g = \delta_g$, tous les quatre étant finis (dérivée bilatérale finie); 4° $\Delta_d = \delta_g$, l'un et l'autre finis, $-\delta_d = \Delta_g = +\infty$. Nous désignons ces cas par les notations respectives (AA'), [BD'], [CC'], [DB'].

---

(1) J'appelle *ensemble épais* tout ensemble possédant une mesure positive, *ensemble mince* tout ensemble de mesure nulle, *ensemble épais en un point* M un ensemble épais dans tout intervalle contenant M, *ensemble épais en lui-même* tout ensemble épais dans chaque intervalle contenant un quelconque des points de l'ensemble, *épaisseur* (*moyenne*, pour préciser) d'un ensemble *sur un intervalle* ou *un segment* (*) *ab* le quotient par $b-a$, de la mesure de la portion de l'ensemble, comprise entre a et b. L'*épaisseur* de l'ensemble *en un point* agrégé ou étranger à lui est par définition la limite, si elle est unique, de l'épaisseur de l'ensemble sur un intervalle quelconque contenant ce même point et tendant indifféremment vers zéro en longueur. J'appelle *épaisseur pleine* (ou : pleine épaisseur du continu) un ensemble dont le complémentaire est mince ou encore dont l'épaisseur est un sur tout intervalle, *pleine épaisseur d'un ensemble* E tout ensemble agrégé à E et ayant même mesure que E. L'expression « sur une épaisseur pleine » a donc pour nous le même sens que la locution « presque partout » créée par M. Lebesgue et très généralement usitée, mais qui me paraît présenter certains inconvénients, d'abord de ne justifier son acception que du point de vue métrique (au point de vue descriptif, le rôle des épaisseurs pleines est joué par les résiduels) et en second lieu de faire considérer, à tort en général, comme prépondérantes les propriétés réalisées « presque partout ». Les caractères essentiels d'une fonction peuvent aussi bien (et c'est même là le cas le plus fréquent) se manifester exclusivement sur des ensembles de mesure nulle. C'est ainsi, par exemple, que la fonction continue la plus générale possédant la dérivée zéro « presque partout » admet toute l'indétermination de la fonction la plus générale continue et à nombres dérivés finis (*voir* 1re Partie, p. 204-209).

Beaucoup d'auteurs donnent aujourd'hui au mot *densité* le sens que j'attribue au terme *épaisseur* dans les locutions « épaisseur d'un ensemble dans un intervalle », « épaisseur d'un ensemble en un point ». Avec cette acception du mot *densité*, il est

(*) Je conserve la distinction — dont l'usage m'a montré la commodité — entre l'*intervalle ab* (ensemble $a < x < b$) et le *segment ab* (ensemble $a \leqq x \leqq b$). En principe, les extrémités d'un intervalle ou d'un segment sont toujours supposées énoncées dans l'ordre croissant.

Ou encore, en utilisant la représentation géométrique des fonctions, appelons *angles dérivés* de la courbe $y=f(x)$ en un de ses points M, les deux angles A_d et A_g formés par toutes les positions limites possibles des demi-droites MM'_n joignant M à un point M'_n tendant vers M quand n croît. La parallèle ascendante à Oy menée par M, soit $z'Mz$, laisse l'intérieur de A_d à sa droite, l'intérieur de A_g à sa gauche. Alors, en négligeant sur la courbe un ensemble de projection mince sur Ox, ou bien A_d et A_g valent l'un et l'autre deux droits et sont biadjacents suivant Mz et Mz' (1er cas), ou bien A_d et A_g, non nuls, sont supplémentaires et adjacents suivant Mz ou suivant Mz' (2e et 4e cas), ou bien A_d et A_g sont nuls et portés par une même droite inclinée sur Ox et sur Oy (3e cas, tangente à pente finie) (1).

C'est à ce Mémoire du Journal de M. Jordan que je désirerai adresser le lecteur par la simple mention : « première Partie ».

La seconde Partie de mon travail, intitulée : *Mémoire sur les fonctions dérivées sommables* et parue au *Bulletin de la Société mathématique*, se compose d'abord d'une étude succincte des deux opérations inverses

---

exact de dire : Un ensemble partout dense (celui des nombres rationnels, par exemple) peut avoir une densité nulle dans tout intervalle; un ensemble partout non dense peut avoir la densité un (maximum) en chacun de ses points. L'inconvénient visible de tels énoncés, résultant de cet emploi du mot *densité*, me semble cependant moindre que celui d'établir une communauté apparente et inexistante entre deux ordres d'idées totalement distincts, régnant respectivement dans les théories descriptive et métrique des fonctions (et des ensembles) (1re Partie, n° 16, et *Comptes rendus*, 31 mai, 14 juin 1915). La première a pour objet l'étude des propriétés conservées dans toute transformation continue et croissante de la variable indépendante. (Les travaux de M. Baire se rapportent à cette théorie et y tiennent une place essentielle.) Or une substitution de cette nature peut échanger les épaisseurs pleines et les ensembles minces. Aussi la théorie descriptive ignore-t-elle entièrement la notion de mesure des ensembles. Par contre. la propriété d'un ensemble d'être dense ou non dense sur le continu, ou sur un autre ensemble, est vraisemblablement le caractère fondamental dans la théorie descriptive; aussi ai-je cru utile, pour éviter des confusions possibles, de n'appliquer en aucun cas à une notion métrique l'expression *densité*, et de la remplacer dans les conditions définies plus haut par le terme *épaisseur*.

(1) Le même énoncé peut revêtir une troisième forme (2e Partie. p. 164) sous laquelle il est appliqué ci-après (n° 39 *bis*). Les mêmes cas fondamentaux des nombres dérivés se présentent, comme l'a montré Mme Grace Chisholm Young (*Comptes rendus*, 13 mars 1916) pour une fonction mesurable quelconque, finie sur un ensemble dense. (Consulter également, du même auteur, un Mémoire des *Acta mathematica*, t. 37, contenant certains résultats préliminaires de la première Partie, entre autres le théorème du n° 27.) L'impossibilité

de la dérivation constituées par l'intégration de Riemann et par celle de M. Lebesgue, puis de recherches sur les fonctions dérivées à zéros partout denses. Je donne à la fin de ce même article un moyen de transformer une fonction dérivée à zéros partout denses, en une autre partout nulle en dehors d'un ensemble parfait discontinu, et variante sur toute portion de ce dernier. Cette construction sera utilisée à la fin du présent Mémoire dans la détermination de fonctions dérivées dont la totalisation exige des opérations d'un ordre transfini de plus en plus élevé. La simple référence « Deuxième Partie » désignera ce Mémoire du *Bulletin de la Société mathématique* (1).

Dans le travail que je soumets aujourd'hui à l'indulgence du public mathématique, je résous le problème de déterminer la fonction primitive d'une fonction φ dont on sait qu'elle est une dérivée (2). Il est connu que la fonction dérivée la plus générale n'est intégrable ni par le procédé de Riemann, ni par celui de M. Lebesgue. L'opération permettant de remonter de φ à sa primitive f ne s'applique pas nécessairement à toute fonction finie ψ, mais elle fournit un moyen de savoir si ψ est une dérivée. Pour qu'il en soit ainsi, il faut d'abord que l'opération précédente, que j'ai désignée sous le nom de *totalisation*, puisse être poursuivie sans impossibilité jusqu'au calcul de la *totale* de ψ entre deux points quelconques du champ de définition de ψ. Ceci vérifié, il faut encore (et cette condition

---

d'une dérivée bilatérale infinie existant sur un ensemble épais (d'après l'énoncé du texte, le même résultat est vrai pour une dérivée unilatérale infinie) avait déjà été signalée par M. Lusin, dont les recherches dans le même ordre d'idées sont des plus importantes. On trouvera dans son Ouvrage *Intégrale et séries trigonométriques* (Thèse russe, Moscou, 1915; Linnera et Sobko, éditeurs) une bibliographie très complète de ces questions, auxquelles l'auteur apporte dans ce même travail une contribution essentielle. Enfin, les diverses méthodes d'intégration décrites à ce jour sont l'objet d'une excellente étude dans la thèse de Mme Pia Nalli (Palerme, 1915).

(1) Le renvoi à un numéro, sans aucune mention particulière, désignera un paragraphe du présent article, constituant la troisième Partie de ce Mémoire.

(2) *Comptes rendus*, t. 154, 1912, p 859-862 et 1075-1078.

Les règles opératoires et les conditions de leur application adoptées dans ce Mémoire sont moins restrictives que celles des deux Communications précédentes. Je visais, dans ces Notes, à déterminer un calcul de primitives convenant très strictement aux fonctions dérivées. Celui du Mémoire s'applique à des nombres dérivés beaucoup plus généraux. J'appelle désormais le premier *totalisation complète*.

suffit évidemment) que la totale de ψ entre a et x ait en tout point une dérivée coïncidant avec ψ (¹).

J'établis d'abord un théorème d'application fréquente auquel je donne le nom de « principe de la gradation des fonctions continues sur les ensembles parfaits ». J'étudie ensuite diverses façons d'envisager la « variation » des fonctions continues sur les ensembles parfaits. La principale, du moins dans la théorie différentielle, réside dans l'idée de la « variation simple ». Celle-ci est considérée comme définie pour f sur l'ensemble parfait P, moyennant que les variations absolues de f dans les contigus à P forment une série convergente. J'envisage aussi une « variation totale » de f sur P, une « variation de f autour de P ». La variation de f sur P sera dite *réductible*, si P contient une portion où la variation simple de f est définie. Ces considérations mettent en lumière une classe de fonctions extrêmement importantes pour notre objet, les fonctions « résolubles » (ou plutôt : à variation résoluble), c'est-à-dire dont la variation sur tout ensemble parfait mince est « réductible à zéro ». Il se trouve que cette condition entraîne la conséquence suivante. Appelons *dérivée approximative* d'une fonction en un point, une dérivée (s'il en existe une), spéciale à un ensemble d'épaisseur un en ce point. Alors : 1° toute fonction résoluble a une dérivée approximative (ou générale) sur une épaisseur pleine ; 2° tout ensemble parfait P contient une portion ϖ où la fonction résoluble considérée a une variation définie, où sa dérivée approximative est sommable et où la variation de la fonction sur ϖ est égale à la somme besgienne (sur ϖ) de sa dérivée approximative (²).

L'importance capitale de la classe des fonctions résolubles vient des propriétés suivantes. Sont résolubles : 1° toute fonction admettant en

---

(¹) M. Lusin a montré (*Intégrale et série trigonométriques*, p. 96-139) l'existence, quel que soit ψ, d'une fonction continue admettant ψ pour dérivée sur une épaisseur pleine. Cette fonction continue n'est déterminée qu'à l'addition près d'une fonction ayant une dérivée nulle sur une épaisseur pleine, donc au moins aussi indéterminée que la fonction la plus générale à nombres dérivés finis (*voir* note, page 128).

(²) Au cours de l'impression de cette troisième Partie, a paru aux *Comptes rendus* (21 février 1916) une très intéressante Note due à M. Khintchine et où l'auteur envisage cette même sorte de dérivée qu'il qualifie d'*asymptotique*. Consulter également une Note du 13 mars 1916 (*Comptes rendus*) contenant une analyse succincte du présent travail.

tout point une dérivée finie; 2° toute fonction admettant en tout point au moins un de ses quatre dérivés extrêmes finis; 3° toute fonction admettant en tout point une dérivée approximative finie; 4° toute fonction admettant en tout point un ensemble dérivé fini, pour un côté au moins, sur une épaisseur surpassant $\frac{1}{2}$. Et alors une fonction de chacune de ces catégories est parfaitement déterminée, à une constante additive près, par la connaissance, sur une épaisseur pleine, respectivement : 1° de sa dérivée; 2° de son nombre dérivé extrême fini (de rang et de côté inconnus et variables); 3° de sa dérivée approximative; 4° d'un de ses dérivés médians ou extrêmes d'épaisseur. Et il se trouve que, dans le deuxième et le quatrième cas, le nombre donné est encore sur une épaisseur pleine la dérivée approximative ou générale de la fonction inconnue.

Nous sommes alors conduits à nous poser le problème suivant : *Comment calcule-t-on une fonction résoluble f connaissant sa dérivée approximative ou générale φ sur une épaisseur pleine?* La question ainsi posée détermine entièrement une suite de calculs à effectuer sur φ, ordonnés selon le mode transfini et se terminant, pour toute dérivée φ donnée, au bout d'une infinité dénombrable d'opérations. C'est ce calcul de la variation de f entre deux points que j'appelle *totalisation* de φ entre ces deux mêmes points. Après une application du calcul totalisant aux séries de Fourier, je consacre la fin de mon Mémoire à établir des fonctions dérivées nécessitant, pour l'évaluation de leur primitive, l'emploi d'une suite d'opérations du même calcul jusqu'à tels rangs transfinis librement choisis d'avance.

Aucune des trois Parties de ce Mémoire n'aurait pu être conçue sans les travaux antérieurs de M. Lebesgue sur l'intégration. Les résultats fondamentaux obtenus par cet auteur dans ce domaine doivent être parfaitement familiers au lecteur de mon Ouvrage. Néanmoins, bien convaincu que l'on encourt difficilement en ces matières le reproche de prolixité, j'ai tenu à donner des démonstrations et des explications se suffisant le plus souvent à elles-mêmes. Ceci ne m'empêche pas d'adresser très fréquemment le lecteur aux *Leçons sur l'intégration* de M. Lebesgue, monographie que je désigne, comme dans les deux premières Parties, par les seules lettres *L. I.* (¹). J'ajouterai enfin que, n'ayant point en vue un but didactique, je ne me suis nullement occupé de fournir des démonstrations courtes et saisissantes des divers théorèmes rencontrés. J'ai voulu surtout marquer l'enchaînement des idées et je ne me suis nullement privé de m'attarder à préciser chacune d'elles au moment me paraissant le plus opportun, sans m'inquiéter de ralentir ainsi la course vers le terme d'une démonstration. Les lecteurs qui en auraient le désir, réuniront facilement pour les propositions dont l'intérêt leur paraîtrait justifier ce soin, les éléments dispersés dans ce travail, de démontrations plus promptes.

CHAPITRE I.

LA VARIATION DES FONCTIONS CONTINUES RELATIVEMENT AUX ENSEMBLES PARFAITS.

Principe de la gradation des fonctions continues sur les ensembles parfaits.

1. $\mathrm{VR}(f_1)$, $\mathrm{VR}(f_2)$, ..., $\mathrm{VR}(f_n)$ *désignant les variations relatives* (²) *des fonctions continues* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *sur un même intervalle indéterminé, et* L, M, ... *étant, par rapport aux nombres* $\mathrm{VR}(f_1)$, ..., *des expressions*

(¹) On consultera également avec grand profit le *Cours d'Analyse infinitésimale* de M. de la Vallée Poussin, particulièrement les chapitres de cet Ouvrage consacrés aux variables réelles, et aussi les *Leçons sur les fonctions discontinues* de M. Baire (collection de monographies dirigée par M. Borel). Depuis la rédaction de ce Mémoire, M. de la Vallée Poussin a publié les Leçons d'un grand intérêt, relatives à des sujets connexes à celui de ce Mémoire, et que l'éminent professeur de Louvain avait développées dans son cours en Amérique pendant l'hiver 1914-1915.

(²) J'appelle *variation*, *variation absolue*, *variation relative* de f entre a et b $(a < b)$, ou sur l'intervalle ab, les nombres $f(b)-f(a)$, $|f(b)-f(a)|$, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (1^re Partie, p. 144).

linéaires et homogènes à coefficients constants [soient donc

$$L = \lambda_1 \, \mathrm{VR}(f_1) + \ldots + \lambda_n \, \mathrm{VR}(f_n), \qquad M = \mu_1 \, \mathrm{VR}(f_1) + \ldots],$$

si une ou plusieurs relations de l'un des types

$$L = \text{ou} \geqq \text{ou} \leqq \alpha, \qquad M = \text{ou} \geqq \text{ou} \leqq \beta, \quad \ldots,$$

α, β *étant des constantes, sont vérifiées simultanément par une famille* φ *d'intervalles situés entre* a *et* b *et admettant pour points limites tous les points de* ab, *sans que les mêmes relations soient satisfaites par le couple* (a, b), *il existe alors un ensemble parfait discontinu* P *satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° *Sur chaque intervalle contigu à* P, *toutes les relations énoncées sont satisfaites.*

2° P *présente une propriété de minimum, à savoir qu'il est impossible de déplacer d'une quantité infiniment petite aucun des intervalles contigus à* P, *en accroissant la longueur de cet intervalle et en conservant entre ses extrémités l'exactitude des relations exigées.*

Enfin les mêmes conclusions subsistent *si la famille* φ *est constituée par les intervalles contigus à un ensemble fermé discontinu* E *contenant* a *et* b. *Alors*, P *est de plus agrégé à* E.

Nous disons, selon une définition antérieurement posée, qu'une suite d'intervalles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ tend vers un intervalle φ_0, si les extrémités gauche et droite de φ_n tendent respectivement vers les extrémités gauche et droite de φ_0. Nous disons que la famille φ admet x_0 pour point limite, s'il y a une suite d'intervalles φ dont les deux extrémités tendent simultanément vers x_0. Si tous les points de ab sont points limites des intervalles φ, c'est, en toute équivalence, que chaque intervalle intérieur à ab contient entièrement un intervalle φ et par suite une infinité d'intervalles φ.

Développons les relations auxquelles sont assujetties les variations relatives sur un intervalle xx' [1] de la famille φ. Elles deviennent :

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda_1[f_1(x') - f_1(x)] + \lambda_2[f_2(x') - f_2(x)] + \ldots + \lambda_n[f_n(x') - f_n(x)] \\ \qquad = \text{ou} \geqq \text{ou} \leqq \alpha(x' - x), \\ \mu_1[f_1(x') - f_1(x)] + \ldots = \text{ou} \geqq \text{ou} \leqq \beta(x' - x), \quad \ldots. \end{cases}$$

---

(1) Comme toujours au cours de ce Mémoire, des deux extrémités d'un même intervalle la première énoncée est l'extrémité gauche, la seconde l'extrémité droite.

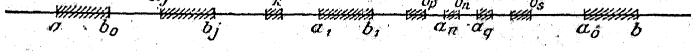
Si l'on posait $\lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_n f_n = F_1, \ldots$, les premiers membres des relations données deviendraient $VR(F_1)$, $VR(F_2)$, ..., les $F_1, F_2, \ldots$ pouvant être indépendants ou liés linéairement. Cette question de forme est d'ailleurs sans importance. Car, nous n'aurons plus recours à l'expression des relations (1) quand nous aurons fait sur elles les deux remarques essentielles suivantes : 1° à cause de la continuité des fonctions $f_1, \ldots, f_n$, et des signes $=$ adjoints aux conditions éventuelles d'inégalité, et rendant accessible toute égalité qui n'est pas obligatoire (nous dirons que les relations d'inégalité sont *fermées*), *si les relations* (1) *sont vérifiées simultanément sur une suite d'intervalles* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$ *tendant vers un intervalle limite non nul* ψ_0, *ces mêmes relations sont vérifiées sur* ψ_0 (il n'est nullement nécessaire de supposer pour cela que les ψ_i soient parmi les intervalles φ donnés) ; 2° les relations (1) étant linéaires et homogènes, aux premiers membres par rapport aux variations des f_i, aux seconds membres par rapport à la variation de x, *si ces relations sont vérifiées sur deux intervalles adjacents* xx', $x'x''$, *elles sont vérifiées sur l'intervalle constitué par la réunion des deux précédents*. Nous conviendrons de dire que les deux points x, x' sont *associés* [sous-entendu : selon les relations (1)]. Notre première remarque nous donne en particulier cette conséquence que l'ensemble des associés d'un même point est fermé (en considérant chaque point comme associé à lui-même). La seconde remarque exprime que si x et x' d'une part, x' et x'' d'autre part, sont associés, il en est ainsi de x et de x''.

Au cas où les intervalles φ sont les contigus d'un ensemble fermé E, nous n'envisagerons de points associés que sur E. Mais nous reprendrons ce cas, une fois le premier traité.

Soit b_0 le point du segment ab le plus éloigné de a et associé à a. Si aucun point intérieur à ab n'est associé à a, b_0 devra être considéré comme coïncidant avec a. Sinon, l'ensemble des associés de a étant fermé, l'un d'eux (sur ab) est à la droite de tous les autres, et c'est b_0. a et b par hypothèse n'étant pas associés, b_0 n'est pas en b. De plus (sur le segment ab) nul point b' à droite de b_0 ne peut être associé à b_0, sans quoi a et b' seraient associés, et b' serait plus éloigné de a que b_0, ce qui est impossible. Sur le segment $b_0 b$, soit a_0 l'associé de b le plus éloigné de lui. Ce point pourra être b lui-même, si b n'a pas d'associé entre b_0 et b. Ce point ne pourra pas, comme nous venons de le voir, coïncider avec b_0. b_0 et a_0 seront les points extrêmes de l'ensemble parfait à construire P. Entre b_0 et a_0 il existe des intervalles φ. Leurs extrémités sont associées. Donc, la distance intérieure des couples de points associés compris simultanément entre b_0 et a_0 possède un maximum positif. Ce maximum est atteint (1re remarque) par l'un au moins de ces couples. S'il est atteint par plusieurs, ceux-ci forment un ensemble fini ou infini, en tout cas fermé, possédant un élément le plus à gauche et un élément le plus à droite. Désignons par exemple le premier par a_1, b_1, et soit u_1 l'intervalle limité par ce couple de points. Si donc x et x', situés entre b_0 et a_0, sont associés l'un à l'autre, on a, ou bien $x' - x < u_1$, ou bien $x' - x = u_1$ avec $x > a_1$. a_1 n'est pas en b_0, sinon b_0 admettrait b_1 pour associé. De même b_1 n'est pas en a_0. Le segment $a_1 b_1$ est donc intérieur à $b_0 a_0$. Toujours pour des raisons analogues, a_1 n'a pas d'associé situé à la fois à sa gauche et à la droite de b_0 (il pourrait en avoir entre a et b_0, mais ces points-ci ne seront plus considérés et peuvent être regardés comme supprimés de ab). De même, ni b_1 ni a_0 n'ont d'associé situé entre eux. Sur $b_0 a_1$ et sur $b_1 a_0$ respectivement, nous répétons l'opération faite sur $b_0 a_0$.

Supposons définis les *segments* $a_1 b_1$ ou u_1, $a_2 b_2$ ou u_2, ..., $a_{n-1} b_{n-1}$ ou u_{n-1}, intérieurs à $b_0 a_0$, deux à deux sans points communs. Les $(n-1)$ *intervalles* u_i séparent, sur $b_0 a_0$, n *segments* ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n, savoir $b_0 a_j$, $b_j a_k$, ..., $b_s a_0$. Nous supposons a_m et b_m associés $(m \leqq n-1)$ et présentant une certaine propriété de maximum de distance. En particulier, a_m n'a pas d'associé sur le segment ρ_r dont il est l'extrémité droite, ni b_m sur le segment ρ_{r+1} dont il est l'extrémité gauche. Sur chaque segment ρ_h $(h \leqq n)$ il existe par hypothèse des intervalles φ intérieurs à lui. Il y a donc des couples associés, agrégés

Fig. 1.



à ρ_h. D'ailleurs tous ces couples sont intérieurs à ρ_h. Car, ni l'une ni l'autre des extrémités de ρ_h n'a, sur le segment ρ_h, d'associé distinct d'elle-même. Tous les couples intérieurs aux divers ρ_h ont donc une distance intérieure maximum non nulle, et atteinte par l'un au moins d'entre eux, d'après notre première remarque. Enfin, d'après cette même remarque, si elle est atteinte par plusieurs couples, l'un de ceux-ci possède une extrémité à gauche de toutes les autres. C'est le seul couple remplissant toutes ces conditions que je désigne par a_n, b_n. Il est complètement intérieur, comme nous venons de l'expliquer, à un certain segment ρ_i ou $b_p a_q$. L'intervalle $a_n b_n$ ou u_n sépare dans ρ_i deux segments $b_p a_n$, $b_n a_q$ et a_n n'a aucun associé sur le premier ni b_n sur le second. Il est même visible qu'aucun des quatre points b_p, a_n, b_n, a_q n'a d'associé sur l'un ni l'autre des deux segments. Pour b_p, a_q, c'est notre hypothèse. Pour a_n, b_n, c'est la conséquence de la propriété de longueur maximum de u_n. L'opération, commencée pour la valeur 1 de n, se continue indéfiniment sans arrêt possible et nous conduit toujours à des intervalles $a_n b_n$ satisfaisant aux conditions posées. Ce serait, notons-le, une erreur de penser que $a_n b_n$ est nécessairement un intervalle φ. Nous faisons simplement appel à l'existence de cette famille φ pour nous assurer de la validité, sur tout segment ρ, d'un maximum positif pour la distance des couples associés intérieurs au segment. Observons de plus que l'intervalle u_n, à chaque suppression nouvelle dans $b_0 a_0$ d'un intervalle $u_m (m < n)$, u_n est à chacun de ces moments compris dans un segment ρ conservé. Donc, d'après la règle présidant au choix des u_n, tous les u_m sont au moins égaux à u_n. Les u_n ne vont jamais en croissant avec leur indice. Leur longueur tend évidemment vers zéro.

Je dis que les intervalles $a_n b_n$ ou u_n sont contigus à un ensemble parfait discontinu. En effet, ils sont deux à deux sans points intérieurs ni extrêmes communs. Donc les points qui ne sont intérieurs à aucun d'eux forment un ensemble parfait P. Je dis que P est discontinu. Sinon, P contiendrait un segment $\alpha\beta$. Ce dernier ferait partie, quel que fût n, de l'un des segments ρ_h conservés après suppression de $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ dans $b_0 a_0$. Mais $\alpha\beta$ contient un certain intervalle φ. Ce dernier, toujours intérieur à ρ_h, serait au moins égalé par u_n, quel que fût n, ce qui est absurde.

La première conclusion de l'énoncé du théorème est l'exactitude des relations (1) entre les extrémités de chaque u_n. En effet, a_n et b_n sont associés par hypothèse. Nous verrons un peu plus bas que, si ces relations sont toutes des inégalités (fermées), l'une au moins de ces dernières fait place sur u_n à l'égalité. La seconde conclusion est qu'aucun des intervalles u_n ne peut être déplacé d'une quantité infiniment petite et en même temps augmenté de longueur, ses extrémités restant associées. En effet, u_n possède la longueur maximum des intervalles agrégés à ρ_i, soit $b_p a_q$, et où les relations (1) sont vérifiées. Si donc δ_n est la plus petite des distances $a_q - b_n$ et $a_n - b_p$, il est impossible, sans déplacer d'au moins δ_n l'une ou l'autre des extrémités de l'intervalle, d'augmenter sa longueur, ses extrémités restant associées. Remarquons cette propriété, un peu moins précise que la précédente : chaque point de première espèce de P est dépourvu d'associés infiniment voisins de lui et situés par rapport à lui du même côté que l'ensemble P. A cause de la propriété de maximum présentée par chacun des u_n, on peut considérer P comme un ensemble minimum. Ceci ne veut pas dire qu'il n'existe pas d'ensemble parfait jouissant de propriétés analogues à P, ni de mesure moindre que lui. C'est d'une sorte de minimum relatif (et descriptif) qu'il s'agit.

1 *bis*. Supposons maintenant que les φ soient les contigus à un ensemble fermé E d'extrémités a et b, et montrons la possibilité, si toutes nos hypothèses sont exactes, de placer P dans E. Nous ne considérons de *points associés* qu'*appartenant simultanément à* E. La première remarque peut se préciser ainsi : si une suite d'intervalles ψ_n, où les relations (1) sont vérifiées, et dont les extrémités font partie de E, tend vers un intervalle limite ψ_0, les extrémités de ψ_0 sont agrégées à E (supposé fermé), et sont associées selon les relations (1). Il en résulte que les associés (sur E) d'un même point M (de E) forment un ensemble fermé (en y comprenant M), donc que les couples de points associés agrégés à un même segment (et à E), ont une distance intérieure maximum atteinte par au moins l'un d'eux, et que, parmi tous les couples possédant un même éloignement mutuel donné, l'un a l'extrémité le plus à gauche, un autre a l'extrémité le plus à droite. La seconde remarque garde aussi sa validité, si on l'applique à deux couples de points associés x, x' et x', x'', agrégés à E. Le couple x, x'' est encore associé et agrégé à E.

Soit donc b_0 le point (de E), distinct de a ou confondu avec lui, associé à a et le plus éloigné possible de a. b_0 est distinct de b, a et b étant non associés. Il est essentiel d'observer que b_0 n'est pas extrémité gauche d'un intervalle i contigu à E; sinon, chacun de ces contigus étant un intervalle φ, l'extrémité droite de i serait à la fois associée à a selon les relations (1) et agrégée à E. Donc, b_0 aurait été obtenu par erreur. Donc, *b_0 est limite de points de* E *situés à sa droite*. Nous définissons a_0 comme étant (sur E), entre b_0 et b, l'associé de b le plus éloigné de b, si b admet au moins un associé, sinon nous prenons $a_0 = b$. Dans tous les cas, *a_0 est limite de points de* E *situés à sa gauche*. De là résulte le fait essentiel qu'il y a une infinité d'intervalles φ intérieurs à b_0a_0. Nous définissons u_1 comme étant l'intervalle le plus long et, en cas d'ambiguïté, le plus à gauche, joignant deux points (de E) associés et compris entre b_0 et a_0. a_1, b_1, extrémités de u_1, sont intérieurs au segment b_0a_0. L'opération se continue comme dans le premier cas. Ayant défini et retranché de b_0a_0 les intervalles a_1b_1 ou u_1, ..., $a_{n-1}b_{n-1}$ ou u_{n-1}, nous avons laissé sur b_0a_0, n segments ρ_1, ..., ρ_n ou b_0a_j, b_ja_k, ..., b_sa_0, limités par des points de E dont aucun n'a d'associé sur le segment ρ qu'il borne. A cause de ceci, chaque segment ρ contient une infinité de points de E admettant les deux extrémités de ρ pour points limites. ρ contient donc une infinité d'intervalles i, donc une infinité de couples associés. a_n, b_n sont le couple associé, intérieur à un même segment ρ, présentant le plus grand éloignement mutuel possible, et en cas d'indétermination, placé le plus à gauche. Si $a_n\,b_n$ est contenu dans ρ_i ou b_pa_q, a_n, n'ayant pas d'associé entre b_p et lui-même, est limite de points de E situés à sa gauche. De même, b_n est limite de points de E situés à sa droite.

Ceci justifie cette observation, dont l'exactitude est vraie *a fortiori* dans le premier cas où il existe des φ à l'intérieur de tout intervalle partiel de ab, que si les relations (1) sont toutes des inégalités fermées, sur u_n l'une au moins de celles-ci fait place à l'égalité. Si ces relations sont par exemple $\mathrm{VR}(F_1) \leqq \alpha_1$, $\mathrm{VR}(F_2) \geqq \alpha_2$, ..., il est impossible que, sur un intervalle maximum u_n, nous ayons les inégalités $\mathrm{VR}(F_1) < \alpha_1$, $\mathrm{VR}(F_2) > \alpha_2$, ..., sans un seul signe d'égalité. Car, à cause de la continuité des F_i, il existerait un segment s_1 d'extrémité droite a_n et un segment s_2 d'extrémité gauche b_n, tels que tout point de s_1 serait associé à tout point de s_2, selon les inégalités précédentes. Donc, même dans le cas restrictif où les associés sont obligatoirement sur E, comme a_n est limite de points de E situés à sa gauche et que b_n l'est pareillement pour le côté droit, il y aurait des points de E dans s_1, d'autres dans s_2, et u_n pourrait être étendu jusqu'à eux de part et d'autre, contrairement à sa propriété de minimum.

Les u_n, qui ne croissent jamais en longueur, sont contigus à un ensemble parfait P, situé sur le segment $b_0 a_0$. Je dis que P est agrégé à E. Car, si un point α étranger à E appartenait à P, d'une part α serait intérieur à un contigu i de E, d'autre part, à chaque suppression d'un u_n, α serait agrégé à un segment ρ_h conservé. Les extrémités de ρ_h appartenant à E, i serait intérieur à ρ_h. Donc, i étant un intervalle φ, u_n surpasserait toujours i, ce qui est absurde. Donc, P est agrégé à E. La propriété de minimum de P se précise comme ci-dessus, avec cette réserve qu'elle est uniquement relative aux déplacements sur E des extrémités des u_n. De même l'absence d'associés à a_n et b_n infiniment voisins d'eux et situés du côté où se trouve P, s'entend pour des associés agrégés à E.

Observons immédiatement que nos hypothèses se montrent incompatibles si nous supposons l'ensemble E dénombrable. De là résultera la première application de ce théorème dont nous rappellerons l'énoncé au cours de ce Mémoire, en le désignant sous le nom de « *principe de la gradation des fonctions continues sur les ensembles parfaits* ».

Applications du principe.

2. Application I. — *Une fonction continue, constante dans chaque intervalle contigu à un ensemble fermé dénombrable* (*ou réductible*) D, *est constante sur tout le segment limité par les points extrêmes de* D.

Ce théorème bien connu a déjà été démontré au début de la première Partie (9). Établissons-le comme application du principe de gradation.

Soit f la fonction. Sur chaque intervalle contigu à D, la variation de f est nulle. Ces intervalles constituent donc pour la relation $\mathrm{VR}(f) = 0$ une famille φ du second type considéré ci-dessus. Si la relation $\mathrm{VR}(f) = 0$ n'est pas exacte entre deux points a et b de D, nous avons montré qu'il existe un ensemble parfait P agrégé à D et jouissant de certaines propriétés. L'existence de P est impossible si D est dénombrable. Donc $f(b) = f(a)$. f prend une valeur unique sur D. f étant supposé continu et constant dans chaque intervalle contigu à D, est constant sur le segment limité par les points extrêmes de D.

Un énoncé plus général que le précédent et s'établissant de la même manière est le suivant :

Si un système d'égalités ou d'inégalités fermées, linéaires par rapport aux variations relatives d'un certain nombre de fonctions, est vérifié sur chaque intervalle contigu à un ensemble fermé dénombrable, il est exact pour tout intervalle ayant ses deux extrémités sur l'ensemble. En particulier :

Deux fonctions qui ont leurs variations (relatives ou simples) *égales sur chacun des intervalles contigus à un ensemble fermé dénombrable, ont leurs variations égales entre deux points quelconques de cet ensemble.*

3. Application II. — Reprenons l'étude de la condition $\mathrm{VR}(f) = 0$, supposée vérifiée pour une famille φ *admettant tous les points de ab pour points limites.* Supposons donc qu'une fonction f, dont les valeurs en a et b sont inégales, soit multioscillante dans tout intervalle, j'entends par là qu'elle ne soit douée d'un sens de variation constant dans aucun. Dans un intervalle quelconque $\alpha\beta$, il y a nécessairement des couples de points où f prend la même valeur, sinon f, étant continue, serait unioscillante (monotone) sur $\alpha\beta$. Il y a donc des intervalles φ infiniment petits au voisinage de tout point de ab. Supposons, pour fixer les idées, $A = f(a)$ inférieur à $B = f(b)$, et construisons, selon la relation $\mathrm{VR}(f) = 0$, l'ensemble P comme il a été expliqué aux pages 135-137. Les couples de points associés sont ceux où la fonction prend la même valeur. b_0 étant le point de ab le plus éloigné de a et où f est égal à $f(a)$, on a $f(b_0) = A$, et $f(x) \neq A$ si $b_0 < x < b$. Mais, f étant continu et $f(b) = B$ surpassant A, il est impossible que $f(x)$ soit inférieur à A en un point x compris entre b_0 et b, sinon, entre x et b, f prendrait la valeur A. Donc $f(x) > A$ dans l'intervalle $b_0 b$. De même, a_0 étant, dans l'intervalle $b_0 b$, le point le plus éloigné de b où $f(x) = B$, entre b_0 et a_0, $f(x)$ est inférieur à B. Donc entre b_0 et a_0, $A = f(b_0) < f < B = f(a_0)$.

On a $f(a_1)=f(b_1)=C_1$. a_1 et b_1 étant intérieurs à b_0a_0, C_1 est compris entre A et B. Le raisonnement fait à l'instant montre que, sur l'intervalle b_0a_1, f est compris entre A et C_1, et que, sur b_1a_0, f est compris entre C_1 et B. Soit C_n la valeur commune prise par f aux extrémités a_n et b_n de u_n. $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ séparent sur ab les segments énoncés dans leur ordre de rencontre $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, ou $b_0a_j, b_ja_k, \ldots, b_sa_0$. Supposons établi, comme cela est fait pour $n=2$, que : 1° f est compris entre A et C_j sur l'intervalle ρ_1, entre C_j et C_k sur l'intervalle ρ_2, ..., entre C_s et B sur l'intervalle ρ_n; 2° la suite A, C_j, C_k, ..., C_s, B des valeurs de f : en b_0, puis aux extrémités des $u_m(m\leqq n-1)$ dans l'ordre géométrique où on les rencontre, et enfin en a_0, est croissante. Je dis que les mêmes règles s'étendent à la valeur suivante de n. En effet, si u_n est dans ρ_i ou b_pa_q, f en a_n et b_n est compris entre C_p et C_q (1^{re} hypothèse). On a donc $C_p < C_n < C_q$ (2^e conclusion). D'ailleurs, entre b_p et a_n, f qui surpasse C_p, ne peut être ni égal ni supérieur à C_n, sinon b_n aurait un associé entre b_p et a_n. Donc entre b_p et a_n, f est compris entre C_p et C_n et de même entre b_n et a_q, f est compris entre C_n et C_q (1^{re} conclusion). La règle posée est donc générale. Nous voyons en particulier que les C_n sont distribués sur l'intervalle AB dans le même ordre mutuel que les u_n entre b_0 et a_0.

P, avons-nous vu, est discontinu, parce que les intervalles φ, où $\mathrm{VR}(f)=0$, admettent tout point de ab pour point limite. Je dis que les C_n sont partout denses sur AB. En effet, la variation de f est C_j-A sur ρ_1, C_k-C_j sur ρ_2, ..., $B-C_s$ sur ρ_n. La plus grande de ces variations tend vers zéro pour n infini, puisqu'il en est ainsi de la longueur des segments ρ conservés à la $n^{\text{ième}}$ opération (à cause de la non-densité de P) et que la continuité d'une fonction est uniforme sur un segment borné. La suite A, C_j, C_k, ..., C_s, B des nombres A, B, C_1, ..., C_{n-1} rangés selon l'ordre de leurs grandeurs croissantes forme donc une chaîne dont le pas tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Les C_n sont donc partout denses entre A et B. A cause de la continuité de f, il suit de là que sur l'ensemble parfait P, f prendra au moins une fois toute valeur C comprise entre A et B. En effet, C est toujours limite de points C_n. En tout point limite des extrémités des u_n correspondants, point limite forcément agrégé à P, on a $f = C$. Soient x et x' ($x < x'$) deux points de P non simultanément extrémités d'un même intervalle contigu à P. Il y a entre eux une infinité de points de P, et par suite une infinité de *segments* u_n auxquels x et x' sont étrangers. Soit m l'indice de l'un d'eux. La suite $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sépare sur $b_0 a_0$, $m+1$ segments ρ_i, et x et x' sont *intérieurs* à deux segments différents ρ_h et ρ_k entre lesquels se trouve l'intervalle u_m. Donc, $f(x) < C_m < f(x')$. Si A était supérieur à B, le sens de toutes les inégalités serait renversé. En résumé :

Si la fonction continue $f(x)$ est multioscillante dans tout intervalle compris entre a et b, et prend en a et b deux valeurs différentes A *et* B, *il existe un ensemble parfait discontinu* P *situé sur ab, et tel que f prend sur cet ensemble en général une seule fois, et exceptionnellement deux fois* (aux extrémités d'un même intervalle contigu à P), *les valeurs comprises entre* A *et* B, *le sens de variation de f sur* P *étant constant.*

4. Notons que nos raisonnements ne subiraient pas de grande modification, si nous supposions simplement la relation $\mathrm{VR}f \leqq 0$ vérifiée sur une famille d'intervalles admettant pour limites tous les points de ab, en supposant toujours $f(b) > f(a)$. Nous n'excluons donc pas le cas où, dans tout un intervalle, f est constamment décroissant pourvu que, globalement, il y ait croissance de f quand on passe de a à b. D'après une observation faite plus haut (p. 139-140), sur chacun des u_n correspondant à la relation $\mathrm{VR}f \leqq 0$, la variation de f est non pas négative, mais nulle. On voit immédiatement que, entre b_0 et b, f ne saurait prendre de valeurs inférieures à A, ni entre b_0 et a_0 de valeurs supérieures à B, et, de proche en proche, que les règles des valeurs prises par f sur $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ sont, pour la relation $\mathrm{VR}f \leqq 0$, les mêmes que pour la relation $\mathrm{VR}f = 0$ dans le dernier paragraphe. Les valeurs de f sur P possèdent donc, dans les deux cas, les mêmes propriétés.

5. En l'absence de toute hypothèse sur le sens de variation de f, examinons ce qu'il reste de l'énoncé précédent. Observons d'abord que notre définition des points b_0, a_0 résulte simplement

de l'inégalité $A \neq B$, que celle des points a_1, b_1 exige seulement l'existence entre b_0 et a_0 d'un intervalle où la variation de f est nulle, que $u_1, \ldots, u_{n-1}$ étant placés, pour que u_n existe, il faut et il suffit qu'il y ait à l'intérieur de l'un au moins des $\rho_1, \ldots, \rho_n$ un intervalle où $\mathrm{V}f = 0$.

Si, pour une valeur finie de n, nous nous trouvons arrêtés dans le choix de u_n, c'est que f varie dans un sens constant sur chacun des segments $\rho_1, \ldots, \rho_n$ et (en supposant $A < B$), comme la variation de f entre les extrémités de chacun des ρ_h est positive, f croît sur chacun des ρ_h. Ceux-ci forment un ensemble parfait P constitué par n segments. f prend bien une fois et une seule sur P toute valeur C comprise entre A et B, sauf les $(n-1)$ valeurs $C_1, \ldots, C_{n-1}$, prises chacune deux fois. Il y a de plus croissance de f sur P, sauf d'une extrémité à l'autre d'un même contigu. L'énoncé est à peine modifié.

Si, quel que soit n, parmi les ρ séparés sur $b_0 a_0$ par $u_1, \ldots, u_{n-1}$, il y en a au moins un où le sens de variation de f n'est pas constant [sur les autres segments ρ, f est croissant, $\mathrm{V}(f, \rho)$ étant positif], alors la règle définissant u_n comme le plus grand ou, parmi les plus grands, le plus à gauche des intervalles agrégés à un même segment ρ et où la variation de f est nulle, cette règle s'applique sans arrêt. Les points jamais exclus forment un ensemble parfait qui ne peut pas contenir un segment $\alpha\beta$ où le sens de variation serait non croissant. Car $\alpha\beta$ enfermerait un intervalle ψ où $\mathrm{VR}f$ serait négatif ou nul. ψ devrait être au plus égal à u_n, quel que fût n, ce qui est absurde. D'ailleurs, la règle suivante étant vraie pour les valeurs prises par f sur les segments ρ à tout moment de l'opération, les valeurs de f sur la partie de P comprise entre u_m et u_r sont comprises entre C_m et C_r. Donc, que x et x' $(x < x')$, agrégés à P sans être les extrémités d'un même contigu, soient ou non séparés par des intervalles u_n, on a dans tous les cas $f(x) < f(x')$. En résumé :

Quelle que soit la fonction continue f, prenant en a et b les valeurs distinctes A *et* B, *il existe sur ab un ensemble parfait* P, *partiellement ou totalement continu ou discontinu, et tel que f prend sur cet ensemble en général une seule fois et exceptionnellement deux fois les valeurs comprises entre* A *et* B, *le sens de variation de f sur* P *étant constant et dirigé de* A *vers* B (1).

---

(1) On déduirait de là que la variation totale de la fonction $G(u)$ entre A et B est

6. APPLICATION III. — *Supposons qu'une fonction f admette une dérivée nulle sur une pleine épaisseur* H *du segment ab et que $f(b)$ diffère de $f(a)$*. Soit ω la variation relative de f entre a et b. Donnons-nous un nombre positif quelconque ε inférieur à $|\omega|$. Selon que ω est positif ou négatif, l'une au moins des relations $\mathrm{VR}f \leqq \varepsilon$ ou $\mathrm{VR}f \geqq -\varepsilon$ n'est pas vérifiée entre a et b. Or, l'ensemble des points où $f' = 0$ est partout dense sur ab. Chaque point x de H est extrémité, gauche ou droite à volonté, d'un intervalle dont tous les points sont associés à x selon l'une et l'autre des relations énoncées. Donc ces dernières sont vérifiées simultanément sur un ensemble d'intervalles φ admettant tout point de ab pour point limite. D'après cela, il existe un ensemble parfait P, sur les intervalles contigus duquel la variation relative de f est dans le premier cas ($\omega > 0$) égale à $+\varepsilon$, dans le second cas ($\omega < 0$) égale à $-\varepsilon$, ces intervalles présentant chacun une propriété de maximum. En particulier, les points de première espèce de P n'ont pas d'associés infiniment voisins du côté de P. Il résulte de là que P n'a aucun de ses points de première espèce sur H.

Je dis que les points de seconde espèce de P n'appartiennent pas non plus à H. Supposons, en effet, qu'un point ξ de H soit agrégé à P. Considérons l'intervalle $\varphi(\varepsilon, \xi)$ de centre ξ en tous les points x duquel on a $|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon |x - \xi|$, et l'ensemble des segments $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ conservés sur $b_0 a_0$ après extraction de $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. ξ, agrégé à P, est dans un segment ρ_h compris entre deux intervalles u_m et u_r. L'extrémité droite de u_m (elle est à gauche de ξ) n'appartient pas au segment $\varphi(\varepsilon, \xi)$, sinon b_m serait associé à ξ (quel que fût le signe de ω), et u_m pourrait, sans atteindre aucun des intervalles d'indices inférieurs à n, être prolongé jusqu'en ξ à droite, ce qui est contraire à la définition de u_m. Donc, les segments u_m et $\varphi(\varepsilon, \xi)$ sont sans points communs. Il en est de même de u_r et $\varphi(\varepsilon, \xi)$. Donc, quel que soit n, le segment $\varphi(\varepsilon, \xi)$ est intérieur à un segment conservé ρ_h, ce qui est absurde, P étant discontinu. Donc, tous les points de P sont étrangers à H. Donc, P a une mesure nulle.

Soit α un nombre compris entre 0 et ω, donc du signe de ω. Formons

---

égale à la variation totale de $G[F(x)]$ sur l'ensemble parfait P, et par suite au plus égale à la variation totale de $G[F(x)]$ sur ab, ce dont la preuve directe est immédiate.

la différence $f_1 = f - \alpha x$ et, pour fixer les idées, supposons ω positif, f_1 a pour dérivée $-\alpha$ sur une pleine épaisseur de ab. Les relations $\mathrm{VR} f \leqq \alpha$ et $\mathrm{VR} f_1 \leqq 0$ sont vérifiées ou non simultanément. En particulier, elles sont par hypothèse inexactes pour le couple (a, b). D'après les résultats de notre seconde application, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Si une fonction f, dont la variation relative entre a et b est un nombre ω différent de zéro, possède une dérivée nulle sur une pleine épaisseur de ab, quel que soit le nombre α compris entre 0 *et* ω, *il existe sur ab un ensemble parfait mince* P *tel que la fonction $f_1 = f - \alpha x$ prend les mêmes valeurs aux extrémités de tout intervalle contigu à* P, *et prend une seule fois toute autre valeur comprise entre $f_1(a)$ et $f_1(b)$, le sens de variation de f_1 sur* P *étant constant* (1).

7. Il n'est point inutile de préciser ici le sens du principe de gradation. Désignons sous le nom d'intervalles ψ, tous ceux dont les extrémités sont deux points associés. Les intervalles φ sont des intervalles ψ particuliers, donnés pour fonder les raisonnements du principe de gradation. Ce serait une erreur de croire que l'ensemble P est constitué dans le premier cas (les intervalles φ admettant tous les points de ab pour limites) uniquement de points étrangers à tous les intervalles ψ, c'est-à-dire intérieurs à nul d'entre eux. Ce serait même une erreur de penser que les points de ab intérieurs à une infinité d'intervalles ψ infiniment petits sont nécessairement exclus de P. L'application IV concerne, en effet, un cas où *tout point de ab* est placé dans les conditions précédentes, c'est-à-dire est intérieur à une infinité d'intervalles ψ infiniment petits. Et cependant, dans ce cas-là, P existe, car l'intervalle ab n'est point lui-même un intervalle ψ. Pour que l'idée critiquée devînt exacte, il suffirait que, si deux intervalles ψ empiètent l'un sur l'autre, l'intervalle formé de leur réunion fût lui-même un intervalle ψ. Il n'en est rien en général, ni même dans l'application III. Mais dans ce dernier cas, il est possible de choisir les φ [nous prendrons pour cet emploi les $\varphi(\xi, \varepsilon)$ de la page 145], de façon

(1) On trouvera dans le *Traité d'Analyse* (t. I) de M. de la Vallée Poussin des considérations présentant des analogies avec celles-ci.

que la réunion de deux intervalles φ soit toujours un intervalle ψ, et l'on peut alors obtenir un ensemble P remplissant les conditions du principe de gradation et inclus dans l'ensemble fermé E des points étrangers à tous les φ.

Soient φ_1 et φ_2 ou $x_1 x'_1$, $x_2 x'_2$, deux intervalles $\varphi(\xi, \varepsilon)$ sur lesquels on a respectivement

$$|f(x)-f(\xi_1)| \leqq \varepsilon |x-\xi_1|, \qquad |f(x)-f(\xi_2)| \leqq \varepsilon |x-\xi_2|.$$

Si x_1 est extérieur à φ_2 et à sa gauche, si x'_2 est extérieur à φ_1 et à sa droite, le milieu ξ_1 de φ_1 est à gauche du milieu de $x_1 x'_2$, qui est à gauche du milieu ξ_2 de φ_2. Donc ξ_1 est à gauche de ξ_2. Si φ_1 et φ_2 se recouvrent partiellement, il y a un point ζ intermédiaire à ξ_1 et ξ_2 et intérieur simultanément à φ_1 et à φ_2. La variation relative de f est alors comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ sur chacun des intervalles $x_1\xi_1$, $\xi_1\zeta$, $\zeta\xi_2$, $\xi_2 x'_2$. Donc x_1, ξ_1, ξ_2, x'_2 forment une chaîne de points associés. On étend immédiatement ceci à une suite d'un nombre quelconque d'intervalles φ dont chacun empiète sur le suivant. On en déduit que les contigus φ' à E ont pour extrémités des couples associés. En appliquant aux φ' la seconde forme du principe de gradation, on aboutit à un ensemble P parfait mince étranger à tous les $\varphi(\xi, \varepsilon)$. Dans l'application IV, rien d'analogue ne subsiste, en l'absence d'une famille apparente d'intervalles φ ne pouvant empiéter l'un sur l'autre sans que leur réunion forme un intervalle ψ.

8. Application IV. — *Soit une fonction f variante et possédant en tout point, pour un côté au moins, un dérivé médian ou extrême nul.* Nous avons construit dans la première Partie (p. 209) une fonction satisfaisant à ces conditions et variant dans tout intervalle. Notons, d'après les résultats de la première Partie (n° 32), que l'ensemble des points où le dérivé (médian ou extrême) zéro existe de chaque côté, est un résiduel, le complémentaire, où ce dérivé n'existe que d'un seul côté, étant par suite gerbé. Mais la mesure de ce dernier peut être non nulle. Il peut même *a priori* constituer une épaisseur pleine.

Selon que zéro est en x_0 un dérivé (médian ou extrême) droit ou gauche de f, il existe, pour toute valeur positive de ε, un intervalle admettant x_0 pour extrémité gauche ou droite, et sur lequel la variation relative de f est comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$. A cause de la continuité de f, les extrémités de cet intervalle peuvent être déplacées légèrement l'une et l'autre, et alors il est évident que tout point x_0 est intérieur à un intervalle de dimension aussi réduite que l'on veut et dans lequel $-\varepsilon < \mathrm{VR}f < +\varepsilon$. D'après un théorème de MM. Borel et Lebesgue, on pourrait choisir une suite dénombrable de ces intervalles, tendant vers zéro en longueur, et telle que tout point fût intérieur à une infinité d'éléments de la suite. Mais ces intervalles, dont on peut faire la famille φ considérée dans l'étude générale, ne nous sont d'aucun secours pour caractériser P, comme nous l'avons dit au paragraphe précédent.

f n'étant pas constante, il existe un couple de points a et b où elle ne prend pas la même valeur. Supposons $f(a) < f(b)$ et soit ω la variation relative de f entre a et b. ε étant un nombre positif quelconque inférieur à ω, il existe sur ab, d'après le principe de gradation, un ensemble parfait discontinu P dont les intervalles contigus donnent à f la variation relative ε et présentent une propriété de maximum. En particulier, les extrémités d'un intervalle contigu à P n'ayant pas d'associés infiniment voisins, et inférieurs pour l'extrémité gauche, supérieurs pour l'extrémité droite, nous sommes certains qu'il y a un dérivé nul, au premier point seulement à droite, au second point seulement à gauche. Cependant rien ne prouve que la construction générale suivie pas à pas ne nous fournirait point un ensemble P épais. Mais par une autre voie, nous aboutirons à un ensemble parfait mince, remplissant les conditions du principe de gradation.

9. Supposons simplement que le dérivé médian ou extrême zéro existe, pour un côté au moins, *sur une épaisseur pleine* et non pas nécessairement en tout point. Soient E l'ensemble des points compris entre a et b où un dérivé médian ou extrême droit est nul, E' l'ensemble des points où un dérivé gauche est nul. E et E', s'ils sont partout denses, sont des résiduels (1re Partie, n° 32), et alors, ils ont en commun un résiduel dont la mesure peut être positive (ce résiduel peut même constituer une épaisseur pleine, comme dans l'exemple de la page 209, 1re Partie). Dans tous les cas, la réunion de E et de E' est

une épaisseur pleine. Nous substituons d'abord à a et à b les points b_0 et a_0, associés respectivement à a et à b selon la relation $\mathrm{VR}f = \varepsilon$ et extrêmes, le premier vers la droite entre a et b, le second vers la gauche entre b_0 et b. b_0 n'appartient pas à E, ni a_0 à E'. L'un au moins des deux ensembles E et E' a sur $b_0 a_0$ une épaisseur moyenne au moins égale à $\frac{1}{2}$. Supposons que ce soit E. L'opération que nous effectuerions à partir de E', si l'épaisseur de E était inférieure à $\frac{1}{2}$, serait la même en échangeant simplement entre eux les côtés droits et gauches des points, et entre elles, les extrémités des intervalles. Prenons dans E un ensemble parfait E_1 ne contenant pas a_0 (ni certainement b_0) et d'épaisseur sur $b_0 a_0$ au moins égale à $\frac{1}{4}$ (1re Partie, n° 18). Soit γ_1 l'extrémité gauche de E_1. En γ_1, un dérivé médian droit étant nul, il existe, à droite de γ_1 et à gauche de a_0, un nombre x_1 tel que

$$f(x_1) - f(\gamma_1) < \varepsilon(x_1 - \gamma_1).$$

Nous désignons par β_1 la borne à droite des points de $b_0 a_0$, tels que x_1. β_1 n'est pas en a_0, qui n'a pas d'associé à sa gauche selon la relation $\mathrm{VR}f \leqq \varepsilon$. β_1 étant intérieur à $b_0 a_0$, on a

$$f(\beta_1) - f(\gamma_1) = \varepsilon(\beta_1 - \gamma_1).$$

β_1 n'appartient pas à E ni *a fortiori* à E_1, sinon f aurait en β_1 un dérivé droit nul, et β_1 ne serait pas la borne à droite des x_1. β_1 est dans un intervalle contigu ou semi-contigu à E_1. Plaçons-nous dans le premier cas. Soit γ_2 l'extrémité droite de cet intervalle. En γ_2 il y a un dérivé droit nul, donc des nombres x_2, compris entre γ_2 et a_0, et tels que

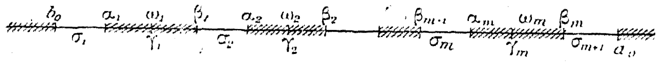
$$f(x_2) - f(\gamma_2) < \varepsilon(x_2 - \gamma_2).$$

Soit β_2 leur borne à droite. On a

$$f(\beta_2) - f(\gamma_2) = \varepsilon(\beta_2 - \gamma_2).$$

β_2 est dans un intervalle contigu à E_1, etc. On continue ainsi. Il est impossible, comme nous l'avons montré dans le Second Théorème (1re Partie, p. 178), qu'il y ait une infinité de points γ_i ni β_i tendant vers un point étranger à E_1, ni vers un point de E_1 situé en deçà de la borne à droite imposée aux associés x_i des points γ_i. Cette dernière borne étant a_0, point étranger à E_1 par hypothèse, l'indice i ne surpasse pas une certaine valeur m pour laquelle β_m est compris entre l'extrémité droite de E_1 et a_0.

Fig. 2.



β_{i-1} ne possède pas, selon la relation $\mathrm{VR}f \leqq \varepsilon$, d'associé à sa droite sur $b_0 a_0$. (Nous considérons β_0 comme confondu avec b_0.) On a donc $\mathrm{VR}f > \varepsilon$ sur l'intervalle $\beta_{i-1}\gamma_i$ agrégé à un intervalle contigu de E avec communauté de l'extrémité droite. Mais rien ne prouve que dans ce même intervalle $\beta_{i-1}\gamma_i$, γ_i n'ait pas d'associé selon la relation $\mathrm{VR}f \leqq \varepsilon$. γ_i, tout en appartenant à E, peut avoir un dérivé gauche nul et par suite des associés infiniment voisins de lui à sa gauche. Mais, même en l'absence d'un dérivé gauche (médian ou extrême) nul, rien n'empêche γ_i d'avoir, entre β_{i-1} et lui-même, un associé à distance finie. S'il n'en existe pas, nous ne modifierons pas γ_i. S'il y en a un seul, soit α_i celui-là, et s'il y en a plus d'un, soit α_i le plus à gauche de tous, bien entendu sur le segment $\beta_{i-1}\gamma_i$. α_i est intérieur à ce segment s'il n'est pas en γ_i, car γ_i et β_{i-1} ne sont pas associés. On a

$$\varepsilon = \mathrm{VR}(\alpha_i, \gamma_i) = \mathrm{VR}(\alpha_i, \beta_i).$$

Nous substituons α_i à γ_i dans tous les cas, pour $i = 1, \ldots, m$.

Nous avons alors des segments $b_0\alpha_1, \beta_1\alpha_2, \ldots, \beta_m a_0$, ou $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{m+1}$, que nous conserverons, et séparés par des intervalles à supprimer $\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \ldots, \alpha_m\beta_m$ ou $\omega_1, \ldots, \omega_m$, auxquels tous les points de E_1 sont intérieurs ou (quand α_i coïncide avec γ_i) extrémités gauches. De plus, sur chacun de ces intervalles $\alpha_i\beta_i$, la relation $\mathrm{VR}f = \varepsilon$ est vérifiée. Sur chacun des segments $\beta_i\alpha_{i+1}, \ldots$ ou $\sigma_{i+1}, \ldots$, il n'y a pas d'associés à β_i (ni à α_{i+1}) suivant la relation $\mathrm{VR}f \leqq \varepsilon$. Posons $f - \varepsilon x = f_1$. Les deux relations $\mathrm{VR}f \leqq \varepsilon$ et $\mathrm{VR}f_1 \leqq 0$ sont équivalentes. Si $f_1(b_0) = A'$, $f_1(a_0) = B'$, on a $A' < B'$. Nous avons $\mathrm{VR}f_1 = 0$ sur ω_i. Sur l'intervalle σ_i ou $\beta_{i-1}\alpha_i$, nous avons $f_1(\beta_{i-1}) < f_1 < f_1(\alpha_i)$. Donc, C'_i étant la valeur de f aux deux extrémités α_i et β_i de ω_i, on a

$$A' < C'_1 < C'_2 \ldots, \quad < C'_{m-1} < B',$$

et, sur σ_i, $C'_{i-1} < f_1 < C'_i$. Enfin, les ω_i renfermant E_1, leur épaisseur totale sur $b_0 a_0$ surpasse $\frac{1}{4}$. Les segments conservés σ_i ont donc sur $b_0 a_0$ une épaisseur totale inférieure à $\frac{3}{4}$.

Sur chacun des segments σ_i, à l'intérieur duquel ses extrémités sont dépourvues d'associés selon la relation $\mathrm{VR} f \leqq \varepsilon$, nous opérerons comme sur $b_0 a_0$, en appliquant au plus épais des ensembles E et E′ la construction précédente, mot pour mot avec E, en changeant avec E′ le mouvement des opérations, les sens où elles progressent et régressent. Après avoir traité tous les σ_i, il restera des segments conservés dont l'épaisseur totale sur $b_0 a_0$ sera inférieure à $\left(\frac{3}{4}\right)^2$. En continuant indéfiniment, on aboutit à un résidu de segments conservés, agrégat parfait de mesure nulle, et pour lequel l'*énoncé de l'application* III *reste exact, quand on y remplace l'hypothèse : « sur une épaisseur pleine, f possède une dérivée nulle », par celle-ci : « sur une épaisseur pleine, f possède un dérivé médian ou extrême nul, » d'un côté variant indifféremment ».*

La variation simple d'une fonction continue sur un ensemble parfait [1].

10. Nous allons adopter pour le présent Chapitre un mode d'exposition synthétique. La clarté, nous semble-t-il, y gagnera. Seulement l'intérêt des développements qui vont suivre n'apparaîtra qu'ultérieurement, avec leur application aux nombres dérivés, application qui, en fait, a guidé le progrès de ces recherches. Une notion essentielle pour la suite de cette étude est celle de « variation d'une fonction continue $f(x)$ sur un ensemble parfait P » intérieur à l'intervalle d'existence de f. Nous définirons ensuite les termes de « variation de f autour de P », de « variation totale de f sur P ». Ce sont deux expressions qu'il faudra soigneusement distinguer de la première. En cas de confusion à craindre, la première sorte de variation sera qualifiée de *simple*.

---

(1) Nous ne considérons la variation simple des fonctions que sur les segments linéaires et sur les ensembles parfaits *totalement* discontinus. A partir de ces deux cas extrêmes, il serait facile de résoudre toutes les questions analogues relatives aux ensembles parfaits partiellement discontinus.

Soient a et b les points extrêmes de P. Donnons un indice entier propre à chaque intervalle u contigu à P. Calculons la variation V_n de f entre les deux extrémités a_n et b_n de u_n. Rappelons les notations

$$V(f, a, b) = (a \,V b) f = f(b) - f(a).$$

(Nous supprimons f près de V, quand il n'y a pas de confusion possible; sauf expresse indication contraire, nous supposons toujours a inférieur à b). Retranchons du segment ab, m intervalles contigus à P quelconques. La somme des variations de f sur les $m+1$ segments ρ restants est égale à $f(b) - f(a)$ diminué de la somme des V_n relatifs aux m contigus extraits. Pour que cette somme tende vers une limite unique, quand m croît, sous la seule condition que la longueur du plus grand contigu non supprimé tende vers zéro, il faut et il suffit que la série V_n soit absolument convergente. D'après ceci, nous dirons que *la fonction f a sur* P *une variation définie ou non définie, selon que la série* V_n *est ou non absolument convergente.* Si la variation de f sur P est définie, nous lui attribuons pour valeur la différence $V(a, b) - \Sigma V_n$.

Nous désignerons ce nombre par l'expression $V(f, \text{P})$ où nous supprimons l'une ou l'autre des lettres f ou P quand il n'y aura pas de confusion possible. La limite de la somme des variations de f sur les ρ est unique et finie [et vaut $V(f, \text{P})$] ou non, selon que $V(f, \text{P})$ est ou non définie. En particulier, si f est croissante (ou décroissante), sa variation sur un ensemble parfait est définie et non négative (non positive).

Considérons un ensemble parfait P quelconque. Si la variation de f sur P est définie, elle l'est sur toute portion ϖ de P, car les intervalles contigus à ϖ sont contigus à P; la série des variations de f dans les contigus à ϖ est donc constituée avec une partie des termes de la série des variations de f dans les contigus à P, et celle-là est absolument convergente si cette dernière l'est.

Nous dirons que la variation de f est *constamment nulle* sur P, si elle est définie et nulle sur toute portion de P.

11. *La condition nécessaire et suffisante pour que f ait une variation constamment nulle sur un ensemble parfait* P, *est que, si m croît, la somme tende vers zéro, des variations absolues de f sur les $m+1$ segments ρ*

demeurant, quand on a extrait, du segment joignant les extrémités de P, *m contigus quelconques, le plus grand contigu non extrait étant infiniment petit.* Moyennant cette dernière précaution, il est évident que, les contigus étant numérotés dans un ordre quelconque indépendant de m, le rang μ du premier contigu non extrait croît avec m.

w_n étant un nombre défini pour chacun des u_n, nous désignons comme antérieurement (1re Partie, 10 *bis*) par $(x\Sigma x')w_n$ (à énoncer : somme entre x et x' de w_n) la somme des nombres w_n affectant les *intervalles u_n entièrement compris* entre les points x et x'. La condition énoncée est évidemment suffisante. Montrons qu'elle est nécessaire. En effet, si $V(f, \varpi)$ existe et est nul sur toute portion ϖ de P, la variation de f entre deux points ξ, ξ' de P est $(\xi\Sigma\xi')V_n$. Elle est moindre en valeur absolue que $(\xi\Sigma\xi')|V_n|$. Donc, si nous supprimons m intervalles contigus à P, sur les segments restants entre les extrémités de P, les variations absolues de f ont une somme inférieure à ce qui reste de la série $|V_n|$ quand on en retranche les μ premiers termes. μ étant infini avec m, cette somme tend bien vers zéro avec $\frac{1}{m}$.

11 *bis*. Je dis que, *si la variation de f sur* P *est constamment nulle, la variation de f sur tout ensemble parfait* Π *agrégé à* P *est définie et nulle*. En effet, soient ξ et ξ' les extrémités de Π, $\gamma_m\delta_m$ ou ω_m un contigu à Π, Φ_m la variation de f sur ω_m et toujours V_n la variation de f sur u_n. γ_m et δ_m étant agrégés à P, et la variation de f sur toute portion de P étant nulle, on a

$$f(\delta_m) - f(\gamma_m) = (\gamma_m \Sigma \delta_m) V_n.$$

Donc, les variations Φ_m de f sur les ω_m contigus à Π sont, ou bien des termes de la série V_n quand ω_m coïncide avec un contigu u_n de P, ou bien des groupements infinis de ces termes quand ω_m contient une portion de P. Comme chaque u_n compris entre ξ et ξ' appartient à un ω_m et à un seul, tous les termes V_n correspondant à ces u_n figurent une fois et une seule dans l'un des termes Φ_m. Donc, la série Φ_m est absolument convergente et a même somme que la série des termes V_n

considérés. f a donc une variation définie sur Π et l'on a

$$(\xi \Sigma \xi') V_n = (\xi \Sigma \xi') \Phi_m.$$

Or, le premier membre de cette relation est $f(\xi') - f(\xi)$. Donc, la variation de f sur Π est nulle.

12. *Si deux ou plusieurs fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_p$ ont une variation définie sur un ensemble parfait*, il en est de même de toute fonction linéaire formée avec elles $\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_p f_p = f$ et la variation $V(f)$ de cette dernière est $\alpha_1 V(f_1) + \ldots + \alpha V_p(f_p)$. Car cette dernière relation est vraie pour tout intervalle, ce qui entraîne la convergence absolue de la série $V(f, u_n)$, et l'expression de $V(f)$. *Si* F *est une fonction composée de $f_1, f_2, \ldots, f_p$, possédant des dérivées partielles du premier ordre continues*, d'après la formule des accroissements finis, $V(F, u)$ est une somme de produits $A_i V(f_i, u)$, les A_j dépendant des f_i et de l'intervalle u, mais étant bornés si P l'est. De là résulte que F *a une variation définie sur* P.

12 *bis*. *Si les f_i ont chacun une variation constamment nulle sur* P, *il en est de même de* F. On appliquera pour le voir, la formule rappelée à l'instant en y remplaçant u par les segments séparés par les n premiers contigus et faisant croître n indéfiniment. Le résultat découlera de la condition montrée plus haut (11) des fonctions à variation constamment nulle sur P. En particulier, fg, $f - g$ remplissent cette condition s'il en est ainsi de f et de g.

13. Soient toujours P l'ensemble parfait, a et b ses extrémités. Les intervalles contigus à P étant rangés dans une suite unique, soit V_n la variation de f sur le $n^{\text{ième}}$, savoir u_n, d'extrémités a_n et b_n. La série V_n est supposée absolument convergente. Posons

$$g(x) = f(a) + (a \Sigma x) V_n + \omega[f(x) - f(a_m)],$$

ω étant nul si x est sur P et égal à un pour $a_m < x < b_m$. La fonction $g(x)$ est continue (Ire Partie, 11). Sur tout intervalle contigu à P, g a la même variation que f. Donc la variation de g sur P est définie. D'ailleurs l'expression de g montre que sa variation entre deux points quelconques de P égale la somme des variations de g sur les contigus à P situés entre ces deux points. Donc, g a une variation nulle sur toute portion de P. Posons $f = g + h$. h est continu et constant sur chaque contigu à P. Une telle fonction a pour variation zéro sur tout contigu et semi-contigu à P. Donc, sa variation sur P entre deux points quelconques x et x' du segment ab est définie et égale à sa variation linéaire entre x et x', soit $h(x') - h(x)$. La variation de f sur P entre deux points quelconques x et x' du segment ab, étant égale à la somme des variations de g et de h, est donc $h(x') - h(x)$. *f est décomposée en la somme de deux fonctions, l'une g ayant sa variation constamment nulle sur* P, *l'autre h constante sur chaque contigu à* P.

Il en résulte que *sur tout ensemble parfait* Π *agrégé à* P, *la variation de f est définie en même temps que celle de h, et, quand l'une et l'autre sont définies, elles sont égales*. Car la variation de g sur Π est définie et nulle (11 *bis*). Nous verrons que la variation de f peut être non définie sur certains ensembles parfaits Π agrégés à P, bien que $V(f, P)$ soit définie.

13 *bis*. On a

$$h(a) = 0, \qquad h(b) = f(b) - f(a) - (a\Sigma b)V_n = \lambda,$$

λ étant la variation de f sur P. Notre hypothèse est que λ n'est pas nul. Appliquons le principe de gradation (application II) à la fonction continue h, constante ($\mathrm{VR}h = 0$) sur chaque contigu à P. Il existe un ensemble parfait Π_1 agrégé à P, tel que : 1° aux extrémités α, β de Π_1, les valeurs de h sont respectivement les mêmes qu'en a et b, ce sont donc 0 et λ; 2° aux extrémités d'un même intervalle contigu à Π_1, h prend la même valeur; 3° h est croissant sur Π_1 si λ est positif, décroissant dans le cas opposé.

La variation de h sur un contigu ω à Π_1 étant nulle, la variation de h sur Π_1 est définie. De plus, toujours d'après $V(h, \omega) = 0$, la variation de h sur Π_1, entre deux points ξ, ξ' de Π_1 est égale à la différence $h(\xi') - h(\xi)$, (sans que h soit en général constant à l'intérieur des contigus de Π_1 quand ceux-ci renferment une portion de P). Donc, entre ξ et ξ' la variation de f sur Π_1 est $h(\xi') - h(\xi)$. Comme ce nombre est non nul et a le signe de λ, *sur toute portion de* Π_1 *la variation de f est* *définie, et douée du signe de la variation de f sur* P. Cette détermination de l'ensemble Π_1 aura une *grande importance pour le cas des ensembles* P *minces*.

14. Il pourrait se faire que la variation de f, sans être définie pour la totalité de P, le fût pour certaines portions de P, de même qu'en choisissant convenablement une infinité d'éléments d'une série divergente à termes tendant vers zéro, on peut former une série absolument convergente. Nous verrons plus loin (n° 36) les conséquences à tirer, pour les dérivés de f, de l'hypothèse que la variation de f n'existe ni sur l'ensemble P globalement, ni sur aucune de ses portions.

Entendons par cette phrase : *la variation de f sur* P *est définie au voisinage d'un de ses points* M, qu'il existe une portion $\varpi(M)$ de P, contenant M entre ses points extrêmes, et où la variation de f est définie. Alors, cette variation sera définie pour toute portion de P agrégée à $\varpi(M)$. Au contraire, nous dirons que la variation de f sur P n'est pas définie au voisinage de M, si la condition précédente n'est pas vérifiée; alors, sur toute portion contenant M, la variation de f est non définie. Il faut et il suffit pour cela qu'il existe une infinité de portions $\varpi_n(M)$ infiniment petites avec $\frac{1}{n}$, contenant M et où f n'a pas de variation définie.

D'autre part, convenons de dire que, un nombre s_n positif ou négatif étant fixé pour chaque intervalle u_n contigu à P, *la série s_n est absolument convergente au voisinage d'un point* M *de* P, s'il existe une portion $\varpi(M)$ de P contenant M entre ses points extrêmes (nous dirons aussi : intérieurement) et telle que la série des s_n relative aux contigus à $\varpi(M)$, lesquels sont parmi les contigus de P, soit absolument convergente.

Il y a évidemment identité entre les points de P au voisinage desquels f possède une variation déterminée sur P et ceux au voisinage desquels la série V_n est absolument convergente.

14 *bis*. Nous dirons que la variation de f sur un ensemble parfait est *réductible* si cet ensemble parfait contient une portion où la variation de f est définie.

Supposons qu'une fonction f ait une variation *réductible sur tout ensemble parfait*. Quel que soit l'ensemble parfait P, je dis que *l'ensemble* H *des points de* P *au voisinage desquels la variation de* f *sur* P *n'est pas définie,* H *est non dense sur* P. Sinon H contiendrait une portion Π_1 de P. Π_1 serait un ensemble parfait dont aucune portion ϖ_1 ne donnerait une variation définie à f (sinon H ne contiendrait aucun point intérieur de ϖ_1). f ne serait pas réductible sur Π_1.

Si p *fonctions* $f_1, \ldots, f_p$ *ont une variation réductible sur tout ensemble parfait, il en est de même de toute fonction* F *composée des précédentes et pourvue de dérivées partielles du premier ordre continues.* En effet, soit P un ensemble parfait quelconque. P contient une portion ϖ_1 où f_1 a une variation définie, dans l'ensemble parfait ϖ_1 il y a une portion ϖ_2 où $V(f_2)$ est définie, etc., dans ϖ_{p-1} il y a une portion ϖ_p où $V(f_p)$ est définie. ϖ_p est une portion de P. Sur ϖ_p, compris dans toutes les portions ϖ_i d'indice inférieur à p, $f_1, \ldots, f_p$ ont chacune une variation définie. D'après un résultat acquis précédemment (n° 12), il en est de même de F. Donc F a une variation réductible sur P.

Si P est un ensemble particulier tel que, *pour chacune des fonctions* f_i, *sur toute portion* ϖ *de* P *il en existe une autre, où* f_i *a une variation constamment nulle*, on montre tout pareillement l'existence sur ϖ d'une portion ϖ' où les p fonctions f_i ont simultanément leurs variations constamment nulles. Nous avons vu (n° 12 *bis*) qu'il en est alors de même de F sur ϖ'. F *satisfait à la même condition que les* f_i.

15. Nous envisagerons également l'existence d'une *variation de* f *autour d'un ensemble parfait* P. Nous dirons que la variation de f *autour* d'un ensemble parfait P est *finie*, si la série des *oscillations* de f sur les intervalles contigus à P est convergente.

Si la variation de f *autour* de P est *finie*, la variation *simple* de f sur P est *définie a fortiori*, mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie. En effet, reprenons l'exemple III du n° 59 (Première Partie), donnant une fonction f : 1° nulle sur un ensemble parfait P épais ou non; 2° positive ou nulle, continue et dérivable hors de P; 3° possédant sur P en tout point, de chaque côté, le dérivé extrême zéro et les dérivés $+\infty$ à gauche, $-\infty$ à droite, le maximum de f sur le contigu u_n étant un certain nombre $\sqrt{\rho_p}$. f a évidemment une variation définie et nulle sur toute portion de P. Or, si la série $\sqrt{\rho_p}$ est convergente en certains points de P, on peut dilater sur chaque u_n les ordonnées de f de manière que la série des maximums de f sur les u_n (maximums égaux à l'oscillation de f sur u_n) soit divergente sur toute portion de P, ces maximums tendant néanmoins vers zéro avec la longueur de u_n, ce qui assure la continuité de f, dont les propriétés différentielles énumérées sont d'ailleurs conservées.

Le lecteur montrera sans peine que, si une fonction possède une variation finie *autour de* P, la variation *simple* de f sur P est égale à la limite, quand n croît, des sommes des variations de f sur n segments quelconques deux à deux distincts et contenant la totalité de P, la distance maximum à P des extrémités de ces segments tendant vers zéro.

Nous allons maintenant étudier les conséquences remarquablement nettes que l'on peut tirer de l'hypothèse que la variation d'une fonction f sur tout ensemble parfait est réductible. Nous observerons en particulier que si la réductibilité de $V(f)$ est supposée seulement pour les ensembles minces, elle est forcément réalisée aussi pour les ensembles épais, et que l'on peut par conséquent se borner à la seconde hypothèse, plus restrictive au premier abord. Il nous sera indispensable d'introduire une nouvelle notion, celle de la variation totale de f sur un ensemble parfait.

La variation totale d'une fonction continue sur un ensemble parfait.

16. Occupons-nous d'abord des ensembles parfaits continus. On sait que la *variation totale* d'une fonction continue *f dans un segment ab* est par définition la borne supérieure stricte de la somme des variations absolues de f sur un nombre fini de segments agrégés à ab et deux à deux juxtaposés, quels que soient leur nombre et leur situation respective. Si cette borne stricte est $+\infty$, la fonction est dite *à variation totale non bornée*. Une des propriétés essentielles d'une fonction à variation bornée est d'égaler la somme de deux fonctions unioscil-

lantes (ou monotones). Nous voulons étudier les rapports des caractères de variation totale non bornée sur ab et de variation définie ou non sur les ensembles parfaits agrégés à ab, pour une même fonction continue f. Nous établirons d'abord la proposition auxiliaire suivante :

Si une fonction f a, sur un segment ab, une variation totale non bornée, il est possible de déterminer des segments intérieurs à ab, deux à deux sans points communs, de manière que la somme des variations absolues de f sur ces segments surpasse un nombre donné d'avance A.

17. En effet, soit v la variation (simple) de f sur le segment ab, c'est-à-dire la différence $f(b)-f(a)$. La variation totale de f n'étant pas bornée, nous pouvons placer un certain nombre de points $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ intermédiaires à a et b, de manière que la somme σ des nombres $|f(a_i)-f(a_{i-1})|$ pour $i=1, \ldots, n$ ($a_0=a$, $a_n=b$) surpasse $2A+|v|$. Dans le cas où $f(a_i)$ est compris entre $f(a_{i-1})$ et $f(a_{i+1})$ inclusivement, la valeur absolue de $V(a_{i-1}, a_{i+1})$ est égale à la somme des valeurs absolues de $V(a_{i-1}, a_i)$ et de $V(a_i, a_{i+1})$. La suppression de a_i ne change donc pas la somme σ. Supposons cette réduction faite dès le début. Alors les différences $V(a_{i-1}, a_i)$ sont alternativement positives et négatives. Celles de rang pair ayant pour somme s_1 et celles de rang impair pour somme s_2, $|s_1-s_2|$ est égal à σ, donc surpasse $2A+|v|$. D'ailleurs $s_1+s_2=v$. Donc, s_1 et s_2 surpassent l'un et l'autre en valeur absolue A. Si le nombre n des segments subdivisionnaires est impair et égal à $2n'+1$, les n' segments de rang pair satisfont aux conditions posées. Ils sont intérieurs à ab et la somme des variations de f sur eux, toutes de même signe, surpasse A en valeur absolue. Si n est pair et égal à $2n'$, nous prendrons pour les segments de l'énoncé les $(n'-1)$ premiers segments pairs et ce qui reste du $(n')^{\text{ième}}$ et dernier segment pair $a_{n-1}b$, quand on en retranche, avec le point b, un intervalle d'extrémité droite b, aussi petit que l'on voudra, et en tout cas suffisamment restreint pour que la somme des variations de f sur les segments pairs restants surpasse toujours A en valeur absolue.

S'il existe sur ab un ensemble parfait P où la variation de f n'est pas définie, c'est que, les contigus de P étant désignés dans un certain ordre, la somme des variations absolues de f sur les n premiers contigus croît indéfiniment avec n. La variation totale de f

sur ab n'est évidemment pas bornée. Je dis qu'inversement, *si la variation totale de f sur ab n'est pas bornée, il est possible de construire un ensemble parfait sur lequel la variation de f est non définie.*

En effet, convenons de dire que la variation totale de f *est non bornée en x_0 d'un certain côté*, gauche ou droit, si elle est non bornée dans tout intervalle ayant x_0 pour extrémité du côté opposé au premier, donc droit ou gauche, selon les cas. Si la variation totale de f est non bornée en x_0, c'est-à-dire dans tout intervalle contenant x_0, elle est non bornée de l'un au moins des côtés de x_0. Si la variation totale de f est non bornée sur ab, elle l'est en au moins un point x_0 de ab et d'un côté au moins de ce point.

Soit x_1 un point de ab situé de ce même côté de x_0, par exemple à sa gauche. Sur l'intervalle $x_1 x_0$ où la variation de f n'est pas bornée, nous déterminons un certain nombre de segments $x_1 x_2, \ldots, x_{2n+1} x_0$, séparés par des intervalles $x_2 x_3, \ldots, x_{2n} x_{2n+1}$, sur lesquels les variations absolues de f ont une somme supérieure à 1. Sur le segment $x_{2n+1} x_0$, où la variation totale de f est non bornée, je construis des segments $x_{2n+1} x_{2n+2}, \ldots, x_{2p+1} x_0$ disposés selon la même règle et séparés par des intervalles où la somme des variations absolues de f surpasse 1. Je continue ainsi indéfiniment. J'obtiens entre x_1 et x_0 une suite d'intervalles $x_2 x_3, \ldots, x_{2k} x_{2k+1}, \ldots$, tendant vers x_0 et sur lesquels f possède des variations absolues formant une série divergente. Si je construis sur chacun des segments $x_1 x_2, \ldots, x_{2k-1} x_{2k}, \ldots$, un ensemble parfait admettant mêmes points extrêmes que le segment base, la réunion de tous ces ensembles, augmentée de x_0, constitue un ensemble parfait P auquel tous les intervalles $x_{2k} x_{2k+1}$ seront contigus. f n'a donc pas de variation définie sur P.

Donc, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit à variation totale bornée sur ab est qu'elle soit à variation définie sur tout ensemble parfait agrégé à ab.*

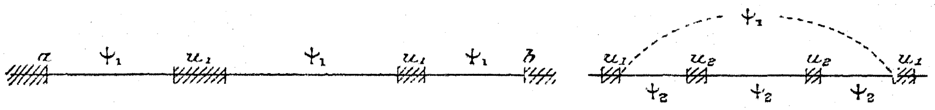
18. Voici un énoncé un peu moins immédiat que le précédent :

Si, au voisinage de tout point de ab, la variation totale de f est non bornée, il est possible de déterminer un ensemble parfait mince Q, où la variation de f est non réductible.

Il est équivalent de dire que la variation totale de f est non bornée en tout point de ab, ou dans tout intervalle partiel de ab.

Sur ab, constituons à notre gré un certain nombre de segments ψ_1 deux à deux distincts, a étant agrégé à l'un d'eux et b à un autre. Le complémentaire des ψ_1 est formé d'intervalles u_1. Sur chacun de ces segments ψ_1, nous déterminons des segments intérieurs à ψ_1, deux à deux sans points communs et tels que, pour chacun des ψ_1, la somme des variations absolues de f sur ces segments surpasse 1, ce dont nous avons montré la possibilité, la variation totale de f étant infinie sur chaque ψ_1. Les points intérieurs à ces derniers segments forment des intervalles u_2 (*fig.* 3). Les u_2 retranchés des ψ_1 nous laissent des segments conservés ψ_2 sur lesquels nous répétons la double opération faite : 1° Réduction de chaque ψ_2 à plusieurs segments ψ_3 choisis sur ψ_2 à volonté, chaque extrémité de ψ_2 appartenant toutefois à un segment ψ_3. Cette opération est destinée à nous permettre de restreindre à notre gré la longueur totale de l'ensemble final; elle extrait des ψ_2 des intervalles u_3 d'extrémités intérieures aux ψ_2. 2° Sur chaque ψ_3, extraction d'intervalles u_4, les segments u_4 étant intérieurs à ψ_3, deux à deux sans points communs, et la somme des variations absolues de f sur les u_4 dépassant 1 pour chacun des ψ_3. On continue ainsi indéfiniment. L'ensemble Q commun aux ψ_i est parfait. On peut le rendre discontinu en dispersant convenablement, dans les opérations de rang impair, les intervalles u_{2n+1} extraits à volonté de chacun des ψ_{2n}. De même, en donnant, sur chaque ψ_{2n}, aux u_{2n+1} une longueur totale supérieure à une fraction fixe du même ψ_{2n}, on rendra nulle la mesure de Q.

Fig. 3.



Sur toute portion de Q, la variation simple de f est non définie. Car cette portion, soit ϖ, étant limitée à ses deux points extrêmes r, r', il existe dans rr' un segment ψ_{2n-1} conservé à une certaine opération de rang impair. A l'opération suivante, on retranche de ce segment ψ_{2n-1} un certain nombre k d'intervalles u_{2n}, tous contigus à Q et sur lesquels les variations absolues de f ont une somme supérieure à un. Des segments ψ_{2n} en nombre $k+1$ séparent les intervalles précédents. Et dans chacun de ces ψ_{2n} on supprime indifféremment des intervalles u_{2n+1}. Restent alors sur ψ_{2n-1} des segments ψ_{2n+1} en nombre au moins égal à $2(k+1)$. A l'opération suivante, de ces segments ψ_{2n+1} on retranche des intervalles u_{2n+2} sur lesquels, pour chacun des ψ_{2n+1}, les variations absolues de f ont une somme supérieure à un. Ces intervalles u_{2n+2} étant chacun contigu à Q, les variations absolues de f sur les intervalles contigus à la portion ϖ ont déjà une somme au moins égale à $1+2(k+1)$.

En continuant indéfiniment, aux opérations de rang pair on accroît cette somme chaque fois d'au moins un nombre entier. Elle ne peut donc pas être bornée pour l'ensemble des intervalles contigus à ϖ.

19. Donc, *si une fonction possède une variation réductible sur tout ensemble parfait, l'ensemble* H *des points de ab, au voisinage desquels la variation totale de f est non bornée, est non dense sur ab.* Car cet ensemble H est fermé et ne peut contenir aucun segment continu, sinon (18) sur celui-ci existerait un ensemble parfait Q où la variation de f serait non réductible. Mais, Q pouvant être construit sans épaisseur, *même avec la simple hypothèse que la variation de f est réductible sur tout ensemble parfait* MINCE, la conclusion de l'énoncé précédent garde sa validité : *f est à variation non bornée uniquement au voisinage d'un ensemble* H *non dense.* On prévoit l'intérêt du théorème précédent si l'on observe que, sur tout segment sans points communs avec H, f possède sur une épaisseur pleine une dérivée sommable (*L. I.*, p. 123, et 2e Partie, n° 22). Nous verrons un peu plus loin (29) que la somme besgienne de cette dérivée sur un segment sans point commun avec H, est la variation de f entre les extrémités du segment, moyennant une hypothèse supplémentaire concernant le mode de réductibilité des variations de f sur les ensembles parfaits minces.

20. Envisageons pareillement une *variation totale sur un ensemble parfait discontinu* P de points extrêmes a et b. *La variation totale de f sur* P *sera considérée comme définie ou non, en même temps que la variation simple de f sur* P. Supposons que la variation simple de f sur P soit

définie. Nous appellerons *variation totale de f sur* P la borne supérieure stricte de la somme des valeurs absolues des variations de f sur les *n portions* de P nulles ou existantes, déterminées par $n-1$ points intermédiaires à a et b, quels que soient n et les positions de ces points. Si cette borne est infinie, nous dirons que f a une variation totale définie *non bornée* sur P ([1]).

Chaque contigu à P ayant reçu un indice entier propre, et V_n étant la variation de f sur le $n^{\text{ième}}$, par hypothèse (existence des variations

---

([1]) M. Lusin (*Comptes rendus*, 23 décembre 1912, et Thèse, p. 62) fixe à la variation totale de f sur l'ensemble parfait (discontinu) P une condition d'existence plus restrictive que celle du texte, et faisant intervenir les valeurs de f hors de P. Le nombre considéré par M. Lusin — appelons-le $(VT)_L$ — est par définition la limite unique de la somme des oscillations de f sur des segments variables s en nombre fini, dont l'ensemble contient P, et dont la longueur totale tend vers la mesure de P. Soit VT la variation totale définie dans le texte. Il est aisé de voir que $(VT)_L$ ne peut être finie si la variation de f *autour* de P (n° 15), soit $V_\alpha(f, P)$, ne l'est pas elle-même.

En effet, si V_α est infini, u_n étant un contigu à P, et ω_n l'oscillation de f sur u_n, on peut trouver p dépendant de n, tel que $\sum_{n+1}^{p} \omega_n > n$. Alors, le système s constitué par les segments $u_{n+1}, \ldots, u_p$ et par les $(p+1)$ segments ρ séparés par $u_1, u_2, \ldots, u_p$, donne une somme d'oscillations supérieure à n. Or, quand n croît, la longueur totale des s tend vers la mesure de P puisqu'elle l'excède seulement de $\sum_{p+1}^{\infty} u_n$. Donc $(VT)_L$ n'est pas fini.

Au contraire, VT a un sens et peut être fini dès que la variation *simple* $V(f, P)$ de f *sur* P est définie, ce qui a toujours lieu si V_α est fini, sans réciproque. Mais, si V_α est finie, $(VT)_L$ et VT sont bornés ou non en même temps, et dans le premier cas ils coïncident.

Convenons de dire que f a une *variation réductible* AUTOUR *d'un ensemble parfait* P, si ce dernier contient une portion *autour* de laquelle la variation de f est finie. Cette hypothèse entraîne la réductibilité de la variation *simple* $V(f, P)$ (n° 14 *bis*). On voit comme aux n^{os} 22 et 23, que si la variation de f *autour* de P est non réductible, il sera possible de déterminer dans P un ensemble parfait *mince* où f présentera le même caractère. Convenons de dire que f satisfait à la condition (β) si *sa variation* AUTOUR *de tout ensemble parfait* MINCE Π *est réductible*. Alors, d'après le raisonnement fait à l'instant, quel que soit P, P contient une portion ϖ où V_α est finie. D'ailleurs, $V_\alpha(f, \Pi)$ étant réductible quel que soit Π, il en est de même de $V(f, \Pi)$. Donc (n° 23), ϖ contient une portion où VT est borné. Sur cette portion, VT et V_α étant finies, $(VT)_L$ est fini. M. Lusin dit que f possède une *variation totale généralisée bornée sur* P, si P contient une portion où $(VT)_L$ est fini. Il montre que cette propriété, si elle est vérifiée pour tout ensemble parfait P, entraîne l'existence pour f d'une dérivée générale sur une épaisseur pleine. On voit donc que cette dernière conséquence est vraie de toute fonction remplissant la condition (β), équivalente à celle de M. Lusin et moins restrictive au premier abord.

simple et totale définies) la série V_n est absolument convergente. Posons, selon les notations du n° 13,

$$g(x) = g(a) + (a\Sigma x)V_n + \omega[f(x) - f(a_m)] \qquad \text{et} \qquad h(x) = f - g.$$

$h(x)$, fonction constante dans tout contigu à P, est la variation de f sur la portion de P comprise entre a et x. Donc, la variation de f sur une portion de P déterminée par deux points α_i, α_{i+1} intermédiaires à a et b, est égale à la variation de h entre ces deux points. Donc, *la variation totale de h entre a et b coïncide avec la variation totale de f sur* P, que celle-ci soit ou non bornée (¹).

21. *La condition nécessaire et suffisante, pour que la variation totale de f sur* P *soit définie et bornée, est que, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ étant des points quelconques de* P *en nombre arbitraire, la somme σ des variations absolues de f sur les segments $\alpha_0\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\alpha_n$, soit bornée* ($\alpha_0 = a$, $\alpha_n = b$). On a

$$\sigma = |f(\alpha_1) - f(\alpha_0)| + \ldots + |f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i)| + \ldots + |f(\alpha_n) - f(\alpha_{n-1})|.$$

1° La condition est nécessaire : Si f a sur P une variation totale a) définie, b) bornée, σ est bornée.

Car la série V_n étant absolument convergente (a), nous pouvons définir les fonctions g et h exprimées ci-dessus. D'après l'hypothèse b), $h(x)$ a sa variation totale bornée. Les α_i étant sur P, nous avons

$$g(\alpha_{i+1}) - g(\alpha_i) = (\alpha_i \Sigma \alpha_{i+1})V_n.$$

Donc

$$|f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i)| < |h(\alpha_{i+1}) - h(\alpha_i)| + (\alpha_i \Sigma \alpha_{i+1})|V_n|.$$

(¹) Une fonction peut avoir une variation définie sur P et une variation totale non bornée sur toute portion de P. Soit en effet $T(u)$ une fonction à variation totale non bornée dans tout intervalle du segment 0 — 1 (*L. I.*, p. 57), par exemple une fonction sans dérivée en aucun point. Soit $\theta(x)$ une fonction continue constante dans les contigus à P, croissant sur P de 0 en a à 1 en b. $f = T[\theta(x)]$ coïncide avec sa propre fonction $h(x)$. La variation totale de f est infinie sur toute portion de P et cependant définie sur P. Observons de plus que, quel que soit l'intervalle i formé de points u, $T(u)$ étant multioscillante dans i réalise, sans être constante, la relation $V(T) = 0$ entre des points de i. Donc, *toute portion de* P *en contient une autre où la variation* (simple) *de f est définie et nulle, sans que la variation de f soit constamment nulle* (10) *sur* P. Ces deux propriétés seraient incompatibles si la première appartenait également à tout ensemble parfait inclus dans P (27).

Soient s la somme de la série $|V_n|$ et S′ la variation totale de h. On a évidemment $\sigma < S' + s$. σ est bornée.

2° La condition est suffisante : Si σ est bornée, f a une variation totale a) définie, b) bornée.

a. Prenons pour les α_i les extrémités des n premiers intervalles contigus. Nous avons entre a et b, $2n$ points de subdivision, auxquels correspond une somme σ supérieure à $\sum_1^n |V_n|$. Si donc σ est bornée, la série $|V_n|$ est convergente. Les variations simple et totale de f sont définies.

b. Nous pouvons donc exprimer comme plus haut les fonctions g et h relatives à f. Nous voulons prouver que la variation totale de h est bornée. Intercalons entre a et b un nombre quelconque de points β_j. La variation totale de h entre a et b est la borne supérieure des sommes

$$\sigma' = \Sigma \,|\, h(\beta_{j+1}) - h(\beta_j) \,| \qquad (\beta_0 = a,\ \beta_m = b).$$

En insérant entre les β_j de nouveaux points, à la somme σ' nous en substituons une nouvelle qui ne lui est pas inférieure. Ajoutons donc à la suite β_j toutes les extrémités d'intervalles contigus à P contenant des points β_j. Dans la nouvelle suite, soit β'_k un point étranger à P. β'_k est l'un des anciens β_j. Les extrémités du contigu contenant β'_k sont agrégées à la nouvelle suite. Soient β'_p, β'_q ces points. On a $p < k < q$. Mais, h étant constant sur le segment $\beta'_p\beta'_q$, les différences $h(\beta'_k) - h(\beta'_{k-1})$ et $h(\beta'_{k+1}) - h(\beta'_k)$ sont nulles. Nous pouvons donc, sans changer la somme σ' relative à la suite β', supprimer dans celle-ci tout point β'_k étranger à P. Cela fait, il nous reste une suite α_i agrégée à P et donnant une somme

$$\sigma' = \Sigma \,|\, h(\alpha_{i+1}) - h(\alpha_i) \,|$$

au moins (et d'ailleurs exactement) égale à la somme analogue relative aux β_j. Donc, la variation totale de h entre a et b est la borne supérieure des σ'. Or, d'après $h = f - g$, $\sigma' < \sigma + s$, s étant la somme de la série $|V_n|$. σ étant bornée, σ' l'est aussi. Donc, h a une variation totale bornée et il en est de même de f sur P.

Notre énoncé est donc établi.

22. Montrons maintenant que *si la variation totale de f sur* P *est définie, mais sur toute portion de* P, *non bornée, il est possible de déterminer dans* P *un ensemble parfait mince* Q *où la variation simple de f est non réductible*.

P est un ensemble parfait indifféremment épais ou mince.

La démonstration présente de grandes analogies avec celle du cas où l'ensemble parfait P est le continu. Soit toujours $g(x)$ la série [accrue de $f(a)$] des variations de f sur les contigus et semi-contigu à P compris entre a et x (si x est sur P, il n'y a pas de semi-contigu, si x est hors de P, sur l'intervalle u_m ou $a_m b_m$, nous avons le semi-contigu $a_m x$). Nous posons $f = g + h$. Sur tout ensemble parfait Q agrégé à P : 1° $g(x)$ a une variation définie et nulle (11 *bis*); 2° la variation simple de f est définie ou non en même temps que la variation simple de h (et si elles sont définies, elles sont égales) (n° 13).

Soient v la valeur absolue de $h(b) - h(a)$, et A un nombre positif quelconque. h ayant une variation totale non bornée, nous pouvons intercaler (n° 16) des points entre a et b, de manière que la somme des variations absolues de h sur les intervalles successifs limités par ces points surpasse $2A + v$. Nous avons vu (21) qu'il est possible, sans changer ces variations, de modifier la position de ces points de manière qu'ils soient tous sur P. Comme dans le cas du continu, nous supprimons l'un de ces points α_i si $h(\alpha_i)$ est compris entre $h(\alpha_{i-1})$ et $h(\alpha_{i+1})$ inclusivement, et ce faisant, nous ne diminuons pas la somme σ' correspondant à la subdivision α. En particulier, la subdivision α n'aura jamais deux points consécutifs aux extrémités d'un même contigu, et la différence $h(\alpha_{i+1}) - h(\alpha_i)$ sera alternativement positive et négative. Enfin, quitte à mettre en défaut cette alternance pour les deux derniers termes, si le nombre des points intermédiaires, $n - 1$, est impair, donc si le nombre des intervalles séparés par eux est pair, nous créons un intervalle $\alpha_n b$, prélevé sur $\alpha_{n-1} b$, de manière que les sommes des variations absolues sur les segments pairs et aussi sur les segments impairs (le premier de ceux-ci contenant $a = \alpha_0$, et le dernier $b = \alpha_{n+1}$) surpassent A, toutes ces variations absolues de h étant de plus positives, comme dans le cas où $n - 1$ est pair (de sorte que chaque segment $\alpha_i \alpha_{i+1}$ contient toujours une portion de P). Le choix de α_n est toujours possible, parce que b, point extrême de P, est limite de points de P situés à sa gauche.

Or, si α_i est une extrémité d'un contigu à P, nous pouvons, sans changer σ', placer α_i en l'autre extrémité du même contigu, point distinct de α_{i-1} et de α_{i+1}. Nous pouvons donc supposer que jamais α_{2p} n'est l'extrémité gauche, ni α_{2p+1} n'est l'extrémité droite d'un contigu à P. Alors le segment $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$ est limité aux extrémités de la portion de P qu'il contient. Nous conserverons les segments impairs $\alpha_{2p}\alpha_{2p+1}$, et nous pourrons répéter notre construction sur l'un quelconque d'entre eux, parce que les deux extrémités d'un tel segment sont limites de points de P intérieurs à lui.

Nous avons donc abouti au résultat suivant. Nous avons placé sur ab un certain nombre de segments linéaires χ deux à deux sans points communs, le premier commençant à a, le dernier finissant à b; chacun de ces segments linéaires χ contient une portion de P de mêmes extrémités que lui, et enfin les variations absolues de h sur les intervalles séparant ces segments ont une somme supérieure à A, nombre positif quelconque donné d'avance. On déduit de là comme dans le cas du continu, cette première conséquence :

Si la variation totale de f sur P *est définie, mais non bornée, il est possible de déterminer sur* P *un ensemble parfait, où la variation de f est non définie.* En sorte que *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction ait sa variation définie sur tous les ensembles parfaits agrégés à un ensemble parfait donné* P, *est que la variation totale de f sur* P *soit définie et bornée.*

Et en opérant sur les segments χ comme nous l'avons fait avec les ψ quand l'ensemble P était continu, on construit dans P un ensemble parfait mince Q, où la variation de f est non réductible, ce qui établit le théorème à démontrer.

Fonctions à variation réductible sur tout ensemble parfait. Fonctions à variation résoluble.

23. Observons enfin que si la variation de f est non réductible sur P, supposé épais, les segments linéaires χ, décrits quelques lignes plus haut, peuvent encore être construits, quel que soit le nombre A préalablement donné, car leur détermination est simplement fondée sur la croissance illimitée, dans toute portion de P, des sommes de termes analogues à $|f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i)|$. Cette divergence

ayant lieu aussi bien (n° 21) quand la variation de f est non définie sur toute portion de P, que lorsqu'elle y est définie avec une variation totale de f non bornée, on peut alors, en opérant sur les segments χ comme précédemment sur les segments ψ, aboutir à un ensemble parfait mince Q agrégé à P, et où la variation de f est non réductible. De là cette conséquence fondamentale :

Si la variation de f est réductible sur tout ensemble parfait MINCE, *l'ensemble* K *des points d'un ensemble parfait quelconque* P *au voisinage desquels la variation totale de f sur* P *est soit non définie, soit définie et non bornée*, K *est non dense sur* P.

24. Soit ϖ un segment de P sans points communs avec K. Sur ϖ la variation totale de f est définie et bornée. α et β étant les extrémités de ϖ, et x un point du segment $\alpha\beta$, soit $h(x)$ la variation de f sur ϖ entre α et x, et $\gamma(x)$ l'excès de f sur h. h est à variation bornée. Donc, d'après un théorème connu de M. Lebesgue (*voir* aussi 2ᵉ Partie, n° 22), sur une pleine épaisseur de $\alpha\beta$ et, en particulier, de ϖ, h a une dérivée finie et sommable ψ. En second lieu, $\gamma(x)$ étant, pour x agrégé à ϖ, la somme des variations de f dans les contigus à ϖ entre α et x, et ces variations formant pour la totalité de ϖ une série absolument convergente, d'après un théorème établi au début de la première Partie (n° 23), les points ξ de ϖ tels que la variation relative de γ entre ξ et ξ' tend vers zéro, ξ' tendant indifféremment vers ξ sans quitter ϖ, ces points ξ forment une pleine épaisseur de ϖ (1). Mais alors, pour des points ξ

(1) *La série* V_n *étant supposée absolument convergente*, si $y_n(x)$, définie sur u_n ou $a_n b_n$ contigu à P, vaut 0 en a_n et V_n en b_n, soit $y = f(a) + (a \Sigma x) V_n + \omega y_m(x)$, ω étant 0 ou 1 selon que x appartient à P ou est intérieur à u_m. On montre (1ʳᵉ Partie, n° 23), sans aucune aide d'intégration, que si la série des *oscillations* des y_n est convergente, $y(x)$ *possède sur une pleine épaisseur de* P *une dérivée nulle*. Si y_n était linéaire sur u_n, son oscillation se confondant avec $|V_n|$, la conclusion précédente serait donc valable. Mais la dérivée de y *spéciale à* P étant indépendante des valeurs de y_n à l'intérieur de u_n, cette dérivée particulière donne toujours lieu à ce même énoncé.

Si f admet une variation finie *autour* de P (n° 15), c'est-à-dire si les oscillations de f (coïncidant avec celles de γ) sur les u_n forment une série convergente, $\gamma(x)$ qui est de la forme donnée à y, avec $y_m(x) = f(x) - f(a_m)$, $a = \alpha$, possède une dérivée *générale* nulle sur une pleine épaisseur de P. Donc, f et h ont une dérivée (générale) commune sur une pleine épaisseur de P.

On déduit de là, comme au n° 26, que *si f a une variation réductible* AUTOUR *de tout ensemble parfait* MINCE, *f admet une dérivée* GÉNÉRALE *sur une épaisseur pleine* (résultat équivalent à celui de M. Lusin, *voir* la note de la page 163).

formant une pleine épaisseur de ϖ (ces points ξ existent donc si ϖ est épais, et en particulier si P est épais en lui-même), simultanément, la variation relative de γ entre ξ et ξ' tend vers zéro et h a une dérivée sommable ψ aux mêmes points. Donc, la variation relative de f entre ξ et ξ' tend aussi vers ψ. Nous dirons que ψ est en ξ *la dérivée de f spéciale à* P. *Ce nombre, s'il existe, est la limite unique du quotient* $\frac{f(\xi')-f(\xi)}{\xi'-\xi}$, *quand ξ' tend indifféremment vers ξ sans quitter* P. ψ défini uniquement sur une certaine pleine épaisseur de ϖ, est sommable sur cet ensemble ϖ. Si f dans chacun des u_n varie suffisamment, f peut n'avoir de dérivée en aucun point de P (1^{re} Partie, ex. III et IV, n^{os} 59 et 60), et alors $\psi(\xi)$ est seulement envers la totalité du continu, un dérivé médian ou extrême de f en ξ, de chaque côté si ξ est de seconde espèce sur P. Mais un grand intérêt présenté par cette dérivée de f spéciale à P, réside en ce que deux fonctions possédant la même dérivée spéciale à P en ξ, ont pour différence une fonction possédant en ce point le dérivé bilatéral zéro. C'est là une observation essentielle, comme nous le verrons.

Enfin il est important de noter que *la dérivée de f spéciale à ϖ est, sur une pleine épaisseur de ϖ, la dérivée ordinaire de la variation h de f sur ϖ entre a et x.*

Le théorème du n° 23 se précise donc ainsi :

Si la variation de f est réductible sur tout ensemble parfait mince, quel que soit l'ensemble parfait P, *sur toute portion ϖ de* P *sans point commun avec un certain ensemble fermé* K, *non dense sur* P, *ou inexistant :* 1° *la variation de f est définie sur ϖ*; 2° *sur une pleine épaisseur de ϖ, f possède une dérivée spéciale à* P, *finie et sommable sur ϖ.*

Pour sommer cette dérivée spéciale, finie sur ϖ, on suppose comme toujours que, préalablement à cette opération, on lui attribue, aux points où elle n'existe pas, des valeurs finies quelconques, ce qui est sans influence sur le résultat de la sommation.

Nous donnerons à la dérivée ordinaire, commune à tous les ensembles admettant x_0 pour point limite, le nom de *dérivée générale*.

25. Convenons de dire qu'une fonction continue f possède en un

point x_0 une *dérivée approximative* [1] finie et égale à $\varphi(x_0)$, si l'ensemble des points x où l'on a

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\varphi(x_0)\right|<\varepsilon$$

a pour épaisseur un en x_0, quel que soit ε. La dérivée générale, quand elle existe, satisfait évidemment aux conditions de la dérivée approximative.

Je renvoie au début de la seconde Partie, à l'étude des conditions de continuité approximative (nº 2) pour y voir expliquer comment la définition précédente équivaut à celle-ci : f a une dérivée approximative en x_0, si f a au point x_0 une dérivée spéciale à un ensemble d'épaisseur un en x_0.

Si deux ou plusieurs fonctions en nombre fini $f_1, \ldots, f_p$ ont chacune en un même point x_0 une dérivée approximative, savoir φ_i pour f_i, c'est qu'il existe pour $i = 1, \ldots, p$, un ensemble E_i d'épaisseur un en x_0, spécialement auquel f_i admet la dérivée φ_i. Autrement dit, $\mathrm{VR}(f_i, x_0, x)$ tend vers φ_i si x tend vers x_0 sans quitter E_i. Le complémentaire E'_i de E_i a une épaisseur nulle en x_0. Il en est de même de la réunion R' des E'_i qui sont en nombre fini. Le complémentaire R de R' a donc l'épaisseur un en x_0. Or, R est l'ensemble commun aux E_i. Pour toutes les valeurs de i, f_i possède spécialement à R une dérivée, qui est φ_i.

Il suit de là qu'en x_0, toute fonction F composée des f_i, et à dérivées partielles du premier ordre continues, possède relativement à x une dérivée approximative, donnée par les formules élémentaires du calcul différentiel. Car ces dernières s'établissent en exprimant linéairement la variation relative de F entre x_0 et x au moyen de celles des f_i, puis en remplaçant à la fois celles-ci par leurs limites φ_i, et les coefficients, qui sont des fonctions continues des f_i et de x, par leurs valeurs en x_0. Les mêmes formules valent donc, tant que les variations relatives des f_i

---

[1] Cette dénomination rappelle une analogie de définition entre cette sorte de dérivée et les fonctions approximativement continues, qui jouent un grand rôle dans la seconde Partie de ce Mémoire. Je rappelle (*voir* note 2, p. 131) que tout récemment M. Khintchine a considéré la dérivée approximative d'une fonction sous le nom de dérivée *asymptotique* (*Comptes rendus*, 21 février 1916).

ont simultanément les limites φ_i, donc, dans le cas présent, tant que x tend vers x_0 sans quitter R. L'épaisseur de R en x_0 étant un, l'expression limite de VR(F, x_0, x) est pour F une dérivée approximative en x_0. Ainsi $f_1 + f_2 + \ldots + f_p$ admet en x_0 la dérivée approximative $\varphi_1 + \ldots + \varphi_p$. $f_1 f_2$ a pour dérivée approximative en x_0, $f_1 \varphi_2 + f_2 \varphi_1$, etc.

Une fonction f peut avoir en chaque point une dérivée approximative (ou générale) finie, et avoir cependant des dérivés extrêmes infinis sur un ensemble épais, et plus précisément parfait, P. En effet, selon l'exemple III du n° 59, 1[re] Partie, imposant à f d'être nul sur P, et, intérieurement à u_n, 1° pourvu d'une dérivée continue, 2° oscillant de o à $y_n(x) = 4\dfrac{\sqrt{\rho_p(x-a_n)(b_n-x)}}{u_n}$, nous plaçons sur u_n une famille de segments $i_{m,n}$, deux à deux sans points communs, se déplaçant de gauche à droite quand m croît, ayant pour points limites a_n pour $m = -\infty$ et b_n pour $m = +\infty$, l'agrégat des $i_{m,n}$ ayant de plus en a_n et b_n du côté intérieur à u_n, l'épaisseur un, et en outre sur $a_n x$ et sur $x b_n$ des épaisseurs moyennes supérieures à $1 - u_n$, quel que soit x dans u_n. Soit $i'_{m,n}$ le segment compris entre les intervalles $i_{m-1,n}$ et $i_{m,n}$. Supposons que $i'_{0,n}$ ait même milieu que u_n. Alors, sur chacun des $i_{m,n}$ nous faisons $f = 0$. Sur $i'_{m,n}$ nous prenons f continu, admettant une dérivée continue nulle aux deux extrémités de $i'_{m,n}$, f ayant pour maximum sur $i'_{m,n}$ la valeur de y_n au milieu de $i'_{m,n}$. Alors, il est visible que f, partout définie, possède hors de P une dérivée générale continue, et sur P la dérivée approximative o avec les dérivés extrêmes zéro et $+\infty$ à droite, $-\infty$ et zéro à gauche. Il serait de même facile de transformer l'exemple IV de manière que, dans ce dernier énoncé, les dérivés extrêmes zéro réalisés sur P, y soient remplacés par $-\infty$ à droite et $+\infty$ à gauche ([1]).

([1]) Soit δ un nombre nul si x est sur P, égal à $\dfrac{(b_n - x)(a_n - x)}{u_n}$, si x est intérieur à u_n. δ est dans un rapport compris entre 1 et 2 avec la distance de x à l'ensemble parfait P (1[re] Partie, p. 201). ρ_p étant la longueur du segment d'où est extrait u_n après suppression de $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, posons $\eta = \dfrac{u_n \delta}{\rho_p}$ et soit $f = i\dfrac{\delta}{\sqrt{\eta}}\left|\sin\dfrac{1}{\eta}\right|^{\frac{1}{\eta}}$, où i est $+1$ où -1. f admet une dérivée φ générale et continue hors de P, approximative et nulle sur P, et 1° les dérivés extrêmes droits o et $+\infty$, et extrêmes gauches o et $-\infty$, — cas [BD'] —

26. Je dis que *si la variation de f est réductible sur tout ensemble parfait, f possède sur une épaisseur pleine une dérivée approximative.* S'il en était autrement, il existerait un ensemble épais et dans celui-ci un ensemble parfait P épais en lui-même (1[re] Partie, p. 131), en tout point duquel f serait dépourvu d'une dérivée approximative. Mais ceci est absurde. Car il existe une portion ϖ de P où f admet, sur une pleine épaisseur de ϖ, une dérivée φ spéciale à P. Or, l'ensemble des points de ϖ où P a l'épaisseur un, constitue une pleine épaisseur de ϖ. ϖ n'étant pas métriquement nul, puisque P est épais en lui-même, il y a des points formant une pleine épaisseur de ϖ où, à la fois, P a l'épaisseur un et f admet spécialement à P une dérivée. Cette dernière est donc une dérivée approximative pour f, malgré notre hypothèse contraire dont l'impossibilité est établie. Nous pouvons résumer ainsi l'étude précédente :

Si la variation de f est réductible sur tout ensemble parfait mince, f possède sur une épaisseur pleine une dérivée approximative φ, et, dans tout ensemble parfait P, *l'ensemble des points au voisinage desquels ou bien la variation de f est non définie sur* P, *ou bien φ est non sommable sur* P, *cet ensemble est non dense sur* P.

Observons, en choisissant pour P le continu, que f possède une dérivée *générale* sur une pleine épaisseur d'un ensemble d'intervalles, complémentaire d'un ensemble fermé non dense.

Quelle relation y a-t-il, pour une portion ϖ de P où f a une variation définie et où φ est sommable, entre la variation de f sur ϖ et

---

(ou les mêmes échangés, cas [DB']) si i vaut $+1$ (ou si i vaut -1), 2° les dérivés extrêmes bilatéraux $+\infty$ et $-\infty$, si $i \sin \frac{1}{\eta}$ ne prend pas les deux signes. φ n'est pas sommable quand P est épais, sinon f aurait une dérivée exacte sur une épaisseur pleine, ce qui est impossible, f ayant des dérivés infinis en tout point de P, supposé épais.

Avec les mêmes notations, les exemples III et IV de la première Partie sont équivalents à ceux-ci : $f_1 = \sqrt{\frac{\rho_p \delta}{u_n}} \sin^2 \frac{1}{\delta} = \frac{\delta}{\sqrt{\eta}} \sin^2 \frac{1}{\delta}$, $f_2 = \frac{\delta}{\sqrt{\eta}} \sin \frac{1}{\delta}$. L'exemple classique donné par M. Volterra (*voir* 2[e] Partie, p. 187) d'une fonction à dérivée partout finie et inintégrable au sens de Riemann, est analogue à celui de la fonction : $\delta^2 \sin \frac{1}{\delta}$, P étant supposé épais.

la somme besgienne de φ sur ce même ensemble? Cette relation obligatoire existera dans le cas où f est une fonction *résoluble*.

27. Nous dirons que la variation de f est *réductible à zéro sur tout ensemble parfait mince*, si chaque ensemble de cette sorte contient une portion où la variation de f est *définie et nulle*. Une fonction f jouissant de la propriété précédente sera dite *résoluble* (en abréviation de : *à variation résoluble*).

Il suit de la définition posée que, *si la variation de f est définie sur un ensemble parfait mince ϖ, cette variation est nulle sur ϖ*. Sinon il y aurait (n° 13 *bis*) un ensemble parfait ϖ_1 agrégé à ϖ, donc mince, sur toute portion duquel la variation de f serait définie et douée d'un signe constant. f ne serait pas résoluble.

On déduit de là que, *si f est une fonction résoluble, il existe dans tout ensemble parfait mince* Π, *un certain ensemble fermé* H *non dense sur* Π, *ou inexistant, tel que, dans toute portion de* Π *sans point commun avec* H, *la variation de f sur* Π *est définie et* CONSTAMMENT *nulle*.

La réciproque de cette propriété est évidente. Donc (n° 14 *bis*) *une fonction* F *composée de plusieurs fonctions résolubles, et douée de dérivées partielles du premier ordre continues, est résoluble*. Ainsi une somme algébrique, un produit de fonctions résolubles sont résolubles.

Une fonction résoluble, ayant sur tout ensemble parfait mince une variation réductible, possède sur une épaisseur pleine une dérivée approximative dont les points de non-sommabilité sur un ensemble parfait quelconque P forment un ensemble non dense sur P.

Les propositions suivantes vont montrer le grand intérêt des fonctions résolubles.

28. *Une fonction f résoluble, admettant sur une épaisseur pleine zéro pour dérivé médian ou extrême d'un côté variable ou fixe, est une constante*.

En effet, si f n'était pas constante, si, entre deux points particuliers a et b, la variation relative de f était non nulle et égale à ω, il existerait, d'après l'application IV du principe de gradation (n° 9), pour toute valeur de ε comprise entre o et ω, un ensemble parfait mince P tel que la fonction $f - \varepsilon x = f_1$ présenterait entre deux points quelconques c et d de P une variation $f_1(d) - f_1(c)$ nulle ou ayant le signe de ω, selon que c et d seraient ou non les extrémités d'un même contigu. Dans le second cas, sur la portion de P située sur le segment cd, la variation de f, égale à celle de f_1, donc à $f_1(d) - f_1(c)$, serait définie et douée du signe de ω. Donc f ne serait pas résoluble.

29. *Une fonction résoluble $f(x)$ admettant sur ab un nombre dérivé* (médian ou extrême) *sommable φ est, à une constante additive près, la somme besgienne de φ entre a et x.*

Posons

$$f_1 = f(a) + \int_a^x \varphi\, dx,$$

l'intégrale du second membre étant prise au sens de M. Lebesgue. Une somme besgienne indéfinie a sur tout ensemble parfait P une variation déterminée, égale à la somme du coefficient différentiel sur P, donc nulle si P est mince. Donc, f_1 est résoluble et par suite aussi $f_1 - f$. D'ailleurs, on sait, d'après M. Lebesgue (*voir* 2e Partie, n° 21), que, sur une épaisseur pleine, f_1 a pour dérivée φ. Donc $f_1 - f$ admet sur une épaisseur pleine le dérivé zéro au moins d'un côté.

D'après le théorème précédent, $f_1 - f$ est constant. Comme il est nul pour $x = a$, il est identique à zéro. C. Q. F. D.

30. Nous tirerons de ce dernier théorème une conséquence essentielle. Soit f une fonction résoluble admettant sur un ensemble parfait ϖ, d'extrémités α, β, une variation totale définie et bornée. La variation de f sur ϖ entre α et x est une fonction $h(x)$ constante dans les contigus à ϖ.

Montrons d'abord que h est résoluble, c'est-à-dire que tout ensemble parfait mince contient une portion où la variation de h est définie et nulle. En effet, cela est évident si Q admet des points, donc une portion, dans un intervalle contigu à ϖ. Sur cette dernière, où h est constant, $V(h)$ existe et est nul. Si maintenant Q est entièrement agrégé à ϖ, f étant 1° à variation totale bornée sur ϖ, 2° résoluble, $V(f, Q)$ est 1° définie (n° 22), 2° nulle (n° 27). Il en est de même de $V(h, Q)$, puisque, sur tout ensemble parfait agrégé à ϖ, $V(h)$ et $V(f)$ sont (n° 13) simultanément définies ou non, et, dans le premier cas, égales. Donc h est résoluble.

Or, la variation totale de h (égale par définition à la variation totale de f sur ϖ) étant bornée, h admet sur une épaisseur pleine une dérivée ψ sommable (n° 24). Mais comme h est résoluble, h est la somme besgienne de ψdx entre α et x (n° 29). Or ψ coïncide (n° 24) sur une pleine épaisseur de ϖ avec la dérivée approximative (et spéciale à ϖ) de f, soit φ. Hors de ϖ, ψ est nul. Donc, l'intégrale de φ sur ϖ entre α et x est la variation linéaire de h, donc la variation de f sur ϖ entre ces deux points. Nous avons donc ce théorème capital résumant toute la précédente analyse :

Si f est une fonction RÉSOLUBLE, *f possède, sauf éventuellement en un ensemble mince, une dérivée approximative φ, et, quel que soit l'ensemble parfait* P, *sur toute portion ϖ de* P *sans point commun avec un ensemble fermé* K *existant ou non, mais en tout cas* NON DENSE *sur* P : 1° *la variation de f est définie;* 2° *φ est sommable;* 3° *la variation de f sur ϖ est l'intégrale besgienne de φ sur ϖ.*

Je rappelle que f a une dérivée approximative sur une épaisseur pleine dès que f a une variation réductible (et pas nécessairement à zéro) sur tout ensemble parfait mince. Enfin, en disant d'une dérivée qu'elle est approximative, nous n'excluons pas le cas où elle serait générale (n° 25).

L'intérêt du théorème précédent résulte de ce que la classe des fonctions résolubles va se révéler comme comprenant les fonctions dérivables, les fonctions possédant en tout point un dérivé extrême fini, les fonctions douées en tout point d'une dérivée approximative, etc.

Application aux nombres dérivés.

Une fonction est-elle déterminée (à une constante additive près) par la connaissance en tout point de l'un de ses dérivés? Quel lien numérique existe-t-il entre la fonction et ce dernier nombre? Telles sont les deux questions que nous éluciderons, dans des cas assez généraux, au cours des pages suivantes. Rappelons d'abord deux propositions bien simples :

31. *Si en un point et pour un certain côté, le segment dérivé* (¹) *de* f_1 *est fini et agrégé au segment dérivé de* f_2, *la différence* $f_2 - f_1$ *admet le dérivé médian ou extrême zéro, en ce même point et pour le même côté.*

Soient ξ le point considéré, D_1 et d_1 les dérivés extrêmes de f_1, D_2 et d_2 ceux de f_2, en ξ, pour le côté considéré. D_1 et d_1 sont finis, D_2 et d_2 peuvent être infinis, mais on a toujours $D_2 \geqq D_1 \geqq d_1 \geqq d_2$. Il est visible que la fonction $f_2 - f_1$ admet un dérivé au moins égal à $D_2 - D_1$. Car si x tend discontinûment vers ξ de manière que la variation relative de f_2 entre ξ et x tende vers D_2, il est évident que celle de $f_2 - f_1$ entre les mêmes points, aura toutes ses limites au moins égales à $D_2 - D_1$. Donc, le dérivé supérieur droit de $f_2 - f_1$ est positif ou nul. On voit pareillement que le dérivé inférieur droit de cette fonction est négatif ou nul. Donc, zéro est un dérivé droit médian ou extrême pour $f_2 - f_1$. Un raisonnement analogue montre (*L. I.*, p. 74) que *si en un point deux fonctions ont, pour un certain côté et pour un certain rang, un même dérivé extrême fini, la différence de ces deux fonctions possède en ce point le dérivé médian ou extrême zéro pour ce côté-là.*

Si donc deux fonctions ont *en tout point de ab*, *pour un même côté invariable*, l'une un segment dérivé fini agrégé au segment dérivé de l'autre, ou le même dérivé extrême fini pour un même rang, fixe ou variable, la différence de ces deux fonctions possède un dérivé médian ou extrême nul pour un côté invariable. Ces deux fonctions ne diffèrent donc que par une constante. Ainsi un dérivé extrême fini, de côté et de rangs donnés en chaque point, détermine sa primitive.

32. Ce sera une conclusion importante de cette analyse qu'un dérivé extrême fini connu en tout point, mais de côté et de rang

(¹) Nous appelons *segment dérivé* d'une fonction en un point et pour un côté donnés, le segment fini ou infini, limité par les dérivés extrêmes de la fonction en ce point et pour ce côté. L'*intervalle dérivé* est par définition l'intérieur du segment dérivé. C'est l'ensemble des dérivés médians.

inconnus, indifféremment variables, détermine également sa primitive. *A priori*, si une fonction f possède en tout point le dérivé extrême fini φ, en aucun point elle ne réalise le cas (AA′) des nombres dérivés. Mais, l'exemple III du n° 59 (1re Partie) nous montre que les trois autres cas fondamentaux [BD′], [DB′], [CC′] (*voir* Introduction, 3e Partie, et n° 57, 1re Partie) peuvent, en des points divers, être présentés par une fonction partout douée d'un dérivé extrême fini. Toujours est-il que, sur une épaisseur pleine, seuls ces trois derniers cas se vérifient. Donc, sur ce même ensemble, φ est un dérivé bilatéral de f et d'ailleurs le seul (n° 57, 1re Partie, et p. 164, 2e Partie).

Considérons deux fonctions f_1 et f_2 admettant partout un même dérivé extrême φ. Sur une épaisseur pleine e, φ est, comme nous venons de le dire, un dérivé bilatéral extrême pour f_1 et pour f_2. Aux points de e où l'une des deux fonctions f_1 et f_2 réalise le cas [CC′] (dérivée bilatérale finie), $f_2 - f_1$ admet le dérivé bilatéral extrême zéro. Aux points de e où chacune des fonctions réalise l'un des cas [BD′] et [DB′] (un dérivé fini bilatéralement extrême, les deux autres dérivés extrêmes infinis et de signes contraires), si le cas offert est le même, f_1 et f_2 ayant de chaque côté même dérivé extrême fini pour un même rang, ont le dérivé bilatéral médian ou extrême zéro (31). Enfin si, en certains points de e, f_1 réalise le cas [BD′] pendant que f_2 présente [DB′] (ou inversement), tous les dérivés droits de $f_2 - f_1$ sont non positifs, tous ses dérivés gauches étant non négatifs (ou l'inverse). $f_2 - f_1$ ne saurait donc avoir en ces points d'autre dérivé bilatéral que zéro. Or, l'ensemble des points où $f_2 - f_1$ n'a pas de dérivé bilatéral est dénombrable (1re Partie, n° 27, et Mme Young, *Acta mathematica*, t. 37). En résumé, $f_2 - f_1$ possède le dérivé bilatéral zéro en tous les points de e, sauf éventuellement en ceux d'un ensemble dénombrable, donc finalement sur une épaisseur pleine.

Cette conclusion découle des seuls résultats de la première Partie. Nous y sommes donc parvenus sans faire appel à la notion d'intégrale. Nous établirons la constance de la fonction $f_2 - f_1$ en montrant que celle-ci est résoluble.

33. M. Lebesgue fait observer (*L. I.*, p. 75) que l'on ignore si une fonction f est déterminée par sa dérivée φ supposée existante en tous

points, mais pouvant être infinie. La réponse est aisée. Nous avons vu (1^re Partie, n° 33) que, ou bien l'ensemble $|\varphi| = \infty$ est clairsemé (1^re Partie, Note 3, et p. 156 en note) et par suite dénombrable, ou bien l'un au moins des ensembles $\varphi = +\infty$ et $\varphi = -\infty$ contient un ensemble parfait. D'ailleurs, celui-ci est forcément sans épaisseur (1). Dans le second cas, f n'est pas déterminé. Car, si en tous les points de l'ensemble parfait P, f admet la dérivée $+\infty$, si t est une fonction continue constante dans les contigus à P et croissante entre deux points quelconques de P, $f+t$ admet sur P la dérivée $+\infty$ comme f, et hors de P la même dérivée que f. Donc, f n'est pas déterminé par φ. Si au contraire l'ensemble H défini par la relation $\varphi = \pm\infty$ est dénombrable et par suite clairsemé, on sait (*L. I.*, p. 75-76) que f est déterminé. Nous le démontrons ainsi. Si deux fonctions f_1 et f_2 admettaient φ pour dérivée, $f_2 - f_1$ aurait la dérivée zéro en tout point où φ est fini, donc partout sauf sur H. Si la différence $f_2 - f_1$ n'était pas constante, sur un segment ab aux extrémités duquel elle prendrait deux valeurs distinctes, il existerait, d'après la troisième application du principe de gradation, un ensemble parfait entièrement agrégé à H, ce qui est absurde, H étant dénombrable. Donc, $f_2 - f_1$ est constante. La primitive de φ est déterminée.

33 *bis*. Supposons que φ soit simplement un dérivé extrême de f. Si l'un des deux ensembles H_1 et H_2 déterminés par $\varphi = +\infty$ et $\varphi = -\infty$ contient un ensemble parfait, le raisonnement employé pour le cas où φ est une dérivée bilatérale, montre la possibilité, sans changer nulle part le dérivé extrême φ, d'ajouter à f une fonction constante dans tous les contigus à cet ensemble parfait, et croissante ou décroissante sur l'ensemble selon que φ est infini positif ou négatif. La primitive de φ n'est pas déterminée. Il s'agira donc essentiellement dans tout ce qui suivra de nombres dérivés *finis*.

34. Demandons-nous enfin si une fonction est déterminée par la connaissance en chaque point d'un dérivé fini, pouvant être aussi bien

(1) Ce théorème, démontré par M. Lusin, a été établi au n° 50 (1^re Partie) pour une dérivée unilatérale φ.

médian qu'extrême. Si l'on ne connaît pas en chaque point le côté où vaut ce dérivé, la fonction n'est certainement pas déterminée, puisque nous avons trouvé (n° 65, 1^{re} Partie) une fonction possédant en tous points le dérivé zéro pour un côté au moins et cependant variante dans tout intervalle. Si l'on sait à quel côté se rapporte ce dérivé, si même ce dérivé est supposé bilatéral, l'indétermination existe encore. En effet, la fonction f de l'exemple IV du n° 60 (1^{re} Partie) possède sur un certain ensemble parfait épais P, pour dérivés bilatéraux $+\infty$ et $-\infty$, et par suite aussi tous les nombres finis. Hors de P, f a une dérivée continue. Donc en tout point, f possède un nombre dérivé bilatéral fini. Soit C une constante quelconque. Ajoutons à f une fonction continue t égale à Cl, l étant la longueur de P entre son extrémité gauche et x. t est constante hors de P, et sur P a ses nombres dérivés compris entre o et C. Il est visible que, soit sur P, soit hors de P, en tout point, f et $f+t$ admettent les mêmes nombres dérivés. Un dérivé fini, donné en tout point, unilatéral pour un côté connu ou bilatéral, mais avec une situation ignorée médiane ou extrême, ne saurait donc déterminer une fonction continue (¹).

Passons maintenant à la recherche des rapports entre les fonctions primitives et les fonctions résolubles.

35. La considération de la variation des fonctions *autour* des ensembles parfaits donne le théorème suivant, intéressant le cas où la fonction possède en tout point, au moins pour un côté, une dérivée (ou même seulement deux dérivés extrêmes finis) : *Si la variation de f* AUTOUR *d'une portion quelconque de* P *est infinie, l'ensemble des points où* DE CHAQUE CÔTÉ *f possède des nombres dérivés infinis, est partout dense sur* P.

Notre hypothèse est la suivante : Les oscillations $O(f, u_n)$ de f sur les contigus u_n à une portion quelconque ϖ de P forment une série divergente. Donc, l'oscillation relative $OR(f, u_n)$ de f sur u_n est non

(¹) Un nombre dérivé fini *sommable de côté invariable* détermine-t-il sa primitive? La réponse à cette question paraît dépendre de l'existence, encore problématique, de fonctions ne possédant en aucun point, *d'aucun côté*, de dérivée finie ni *infinie*. La fonction de Weierstrass présente bilatéralement en certains points des dérivées infinies (M^{me} Young); celle du n° 65, 1^{re} Partie, ne peut en posséder qu'unilatéralement.

bornée. Car si elle était, pour tous les u_n, inférieure à un même nombre A, la série $O(f, u_n)$ aurait ses termes inférieurs à ceux de la série Au_n, donc serait convergente. Mais $OR(f, u_n)$ n'étant bornée sur aucune portion de P, en un résiduel de P on a, pour chaque côté, au moins un dérivé infini (1re Partie, n° 40).

Donc, en utilisant une définition déjà donnée (p. 163 et 168, en notes), *si, en tout point et au moins d'un côté, f_0 a ses dérivés extrêmes finis, la variation de f_0* AUTOUR *de tout ensemble parfait* P *est réductible.* Donc, *les points de* P *au voisinage desquels la variation de f_0* AUTOUR *de* P *n'est pas finie, forment un ensemble non dense sur* P. Mais de l'hypothèse que la variation de f autour de toute portion de P est infinie, nous ne pouvons pas déduire la conclusion qu'en certains points de P les quatre dérivés extrêmes de f sont infinis (*voir* l'exemple du n° 15, 3e Partie). Au contraire :

36. *Si la variation* (simple) *de la fonction continue f sur toute portion de l'ensemble parfait* P, *est non définie*, *f possède en un résiduel de* P, *de chaque côté les dérivés $+\infty$ et $-\infty$.*

En effet, soit ϖ une portion quelconque de P, α et β les points extrêmes de ϖ, et $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$, ses intervalles contigus, qui le sont en même temps à P. Les n premiers $\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n$, séparent sur $\alpha\beta$, $n+1$ segments $\rho_1, \ldots, \rho_{n+1}$. La somme des variations absolues $VA(f, \omega_i)$ de f sur les $\omega_i (i=1, \ldots, n)$ croît indéfiniment avec n. $f(\beta)-f(\alpha)$ est la somme des variations de f sur les divers ω_i et les $\rho_j (j=1, \ldots, n+1)$. Celles de ces variations $V(f, \omega_i)$, $V(f, \rho_j)$ qui sont positives ont une somme s_n, les autres ont une somme $-s'_n$. On a

$$s_n - s'_n = f(\beta) - f(\alpha) \qquad \text{et} \qquad s_n + s'_n > \sum_1^n VA(f, \omega_i).$$

Donc, s_n et s'_n croissent indéfiniment avec n. Est-il possible que les nombres $VR(f, \omega_i)$ et $VR(f, \rho_j)$ soient bornés supérieurement ou inférieurement? Non, car si tous ces nombres étaient inférieurs au nombre positif A, la somme s_n serait moindre que

$$A\left(\sum^n \omega_i + \Sigma \rho_j\right) = A(\beta - \alpha),$$

ce qui est absurde, s_n croissant indéfiniment avec n. Pareillement si les mêmes variations relatives surpassaient toutes $-A$, s'_n surpasserait $-A(\beta-\alpha)$, ce qui est impossible. Or, chacun des ω_i et des ρ_j a ses deux extrémités sur ϖ. Donc, sur toute portion de P, il existe des couples de points c, d ou c', d', entre lesquels la variation relative de f pour les uns c, d surpasse A, pour les autres c', d' est inférieure à $-A$. D'après le Premier Théorème des nombres dérivés (1re Partie, nos 28 et 31, App. I), sur un résiduel de P, les deux dérivés supérieurs sont $+\infty$, les deux dérivés inférieurs sont $-\infty$. De là une conséquence essentielle.

37. *Si une fonction continue f possède en chaque point au moins un nombre dérivé extrême fini, la variation de f est réductible sur tout ensemble parfait.*

En effet, si la conclusion de l'énoncé était inexacte, il existerait un ensemble parfait P tel que la variation de f ne serait définie sur aucune portion de P. Mais alors, d'après le théorème du n° 36, il y aurait des points de P où f aurait ses quatre dérivés extrêmes infinis, ce qui est contraire à l'hypothèse.

f, ayant sa variation réductible sur tout ensemble parfait, possède sur une épaisseur pleine une dérivée approximative ψ. Or φ, étant en tout point dérivé extrême fini de f, est, sur une épaisseur pleine l'unique dérivé bilatéral de f (1re Partie, n° 57; 2e Partie, p. 164). Donc, sur une épaisseur pleine $\varphi=\psi$. D'ailleurs ψ est sommable sur tout ensemble parfait P, sauf au voisinage d'un ensemble non dense sur P. Donc :

Si la fonction finie φ est en tout point un nombre dérivé extrême d'une fonction continue f, φ est sur une épaisseur pleine la dérivée approximative de f, et l'ensemble H *des points d'un ensemble parfait quelconque* P *au voisinage desquels φ n'est pas sommable sur* P, H *est non dense sur* P [1].

---

[1] Si f possède un dérivé extrême fini φ en tout point de E, les raisonnements des nos 36 et 37 montrent que, si E est parfait et épais en lui-même, f admet en certains points de E une dérivée approximative égale à φ. La même conclusion vaut donc si E est

38. Le théorème suivant va nous montrer que f est résoluble :

Si une fonction f a sur un ensemble parfait mince une variation définie non nulle, en certains points de cet ensemble, f a ses quatre dérivés extrêmes infinis.

Nous avons vu (nº 13) la possibilité de déterminer sur tout ensemble parfait P, où la variation de f est définie et non nulle, un ensemble parfait Π sur lequel f a une variation définie, la même que sur P, soit λ, et sur toute portion duquel la variation de f est différente de zéro et douée du signe de λ. Si P est mince, Π l'est aussi. Il nous suffira donc de démontrer le théorème pour tout ensemble parfait mince P satisfaisant à cette condition que, sur chacune de ses portions, f a une variation définie, non nulle et de signe invariable.

38 *bis*. On peut d'abord montrer très simplement l'*existence en un résiduel de* P *d'un dérivé bilatéral infini du signe de* λ. Supposons, pour fixer les idées, que ce signe soit $+$. Soit ϖ un segment de P, ξ et ξ' ses points extrêmes, λ_1 la variation de f sur ϖ. λ_1 est positif.

Rangeons en une suite unique les intervalles ω_n ou $\alpha_n\beta_n$ contigus à ϖ. Par hypothèse, la série des variations de f sur les n premiers intervalles ω_n ne tend pas vers $f(\xi')-f(\xi)$ quand n croît indéfiniment, mais vers une limite, inférieure de λ_1 à ce dernier nombre. Or, l'excès de $f(\xi')-f(\xi)$ sur cette somme, c'est la somme des variations de f sur les $n+1$ segments ρ_j séparés sur $\xi\xi'$ par $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Est-il possible que la variation relative de f sur chaque ρ_j soit inférieure à un nombre positif fixe A? Non, car alors la somme des variations de f sur les ρ_j serait inférieure à $A\Sigma\rho_j$. Or, cette somme tend vers λ_1, quand n croît, et $\Sigma\rho_j$ tend vers la mesure de ϖ, c'est-à-dire zéro. Il y a donc contradiction. Donc, si grand que soit le nombre

---

un ensemble épais quelconque, puisque E contient alors un ensemble parfait épais en lui-même. Donc, *l'ensemble des points où f possède un nombre dérivé extrême fini φ, sans admettre φ pour dérivée approximative, est de mesure nulle.*

Il en résulte, en usant de nos notations habituelles, que l'ensemble des points où f n'a pas de dérivée approximative (ou générale) est contenu, à une épaisseur nulle près, dans celui où f réalise le cas (AA') ($+\infty$ et $-\infty$ dérivés bilatéraux).

Ce théorème précise les résultats du nº 32 et sera lui-même complété plus loin.

positif A, il y a des segments ρ limités à deux intervalles contigus à ϖ, et sur lesquels la variation relative de f surpasse A. Ceci ayant lieu quel que soit ϖ, segment de P, les ensembles $\Delta_d = +\infty$ et $\Delta_g = +\infty$ sont des résiduels de P (1^re Partie, n° 31, App. I).

De là résulte que, *si une fonction f possède en tout point une dérivée finie bilatérale ou simplement unilatérale φ, f est résoluble*. Car, sa variation, réductible *autour* de (et *a fortiori* : *sur*) tout ensemble-parfait Π (n° 35), ne saurait, si Π est mince, être définie sur une portion Π_1 de Π sans être constamment nulle sur Π_1. Donc, P étant un ensemble parfait quelconque, si f admet en tout point φ pour dérivée uni- ou bilatérale, sur toute portion ϖ de P sans points communs avec un certain ensemble K, agrégé à P et non dense sur lui, ou inexistant : 1° la variation de f est définie; 2° φ est sommable; 3° la variation de f sur ϖ est égale à la somme besgienne de φ sur ϖ.

En particulier, supposons que cette dérivée soit sommable sur ab. Étant établi que $f(x)$ est résoluble, cette fonction coïncide nécessairement (n° 29) avec la somme algébrique de $f(a)$ et de l'intégrale besgienne de φ entre a et b. Étendons le théorème sur la résolubilité, aux fonctions possédant seulement un nombre dérivé extrême fini, et pour cela démontrons le théorème du n° 38.

39. Examinons un premier cas très simple. Nous allons prouver, par une application du théorème fondamental sur l'épaisseur des ensembles à mesure positive, qu'*une fonction $h(x)$ constante sur chaque intervalle contigu à un ensemble parfait mince* P, *et croissante sur* P [1], *a une dérivée infinie positive en tous les points d'un ensemble partout dense sur* P.

Substituons à x la variable y continue et croissante en x (qui par suite est continue et croissante en y), égale à $x + h(x)$. Aux points ξ de P décrit par x, correspondent en y les points η d'un ensemble parfait Q.

Les intervalles contigus à P et à Q ont même longueur. Car sur l'un des premiers, soit u, $h(x)$ est constant. Donc, la variation de x

[1] Nous disons que f est *croissant* sur l'ensemble parfait P, si $f(x') - f(x)$ a le signe de $x' - x$, quand x et x' sont agrégés à P sans être les extrémités d'un même contigu.

et celle de y sur u sont les mêmes, savoir u. Or, la seconde est la longueur de v, homologue de u.

Q est épais en lui-même. Car la mesure d'une portion de Q limitée par η, η', est l'excès de la distance $\eta\eta'$ sur la longueur totale des contigus à Q situés entre η et η'. Or, cette dernière est égale à la longueur totale des contigus à P compris entre ξ et ξ', homologues de η et η'. C'est donc $\xi' - \xi$, puisque P a une mesure nulle. Donc la mesure de Q entre η et η' est

$$\eta' - \eta - (\xi' - \xi) = h(\xi') - h(\xi),$$

nombre positif, puisque h croît entre deux points de P non extrémités d'un même intervalle contigu.

Q étant épais en lui-même, l'ensemble q des points de Q, où l'épaisseur de ce dernier ensemble est égale à un, est partout dense sur Q (il est gerbé sur Q, mais a même mesure que Q; *voir* 1re Partie, nos 20 et 21, p. 137; et n° 15, p. 125). Soit η un point de q. Si y tend vers η, l'épaisseur moyenne de Q sur $\eta\, y$ tend vers 1. Cette épaisseur est toujours $\dfrac{h(x) - h(\xi)}{y - \eta}$, que y soit inférieur ou supérieur à η. Soit donc p l'ensemble (agrégé à P) homologue de q. Pour tout point ξ de p, $\dfrac{h(x) - h(\xi)}{x - \xi + h(x) - h(\xi)}$ tend vers 1, quelle que soit la manière dont x tend vers ξ. Donc $\dfrac{h(x) - h(\xi)}{x - \xi}$, qui est positif, tend en même temps vers $+\infty$. h a donc une dérivée infinie positive en tout point de p, ensemble partout dense sur P.

A priori, l'ensemble des points où il y a une dérivée infinie sur P est gerbé, puisque l'ensemble des points où le dérivé médian ou extrême zéro existe, est un résiduel de P, à cause de la variation nulle de $h(x)$ sur tout contigu de P (1re Partie, n° 31, App. I).

39 *bis*. Passons maintenant au cas général. Nous allons montrer que, *si f a sur toute portion de l'ensemble parfait mince* P *une variation définie et positive*, *l'ensemble des points de* P, *où les quatre dérivés sont infinis*, *est partout dense sur* P.

Effectuons la décomposition habituelle $f = g + h$, h étant la variation de f sur P entre a et x, puis, comme ci-dessus, la transformation $y = x + h$. Soit Q l'ensemble des y homologues des x agrégés à P. Q est épais en lui-même (39). Posons $f(x) = F(y)$. Chacune des propriétés suivantes est séparément vérifiée sur une pleine épaisseur propre de l'ensemble Q ; toutes le sont donc simultanément sur une pleine épaisseur commune q_1 de Q. En tout point de q_1 : 1° h, considérée comme fonction de y, étant la mesure de Q entre $a = y(a)$ et y, a la dérivée 1; 2° $F(y)$ ayant, sur la portion de Q comprise entre a et y, une variation h définie et croissante, donc une variation totale sur Q définie et bornée, a une dérivée spéciale à Q égale à $\frac{dh}{dy} = 1$ (3e Partie, n° 24); 3° l'un des quatre cas fondamentaux des nombres dérivés est vérifié par $F(y)$. Soit p_1 l'homologue de q_1. Je dis qu'en tout point ξ de p_1, les quatre dérivés extrêmes de $f(x)$ sont infinis. En effet, donnons à x un accroissement Δx à partir de ξ et désignons par l'affixe Δ les accroissements correspondants des fonctions. On a

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F(y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta h} \frac{\Delta h}{\Delta x}.$$

Quand Δx tend vers zéro, il en est de même de Δy, donc le second facteur tend vers 1; le dernier, nous l'avons vu ci-dessus, tend vers $+\infty$, d'après $\Delta x = \Delta y - \Delta h$. Donc f ne peut avoir en ξ un dérivé extrême fini que si $F(y)$ a en η, homologue de ξ, un dérivé extrême nul. Mais ceci est impossible, puisqu'en η $F(y)$ a le dérivé bilatéral 1 (spécial à Q) et que nous sommes dans l'un des quatre cas fondamentaux des nombres dérivés (1re Partie, n° 57, et 2e Partie, p. 164). Donc, f a ses quatre dérivés extrêmes infinis en ξ. C. Q. F. D.

Observons qu'en η nous avons pour $F(y)$ soit le cas (AA′), soit le cas [BD′] avec $\Delta_d = -\delta_g = +\infty$, $\delta_d = \Delta_g = 1$, soit le cas [DB′] avec $\Delta_d = \Delta_g = 1$, $\delta_d = -\Delta_g = -\infty$, soit le cas [CC′] avec la dérivée ordinaire 1. En ξ, nous aurons les cas correspondants : 1° $\Delta_d = \Delta_g = +\infty$, $\delta_d = \delta_g = -\infty$; 2° $\Delta_d = \delta_d = \Delta_g = +\infty$, $\delta_g = -\infty$; 3° $\Delta_d = \Delta_g = \delta_g = +\infty$, $\delta_d = -\infty$; 4° la dérivée $+\infty$. Notons encore, et cette remarque nous sera utile, que q_1, étant une pleine épaisseur de Q, contient des ensembles parfaits, et cela, dans toute portion de Q. La correspondance de Q et de P étant continue, p_1 *contient aussi un ensemble parfait dans toute portion de* P.

40. Si l'on veut appliquer ce théorème à la recherche des dérivés infinis d'une fonction f sur un ensemble parfait mince R, où elle a une variation définie et non nulle entre ses extrémités a et b, on désignera par $\mu(x)$ la variation de f sur la portion de R, comprise entre l'extrémité gauche a de R et x. Alors $\mu(x)$ est une fonction constante dans chaque intervalle contigu à R. Nous pouvons supprimer dans R les points en lesquels $\mu(x)$ est constant, c'est-à-dire les points de R intérieurs à un intervalle où μ est constant. R est remplacé par un ensemble parfait R_1, non nul, sinon μ, constant en tout point, soit sur R, soit hors de R, serait constant sur ab, ce qui est faux, d'après nos hypothèses $\mu(a) = 0$, $\mu(b) \neq 0$. Je dis que *l'ensemble* I *des points où les quatre dérivés extrêmes de f sont infinis est partout dense sur* R_1. En effet, sur toute portion de R_1, $\mu(x)$ est non constant. Je peux prendre sur une telle portion deux points particuliers ξ, ξ' où μ a des valeurs différentes μ, μ'. Alors il existe un ensemble parfait $\rho(\xi,\xi')$ agrégé à la portion de R_1 limitée par ξ, ξ', et tel que, sur toute portion de $\rho(\xi, \xi')$, la variation de f est définie et douée du signe de la variation $\mu' - \mu$ de f sur R (et sur R_1) entre ξ et ξ'. Sur $\rho(\xi, \xi')$ nous aurons, en un résiduel, un dérivé bilatéral infini du signe de $\mu' - \mu$, et en tous les points d'un ensemble dense sur $\rho(\xi, \xi')$, quatre dérivés extrêmes infinis. Donc I est partout dense sur R_1. En tenant compte d'une observation faite quelques lignes plus haut, nous pouvons énoncer ce théorème :

Si une fonction continue f et un ensemble parfait mince P *sur lequel la variation de f est définie, sont tels que, dans toute portion de* P *en existe une autre, où la variation de f est non nulle, alors il existe un ensemble* H *agrégé à* P, *partout dense sur lui, et en tout point duquel les quatre dérivés extrêmes de f sont infinis.* De plus, H *contient sur toute portion de* P *un ensemble parfait.*

On peut évidemment donner à l'énoncé du n° 38 la forme suivante :

Si une fonction f a, en tout point, au moins un dérivé extrême fini pour un côté et un rang inconnus et variables, il n'y a pas d'ensemble parfait mince où la variation de f est définie et non nulle.

Nous savons d'ailleurs (n° 30) que, f satisfaisant à la même hypothèse, dans tout ensemble parfait P existe une portion sur laquelle la variation de f est définie. Donc, si P est mince, cet ensemble contient une portion où la variation de f est simultanément définie et nulle. *f est donc résoluble* et l'on peut énoncer le théorème suivant :

41. P *étant un ensemble parfait quelconque, si f admet en tout point la fonction finie φ pour dérivé extrême, de côté et de rang inconnus, indifféremment variables, sur toute portion ϖ de* P *sans points communs avec un ensemble fermé* K, *agrégé à* P *et* NON DENSE *sur lui :* 1° *la variation de f est définie;* 2° *φ est sommable;* 3° *la variation de f sur ϖ est égale à la somme besgienne de φ sur ϖ.*

41 *bis*. Montrons enfin que *f est complètement déterminée* (à une constante additive près) *par le dérivé extrême fini φ de côté et de rang inconnus et variables*. Soient f_1 et f_2 deux fonctions admettant en tout point φ pour dérivé extrême. Nous avons montré (n° 32 et aussi n° 37, si l'on ignore les cas fondamentaux des nombres dérivés) que φ est sur une épaisseur pleine une dérivée approximative pour chacune de ses primitives. Donc $f_2 - f_1$ admet sur une épaisseur pleine la dérivée approximative zéro, donc le dérivé bilatéral médian ou extrême zéro. D'ailleurs f_1 et f_2, et par suite $f_2 - f_1$, sont résolubles. Donc $f_2 - f_1$ est constant.

L'aisance avec laquelle la notion de fonction résoluble permet de répondre à des questions assez délicates concernant les relations entre une primitive et l'un de ses nombres dérivés, rendra sans doute le lecteur indulgent à l'analyse un peu longue et abstraite dont le terme a été de caractériser cette nouvelle classe de fonctions, et nous justifiera de l'étudier davantage et de chercher de nouvelles catégories agrégées à cette même classe. Nous allons d'abord présenter quelques observations sur la nature de la variation des fonctions sur les ensembles parfaits.

Étude complémentaire de la variation sur les ensembles parfaits.

42. *Si la variation de f sur l'ensemble parfait* P *est définie et non nulle, l'ensemble des valeurs prises par f sur* P *est épais.*

En effet, déterminons d'abord sur P un ensemble parfait où la variation de f a un signe constant sur une quelconque de ses portions (13). La propriété énoncée, si elle est établie pour le nouvel ensemble, sera vraie *a fortiori* pour le premier. Supposons donc P satisfaisant à cette condition préalable. Soit $h(x)$ la variation de f entre a et x sur P. En changeant f en $-f$, s'il est nécessaire, nous pouvons supposer $h(x)$ positif. *Supposons* P *mince* (¹). La transformation habituelle $y = x + h(x)$ change P en un ensemble Q épais en lui-même et dont la mesure entre deux points y et y' est la variation de h entre les deux points x et x' homologues des premiers. Posons

$$g = f - h \qquad \text{et} \qquad G(x) = f(a) + (a\Sigma x)\,|V_n| + \omega\,|f(x) - f(a_m)|,$$

ω étant 0 ou 1, suivant que x est sur P ou intérieur au contigu $a_m b_m$. Considérons h et G comme des fonctions de y. Nous savons que, sur une pleine épaisseur Q_1 de Q, simultanément l'épaisseur de Q est 1 et G a spécialement à Q une dérivée nulle (p. 168, note). Soit η un point quelconque de Q_1. Nous pouvons prendre α positif et suffisamment petit pour que, quel que soit η' agrégé à Q entre $\eta - \alpha$ et $\eta + \alpha$ (η, comme tout point de Q_1, est de seconde espèce sur Q), ξ et ξ' étant les homologues de η et η' : 1° l'épaisseur de Q entre η et η' (variation relative de h) soit supérieure à $\frac{3}{4}$; 2° la variation relative de G entre η et η', savoir

$$\frac{G(\xi') - G(\xi)}{\eta' - \eta},$$

soit inférieure à $\frac{1}{4}$. Supposons, par exemple, η' supérieur à η.

Entre ξ et ξ', la fonction continue f prend toutes les valeurs de

---

(¹) Si P est épais, ou bien on s'abstiendra de transformer x et l'on placera ξ en l'un des points où h a une dérivée positive et où G a une dérivée nulle spéciale à P, ces points ξ formant une pleine épaisseur de P; ou bien on transformera x par la formule commune à tous les cas : $y = x + (a\mathrm{V}x)(f - x, \mathrm{P}) = x + h(x) - l(x)$, $l(x)$ étant la longueur de P entre a et x (*). Les raisonnements du n° 42 s'appliquent alors indifféremment à tous les ensembles P.

(*) $(a\mathrm{V}b)\,(f, \mathrm{P})$ désigne la variation de f sur la portion de P située sur le segment ab.

l'intervalle $f(\xi), f(\xi')$. Or, la différence

$$f(\xi') - f(\xi) = h(\xi') - h(\xi) + g(\xi') - g(\xi)$$

surpasse $\frac{1}{2}(\eta' - \eta)$, puisque $h(\xi') - h(\xi)$ surpasse les $\frac{3}{4}$ de $\eta' - \eta$ et que $|g(\xi') - g(\xi)|$ est inférieur à $G(\xi') - G(\xi)$, moindre que le quart de $\eta' - \eta$. L'intervalle des valeurs prises par f entre ξ et ξ' est donc supérieur à $\frac{1}{2}(\eta' - \eta)$. Retranchons de $\xi\xi'$ n intervalles ainsi énoncés *dans leur ordre géométrique*, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ ou $\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n$, contigus à P, intérieurs à $\xi\xi'$, et séparant sur $\xi\xi'$ les segments linéaires $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{n+1}$ (ξ et ξ' étant de seconde espèce sur P, aucun ω_i n'a pour extrémité ξ ni ξ'). f prend sur ρ_i toutes les valeurs comprises entre $f(\beta_{i-1})$ et $f(\alpha_i)$ ($i = 1, \ldots, n+1$), en posant $\beta_0 = \xi$, $\alpha_{n+1} = \xi'$.

Considérons, dans l'échelle des nombres, les intervalles $f(\alpha_i)$ à $f(\beta_i)$ ou v_i, et les segments $f(\beta_{j-1})$ à $f(\alpha_j)$ ou r_j. Nous pouvons aller du point initial $f(\xi) = f(\beta_0)$ au point final $f(\xi') = f(\alpha_{n+1})$ en parcourant successivement de l'origine à l'extrémité de chacun d'eux, les intervalles et les segments $r_1, v_1, r_2, v_2, \ldots, v_n, r_{n+1}$ dont la réunion contient donc certainement le segment σ limité par $f(\xi)$ et $f(\xi')$. Certains de ces intervalles et segments peuvent d'ailleurs, intégralement ou en partie, sortir de σ et aussi se recouvrir l'un l'autre. Mais si un point θ de σ n'est intérieur à aucun des intervalles v_i, il est certainement agrégé à l'un des segments r_j. Et, comme f prend sur ρ_j toutes les valeurs du segment r_j, l'égalité $f = \theta$ est vérifiée sur l'un au moins des ρ_j. Donc, si l'on retranche de σ toutes ses parties communes avec l'un au moins des v_i, les segments restants font entièrement partie de l'ensemble des valeurs prises par f sur un au moins des ρ_j. Ce dernier a donc une longueur totale au moins égale à $\sigma - \Sigma v_i$. σ, c'est le nombre positif $f(\xi') - f(\xi)$. v_i, longueur de l'intervalle limité par $f(\alpha_i)$ et $f(\beta_i)$, vaut $|f(\beta_i) - f(\alpha_i)|$. Mais $f(\beta_i) - f(\alpha_i)$, c'est, h étant constant sur ω_i, $g(\beta_i) - g(\alpha_i)$, dont la valeur absolue est inférieure à $G(\beta_i) - G(\alpha_i)$. Donc, quel que soit le nombre d'intervalles ω_i ou $\alpha_i\beta_i$ considérés, les v_i ont une somme inférieure à $G(\xi') - G(\xi) < \frac{\eta' - \eta}{4}$. Donc, $f(\xi') - f(\xi)$ surpassant $\frac{\eta' - \eta}{2}$, l'ensemble des valeurs prises par f sur la totalité des segments conservés sur $\xi\xi'$ quand on en exclut un nombre quelconque d'intervalles ω_i contigus à P, possède une mesure supérieure à $\frac{\eta'-\eta}{4}$.

Supposons rangés en une suite, les intervalles contigus à P compris entre ξ et ξ'. Considérons les ensembles λ_n des valeurs prises par f sur les $n+1$ segments restant de $\xi\xi'$ quand on exclut de ce dernier les n premiers intervalles de la suite. Chaque λ_n contient tous les suivants et a une mesure supérieure à $\frac{\eta'-\eta}{4}$. Les valeurs prises par f sur P sont contenues dans tous les λ_n, et inversement une valeur appartenant à tous les λ_n, donc prise, quel que soit n, sur l'un au moins des segments demeurant sur $\xi\xi'$ après extraction des n premiers u_n, cette valeur est prise par f sur P, en raison de la continuité de f et de ce que P est fermé. Donc, l'ensemble λ des valeurs prises par f sur P entre ξ et ξ' a une mesure au moins égale à $\frac{\eta'-\eta}{4}$. L'ensemble des valeurs prises par f sur P est donc un ensemble fermé épais.

Observons encore que, $\eta'-\eta$ étant inférieur à $2|f(\xi')-f(\xi)|$, l'ensemble λ a une mesure supérieure à $\frac{1}{8}|f(\xi')-f(\xi)|$. D'ailleurs un instant d'examen suffit à reconnaître que le coefficient $\frac{1}{8}$ pourrait être remplacé par tout autre inférieur à un, à la condition de resserrer suffisamment l'intervalle $\eta-\alpha$ à $\eta+\alpha$. Nous pouvons donc résumer ainsi l'analyse précédente.

42 *bis*. *Si f a sur l'ensemble parfait mince* [1] P *une variation définie et croissante*, il existe un ensemble de points ξ partout denses sur P (et même ayant pour homologues η les points d'une pleine épaisseur de l'ensemble Q) tels que : 1° en ξ, $f(x)$ a la dérivée bilatérale $+\infty$ spécialement à P (parce que $F(y)=f(x)$ a la dérivée un spéciale à Q); 2° ε étant un nombre positif indépendant, il est possible de définir un intervalle $\xi-\delta$ à $\xi+\delta$ tel que, pour toute valeur ξ' agrégée à P et intérieure à cet intervalle, l'ensemble des valeurs prises par f sur P

[1] Si P est épais en lui-même, le même énoncé est encore valable, sauf à modifier ainsi le premier caractère de ξ : « f possède en ξ une dérivée positive. »

entre ξ et ξ' ait, sur le segment limité par $f(\xi)$ et $f(\xi')$, une épaisseur supérieure à $1-\varepsilon$ [d'après la condition 1°, d'une part ξ est de seconde espèce sur P, donc il y a des ξ' de chaque côté de ξ; d'autre part $f(\xi')-f(\xi)$ a le signe de $\xi'-\xi$].

Nous utiliserons un peu plus loin ce résultat (n° 48, 2°, p. 201).

43. En nous fondant encore sur cette idée que la mesure de l'ensemble des valeurs de f sur un ensemble parfait ϖ, est la borne inférieure stricte de la mesure de l'ensemble des valeurs prises par f sur l'un au moins des $n+1$ segments restants entre les extrémités des ϖ, quand on supprime n intervalles contigus à ϖ, choisis à volonté et en nombre quelconque, nous allons prouver que, *si une fonction a une variation définie et nulle sur un ensemble parfait* P, *l'ensemble de ses valeurs sur* P *est mince*.

En effet, en conservant toutes les notations précédentes, la série V_n étant supposée absolument convergente, on a, quel que soit x sur P,

$$f(x)=(a\Sigma x)V_n.$$

Remplaçons f par une fonction f_1 linéaire (ou simplement unioscillante) sur chaque intervalle contigu à P, et *coïncidant avec* f *sur* P. L'ensemble de valeurs considéré dans l'énoncé est donc le même pour f et pour f_1. ξ étant un point quelconque de P, posons

$$G(\xi)=(a\Sigma\xi)|V_n|.$$

Soient ξ et ξ' $(\xi<\xi')$ deux points quelconques de P. On a

$$|f_1(\xi')-f_1(\xi)|<(\xi\Sigma\xi')|V_n|=G(\xi')-G(\xi).$$

Cela étant, considérons, sur ab, n quelconques des intervalles contigus à P, soit $\omega_1, \ldots, \omega_n$ ou $\alpha_1\beta_1, \ldots,$ séparant les segments $\rho_1, \ldots, \rho_{n+1}$. Les valeurs prises par f_1 sur ρ_i, d'extrémités β_{i-1}, α_i, forment le segment r'_i limité par le maximum et le minimum de f_1 sur ρ_i. f_1, dans tout contigu à P, étant unioscillante ou constante, les minimum et maximum de f_1 sur ρ_i sont pris en deux points de P, soient γ_i, δ_i, agrégés au segment ρ_i. Donc,

$$f_1(\delta_i)-f_1(\gamma_i)=r'_i$$

est en valeur absolue inférieur à

$$|G(\delta_i) - G(\gamma_i)| < G(\alpha_i) - G(\beta_{i-1}) = (\beta_{i-1}\Sigma\alpha_i)|V_n|.$$

L'ensemble λ_n des valeurs prises par f_1 sur l'un au moins des segments ρ_i est constitué par la réunion des r'_i, et a une mesure au plus égale à la somme de ceux-ci. Donc λ_n est inférieur en mesure à

$$(\beta_0\Sigma\alpha_1)|V_n| + \ldots + (\beta_n\Sigma\alpha_{n-1})|V_n| = \sum_1^\infty |V_n| - |V^{(1)}| - |V^{(2)}| - \ldots - |V^{(n)}|,$$

en désignant par $V^{(i)}$ la variation de f sur ω_i. La série $|V_n|$ étant convergente, nous avons là ce qui subsiste de sa somme quand on en retranche n termes quelconques. La borne inférieure du reste est zéro. C'est la mesure de l'ensemble des valeurs sur P, de f_1 et de f.

Donc, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f admettant une variation définie sur un ensemble parfait* P, *ait de plus une variation non nulle sur au moins une portion de* P, *est que l'ensemble des valeurs prises par f sur* P *soit épais.*

Il résulterait de là une nouvelle définition d'une variation nulle de f sur un ensemble parfait P, même quand la série des V_n n'est absolument convergente pour aucune portion de P. Nous allons former tout à l'heure un exemple où, dans ce dernier cas, l'ensemble des valeurs de f sur P est mince. Mais auparavant nous montrerons, dans le cas de la convergence de $|V_n|$, que :

44. *Si une fonction f a une variation définie sur un ensemble parfait* P, *sa variation totale sur* P *coïncide avec la borne supérieure, et la limite quand δ tend vers zéro, de la somme η des mesures des ensembles de valeurs prises par f sur un système de portions en nombre fini, deux à deux distinctes ou juxtaposées, décomposant* P *et inférieures en dimension à δ.*

Comme plus haut, nous envisageons une fonction f_1 coïncidant avec f sur P et unioscillante dans tout contigu à P. Soit $h(x)$ la variation commune de f et de f_1 sur P entre a et x, a et b étant les extrémités de P. Soient $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_k$ le système de portions de P, décrit dans l'énoncé, et μ_i, ν_i les extrémités de ϖ_i. Ou bien μ_i et ν_{i+1} coïncident entre elles et avec un point de seconde espèce de P; ou bien ν_i est l'extrémité gauche d'un contigu à P, dont μ_{i+1} est l'extrémité droite. Par définition (n° 20) la variation totale de f sur P est la borne supérieure de la somme $\sigma' = \Sigma|h(\nu_i) - h(\mu_i)|$ pour toutes les décompositions possibles de P en portions ϖ_i. Si l'on partage une portion ϖ en deux ou plusieurs autres ϖ', la somme des variations absolues de h entre les extrémités des ϖ' vaut au moins la variation absolue de h entre les extrémités de ϖ.

Tout pareillement, les ensembles $\lambda(\varpi')$ de valeurs prises par f sur les nouvelles portions ϖ', en se réunissant, redonnent l'ensemble des valeurs prises sur ϖ. Mais il est évident que, les premiers ensembles pouvant se recouvrir partiellement, la mesure de $\lambda(\varpi)$ est au plus égale à la somme des mesures des $\lambda(\varpi')$. Un raisonnement d'un type bien connu montre que, selon les notations de l'énoncé, les bornes supérieures, finies ou infinies, de η et de σ', sont les limites respectives de ces mêmes nombres, quand δ tend vers zéro, ces limites étant indépendantes du système ϖ_i correspondant à δ.

ε étant donné, soit N un entier tel que $|V_{N+1}| + |V_{N+2}| + \ldots$ soit inférieur à ε, V_n étant la variation commune de f et de f_1 sur le contigu u_n à P.

Supposons δ inférieur à la plus petite longueur δ_0 des intervalles u_m d'indice au plus égal à N. Alors, toutes les extrémités de ces u_m sont parmi les extrémités des portions ϖ_i et forment des couples ν_r, μ_{r+1}. Soient γ_i, δ_i les points du segment $\mu_i\nu_i$ où f_1 prend respectivement ses minimum et maximum. γ_i et δ_i peuvent toujours être supposés sur ϖ_i, f_1 étant unioscillante (ou constante) sur tout contigu à P. L'ensemble des valeurs de f_1 sur $\mu_i\nu_i$ est le segment $f(\gamma_i)$, $f(\delta_i)$. L'ensemble des valeurs prises par f_1 dans les contigus à ϖ_i a sa mesure au plus égale à $(\mu_i\Sigma\nu_i)|V_n|$. Donc, la mesure η_i de l'ensemble des valeurs de f_1 sur ϖ_i est égale à

$$f(\delta_i) - f(\gamma_i) - \theta_i(\mu_i\Sigma\nu_i)|V_n| \qquad \text{avec} \qquad 0 < \theta_i < 1.$$

D'après

$$f = g + h \qquad \text{et} \qquad |g(\delta_i) - g(\gamma_i)| < (\mu_i\Sigma\nu_i)|V_n|,$$

on a

$$\eta_i < h(\delta_i) - h(\gamma_i) + (\mu_i\Sigma\nu_i)|V_n|;$$

et, en tenant compte de

$$f(\delta_i) - f(\gamma_i) > |f(\nu_i) - f(\mu_i)|,$$

il vient

$$|h(\nu_i) - h(\mu_i)| - 2(\mu_i \Sigma \nu_i)|V_n| < \eta_i < |h(\delta_i) - h(\gamma_i)| + 2(\mu_i \Sigma \nu_i)|V_n|.$$

Nous avons supposé $\delta < \delta_0$. Comme n dans ces formules est alors supérieur à N, on a, quel que soit le système ϖ_i correspondant à δ,

$$\eta > \Sigma |h(\nu_i) - h(\mu_i)| - 2\varepsilon = \sigma' - 2\varepsilon \tag{1}$$

et

$$\eta < \Sigma |h(\delta_i) - h(\gamma_i)| + 2\varepsilon = \tau + 2\varepsilon. \tag{2}$$

1° Si σ' est non bornée, les relations (1) montrent qu'il en est de même de η; 2° si σ' a pour borne supérieure (et pour limite, quand δ tend vers zéro) un nombre fini Φ, d'après les relations (1), la borne supérieure (et la limite) de η, si elle est finie, vaut au moins Φ. Considérons les relations (2). Quel que soit le système de portions ϖ_i décomposant P, l'intervalle linéaire $\delta_i \gamma_i$ étant toujours compris entre μ_i et ν_i, deux intervalles $\delta_i \gamma_i$ sont sans points communs. Donc, τ est inférieur à Φ. Donc la borne supérieure de η est finie et au plus égale à Φ. Donc, elle est exactement Φ. Le théorème est entièrement établi.

Dans le cas où la série V_n est non absolument convergente, le théorème précédent permettrait de définir une variation totale de f sur P.

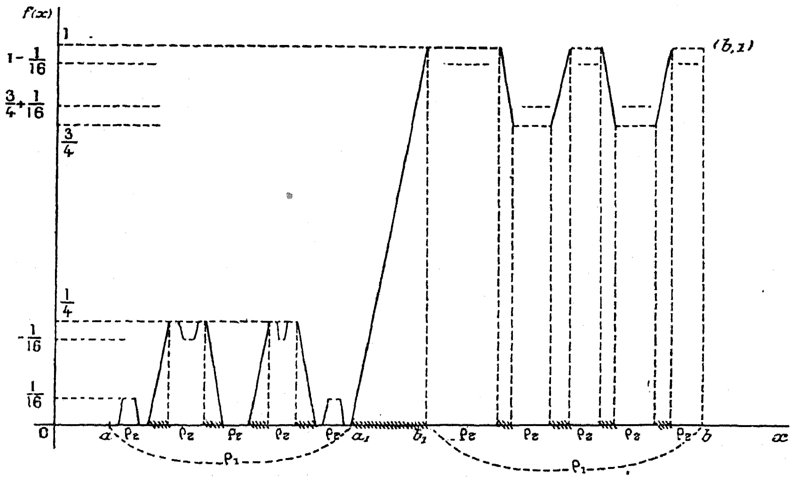
45. Montrons, par un exemple, que la série V_n peut être, pour toute portion d'un ensemble parfait P, non absolument convergente, la mesure des valeurs de f sur P étant cependant nulle. Ces valeurs seront, par construction, les points de l'ensemble parfait obtenu en retranchant du segment 0 — 1 sa moitié centrale $\left(\text{c'est-à-dire l'intervalle } \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, puis en répétant indéfiniment la même extraction sur les segments conservés. L'ensemble restant sera bien sans épaisseur. P est donné, mince ou épais, d'extrémités a, b. Sur chaque contigu à P, f sera choisi linéaire et déterminé par ses valeurs aux extrémités. Soit u_1 ou $a_1 b_1$ le plus grand (ou l'un des plus grands) des contigus à P. Je

pose

$$f(a_1) = f(a) = 0, \qquad f(b_1) = f(b) = 1.$$

Sur le segment aa_1, f sera compris entre 0 et $\frac{1}{4}$, sur $b_1 b$, entre $\frac{3}{4}$ et 1. Sur chacun de ces segments aa_1, $b_1 b$, je choisis quatre intervalles contigus à P, non surpassés en grandeur par les autres. Sur les intervalles

Fig. 4.



de rang impair compris dans aa_1, je prends f allant du minimum 0 au maximum $\frac{1}{4}$. Sur les intervalles de rang pair, c'est l'inverse, f va de $\frac{1}{4}$ à 0. De même sur $b_1 b$, nous prenons f allant de 1 à $\frac{3}{4}$ pour les intervalles impairs et de $\frac{3}{4}$ à 1 sur les intervalles pairs. Aux extrémités des deux segments ρ_1 conservés à la première opération, f est nul pour le segment gauche, égal à un pour le segment droit. Après la seconde, aux deux extrémités de chaque segment ρ_2 conservé, f prend la même valeur, 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$ ou 1. Aux opérations suivantes, sur chacun des segments ρ_2, f prendra des valeurs comprises entre 0 et $\frac{1}{16}$ pour les premiers, $\frac{1}{4} - \frac{1}{16}$ et $\frac{1}{4}$ pour les seconds, $\frac{3}{4}$ et $\frac{3}{4} + \frac{1}{16}$ pour les troisièmes.

$1 - \frac{1}{16}$ et 1 pour les quatrièmes. Nous choisirons sur chacun des segments ρ_2, 16 intervalles contigus à P, non surpassés de longueur par les autres, et sur ces intervalles, selon la parité du rang, nous faisons monter f du minimum au maximum accessible sur le segment ρ_2 d'où sont tirés les intervalles, ou au contraire descendre f du maximum au même minimum. De telle façon qu'après l'opération, il nous reste $2 \times 5 \times 17$ segments ρ_3, et qu'aux deux extrémités de l'un quelconque d'entre eux f a la même valeur, qui est l'une des huit énumérées. D'ailleurs les variations absolues $|V_n|$ sur les intervalles placés à chaque opération ont une somme égale à un pour chaque segment traité. La construction progressive de f est évidente. Les valeurs prises par f sur P seront celles de Q, ensemble mince, et la variation de f sur P n'est cependant définie dans aucun intervalle.

Autres classes remarquables de fonctions résolubles.

46. Nous allons voir que la classe des fonctions résolubles comprend celle des fonctions douées en tout point d'une dérivée approximative finie. *A priori*, une dérivée approximative connue en tout point détermine sa primitive. Car, si deux fonctions admettent partout la même dérivée approximative finie, zéro est en tout point la dérivée approximative de leur différence (n° 25), donc c'est un dérivé bilatéral, médian ou extrême de cette dernière. Cette différence est donc constante (1re Partie, n° 48). Un raisonnement analogue serait légitime si l'on savait seulement que la dérivée donnée vaut en tout point sur une épaisseur surpassant $\frac{1}{2}$. Définissons cette dernière expression.

$\varphi(x_0)$ étant un dérivé uni- ou bilatéral de f en x_0, formons l'ensemble $E(\varphi, \varepsilon)$ des points x satisfaisant à la relation

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \varphi(x_0)\right| < \varepsilon \qquad \text{ou} \qquad |\mathrm{VR}(f, x_0, x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon.$$

En x_0, $E(\varphi, \varepsilon)$ a les épaisseurs supérieure droite $e_d(\varepsilon)$, inférieure droite $e'_d(\varepsilon)$, supérieure gauche $e_g(\varepsilon)$, inférieure gauche $e'_g(\varepsilon)$, qui sont respectivement les nombres dérivés de même nom au point x_0, de la mesure de l'ensemble $E(\varphi, \varepsilon)$ entre un point fixe a à gauche de x_0 et un point variable x [1]. Quand ε tend vers zéro en décroissant, chacun des ensembles $E(\varphi, \varepsilon)$ contient les suivants. Donc, aucune de leurs quatre épaisseurs extrêmes ne va en croissant. Elles tendent vers des limites e_d, e'_d, e_g, e'_g. Nous dirons que f admet en x_0 *la dérivée droite* $\varphi(x_0)$ *sur une épaisseur supérieure* e_d, *sur une épaisseur inférieure* e'_d, et *la dérivée gauche* $\varphi(x_0)$ *sur une épaisseur supérieure* e_g, *sur une épaisseur inférieure* e'_g.

On montre comme au n° 2 de la deuxième Partie qu'il existe alors un ensemble E possédant en x_0 les épaisseurs supérieure droite e_d, inférieure droite e'_d, etc., et spécialement auquel $\varphi(x_0)$ est en x_0 la dérivée de f; en d'autres termes $\mathrm{VR}(f, x_0, x)$ tend vers $\varphi(x_0)$ quand x tend vers x_0 sans quitter E. Réciproquement, si E existe remplissant ces conditions, f admet, en x_0, $\varphi(x_0)$ pour dérivée droite et pour dérivée gauche, sur des épaisseurs respectives supérieure et inférieure au moins égales aux quatre nombres précédents. Quand le côté où vaut la dérivée φ n'est point spécifié, on sous-entend que φ est une dérivée bilatérale, et les épaisseurs maximum et minimum où elle est donnée comme valable sont respectivement le plus grand de e_d, e_g et le plus petit de e'_d, e'_g. Quand nous dirons que f admet la dérivée gauche ou bilatérale φ sur une épaisseur surpassant α, cette épaisseur est entendue inférieure ou minimum. Alors, il existe *a fortiori* un ensemble E, d'épaisseur définie (unique) gauche ou bilatérale surpassant α, et spécialement auquel f a pour dérivée φ.

Enfin la phrase « f admet en x_0 un ensemble dérivé droit (ou gauche) fini sur une épaisseur surpassant α » s'explique d'elle-même. Il existe alors un ensemble E′, ayant en x_0 une épaisseur inférieure droite (ou gauche) surpassant α, et spécialement auquel tous les nombres dérivés de f forment un ensemble (fermé) d'extrémités finies.

47. Montrons d'abord qu'une *dérivée bilatérale* φ, *valant en tout point*

---

(1) J'appelle *épaisseur maximum* de E en x_0 la plus grande des deux épaisseurs supérieures, droite et gauche, de E au même point; *épaisseur minimum*, la plus petite des deux épaisseurs inférieures.

sur une épaisseur surpassant $\frac{1}{2}$, détermine sa primitive [1]. En effet, soient f_1 et f_2 deux primitives de φ. Alors, relativement à tout point x_0, existent deux ensembles E_1 et E_2 d'épaisseur minimum en x. $\frac{1}{2}+\beta_1$ pour le premier, $\frac{1}{2}+\beta_2$ pour le second $\Big(\beta_1$ et β_2 sont l'un et

---

[1] Convenons de dire que $\varphi(x_0)$ est un *dérivé prépondérant droit* de f en x_0 si, ε étant un nombre positif indépendant, les deux ensembles $E_1(x_0, \varepsilon)$ et $E_2(x_0, \varepsilon)$ ainsi définis,

$$\mathrm{VR}(f, x_0, x) > \varphi(x_0) - \varepsilon \quad \text{et} \quad \mathrm{VR}(f, x_0, x) < \varphi(x_0) + \varepsilon,$$

ont chacun leur épaisseur moyenne *surpassant* $1:2$, dans l'intervalle x_0 à x_0+h $(h>0)$, pour *toute* valeur de h inférieure à un certain nombre positif η (η dépend de x_0 et de ε).

Ceci n'exclut pas l'hypothèse que, en x_0, les épaisseurs inférieures droites de l'un et l'autre ensemble soient *égales* à $1:2$. Elles ne peuvent évidemment être moindres. On montre comme dans un cas analogue (2e Partie, n° 2), que la condition ci-dessus équivaut à la suivante (*) :

Il existe *à droite de* x_0 deux ensembles $E_1(x_0)$ et $E_2(x_0)$, ayant dans l'intervalle x_0, x_0+h $(h>0)$ une épaisseur moyenne *surpassant* $1:2$ pour *toute* valeur de h inférieure à η_0, et tels que tous les nombres dérivés de f respectivement spéciaux à $E_1(x_0)$ et à $E_2(x_0)$ valent, les premiers *au moins* $\varphi(x_0)$, les seconds *au plus* $\varphi(x_0)$.

Il est évident que deux nombres satisfaisant aux conditions de $\varphi(x_0)$ coïncident nécessairement et que, l'ensemble $|\mathrm{VR}(f, x_0, x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ étant en x_0 épais à droite, $\varphi(x_0)$ est un dérivé droit, médian ou extrême, de f en x_0.

On définit pareillement le *dérivé prépondérant gauche* de f en x_0, quand ce nombre existe.

Une dérivée générale, ou approximative, ou valant sur une épaisseur inférieure (ou minimum) surpassant $1:2$, unilatérale (ou bilatérale), est un dérivé prépondérant, pour le même côté (ou bilatéral). Ces trois catégories de fonctions possèdent donc les trois propriétés suivantes appartenant à *un nombre dérivé* $\varphi(x)$ *d'une fonction continue* $f(x)$, *si* $\varphi(x)$ *est prépondérant bilatéral, ou unilatéral* **pour un côté invariable** : 1° $\varphi(x)$ *est limite de fonctions continues;* 2° $\varphi(x)$ *prend, entre* a *et* b, *toute valeur comprise entre* $\varphi(a)$

(*) **Il suffit de montrer que la première définition implique la seconde. Supposant l'existence des $E_1(x_0, \varepsilon)$, construisons $E_1(x_0)$. Soit ε_n une suite décroissante tendant vers zéro et η_n le nombre η correspondant à ε_n. Nous pouvons supposer les η_n décroissants. Nous déterminons une suite h_n décroissant à zéro, par la condition que l'épaisseur moyenne de $E_1(x_0, \varepsilon_n)$ entre x_0+h_{n+1} et x surpasse $\frac{1}{2}$, quel que soit x entre $x_0+\eta_{n+1}$ et $x_0+\eta_n$. h_{n+1} existe parce que l'épaisseur moyenne d'un ensemble entre deux points dont la distance est bornée inférieurement est une fonction uniformément continue de ces points. Soit E^n la partie de $E_1(x_0, \varepsilon_n)$ comprise entre x_0+h_{n+1} et $x_0+\eta_n$, et $E_1(x_0)$ la réunion de tous les E^n. Il est évident que l'épaisseur moyenne de $E_1(x_0)$ surpasse $1:2$ dans tout intervalle x_0, x_0+h, si $0<h<\eta_1$, et que toutes les limites de $\mathrm{VR}(f, x_0, x)$ quand x tend vers x_0 sans quitter $E_1(x_0)$ valent au moins $\varphi(x_0)$. On construirait d'une façon analogue $E_2(x_0)$ au moyen des $E_2(x_0, \varepsilon_n)$.**

l'autre positifs et inférieurs à $\frac{1}{2}$) et sur lesquels respectivement f_1 et f_2 ont en x_0 pour dérivée spéciale $\varphi(x_0)$. Les complémentaires de E_1 et de E_2 ont en x_0 des épaisseurs maximums $\frac{1}{2}-\beta_1$ et $\frac{1}{2}-\beta_2$, donc leur réunion a une épaisseur maximum inférieure à $1-\beta_1-\beta_2$, donc E_1 et E_2 ont en commun un ensemble E non nul, dont l'épaisseur minimum en x_0 est supérieure à $\beta_1+\beta_2$. Sur cet ensemble, la fonction

$$\mathrm{VR}(f_2-f_1,\, x_0,\, x)=\mathrm{VR}(f_2,\, x_0,\, x)-\mathrm{VR}(f_1,\, x_0,\, x)$$

tend vers zéro, que x tende vers x_0 d'un côté ou de l'autre sans quitter E. E ayant des points des deux côtés de x_0, puisque son épaisseur minimum est positive en x_0, zéro est en tout point un dérivé bilatéral pour f_2-f_1, qui est donc une constante.

---

et $\varphi(b)$; 3° *l'ensemble* $A<\varphi(x)<B$, *s'il existe, est épais* (et par suite, épais en lui-même).

Les mêmes propriétés appartiennent à $\psi(x)$, si $\psi(x)$ est *en tout point un dérivé bilatéral unique* d'une fonction continue. La *troisième* propriété ci-dessus appartient encore : *a*) *à tout nombre dérivé bilatéral limite de fonctions continues*; *b*) *à tout nombre dérivé unilatéral de côté invariable possédant les deux premières propriétés*.

Ces résultats ont été signalés aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences (5 juin 1916) et démontrés dans une Note parue en septembre 1916 dans l'*Enseignement mathématique*. Ils sont à rapprocher de ceux que j'ai donnés au sujet des fonctions à *continuité approximative* ou *prépondérante* (2e Partie, nos 10 à 13, en particulier la note des pages 183-185).

Dans ces divers exemples, la première propriété est établie grâce à la partie réciproque du théorème de M. Baire : « Une fonction ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait est limite de fonctions continues. » Les fonctions signalées dans cette Note sont, à ma connaissance, les seules avec les fonctions semi-continues, dont l'inclusion dans la classe 1 ait été démontrée par application du théorème précédent, sans que la définition de ces fonctions $\varphi(x)$ rende évidente une suite de fonctions continues $\varphi_n(x)$ tendant vers $\varphi(x)$. Il y aurait intérêt à déterminer ces fonctions φ_n pour les types ci-dessus.

Je signale enfin la forme sous laquelle j'utilise cette partie réciproque du théorème de Baire : *Pour que* φ *soit limite de fonctions continues, il suffit que, quels que soient* λ *et* μ, *le premier inférieur au second, les deux ensembles* $\varphi<\lambda$, $\varphi>\mu$ *ne soient pas partout denses sur un même ensemble parfait*. Je tire également parti de l'énoncé suivant : *Si* ω_n *est un intervalle dont la longueur tend vers zéro, si le point* c_n *est intérieur à* ω_n, *si l'ensemble des* c_n *est partout dense sur l'ensemble parfait* P, *les points de* P *intérieurs à une infinité d'intervalles* ω_n *forment un résiduel de* P (*voir* ci-après, au n° 48, plusieurs applications de ce théorème).

48. Nous allons montrer que *si, en tout point x_0 et d'un côté au moins, f admet un ensemble dérivé fini sur une épaisseur inférieure α surpassant $\frac{1}{2}$ (égalité exclue), f est résoluble*. L'épaisseur dont il s'agit dans l'énoncé dépend du point x. Mais si elle est $\frac{1}{2}+\beta(x)$, notre hypothèse est que $\beta(x)$, dont la borne inférieure peut être zéro, n'est jamais nul [1]. Notre démonstration contiendra trois parties : 1° moyennant la simple hypothèse : $\alpha > 0$ en tout point, l'ensemble des points du continu au voisinage desquels f a sa variation totale non bornée, est non dense; 2° avec cette même seule hypothèse, sur un ensemble parfait mince, f ne peut pas avoir une variation définie non nulle; 3° si α surpasse en tout point $\frac{1}{2}$, f a une variation réductible sur tout ensemble parfait discontinu. Les deux dernières propositions, à elles seules, justifient que, si α surpasse $\frac{1}{2}$, f est résoluble. Démontrons la première.

1° Je dis que *si une fonction f a, dans tout intervalle intérieur à un segment ab, une variation totale non bornée, il est impossible qu'elle ait, en tout point et pour au moins un côté, un ensemble dérivé fini sur une épaisseur inférieure positive.*

En effet, donnons-nous un entier positif très grand N. La variation totale de f étant infinie dans tout intervalle, également dans tout intervalle il existe des points c, d, entre lesquels la variation relative de f est supérieure à $+N^3$, et des points c', d', entre lesquels elle est inférieure à $-N^3$. Considérons un des premiers couples $(c<d)$. Posons $d-c=u$. On a

$$f(d)-f(c)>N^3u.$$

Soient k le point $d+Nu$ et C, D les points figuratifs de f correspondant à c et à d dans une représentation géométrique de f en coordonnées rectangulaires. Les parallèles à Ox menées par C et D (nous

[1] On verrait sans peine, par un raisonnement d'un type fréquemment utilisé ci-après et revenant à démontrer, dans un cas particulier, le dernier énoncé de la note de la page précédente, que, P étant un ensemble parfait quelconque, continu ou non, l'ensemble R des points de P où le minimum de $\beta(x)$ sur P est nul, R est non dense sur P.

les considérons comme horizontales) déterminent, avec les droites d'abscisses d et k, un rectangle MIHD ou R, de base $\mathrm{N}u$ et de hauteur supérieure à $\mathrm{N}^3 u$ (*fig.* 5). Divisons le rectangle R en N bandes β horizontales d'égale largeur, cette dernière surpassant donc $\mathrm{N}^2 u$. Notons que, si x varie entre d et k, le point figuratif de f n'est pas nécessairement dans le rectangle R. A chaque bande β faisons correspondre sur l'intervalle dk l'ensemble E (β), pouvant d'ailleurs être inexistant, des valeurs de x pour lesquelles le point figuratif de f est intérieur à cette bande. Les E (β) sont deux à deux distincts. Donc, la somme des épaisseurs des E (β) sur le segment dk est au plus égale

Fig. 5.

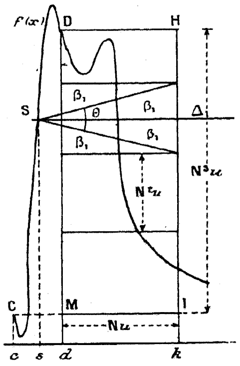


Fig. 6.

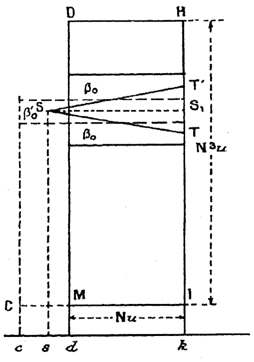
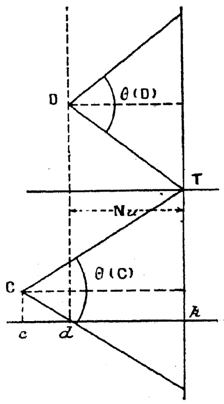


Fig. 7.



à 1. Les bandes β sont au nombre de N. Donc, pour l'une d'elles au moins, l'ensemble E(β) a, sur dk, une épaisseur au plus égale à $\frac{1}{\mathrm{N}}$, ce qui donne, sur le segment $dk = \mathrm{N}u$, une mesure au plus égale à u pour cet ensemble. Soient β_1 cette bande et Δ_1 la droite équidistante des côtés de β_1, prolongée vers la gauche au moins jusqu'à l'abscisse c. En vertu de la continuité de f, la courbe (x, f), passant par C et D, coupe Δ_1 en au moins un point S, d'abscisse s comprise entre c et d. Joignons S aux deux sommets droits de la bande β_1. Nous obtenons un angle θ ouvert à droite, bissecté par Δ_1, la tangente de la moitié de θ étant supérieure au demi-côté de la bande divisé par $k-c$, donc supérieure à $\frac{\mathrm{N}^2}{2(\mathrm{N}+1)} = \omega$.

Évaluons la mesure de l'ensemble e défini par les conditions :

$$-\omega < \frac{f(x)-f(s)}{x-s} < \omega, \qquad s < x < k.$$

A un point x de cet ensemble correspond un point figuratif de f situé dans le triangle obtenu en coupant θ par la droite $x = k$. Or, tous les points de θ d'abscisses comprises entre d et k sont dans β_1. Les points de e situés entre d et k sont donc agrégés à $E(\beta_1)$, et leur mesure totale est au plus égale à u.

Entre s et d la mesure de e est inférieure à $d - s < d - c = u$. Donc la mesure de e est inférieure à $2u$. Son épaisseur moyenne sur sk, qui surpasse Nu, est donc inférieure à $\frac{2}{N} = \eta$. ω croît indéfiniment avec N et $\eta\omega$ est inférieur à un. Enfin, N étant donné, cd a pu être pris intérieur à un intervalle quelconque; donc sa longueur et celle de ck peuvent être supposées inférieures à telle fonction de N que l'on veut, précisément à $1 : \omega$. Nous aboutissons donc à la conclusion suivante :

Si grand que soit le nombre positif ω, il existe un ensemble partout dense de points s, dont chacun est l'extrémité gauche d'un intervalle sk, de longueur inférieure à $\frac{1}{\omega}$, et sur lequel l'ensemble $e(\omega, s)$ des x où $\mathrm{VR}(f, s, x)$ est compris entre $-\omega$ et $+\omega$, a une épaisseur moyenne inférieure à $\frac{1}{\omega}$.

Les raisonnements développés pour démontrer le Premier Théorème des nombres dérivés (1re Partie, n° 28; voir aussi le dernier énoncé dans la note de la page 199) vont nous permettre d'établir que, en un résiduel de points γ, l'ensemble $e(L, \gamma)$, défini par $-L < \mathrm{VR}(f, \gamma, x) < L$, a une épaisseur inférieure droite nulle en γ, quel que soit le nombre positif L.

Reprenant en effet le cours de notre analyse, nous voyons que, d'après la continuité de f, s peut être entouré d'un intervalle $s's''$, situé entre c et d, et tel que, si ξ est intérieur à $s's''$, le point μ figuratif de f, correspondant à ξ, soit dans la bande β_1 et suffisamment près de S pour que les pentes des droites joignant μ aux sommets droits de la bande, comprennent entre elles les nombres

$-\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\omega}{2}$. Alors, si ξ est intérieur à $s's''$, l'ensemble défini par les inégalités simultanées

$$-\frac{\omega}{2} < \mathrm{VR}(f, \xi, x) < \frac{\omega}{2}, \qquad \xi < x < k,$$

a (on le verrait comme plus haut) une mesure inférieure à $2u$; donc sur ξk, supérieur à $\mathrm{N}u$, une épaisseur moyenne inférieure à $\frac{1}{\omega}$.

Soit alors un ensemble de points α_n, dénombrable et partout dense sur ab. Dans l'intervalle $\alpha_n - \frac{1}{n}$ à $\alpha_n + \frac{1}{n}$, nous pouvons trouver un système de points s'_n, s''_n, k_n, rangés numériquement dans ce même ordre, et tels que, pour toute valeur de ξ intérieure à $s'_n s''_n$, l'épaisseur moyenne sur ξk_n de l'ensemble

$$-\frac{n}{2} < \mathrm{VR}(f, \xi, x) < \frac{n}{2}$$

soit inférieure à $\frac{1}{n}$. Soit u_n l'intervalle $s'_n s''_n$. Les u_n sont partout denses sur ab. Les points étrangers à u_p, u_{p+1}, ... forment un ensemble fermé non dense H_p. La réunion des H_p étant un ensemble gerbé, son complémentaire R, partout dense, est par définition un résiduel de ab. Soit γ un point de R. γ est étranger à tous les H_p, donc, quel que soit p, intérieur à l'un au moins des intervalles d'indice au moins égal à p. Donc, il existe une infinité d'indices m tels que γ soit intérieur à $s'_m s''_m$. Pour ces valeurs de m, l'ensemble $e\left(\frac{m}{2}, \gamma\right)$ défini par

$$-\frac{m}{2} < \mathrm{VR}(f, \gamma, x) < \frac{m}{2}$$

a sur l'intervalle γk_m une épaisseur moyenne inférieure à $\frac{1}{m}$. Donc, quel que soit le nombre positif L, l'épaisseur inférieure droite de $e(\mathrm{L}, \gamma)$ en γ est zéro. Donc, en aucun point de R, f ne possède, sur une épaisseur inférieure droite positive, un ensemble dérivé fini.

Le côté gauche comporte un résultat analogue vérifié sur un résiduel R'. R et R' ont en commun un résiduel (1[re] Partie, p. 123-124, et 2[e] Partie, p. 163 en note) en tout point duquel f ne possède d'aucun côté un ensemble dérivé fini sur une épaisseur positive. *Si donc f possède en tout point, et pour au moins un côté, un ensemble dérivé fini sur une épaisseur inférieure positive, la variation totale de f sur le continu n'est infinie qu'au voisinage d'un ensemble non dense.*

2° Supposons qu'*une fonction f ait sur un ensemble parfait mince une variation définie non nulle.* Nous pouvons réduire cet ensemble à un autre P, sur toute portion duquel f ait une variation définie, uni-oscillante, par exemple croissante (n° 13). Nous allons montrer qu'*en tout point d'un certain résiduel de* P, *f n'admet d'aucun côté un ensemble dérivé fini sur une épaisseur inférieure positive.*

Nous avons établi (n° 42 *bis*) qu'il existe un ensemble de points c (désignés par ξ au n° 42 *bis*) partout denses sur P, tels que, pour toute valeur de ε inférieure à 1 $\left(\text{en particulier pour } \varepsilon = \frac{1}{6}\right)$: 1° spécialement à P, $f(x)$ a la dérivée bilatérale $+\infty$ au point c, lequel est donc toujours de seconde espèce; 2° il existe un nombre positif h tel que, pour toute valeur de d agrégée à P et comprise entre $c-h$ et $c+h$, l'épaisseur moyenne, sur le segment $f(c)$ à $f(d)$, de l'ensemble des valeurs prises par f sur P entre c et d, surpasse $1-\varepsilon = 1-\frac{1}{6}$.

Cela étant, donnons-nous un entier N. D'après la première propriété de c, prenons d entre c et $c+h$ de manière que la pente de CD surpasse N^3, C et D étant les points figuratifs de f en c et d. Nous reprenons les premières notations du paragraphe précédent. Posant $d-c=u$ et $k=d+Nu$, nous formons (*fig.* 6) le rectangle R ou MIHD dont les côtés horizontaux, prolongés s'il le faut, passent en C et D, et les côtés verticaux, en d et k sur Ox. Nous divisons R en 2N bandes égales β par des parallèles à Ox. Soit toujours $E(\beta)$ l'ensemble des x intérieurs à dk et auxquels correspond un point figuratif de f situé dans la bande β. Celles des bandes β pour lesquelles l'épaisseur moyenne de $E(\beta)$ sur dk est au moins égale à $\frac{1}{N}$, sont en nombre inférieur à N. Il y a donc au moins la moitié des bandes β pour lesquelles l'épaisseur de $E(\beta)$ sur dk est inférieure à $\frac{1}{N}$. Je désigne par β_0 l'une quelconque de ces dernières. Entre les bases horizontales de β_0, menons deux parallèles à ces dernières au tiers et aux deux tiers de leur distance mutuelle. La zone comprise entre ces deux nouvelles parallèles détermine avec les verticales de c et d un rectangle β'_0. Examinons s'il y a des points x, agrégés à P entre c et d, et pour lesquels le point figuratif de f est intérieur à l'un des rectangles β'_0. La somme des hauteurs des β'_0 étant le tiers de la somme des hauteurs des β_0, lesquelles comprennent au moins la moitié des β, la somme des hauteurs des β'_0 est supérieure au sixième de $\mathrm{MD} = f(d) - f(c)$. Or soit ρ l'ensemble, évidemment fermé (et parfait), des points figuratifs de f correspondant à des valeurs de x agrégées à P, et $\rho(u)$ la partie de ρ se projetant horizontalement sur u. L'ensemble λ des valeurs prises par f sur P entre c et d a, sur le segment $f(c), f(d)$, une épaisseur au moins égale à $1 - \frac{1}{6}\cdot$ Cette propriété signifie encore que la projection orthogonale de $\rho(u)$ sur la droite $x = d$, forme sur le segment MD un ensemble d'épaisseur moyenne supérieure à $1 - \frac{1}{6}\cdot$ Donc certaines de ces projections sont intérieures au côté droit de l'un des rectangles β'_0, et le point de ρ correspondant est dans ce même rectangle β'_0, puisqu'il est à la fois entre les côtés horizontaux et les côtés verticaux de celui-ci. Soient donc S un point de ρ situé dans un rectangle β'_0, S_1 sa projection orthogonale sur IH. l étant la hauteur de β'_0 et le tiers de celle de β_0, soient sur IH, T′ et T″ les points situés de part et d'autre de S_1 et à la distance l de ce dernier. T′ et T″ sont sur le côté droit de β_0. L'angle T′ST″, dont la bissectrice est horizontale, a la tangente de sa demi-ouverture supérieure à $\frac{l}{k-c}\cdot$ Or,

$$k - c = (\mathrm{N}+1)u, \qquad 6\mathrm{N}l = f(d) - f(c) > \mathrm{N}^3 u.$$

Donc la tangente considérée surpasse $\frac{\mathrm{N}^2}{6(\mathrm{N}+1)} = \omega_0$. D'ailleurs l'ensemble η des x pour lesquels le point figuratif de f est situé dans le triangle T′ST″, est inclus dans l'ensemble réunissant $\mathrm{E}(\beta_0)$ et l'intervalle cd. Or l'épaisseur de $\mathrm{E}(\beta_0)$ sur dk est inférieure à $\frac{1}{\mathrm{N}}$, donc la mesure de $\mathrm{E}(\beta_0)$ est inférieure à u. Donc la mesure de η est inférieure à $2u$. La distance sk (s étant l'abscisse de S) est supérieure à Nu. Donc, l'épaisseur moyenne de η sur sk est inférieure à $\frac{2}{\mathrm{N}} < \frac{4}{\omega_0}$.

En résumé, c peut être choisi indifféremment dans un ensemble partout dense sur P, et d est un nombre quelconque surpassant c de moins de h (page 204); s agrégé à P est compris entre c et d; k surpasse c de moins de $(\mathrm{N}+1)(d-c)$. Donc, quels que soient les nombres positifs ω_0 (exactement lié à N) et h_1, il existe *dans toute portion* ϖ de P un nombre s, auquel correspond un nombre k vérifiant les inégalités $s < k < s + h_1$, de manière que l'ensemble

$$-\omega_0 < \mathrm{VR}(f, s, x) < \omega_0$$

ait sur le segment sk une épaisseur moyenne inférieure à $\frac{4}{\omega_0}$.

On montre comme plus haut l'existence d'un intervalle $s's''$, de longueur inférieure à $\frac{1}{\omega_0}$, contenant s, mais non pas k, et pour tout point ξ duquel l'ensemble

$$-\frac{\omega_0}{2} < \mathrm{VR}(f, \xi, x) < \frac{\omega_0}{2}$$

a sur ξk une épaisseur moyenne inférieure à $\frac{4}{\omega_0}$. Donnons à ω_0 la suite des valeurs entières. Soit s_n la suite correspondante des valeurs de s, choisie de façon que l'ensemble s_n soit partout dense sur P. Alors, les points γ de P, intérieurs à une infinité d'intervalles $s'_n s''_n$, forment un résiduel de P (note de la page 199, à la fin), et l'ensemble $e(\mathrm{A}, \gamma)$ défini par

$$-\mathrm{A} < \mathrm{VR}(f, \gamma, x) < \mathrm{A}$$

possède en γ une épaisseur inférieure droite nulle, quel que soit A.

Les mêmes raisonnements appliqués au couple c, d, mais à une bande verticale de largeur Nu et dont la bordure *droite* passe par C, nous fourniraient un résiduel analogue pour le côté gauche. Donc, en tout point d'un certain résiduel de P, f n'a ni d'un côté ni de l'autre un ensemble dérivé fini sur une épaisseur inférieure positive. Si donc la propriété opposée à celle-ci appartient par hypothèse à f, c'est que f a, sur tout ensemble parfait mince, une variation ou bien non définie, ou bien définie et nulle.

3° Montrons enfin que *si la variation de f sur l'ensemble parfait* P *est irréductible, l'ensemble des points où f n'admet d'aucun côté un ensemble dérivé fini sur une épaisseur surpassant $\frac{1}{2}$, contient un résiduel de* P.

En effet, nous savons (n° 36) que si la variation de f sur P est irréductible, c'est-à-dire si elle n'est définie sur aucune portion ϖ de P, il existe dans ϖ des couples de points c, d et c', d' agrégés à P, tels que, entre c et d, la variation relative de f est supérieure à N^2 et, entre c' et d', elle est inférieure à $-N^2$. Considérons le premier couple. Posant encore

$$k = d + N(d - c) = d + Nu,$$

menons (*fig.* 7) la perpendiculaire à Ox d'abscisse k, et l'horizontale équidistante de C et de D, coupant la droite précédente en T. Joignons CT, DT et formons les angles $\theta(C)$, $\theta(D)$ ayant pour sommets respectifs C et D où leurs côtés sont limités, ouverts à droite avec des bissectrices horizontales, le premier admettant pour côté CT, le second DT. Le plus petit de ces angles est $\theta(C)$ dont la demi-ouverture a pour tangente $\frac{N^2}{2(N+1)} = \omega$. Les points x compris entre d et k, et donnant à f un point figuratif dans $\theta(C)$ ou dans $\theta(D)$, ont respectivement sur dk des épaisseurs moyennes e_1, e_2 dont la somme est au plus égale à un. L'un de ces deux nombres est donc au plus égal à $\frac{1}{2}$. Plaçons S au point C ou D correspondant. Alors l'ensemble

$$-\omega < \mathrm{VR}(f, s, x) < \omega$$

a sur $sk = sd + dk \geqq Nu$ une mesure inférieure à $\frac{dk}{2} + sd$, et une épaisseur moyenne inférieure à $\frac{dk + 2sd}{2(sd + dk)}$, dont la plus grande valeur est pour $s = c$, soit

$$\frac{N+2}{2(N+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(N+1)} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega}.$$

En résumé, N ou ω étant donnés, on peut choisir u assez petit pour que $(N+1)u$ soit inférieur à un nombre quelconque h fixé d'avance, par exemple $\frac{1}{\omega} \cdot sk$ sera dès lors inférieur à ce même nombre, s appartenant de plus à telle portion ϖ de P que l'on aura voulu choisir. Donc, quels que soit les nombres positifs ω grand et h petit, il existe un ensemble partout dense sur P de nombres s, auxquels correspondent des nombres k vérifiant les inégalités $s < k < s + h$, de manière que l'ensemble

$$-\omega < \mathrm{VR}(f, s, x) < \omega$$

ait sur le segment sk une épaisseur moyenne inférieure à $\frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega}$.

On déduit de là qu'en tout point d'un résiduel de P, f ne possède d'ensemble dérivé droit fini sur aucune épaisseur (inférieure) surpassant 1 : 2. En appliquant les raisonnements précédents au même couple c, d et à une bande verticale à côté droit passant par c, on démontre la même proposition pour le côté gauche. Et par suite, l'absence sur toute portion de P d'une variation définie entraîne pour la fonction f, quel que soit ξ sur un certain résiduel de P, l'existence au point ξ de dérivés infinis, spécialement à tout ensemble dont l'épaisseur inférieure en ξ surpasse 1 : 2 au moins d'un côté. Donc inversement, une fonction possédant en tout point, pour au moins un côté, un ensemble dérivé fini sur une épaisseur inférieure surpassant $\frac{1}{2}$, a, d'après le troisième paragraphe, sa variation réductible sur tout ensemble parfait discontinu, puis est résoluble d'après le second. En particulier, elle a une dérivée approximative sur une épaisseur pleine (1).

---

(1) Soient E un ensemble quelconque, E_0 l'ensemble fermé obtenu en ajoutant à E ses points limites. Les dérivés d'une fonction continue f, spéciaux à E ou spéciaux à E_0, sont les mêmes. Soit (f, E) la fonction coïncidant avec f sur E_0 et linéaire sur chaque *segment* contigu à E. (f, E) est continue. En tout point de E, sauf éventuellement aux points de première espèce de E_0 (où les dérivés spéciaux de f sont définis d'un seul côté), les dérivés généraux (ou relatifs au continu) de (f, E) coïncident avec les dérivés de f spéciaux à E. Les points où les premiers ne réalisent pas l'un des quatre cas fondamentaux formant un ensemble mince, *sur une pleine épaisseur de* E, *les quatre dérivés extrêmes de f spéciaux à* E *ne peuvent se grouper que suivant l'un des quatre modes désignés par* (AA'), [BD'], [CC'], [DB'] *dans la* 1re *Partie* (n° 57; *voir* aussi les Introductions des 2e et 3e Parties).

Convenons de dire que f réalise en un point le *cas* Ω des nombres dérivés quand f possède en ce point *une dérivée approximative finie*, et le *cas* Ω' quand elle admet *de chaque*

49. Convenons de dire que φ est au point x_0 un *dérivé droit*

---

côté chacun des dérivés extrêmes $+\infty$ *et* $-\infty$ *sur l'épaisseur supérieure un* (et par suite sur l'épaisseur inférieure zéro).

Je dis qu'*une fonction continue quelconque ne saurait réaliser*, *sauf en un ensemble mince*, *d'autre cas que* Ω *et* Ω'.

En effet, soient E un ensemble épais quelconque et H l'ensemble des points de E où, *spécialement* à E, f admet au moins un dérivé extrême fini. (f, E) admet sur H le même nombre comme dérivé extrême *général*. Donc (note de la page 181), (f, E) présente sur une pleine épaisseur de H le cas Ω, et il en est de même de f, parce que l'ensemble $f \neq (f, E)$, inclus dans le complémentaire de E, a l'épaisseur zéro sur une pleine épaisseur de H.

Donc, si en aucun point de l'ensemble épais E, f ne réalise le cas Ω, H est mince. Donc, sur une pleine épaisseur e de E, f présente *spécialement à* E le cas (AA') (dérivés extrêmes $+\infty$ et $-\infty$).

Supposons supprimé dans e l'ensemble mince où E n'aurait pas l'épaisseur un. Supposons E *parfait et épais en lui-même* (e est donc partout dense sur E). Soient c un point de e, et d un point à droite de c (et dont la distance à c peut être indifféremment réduite) tel que, moyennant $c < x < d$, l'épaisseur de E entre c et x surpasse $1-\varepsilon$. Quel que soit C, la fonction $f_1 = f - Cx$ admet en c, spécialement à E, le dérivé droit $+\infty$. Donc, le maximum de f_1 sur E dans le segment cd, n'est pas atteint en c, mais en un autre point s de E. On a $f_1(s) - f_1(x) \geqq 0$, et par suite $\mathrm{VR}(f, x, s) \geqq C$ pour tous les points x de E intérieurs à cs, donc sur une épaisseur moyenne dans cs supérieure à $1-\varepsilon$. Les couples c, s existant dans toute portion de E quels que soient C et ε, on en déduit par le raisonnement du Premier Théorème des nombres dérivés (1re Partie, nos 28, et suivants) que f possède en tout point d'un résiduel de E, le dérivé gauche $+\infty$ sur l'épaisseur supérieure un. En échangeant les côtés gauche et droit, et les sens d'inégalité, on voit que, sur un résiduel de E, f réalise le cas Ω', sous la seule hypothèse qu'en aucun point de E, f ne réalise Ω.

Tout ensemble épais contenant un ensemble parfait épais en lui-même, il est donc impossible qu'en tout point d'un ensemble épais, f ne réalise ni Ω ni Ω'. C. Q. F. D.

En particulier, *l'ensemble des points où, d'un côté au moins, f possède, spécialement à une épaisseur inférieure positive, un dérivé extrême fini, se réduit, à un ensemble mince près, à l'ensemble des points où f possède une dérivée approximative bilatérale finie.*

Et encore, *l'ensemble des points où f possède, au moins d'un côté, sur une épaisseur inférieure positive, une dérivée infinie, est de mesure nulle.*

Étant donné un ensemble parfait épais P, on pourrait, par une construction analogue à celle du n° 45 (en choisissant Q épais en lui-même), obtenir une fonction continue possédant une dérivée continue hors de P et réalisant le cas Ω' sur une pleine épaisseur de P.

E' et E'' étant deux ensembles complémentaires quelconques, on construira ensuite, par une méthode analogue à celle du n° 62 (1re Partie), une fonction f réalisant respectivement les cas Ω et Ω' sur de pleines épaisseurs de E' et de E'', et l'on pourra même (note au début du Chapitre II) se donner la dérivée approximative de f sur une pleine épaisseur de E'.

d'épaisseur, si les deux ensembles

$$\mathrm{VR}(f, x_0, x) > \varphi - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \mathrm{VR}(f, x_0, x) < \varphi + \varepsilon$$

ont l'un et l'autre en x_0 une épaisseur *supérieure* droite *positive*, donc s'ils n'ont ni l'un ni l'autre en x_0 une épaisseur droite exacte et nulle. En particulier, φ sera un dérivé d'épaisseur droit, si l'ensemble

$$|\mathrm{VR}(f, x_0, x) - \varphi| < \varepsilon$$

a au point x_0, pour toute valeur positive de ε, une épaisseur supérieure droite positive. Si pour une valeur α de ε, le précédent ensemble a l'épaisseur droite zéro en x_0, φ est dérivé d'épaisseur moyennant que les deux ensembles

$$\mathrm{VR} > \varphi \qquad \text{et} \qquad \mathrm{VR} < \varphi$$

soient l'un et l'autre doués en x_0 d'une épaisseur supérieure droite positive. On définit de même *les dérivés gauches d'épaisseur*.

Je dis que *si l'on sait de la fonction f qu'elle possède* : 1° *en tout point pour au moins un côté, un ensemble dérivé fini sur une épaisseur surpassant $\frac{1}{2}$*; 2° *sur une épaisseur pleine, le dérivé d'épaisseur φ, pour un côté inconnu, indifféremment variable, alors f est complètement déterminée.*

Car f, étant réductible d'après la première hypothèse, possède, sur une épaisseur pleine e', une dérivée approximative ψ et, sur une épaisseur pleine e'', le dérivé d'épaisseur φ. Donc, sur e commun à e' et à e'', f possède simultanément la dérivée approximative ψ et le dérivé d'épaisseur φ. Mais ξ étant sur e, les ensembles

$$\mathrm{VR}(f, \xi, x) > \psi(\xi) + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \mathrm{VR}(f, \xi, x) < \psi(\xi) - \varepsilon,$$

constitués de points x supérieurs ou inférieurs à ξ, ont pour toute valeur positive de ε une épaisseur nulle en ξ, parce que ψ est dérivée approximative de f en ξ. Donc φ, dérivé d'épaisseur, ne saurait surpasser $\psi + \varepsilon$ ni être inférieur à $\psi - \varepsilon$, quel que soit le côté où est supposé valoir φ. Donc f admet φ pour dérivée approximative sur une épaisseur pleine. Donc f, étant résoluble d'après sa première condition, est parfaitement déterminée par φ.

50. Montrons par un exemple que *f n'est pas nécessairement résoluble, si elle est simplement assujettie à avoir en chaque point, pour au moins un côté, un ensemble dérivé fini sur une épaisseur inférieure* AU MOINS ÉGALE *à* $\frac{1}{2}$ et non pas comme ci-dessus *supérieure* à $\frac{1}{2}$.

Nous allons donner un exemple de *fonction dont la variation n'est définie sur aucune portion d'un certain ensemble parfait* P, d'ailleurs mince, cette fonction *possédant hors de* P *une dérivée ordinaire continue et, en tout point de* P, *une dérivée bilatérale nulle sur l'épaisseur* $\frac{1}{2}$. Notre construction rappellera par certains aspects celle de la fonction du n° 45. Elle sera progressive et consistera en une suite d'opérations dont chacune aura pour donnée le résultat des précédentes.

Nous voulons définir f sur le segment $0 - 1$, coïncidant avec x en zéro et un, donc admettant les points figuratifs O (0,0) et A (1,1). Formons le carré de diagonale OA. Nous ferons en sorte que la courbe représentative de f soit contenue dans ce carré et admette le même centre de symétrie que lui. Donc $0 \leqq f \leqq 1$ et $f(x) = 1 - f(1-x)$. Plaçons sur le côté supérieur et sur le côté inférieur, des points de subdivision décomposant ces côtés en $2n$ parties égales. Attribuons, en une première approximation, à la courbe représentative d'une fonction f_0, les parties de rang impair sur le côté inférieur et celles de rang pair sur le côté supérieur. Ainsi, f_0 serait zéro sur les intervalles

$$\left(0, \frac{1}{2n}\right), \quad \left(\frac{2}{2n}, \frac{3}{2n}\right), \quad \ldots, \quad \left(\frac{2p}{2n}, \frac{2p+1}{2n}\right), \quad \ldots, \quad \left(\frac{2n-2}{2n}, \frac{2n-1}{2n}\right)$$

et f_0 vaudrait 1 sur les intervalles

$$\left(\frac{1}{2n}, \frac{2}{2n}\right), \qquad \ldots, \qquad \left(\frac{2n-1}{2n}, \frac{2n}{2n} = 1\right).$$

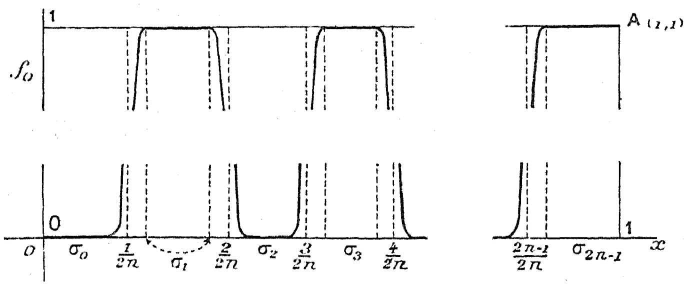
Mais f_0 serait discontinue aux points $\frac{p}{2n}$. Pour éviter ceci, autour de chacun des points $\frac{p}{2n}$, sauf pour $p = 0$ et $p = 2n$, détachons un intervalle ayant pour milieu ce point et pour longueur $\frac{1}{n^2}$, donc l'intervalle $\frac{p}{2n} - \frac{1}{2n^2}$ à $\frac{p}{2n} + \frac{1}{2n^2}$. Désignons par σ_p le segment $\frac{p}{2n} + \frac{1}{2n^2}$ à

$\frac{p+1}{2n} - \frac{1}{2n^2}$, σ_0 et σ_{2n-1} étant toutefois

$$\left(0, \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{2n-1}{2n} + \frac{1}{2n^2}, 1\right).$$

On a sur σ_p, $f_0 = 0$ si p est pair, $f_0 = 1$ si p est impair. Entre $\frac{p}{2n} - \frac{1}{2n^2}$ et $\frac{p}{2n} + \frac{1}{2n^2}$, nous prenons pour f_0 une fonction unioscillante, ayant une dérivée continue, celle-ci étant nulle aux deux extrémités du segment, du côté intérieur (*fig.* 8). Nous pouvons évidemment réa-

Fig. 8.



liser ceci tout en satisfaisant à la condition $f_0(x) + f_0(1-x) = 1$, vérifiée par les valeurs déjà choisies pour f_0. Alors, quel que soit x compris entre 0 et 1, f_0 est définie et continue ainsi que sa dérivée.

Posons $\frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} = \sigma$. σ est la longueur des segments σ_p, sauf les deux extrêmes ($p = 0$ et $p = 2n - 1$). Cherchons sur ob l'épaisseur moyenne de l'ensemble $f_0 = 0$. Si b est sur σ_0, cette épaisseur est 1. Quand b se déplace vers la droite dans un intervalle σ_{2p}, l'ensemble et sa base s'accroissent de la même longueur, donc l'épaisseur augmente. Entre deux intervalles σ_{2p} consécutifs, l'ensemble ne varie pas, son épaisseur sur ob diminue donc. L'épaisseur prend donc ses minimums relatifs aux extrémités gauches des intervalles σ_{2p}, pour $p = 1, \ldots, n-1$, et la plus petite de ses valeurs en ces n points est son minimum absolu. Soit donc $b = \frac{2p}{2n} + \frac{1}{2n^2}$. La mesure de l'ensemble $f_0 = 0$ sur ob est

$$\sigma_0 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{2p-2} = p\sigma + \frac{1}{2n^2}.$$

L'épaisseur de cet ensemble sur ob vaut $\frac{2n^2p\sigma+1}{2np+1}\cdot$ $n\sigma$ étant inférieur à 1, cette expression surpasse toujours la valeur qu'elle a pour p infini, soit $n\sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\cdot$ Donc l'épaisseur de l'ensemble $f_0 = 0$ entre 0 et b surpasse toujours $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\cdot$ L'épaisseur de l'ensemble $f_0 = 1$ entre b et 1 surpasse le même nombre.

Si à deux points c et d correspondent des points représentatifs C et D d'ordonnées p et q, nous effectuons sur x et sur f_0, deux transformations linéaires $c+(d-c)x$ et $p+(q-p)f_0$, changeant le carré de diagonale OA en le rectangle de diagonale CD et de côtés parallèles aux axes. (Tous les rectangles dont il s'agira ci-après seront ainsi orientés et désignés simplement par une de leurs diagonales.) La transformée de f_0 que nous désignerons par $f_0(n, \mathrm{C}, \mathrm{D})$ a dans sa courbe représentative (symétrique par rapport au centre du rectangle CD) $2n$ segments horizontaux égaux, sauf les deux extrêmes, à $(d-c)\sigma$, n d'entre eux, où f vaut p, situés sur la base contenant C, et alternant avec les n autres, où f vaut q, situés sur la base contenant D. Quel que soit b entre c et d, l'épaisseur moyenne de l'ensemble $f_0 = p$ entre c et b, celle de l'ensemble $f_0 = q$ entre b et d, surpassent l'une et l'autre $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\cdot$

Cela posé, désignons généralement par (S, θ, d) et par (S, θ, g) deux angles ayant l'un et l'autre pour sommet le point S, où leurs côtés sont limités, ayant leur bissectrice intérieure parallèle à Ox, leur moitié égale à θ, et ouverts le premier vers la droite, le second vers la gauche. Observons que, si un point M est dans un angle (S, θ, d), ce même angle contient toute la demi-droite indéfinie menée par M parallèlement à l'axe des x et dirigée dans le sens positif. La propriété analogue vaut pour l'angle (S, θ', g) et la direction des x négatifs.

Donnons-nous une suite $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \ldots$, positive, décroissant à zéro. Soit α_1 inférieur à $\frac{1}{2}\theta_1$. Entre α_1 et $\gamma_1 = 1 - \alpha_1$, nous choisissons f égal à la fonction f_0 ayant pour champ de définition $\alpha_1\gamma_1$, prenant en α_1 et γ_1 respectivement les valeurs 0 et 1, et correspondant à une fréquence n assez grande pour que l'épaisseur de l'ensemble $f=0$ sur $\alpha_1\beta$ et celle de $f=1$ sur $\beta\gamma_1$ surpassent l'une et l'autre $\frac{1-\theta_1}{2}$, quel que soit β entre α_1 et γ_1. Ces valeurs de f satisfont, indépendamment des suivantes, à la condition $f(x)+f(1+x)=1$. Considérons, quand β est entre γ_1 et 1, l'épaisseur moyenne sur $\alpha_1\beta$ de l'ensemble e où $f=0$. La mesure de e entre α_1 et β surpasse la mesure de e entre α_1 et γ_1, donc *a fortiori*

$$\frac{1}{2}(1-\theta_1)(1-2\alpha_1)>\frac{1}{2}(1-\theta_1)^2.$$

D'après $\beta-\alpha_1<1$, ce même nombre borne inférieurement l'épaisseur cherchée.

ρ_1 étant positif et inférieur à α_1, je peux déterminer h_1 positif et assez petit pour que : 1° quel que soit S dans le rectangle R_1 de sommets opposés O et $A_1(\rho_1, h_1)$, l'angle (S, θ_1, d) contienne le point α_1 et par suite tous les points de Ox situés à droite de α_1. (Il faut et il suffit pour cela que la condition soit vérifiée quand S est en A_1.) Alors, si S' est dans le rectangle R'_1 égal au précédent et de sommet supérieur droit A, l'angle (S', θ_1, g) contient le point $(\gamma_1, 1)$ et, à gauche de ce point, tout le côté supérieur du carré OA. Par construction ultérieure, entre 0 et ρ_1, le point figuratif de f sera agrégé à R_1 et, entre $1-\rho_1$ et 1, il le sera à R'_1. Les sommets inférieurs gauches et supérieurs droits des rectangles R_1 et R'_1 appartiendront à la courbe. Donc, $f(0)=0$, $f(\rho_1)=h_1$, et de même $f(1-\rho_1)=1-h_1$, $f(1)=1$. Une règle analogue s'appliquera à chaque stade de la construction.

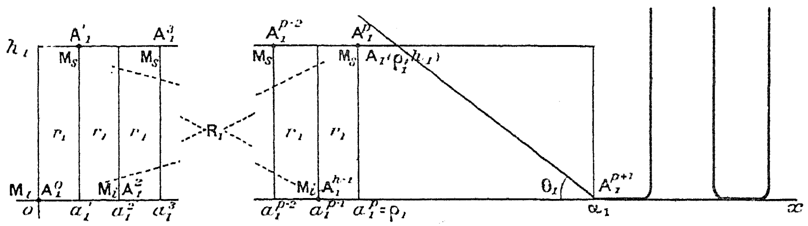
Soit $E(S, \theta, d)$ l'ensemble des x pour lesquels le point figuratif de f est dans l'angle (S, θ, d). Faisons correspondre de même à l'angle (S, θ, g) l'ensemble $E(S, \theta, g)$. Si S est dans R_1, $E(S, \theta_1, d)$ contient tout l'ensemble des x définis par $f=0$, $\alpha_1<x$. Donc, quel que soit β entre α_1 et 1, $E(S, \theta_1, d)$ possède sur $\alpha_1\beta$ une épaisseur moyenne supérieure à $\frac{1}{2}(1-\theta_1)^2$.

L'intervalle $(\rho_1, 1-\rho_1)$, soit i_1, sera contigu à l'ensemble parfait P où f, avec une variation irréductible, aura partout une dérivée bilatérale finie (précisément nulle) valant sur une épaisseur au moins égale à $\frac{1}{2}$. Les segments $(0, \rho_1)$ et $(1-\rho_1, 1)$ désignés par Σ_1 ont leurs extrémités sur P et contiennent la totalité de P. f est actuellement défini sur le champ λ_1, constitué par le segment $\alpha_1\gamma_1$, et séparé des Σ_1 par deux intervalles j_1, savoir (ρ_1, α_1), $(\gamma_1, 1-\rho_1)$.

La première opération consiste dans le choix de λ_1 et de i_1 (équivalent à celui des Σ_1 et des j_1), dans la construction du rectangle R_1 et dans la définition de f sur λ_1. Passons à la seconde opération.

Soit p un entier impair supérieur à $\frac{1}{h_1}\cdot$ Nous divisons les deux bases de R_1 en p parties équivalentes (*fig.* 9). Aux abscisses de rang

Fig. 9.



pair o, $\frac{2}{p}\rho_1, \ldots, \frac{p-1}{p}\rho_1$ correspondent des points M_i sur $O\rho_1$. Le premier point M_i est en O. Aux abscisses de rang impair $\frac{1}{p}\rho_1, \frac{3}{p}\rho_1, \ldots, \frac{p}{p}\rho_1 = \rho_1$, correspondent des points M_s sur le côté supérieur. Le dernier M_s est en A_1. Les points M_i et M_s appartiendront à la courbe représentative de f. Deux de ces points correspondant à des abscisses consécutives sont les sommets opposés d'un rectangle r_1. Observons immédiatement que p est choisi supérieur à $\frac{1}{h_1}$ de façon que, la fonction finale f possédant, sur chacun des contigus que nous allons définir pour P dans la présente opération, des variations absolues sensiblement égales à h_1, nous ayons, pour la nouvelle contribution dans la série des $|V_n|$, un nombre voisin de 1 relativement à R_1 et à R'_1 séparément. A chaque opération ultérieure, nous nous arrangeons comme au n° 45 pour apporter à la série, sur chaque segment traité, une contribution supérieure à un nombre entier, ce qui assurera la divergence de cette série dans toute portion de P.

Posons $a_1^m = \frac{m}{p}\rho_1$ $(m \leqq p)$, et soit $\delta_1 = \frac{\rho_1}{p}$ la distance de deux points a_1^m de Ox consécutifs. Soient, sur les bases de R_1, A_1^m, A_1^{m+1} deux des points M, l'un supérieur, l'autre inférieur, correspondant à des abscisses consécutives a_1^m, a_1^{m+1}. A_1^0 est l'origine, A_1^p est A_1. Enfin, nous désignons par A_1^{p+1} le point $(\alpha_1, 0)$. Sur chacun des rectangles $A_1^m A_1^{m+1}$, y compris $A_1^p A_1^{p+1}$, nous opérerons comme précédemment sur le carré OA, les valeurs notables de f étant cette fois o et h_1 au lieu de o et 1. Bien entendu on devrait procéder pour R_1' comme nous le faisons pour R_1, de manière à réaliser l'identité $f(1-x) = 1 - f(x)$.

Sur un même segment $a_1^m a_1^{m+1}$ $(0 \leqq m \leqq p-1)$, convenons que f aura une courbe représentative symétrique par rapport au centre du rectangle $A_1^m A_1^{m+1}$, comme il a été entendu qu'elle l'aurait dans le carré OA par rapport à son centre. On devra donc avoir, pour $a_1^m < x < a_1^{m+1}$,

$$(a_1^m + a_1^{m+1} - x) + f(x) = f(a_1^m) + f(a_1^{m+1}).$$

De même, les deux arcs de cette courbe situés dans les deux rectangles $A_1^{m-1} A_1^m$ et $A_1^m A_1^{m+1}$ $(m = 1, \ldots, p-1)$ devront être symétriques par rapport à la droite $x = a_1^m$; donc, pour $a_1^{m-1} < x < a_1^{m+1}$,

$$f(x) = f(2a_1^m - x).$$

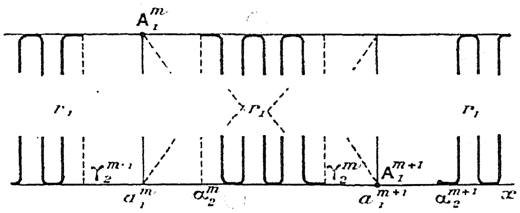
Ces conventions nous permettent de nous borner à tracer la courbe figurative de f dans un seul des rectangles r_1 et dans le rectangle $A_1^p A_1^{p+1}$.

Soit ε_2 un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}\theta_2$. De chaque côté des a_1^m (pour $a_1^0 = 0$, d'un seul côté, le côté droit), retranchons de Ox un intervalle égal à $\varepsilon_2 \delta_1$.

Soient $\alpha_2^m = a_1^m + \varepsilon_2 \delta_1$ $(m = 0, 1, \ldots, p)$, $\gamma_2^m = a_1^{m+1} - \varepsilon_2 \delta_1$ $(m = 0, \ldots, p-1)$. Considérons l'ensemble η des segments conservés, et β étant compris entre o et α_1, cherchons une limite inférieure de l'épaisseur moyenne de η, entre α_2^m et β si β surpasse α_2^m, entre β et γ_2^{m-1} si β est inférieur à γ_2^{m-1}. Il est évident que ce minimum sera atteint quand β sera en l'un des points α_2^{m+p} dans le premier cas, γ_2^{m-p-1} dans le second cas, p étant positif. Ce minimum est donc $1 - 2\varepsilon_2 > 1 - \theta_2$.

Par définition, en α_2^m f aura la même valeur qu'en a_1^m, et en γ_2^m la même valeur qu'en a_1^{m+1}, donc o en l'un des couples et h_1 en l'autre. Entre α_2^m et γ_2^m, f sera une fonction f_0 définie par ses valeurs aux points extrêmes (*fig.* 10) et à fréquence n suffisante pour que, γ étant quelconque entre α_2^m et γ_2^m, les épaisseurs des ensembles $f = f(a_1^m) = f(\alpha_2^m)$ sur $\alpha_2^m\gamma$, et $f = f(a_1^{m+1}) = f(\gamma_2^m)$ sur $\gamma\gamma_2^m$, surpassent $\frac{1}{2}(1 - \theta_2)$. De là résulte que, β et β' étant quelconques, l'un entre o et γ_2^{m-1}, l'autre

Fig. 10.



entre α_2^m et α_1, l'ensemble $f = f(a_1^m)$ a sur chacun des intervalles $\beta\gamma_2^{m-1}$ et $\alpha_2^m\beta'$ une épaisseur moyenne supérieure à $\frac{1}{2}(1 - \theta_2)^2$.

Soit maintenant ρ_2 un nombre positif inférieur à $\varepsilon_2\delta_1$. Nous déterminons h_2 tel que, R_2 étant l'un quelconque des $2p$ rectangles agrégés à un rectangle r_1, ayant un sommet commun avec lui en $A_1^m (m = 0, \ldots, p)$, sa base horizontale égale à ρ_2 et sa hauteur égale à h_2, quel que soit S dans un rectangle R_2 ayant un sommet en A_1^m, les angles (S, θ_2, d) et (S, θ_2, g) contiennent respectivement les points d'abscisses α_2^m et γ_2^{m-1} situés sur la base de R_1 possédant A_1^m (*fig.* 11). Pour $m = 0$, il ne s'agit ni de (S, θ_2, g) ni de γ_2^{m-1}. Alors, si par exemple A_1^m est sur le côté supérieur de R_1, (S, θ_2, d) contient tout le côté supérieur du rectangle de base $\alpha_2^m\alpha_1$ et de hauteur h_1. (S, θ_2, g) contient tout le côté supérieur du rectangle de base o γ_1^{m-1} et de même hauteur h_1.

L'ensemble $E(S, \theta_2, d)$ contient l'ensemble $x > \alpha_2^m$, $f = f(a_1^m)$. Et de même, l'ensemble $E(S, \theta_2, g)$ contient l'ensemble $x < \gamma_2^{m-1}$, $f = f(a_1^m)$. Donc, quel que soit β entre α_2^m et α_1, l'épaisseur de $E(S, \theta_2, d)$ sur $\alpha_2^m\beta$ surpasse $\frac{1}{2}(1 - \theta_2)^2$. De même, quel que soit β entre o et γ_2^{m-1}, l'épaisseur moyenne de $E(S, \theta_2, g)$, dans $\beta\gamma_2^{m-1}$, surpasse le même nombre.

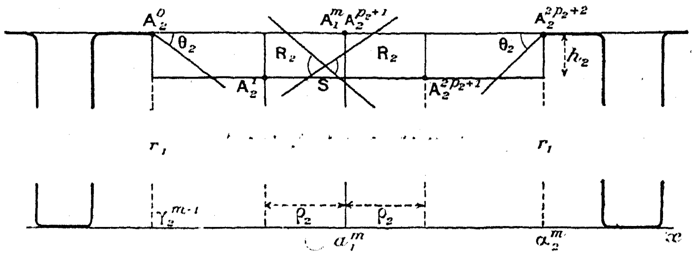
Observons de plus que $E(S, \theta_1, d)$ contient $E(S, \theta_2, d)$, puisque l'angle (S, θ_1, d) contient (S, θ_2, d). Donc l'épaisseur de $E(S, \theta_1, d)$

surpasse : entre α_2^m et $\beta \leqq \alpha_1$, $\frac{1}{2}(1-\theta_2)^2$; puis, d'après un résultat établi, entre α_1 et $\beta \leqq 1$, $\frac{1}{2}(1-\theta_1)^2$; donc, entre α_2^m et β : 1° $\frac{1}{2}(1-\theta_1)^2$, quel que soit β entre α_2^m et 1; 2° $\frac{1}{2}(1-\theta_2)^2$, quel que soit β entre α_2^m et α_1.

Des conséquences analogues s'énonceraient pour $E(S', \theta_1, g)$ et pour $E(S', \theta_2, g)$ si S' est agrégé à l'un des rectangles symétriques des R_2 par rapport au centre du carré OA.

m prenant les valeurs $0, \ldots, p-1$, les intervalles $a_1^m + \rho_2$, $a_1^{m+1} - \rho_2$ $\left(\text{et leurs symétriques par rapport au point } \frac{1}{2}, \text{ ainsi que ci-après}\right)$ seront contigus à P. Nous les désignons indifféremment par i_2. Les

Fig. 11.



segments égaux $(a_1^m, a_1^m + \rho_2)$, $(a_1^{m+1} - \rho_2, a_1^{m+1})$ désignés par Σ_2 et projetant les R_2 sur Ox, ont leurs extrémités sur P et en contiennent la totalité. Le champ λ_2 où nous venons de définir f est formé, dans les i_2, par les segments (α_2^m, γ_2^m) et, dans i_1, par l'intervalle (α_2^p, α_1) accru de son extrémité gauche. Les intervalles j_2, savoir $(a_1^m + \rho_2, \alpha_2^m)$, $(\gamma_2^m, a_1^{m+1} - \rho_2)$ d'une part $(0 \leqq m \leqq p-1)$, et d'autre part (a_1^p, α_2^p), inclus dans les i_2 ou (le dernier) dans i_1, séparent les Σ_2 des λ_2. Le choix des i_2, λ_2 (ou des Σ_2, j_2), des R_2, la définition de f sur les λ_2 constituent la seconde opération. Passons à la troisième.

Le progrès de la construction s'aperçoit. Il faudra à la troisième opération définir f sur certaines parties des intervalles $0\alpha_2^0$, $\gamma_2^0 a_1^0$, $a_1^0 \alpha_2^1$, $\gamma_2^1 a_1^2$, $\ldots$, $\gamma_2^{p-1} a_1^p$, $a_1^p \alpha_2^p$. Aux extrémités de chacun d'eux, f est connu. D'ailleurs, à cause des relations supposées entre les points figuratifs de f dans la suite des rectangles r_1, il suffit de s'occuper d'un seul des $2p$ premiers domaines et du dernier. Auprès de a_1^m, entre $a_1^m - \rho_2$ (ou o, si $m = 0$) et $a_1^m + \rho_2$ (ou a_1^p, si $m = p$), le point figuratif de f doit être dans l'un ou l'autre (ou le seul) rectangle R_2 ayant le sommet A_1^m. Chacun des R_2 sera subdivisé en p_2 rectangles r_2, p_2 étant un entier impair supérieur à $\frac{1}{h_2}$.

Soit

$$\delta_2 = \frac{h_2}{p_2}.$$

Nous désignons par a_2^q les points du segment $(a_1^m - \rho_2, a_1^m + \rho_2)$ distants de a_1^m d'un multiple entier de δ_2 (¹). Pour ces valeurs de x, le point A_2^q, figuratif de f, sera alternativement sur la base supérieure et sur la base inférieure d'un $R_2(A_1^m)$ admettant le sommet A_1^m. A_1^m, déjà placé, est l'un des A_2^q, savoir $A_2^{p_2+1}$; il fixe tous les autres A_2^q parmi lesquels, p_2 étant impair, est le sommet opposé à A_1^m dans l'un et l'autre (ou le seul) rectangle $R_2(A_1^m)$. A_2^1 et $A_2^{2p_2+1}$ ont respectivement pour abscisses $a_1^m - \rho_2$ et $a_1^m + \rho_2$, et sont symétriques par rapport à la droite $x = a_m$, même pour $m = p$. Nous désignons par A_2^0 et $A_2^{2p_2+2}$ les points figuratifs déjà placés d'abscisses $\gamma_2^{m-1} = a_2^0$ et $\alpha_2^m = a_2^{2p_2+2}$. [Pour $m = 0$, il n'y a qu'un rectangle $R_2(A_1^0)$ et aucun point A_2^q d'indice supérieur moindre que $p_2 + 1$; pour $m = p$, il n'y a qu'un rectangle $R_2(A_1^p)$ et *aucun point* a_2^q d'indice $q = p_2 + 2, \ldots, 2p_2$. Mais on a encore $a_{2.p}^{2p_2+1} = a_1^p + \rho_2$ et $a_{2.p}^{2p_2+2} = \alpha_2^p$.]

Sur une base $a_2^q a_2^{q+1}$ $(q = 0, \ldots, 2p_2 + 1)$, f aura son point figuratif dans le rectangle $A_2^q A_2^{q+1}$. La courbe (x, f) sera, dans chaque rectangle r_2, symétrique par rapport à son centre et, dans deux rectangles r_2 contigus, elle sera symétrique par rapport au côté commun. De plus, pour $0 < m < p$, entre $\gamma_2^{m-1} = a_2^0$ et $\alpha_2^m = a_2^{2p_2+2}$, elle devra être symétrique par rapport à la droite $x = a_1^m$, d'après la condition déjà posée que, dans deux rectangles r_1 adjacents, elle soit symétrique par rapport à leur côté commun.

ε_3 étant inférieur à $\frac{1}{2}\theta_3$, nous posons $(1 \leqq m \leqq p - 1)$, quel que soit q entre 1 et $2p_2 + 1$ inclusivement :

$$\alpha_3^q = a_2^q + \varepsilon_3\delta_2, \qquad \gamma_3^q = a_2^{q+1} - \varepsilon_3\delta_2.$$

(¹) Le lecteur est prié de faire des figures analogues à celles qui portent les nᵒˢ 9 et 10.

Nous adoptons les mêmes notations pour $m = 0$, $p_2 + 1 \leqq q \leqq 2p_2 + 1$, et pour $m = p$, $1 \leqq q \leqq p_2$. En outre, pour $m = p$, nous considérons le point $\alpha_{3.p}^{p_2+1} = a_2^p + \varepsilon_3 \delta_2$.

A la troisième opération, nous définissons f sur les intervalles $\gamma_2^{m-1} a_1^m$, $a_1^m \alpha_2^m$ diminués de tous les $\gamma_3^{q-1} a_2^q$, $a_2^q \alpha_3^q$. Quel que soit β entre γ_2^{m-1} ($= 0$, si $m = 0$) et α_2^m, l'ensemble des segments conservés possède, entre β et γ_3^{q-1} si $\beta < \gamma_3^{q-1}$, entre α_3^q et β si $\alpha_3^q < \beta$, une épaisseur moyenne supérieure à $1 - 2\varepsilon_3 > 1 - \theta_3$. Nous posons

$$f(\alpha_3^q) = f(a_2^q), \qquad f(\gamma_3^q) = f(a_2^{q+1}).$$

Ces deux nombres diffèrent de h_2, leurs seules valeurs possibles, quels que soient m et q, étant 0, h_2, $h_1 - h_2$, h_1.

f entre α_3^q et γ_3^q (sauf pour $m = p$, $q = p_2 + 1$), entre $\alpha_{3.p}^{p_2+1}$ et $a_2^{2p_2+1}$, entre $a_2^{2p_2+1}$ et $a_2^{2p_2+2} = \alpha_2^p$, coincidera avec des fonctions f_0 correspondant aux valeurs fixées aux points extrêmes, et assez souvent oscillantes pour que les épaisseurs des ensembles $f = f(\alpha_3^q)$ entre α_3^q et γ, $f = f(\gamma_3^q)$ entre γ et γ_3^q surpassent $\frac{1}{2}(1 - \theta_3)$, quel que soit γ entre α_3^q et γ_3^q (avec une règle analogue pour les deux champs juxtaposés entre a_1^p et α_2). Alors, si $\gamma_2^{m-1} < \beta < \gamma_3^{q-1}$ ou si $\alpha_3^q < \beta < \alpha_3^q$, l'épaisseur de $f = f(a_2^q)$, respectivement entre β et γ_3^{q-1} ou entre α_3^q et β, surpasse $\frac{1}{2}(1 - \theta_3)^2$.

On choisit ρ_3 et h_3 assez petits pour que tout angle (S, θ_3, d) et (S, θ_3, g) ayant son sommet S intérieur à r_2, avec des coordonnées différant de celles de a_2^q d'au plus ρ_3 et h_3 (l'ensemble des S ainsi caractérisés forme deux rectangles R_3), contienne respectivement les points

$$\alpha_3^q, f(\alpha_3^q) = f(a_2^q) \qquad \text{et} \qquad \gamma_3^{q-1}, f(\gamma_3^{q-1}) = f(a_2^q).$$

Alors, entre α_3^q et β, si $\alpha_3^q < \beta < \alpha_2^m$, $E(S, \theta_3, d)$ a une épaisseur supérieure à $\frac{1}{2}(1 - \theta_3)^2$. Il en est de même pour $E(S, \theta_3, g)$ entre β et γ_3^{q-1} si $\gamma_3^{m-1} < \beta < \gamma_3^{q-1}$. Désignons par E_{pd} et E_{pg} les ensembles $E(S, \theta_p, d)$ et $E(S, \theta_p, g)$.

S appartenant à l'un des rectangles R_3, écrivons sur une ligne le nom de l'ensemble, le segment où nous considérons son épaisseur, le champ où varie l'une des extrémités β de ce segment, et enfin une limite inférieure de l'épaisseur moyenne de l'ensemble sur ce segment. s étant l'abscisse de S, nous désignons par α_2^m, α_3^q et par γ_2^{m-1}, γ_3^{q-1}, parmi les points antérieurement compris dans ces notations, les plus voisins de s respectivement à sa droite et à sa gauche.

E_{1d}	sur $\alpha_1\,\beta$,	si $\alpha_1 < \beta < 1$,	a une épaisseur supérieure à	$\frac{1}{2}(1-\theta_1)^2$,
E_{2d}	sur $\alpha_2^m\,\beta$,	si $\alpha_2^m < \beta < \alpha_1$,	»	$\frac{1}{2}(1-\theta_2)^2$,
E_{3d}	sur $\alpha_3^q\,\beta$,	si $\alpha_3^q < \beta < \alpha_2^m$,	»	$\frac{1}{2}(1-\theta_3)^2$,
E_{2g}	sur $\beta\gamma_2^{m-1}$,	si $0 < \beta < \gamma_2^{m-1}$,	»	$\frac{1}{2}(1-\theta_2)^2$,
E_{3g}	sur $\beta\ \gamma_3^{q-1}$,	si $\gamma_2^{m-1} < \beta < \gamma_3^{q-1}$,	»	$\frac{1}{2}(1-\theta_3)^2$.

(Nous ne considérons pas les E_{1g}, si S est dans le rectangle le plus à gauche de sommet inférieur O, non plus que les E_{1d} relatifs au rectangle le plus haut et le plus à droite de sommet supérieur A.)

La construction progresse sans difficulté suivant une règle évidente.

Nous formons une suite de systèmes de rectangles $R_1, R_2, \ldots, R_p, \ldots$, à côtés parallèles aux axes, chacun des R_{p+1} étant inclus dans l'un des R_p. Les R_p d'un même indice se projettent sur Ox suivant des segments Σ_p($0, \rho_1$ et $1-\rho_1$, 1 pour $p=1$; $a_1^m - \rho_2, a_1^m$ et a_1^m, $a_1^m + \rho_2$ et leurs analogues pour $p=2$, etc.), tantôt juxtaposés, tantôt séparés par des intervalles qui sont tous des contigus à P. Si l'un de ces intervalles est limité à deux segments Σ_p et non point à deux segments Σ_{p-1}, nous le désignons par i_p. A la $p^{\text{ième}}$ opération, nous définissons f comme coïncidant avec des fonctions du type f_0 dans un certain champ λ_p constitué : 1° par une portion centrale de chacun des i_p, et valant une fraction de ce même i_p égale à $1 - 2\varepsilon_p > 1 - \theta_p$; 2° par des portions bordant de part et d'autre les λ_{p-h} où f a été antérieurement défini (et situés dans les i_{p-k}). Les λ_p sont séparés des Σ_p par des intervalles j_p tous égaux entre eux, et valant sensiblement $\varepsilon_p i_p$. Tout point du segment $0, 1$ appartient à un Σ_p, à un j_p, à un λ_p ou à un λ_{p-h}.

P est l'ensemble parfait commun à tous les Σ_p. En tout point étranger à P, une certaine opération définit f.

Les dimensions des R_p, tous égaux entre eux, tendant très rapidement vers zéro quand p croît, ces domaines ont en commun un ensemble parfait qui est la représentation de f sur P. La continuité de f est évidente.

Dans chaque R_{p-1}, les R_p sont ainsi disposés que la somme des variations absolues de f dans les i_p surpasse 1 pour chaque Σ_{p-1}. La variation de f est donc irréductible sur P.

Grâce au choix des dimensions et à la situation des R_p, quel que soit S dans R_p, si α_p^r, α_{p-1}^t sont respectivement les extrémités gauches du λ_p et du λ_{p-1} les plus voisins de s à sa droite, si γ_p^{r-1}, γ_{p-1}^{t-1} sont les extrémités droites du λ_p et du λ_{p-1} les plus voisins de s à sa gauche, quel que soit β, entre α_p^r et α_{p-1}^t dans le premier cas, entre γ_{p-1}^{t-1} et γ_p^{r-1} dans le second cas, les ensembles $E_{pd}(S)$ et $E_{pg}(S)$ ont leurs épaisseurs moyennes supérieures à $\frac{1}{2}(1-\theta_p)^2$, respectivement entre α_p^r et β, entre β et γ_p^{r-1}.

Comme E_{pd} et E_{pg} contiennent $E_{p+q,d}$ et $E_{p+q,g}$, quels que soient p et q, f prend sur P des valeurs telles que, pour tout point s de P, les ensembles $E(S, \theta, d)$ et $E(S, \theta, g)$ ont en s une épaisseur bilatérale au moins égale à $\frac{1}{2}$, si petit que soit θ.

Nous avons donc bien, avec une dérivée finie et continue hors de P, *la dérivée bilatérale zéro sur l'épaisseur* $\frac{1}{2}$ *en tout point de* P, *où cependant la variation de f n'est définie sur aucune portion.*

(*A suivre.*)