

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LÉON BRILLOUIN

**Sur une méthode de calcul approchée de certaines
intégrales dite méthode du col**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 33 (1916), p. 17-69

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1916_3_33__17_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1916, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE
MÉTHODE DE CALCUL APPROCHÉE

DE

CERTAINES INTÉGRALES, DITE MÉTHODE DE COL,

PAR M. LÉON BRILLOUIN.



INTRODUCTION.

Je veux donner quelques applications d'une méthode d'approximation très féconde, dite *méthode de col*; elle permet d'obtenir des formules approchées pour des intégrales portant sur des fonctions trigonométriques ou exponentielles; de telles intégrales se présentent dans les théories ondulatoires et dans tous les problèmes qui se traitent au moyen des intégrales de Fourier. J'étudierai les types suivants :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} F(s) = \int_0^s e^{ix^2} dx \quad (\text{Intégrale de Fresnel}), \\ A(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x^3 - \nu x)} dx \quad (\text{Intégrale d'Airy}), \\ A(\nu, r, s) = \int_r^s e^{i(x^3 - \nu x)} dx, \\ M(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x^4 - \nu x)} dx, \\ M(\nu, r, s) = \int_r^s e^{i(x^4 - \nu x)} dx, \\ \Phi(u, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x^4 + ux^2 - \nu x)} dx, \\ \Phi(u, \nu, r, s) = \int_r^s e^{i(x^4 + ux^2 - \nu x)} dx. \end{array} \right.$$

Ces diverses intégrales se présentent dans la théorie de la diffraction de la lumière.

L'intégrale d'Airy donne les franges auprès d'une caustique : $A(\nu)$ correspond au cas d'une ouverture pratiquement illimitée; $A(\nu, r, s)$ au cas d'un diaphragme rectangulaire (1). Considérons en effet une onde produite par un système optique affecté d'aberrations. Nous supposons un diaphragme rectangulaire; on peut alors, décomposant l'onde en fuseaux, remplacer l'onde par son équateur EE' .

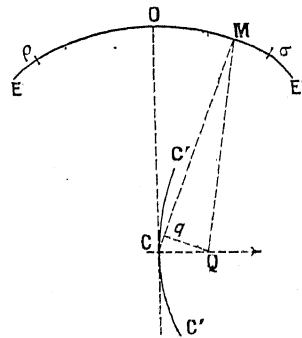


Fig. 1.

Soient C un point de la caustique CC' et OC le rayon tangent à la caustique en C.

La différence de marche d'un point M de l'onde au point C est de la forme

$$\Delta_{MC} = h \overline{OM}^3 = h y^3.$$

En posant

$$OM = y,$$

par rapport à un point Q situé sur la normale à la caustique en C, la différence de marche est facile à calculer, si l'on suppose Q voisin de la caustique et l'ouverture petite (c'est-à-dire M voisin de O). On trouve

$$(2) \quad \Delta_{MQ} = \Delta_{MC} - Cq = h y^3 - CQ \sin \frac{y}{OC} = h y^3 - \frac{CQ}{OC} y.$$

La différence de phase est

$$\delta = \frac{2\pi \Delta}{\lambda},$$

(1) Cf. MASCART, *Optique*, t. I, Chap. V, p. 407.

et la vibration au point Q est donnée par l'intégrale

$$\xi = \mu \int_{\rho}^{\sigma} \sin(\omega t + \delta) dy,$$

ρ et σ étant les valeurs de y qui correspondent aux bords du diaphragme.

On est ramené à calculer

$$\int \cos \delta dy \quad \text{et} \quad \int \sin \delta dy$$

qui sont la partie réelle et la partie imaginaire de

$$\int e^{i\delta} dy.$$

En posant

$$x = \left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}} y, \quad r = \left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \rho, \quad s = \left(\frac{2\pi h}{\lambda}\right)^{\frac{1}{3}} \sigma,$$

$$v = + \text{CQ} \frac{1}{\text{OC} h^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

L'intégrale prend la forme

$$(1) \quad \mathbf{A}(v, r, s) = \int_r^s e^{i(x^3 - vx)} dx.$$

L'intensité lumineuse au point Q est

$$\mathbf{I} = \left(\int \sin \delta dy\right)^2 + \left(\int \cos \delta dy\right)^2.$$

Si les limites r, s sont symétriques, on aura

$$\int \sin \delta dy = 0.$$

Si le point C est un point de rebroussement de la caustique, c'est-à-dire un foyer F, les calculs prennent une autre forme. Supposons toujours un diaphragme rectangulaire; étudions ce qui se passe dans un plan passant par F et perpendiculaire aux deux bords du diaphragme, dont ρ et σ sont les traces. Nous pouvons décomposer l'onde en fuseaux et la remplacer par sa section EE'; la différence de marche d'un

point M de EE' par rapport au foyer F est maintenant de la forme

$$\Delta_{MF} = k y^4.$$

Pour un point Q de la droite située dans le plan focal et perpendicu-

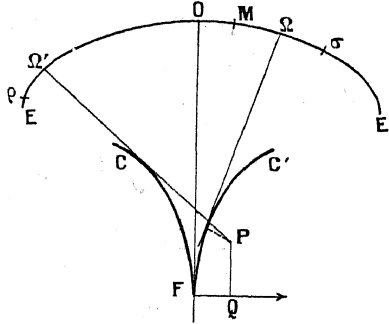


Fig. 2.

laire aux bords du diaphragme,

$$\Delta_{MQ} = k y^4 - FQ \frac{y}{OF}.$$

Et pour un point P quelconque, voisin de F,

$$(3) \quad \Delta_{MP} = k y^4 - FQ \frac{y}{OF} - PQ \cos \frac{y}{OF},$$

$$\Delta_{MP} = k y^4 + \frac{PQ}{2 OF^2} y^2 - \frac{FQ}{OF} y - PQ.$$

La vibration en P est

$$\xi = \mu \int_{\rho}^{\sigma} \sin \left(\omega t + \frac{2\pi \Delta}{\lambda} \right) dy;$$

on est donc ramené au calcul de

$$(1) \quad \Phi(u, v, r, s) = \int_r^s e^{i(x^4 + ux^2 - vx)} dx.$$

En posant

$$x = \left(\frac{2\pi k}{\lambda} \right)^{\frac{1}{4}} y, \quad r = \left(\frac{2\pi k}{\lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \rho, \quad s = \left(\frac{2\pi k}{\lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \sigma,$$

$$u = \frac{PQ}{2 OF^2} \left(\frac{2\pi}{k\lambda} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$v = \frac{FQ}{OF} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{\frac{3}{4}} k^{-\frac{1}{4}}.$$

Sur une droite passant par le foyer et perpendiculaire aux bords du diaphragme la quantité u est nulle, et Φ se réduit à

$$\Phi(0, \nu, r, s) = M(\nu, r, s).$$

Ces fonctions donnent les franges d'interférence auprès d'un foyer imparfait pour lequel l'aberration de sphéricité n'est pas corrigée.

Le cas d'un diaphragme circulaire centré se ramène aisément au précédent (1); on est ramené au calcul de l'intégrale

$$\int_0^s e^{i(x^4 + ux^2 - \nu x)} x dx = i \frac{\partial}{\partial \nu} \Phi(u, \nu, 0, s).$$

Les formules approchées que nous obtiendrons pour Φ et M fourniront donc aussi la solution de ce problème, le plus important dans la pratique : interférences dans le plan focal et auprès du plan focal, pour un foyer imparfait, et le diaphragme circulaire centré.

Les interférences auprès d'un foyer parfait sont connues depuis longtemps (2).

I. — Méthode de col.

Je veux exposer le principe de la méthode de col, qui me servira à effectuer les calculs des intégrales (1). Je rappelle que cette méthode a été utilisée par P. Debye pour le calcul de développements asymptotiques des fonctions de Bessel (3). Je garderai ici des notations en concordance avec celles de cet auteur.

Soit à étudier une intégrale de la forme

$$(4) \quad \int_a^b \varphi(x) e^{w(x)} dx,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction lentement variable dans tout le plan complexe des x , et développable en série de Taylor.

(1) Cf. MASCART, *Optique*, t. I, p. 413.

(2) Cf. par exemple MASCART, *Ibid.*, p. 308.

(3) *Exposé. Fonctions de Bessel à indice et argument réels* (*Math. Ann.*, t. LXVII, 1909, p. 535); *Fonctions de Bessel à indice et argument imaginaires* (*Sitzungsber. Bayr. Akad. Wiss.*, février 1910).

Je pose

$$\begin{aligned}x &= \xi + i\eta, \\ \varpi &= X + iY.\end{aligned}$$

Pour l'étude de l'intégrale, le plus commode est de chercher les régions du plan complexe, pour lesquelles X est négatif. On déforme le chemin d'intégration pour le faire passer par ces régions. L'intégrale est pratiquement nulle partout où X est négatif, grand en valeur absolue. Il suffit d'effectuer le calcul pour les portions du chemin où X n'est pas très grand en valeur absolue.

On sait qu'en vertu des relations

$$(5) \quad \frac{\partial X}{\partial \xi} = -\frac{\partial Y}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial X}{\partial \eta} = \frac{\partial Y}{\partial \xi},$$

la fonction X ne peut avoir en aucun point du plan complexe un maximum ou un minimum fini. Elle peut seulement avoir un col, en un point où

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = \frac{\partial X}{\partial \eta} = 0.$$

En un tel point, la fonction Y a aussi un col. Ce point est déterminé par la condition

$$(6) \quad \frac{d\varpi}{dx} = 0.$$

J'emploierai souvent un langage figuré, considérant X comme une altitude, et le plan complexe comme une carte géographique. Je parlerai des courbes de niveau, et des lignes de plus grande pente de X , de ses cols. Les lignes de plus grande pente de X sont lignes de niveau pour Y . Elles ne peuvent aboutir qu'aux points où X est infini, puisqu'il n'y a pas de maxima ou minima finis. Le col permet le passage d'une vallée à une autre; c'est l'intégration auprès des cols qui nous intéressera.

Quel sera le tracé le plus avantageux pour notre chemin d'intégration? Il faudra qu'il nous fasse passer le plus vite possible des régions où X est positif ou voisin de zéro, vers les régions où X est négatif, grand en valeur absolue. Nous choisirons donc comme chemin d'intégration les lignes de plus grande pente pour X .

Outre les cols simples, on peut en rencontrer de multiples : un point x_0 , où l'on a

$$\frac{d\omega}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\omega}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^{m-1}\omega}{dx^{m-1}} = 0, \quad \frac{d^m\omega}{dx^m} \neq 0,$$

est un point multiple d'ordre m pour la fonction ω . C'est un col d'ordre supérieur, où aboutissent m vallées. Il y a m lignes de niveau et m lignes de plus grande pente pour X aboutissant alternativement en ce point et faisant entre elles des angles égaux.

La figure 7 correspond au cas $m = 3$. J'ai hachuré les vallées ; sur les lignes de plus grande pente les flèches marquent le sens ascendant.

Pour étudier l'intégrale

$$\int \varphi(x) e^{\omega(x)} dx$$

auprès de ce point x_0 , nous pouvons écrire

$$(7) \quad \omega - \omega_0 = - (x - x_0)^m [c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots]$$

avec

$$C_p = \frac{-1}{(m+p)!} \frac{d^{m+p}\omega}{dx^{m+p}}.$$

Nous développerons aussi

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1(x - x_0) + \varphi_2(x - x_0)^2 + \dots$$

Faisons le changement de variable,

$$t = \omega_0 - \omega.$$

Tant que nous restons sur le chemin d'intégration, t reste réel *positif*. En effet, si nous avons, au col,

$$\omega_0 = X_0 + iY_0,$$

le chemin d'intégration étant une ligne de plus grande pente pour X satisfait à la condition

$$Y = Y_0,$$

de sorte que $\omega - \omega_0$ est toujours réel.

Le chemin d'intégration que nous avons été amené à choisir nous

mènera d'une région où $X = -\infty$, par le point x_0 , à une autre région où $X = +\infty$.

La variable t variera donc de $+\infty$ à 0, puis à $+\infty$. Et nous pourrons écrire notre intégrale

$$\int \varphi e^{w} dx = e^{w_0} \int_{\infty}^0 e^{-t} \Phi dt + e^{w_0} \int_0^{\infty} e^{-t} \Phi_1 dt,$$

$$(9) \quad \int \varphi e^{w} dx = e^{w_0} \int_0^{\infty} e^{-t} (\Phi_1 - \Phi) dt,$$

Φ et Φ_1 désignent les expressions $\varphi(x) \frac{dx}{dt}$ prises sur les routes d'arrivée et de départ.

Cette expression a en effet m déterminations qui correspondent aux m lignes de plus grande pente de X qui aboutissent au point x_0 . Φ est la détermination correspondant au chemin d'arrivée au col x_0 ; Φ_1 au chemin de départ du col.

Nous devons développer Φ en série des puissances de $t^{\frac{1}{m}}$. Pour y arriver, posons

$$T^m = t, \quad m T^{m-1} dT = dt,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m T^{m-1}} \frac{dx}{dT};$$

nous formerons le développement

$$\varphi \frac{dx}{dT} = \sum_0^{\infty} a_n T^n,$$

ce qui nous donnera

$$(10) \quad \Phi = \frac{1}{m t^{\frac{m-1}{m}}} \sum_0^{\infty} a_n t^{\frac{n}{m}}.$$

Φ et Φ_1 correspondent à deux des racines $t^{\frac{1}{m}}$.

Calculons donc les coefficients a_n . Ils sont donnés d'après Cauchy par l'intégrale

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dT}{T^{n+1}} \varphi \frac{dx}{dt},$$

intégrale prise, dans le plan T , sur un lacet autour de l'origine. Ceci

s'écrit encore

$$(11) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int (\omega_0 - \omega)^{-\frac{n+1}{m}} \varphi(x) dx,$$

intégrale prise sur un lacet autour du point x_0 .

Nous avons écrit plus haut le développement de $\omega_0 - \omega$; il est facile de calculer le développement de

$$(12) \quad (\omega_0 - \omega)^{-\frac{n+1}{m}} \\ = (x - x_0)^{-n-1} [d_0(n) + d_1(n)(x - x_0) + \dots + d_p(n)(x - x_0)^p + \dots],$$

en effectuant l'élevation de $\omega_0 - \omega$ à la puissance

$$\nu = -\frac{n+1}{m}.$$

Les coefficients d sont des fonctions de n .

On calculera ensuite le développement de

$$(13) \quad (\omega_0 - \omega)^{-\frac{n+1}{m}} \varphi(x) \\ = (x - x_0)^{-n-1} [a_0(n) + a_1(n)(x - x_0) + \dots + a_p(n)(x - x_0)^p + \dots].$$

En effectuant l'intégrale (11), on trouvera de suite

$$(14) \quad a_n = a_n(n).$$

Les formules suivantes donnent le résultat du calcul des coefficients d et a au moyen des c et φ :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_0 = c_0^\nu \quad \left(\nu = -\frac{n+1}{m} \right), \\ d_1 = c_0^\nu \frac{\nu}{1!} \frac{c_1}{c_0}, \\ d_2 = c_0^\nu \left[\frac{\nu}{1!} \frac{c_2}{c_0} + \frac{\nu(\nu-1)}{2!} \frac{c_1^2}{c_0^2} \right], \\ d_3 = c_0^\nu \left[\frac{\nu}{1!} \frac{c_3}{c_0} + \frac{\nu(\nu-1)}{2!} 2 \frac{c_1 c_2}{c_0} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{3!} \frac{c_1^3}{c_0^3} \right], \\ d_4 = c_0^\nu \left[\frac{\nu}{1!} \frac{c_4}{c_0} + \frac{\nu(\nu-1)}{2!} \left(2 \frac{c_1 c_3}{c_0} + \frac{c_2^2}{c_0^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{3!} \frac{c_1^2 c_2}{c_0^3} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{4!} \frac{c_1^4}{c_0^4} \right] \end{array} \right.$$

et

$$(16) \quad \begin{cases} a_0(n) = d_0(n) \varphi_0, \\ a_1(n) = d_0(n) \varphi_1 + d_1(n) \varphi_0, \\ a_2 &= d_0 \varphi_2 + d_1 \varphi_1 + d_2 \varphi_0, \\ a_3 &= d_0 \varphi_3 + d_1 \varphi_2 + d_2 \varphi_1 + d_3 \varphi_0, \\ a_4 &= d_0 \varphi_4 + d_1 \varphi_3 + d_2 \varphi_2 + d_3 \varphi_1 + d_4 \varphi_0, \\ &\dots\dots\dots \end{cases}$$

Ayant le développement de Φ et Φ_1 sous la forme (10), le calcul de l'intégrale (9) est tout à fait élémentaire. Chaque terme donne une intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt = \Gamma(n+1).$$

La série que l'on obtient ainsi pour l'intégrale (9) n'est pas en général convergente, mais seulement semi-convergente.

Une telle série est néanmoins tout à fait pratique lorsque les premiers termes décroissent très rapidement. Les exemples que je donnerai ici montreront suffisamment l'application de ces remarques générales; j'indiquerai aussi comment on peut obtenir des développements approchés dans les cas où la méthode générale précédente tombe en défaut.

II. — Comparaison avec la méthode de « phase stationnaire ».

La méthode de col est la généralisation naturelle d'une autre méthode d'approximation, déjà fort employée : la méthode de phase stationnaire. Lamb a étudié par ce procédé les ondes produites par un bateau. La dénomination est due à Lord Kelvin. Voici le principe :

Soit à étudier une intégrale de la forme

$$\int \varphi(x) \cos Y dx \quad \text{ou} \quad \int \varphi(x) e^{iY} dx,$$

prise sur l'axe réel des x . Je suppose que φ soit *partout* une fonction lentement variable.

Là où Y varie rapidement, $\cos Y$ ou e^{iY} sont très rapidement oscillants, et l'intégrale est pratiquement nulle. Les seules portions de l'axe réel à étudier sont le voisinage des points où la phase Y reste

stationnaire, c'est-à-dire les maxima et minima, où l'on a

$$\frac{dY}{dx} = 0$$

sur l'axe réel.

Il est aisé d'obtenir une valeur approchée de l'intégrale près de ce point, pourvu que φ soit lentement variable; on est en effet obligé de traiter φ comme constant auprès du point de phase stationnaire.

On serait tenté d'appliquer cette méthode au cas où, au lieu d'un exposant purement imaginaire iY , on aurait un exposant de la forme $X + iY$. Il semble que, si X est lentement variable, on puisse traiter φe^X comme un bloc, et se ramener au cas précédent.

Ceci cesse d'être légitime si X et Y sont respectivement les parties réelle et imaginaire d'une même fonction ω . Ils sont alors reliés par les relations (5).

Et si même X est en général lentement variable le long de l'axe

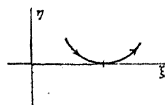


Fig. 3.

réel, il devient rapidement variable là où la partie imaginaire est stationnaire. En effet, si $\frac{\partial Y}{\partial \xi}$ est nul, c'est que dans le plan complexe des X , une ligne de niveau de Y est tangente à l'axe réel. Cette ligne étant une ligne de plus grande pente pour X , on voit qu'à cet endroit, sur l'axe réel, $\frac{\partial X}{\partial \xi}$ est grand.

Le calcul de l'intégrale en ce point deviendrait alors très pénible.

Pour le premier cas, où la méthode de phase stationnaire était légitime, on supposait que, sur l'axe réel, la partie réelle X de l'exposant est nulle. On a donc, sur l'axe réel,

$$\omega = iY.$$

Le point de phase stationnaire donné par la condition

$$\frac{dY}{dx} = 0$$

est un col; il satisfait bien à l'équation (6)

$$\frac{d\psi}{dx} = 0.$$

Vérifions d'ailleurs, au moyen des relations (5), qu'en ce point il existe deux directions rectangulaires le long desquelles la variation de X est nulle.

On a, en effet, pour l'axe réel

$$\frac{\partial X}{\partial \xi} = 0,$$

puisque X y est nul partout et sur une direction perpendiculaire

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} = \frac{\partial Y}{\partial \xi} = 0.$$

En ce point, deux lignes $X = 0$ se coupent comme par exemple sur la figure 4, où j'ai hachuré les régions $X < 0$.

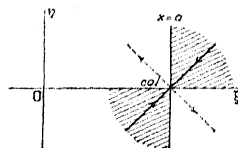


Fig. 4.

Lorsque X est nul sur l'axe réel, les points de phase stationnaire sont des cols; les deux méthodes concordent.

Mais, lorsque X n'est pas nul sur l'axe réel, il n'y a pas en général de col aux points de l'axe réel où la phase est stationnaire. En ces points, une ligne de plus grande pente de X est tangente à l'axe réel, comme sur la figure 3, ce qui n'offre aucun intérêt particulier et les cols seront autre part dans le plan complexe, en dehors de l'axe réel.

III. — Intégrale de Fresnel.

L'exemple le plus simple d'application de la méthode de col est donné par l'intégrale de Fresnel.

Il s'agit de calculer

$$F(s) = \int_0^s e^{ix^2} dx.$$

L'exposant est

$$w = ix^2.$$

Il y a un col unique à l'origine

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2ix = 0.$$

Pour une valeur complexe de x

$$x = \xi + i\eta,$$

on a

$$w = X + iY = -2\eta\xi + i(\xi^2 - \eta^2).$$

X est nul sur les deux axes ξ , η . Les lignes de plus grande pente pour X sont les hyperboles

$$\xi^2 - \eta^2 = \text{const.}$$

Les deux lignes de plus grande pente passant par l'origine sont les bissectrices des axes des coordonnées.

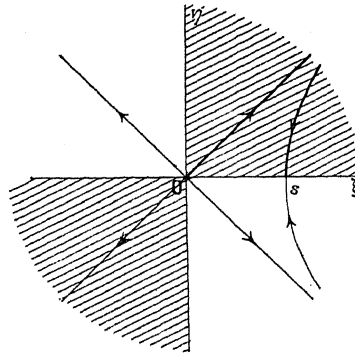


Fig. 5.

Sur la figure 5, j'ai hachuré les régions où X est négatif. Les flèches indiquent le sens de X croissant.

Comme chemin d'intégration nous prendrons de O à l'infini le chemin de plus grande pente passant par l'origine, puis de l'infini à s ,

l'hyperbole passant par s .

$$\int_0^{(1+i)\infty} e^{ix^2} dx = (1+i) \int_0^\infty e^{-2\xi^2} d\xi = \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

L'intégrale de $(1+i)\infty$ à s se calcule facilement en faisant, comme au paragraphe 1, le changement de variable

$$\begin{aligned} -t &= i(x^2 - s^2), \\ \frac{dt}{dx} &= -2ix = -2i\sqrt{s^2 + it}, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{i}{2s} \left(1 + \frac{it}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{i}{2s} \left[1 - \frac{it}{2s^2} - \frac{3}{8} \frac{t^2}{s^4} + \frac{5}{16} \frac{it^3}{s^6} + \dots + (-i)^k \frac{1.3.5\dots(2k-1)}{2^k k!} \frac{t^k}{s^{2k}} + \dots \right]. \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} \int_{(1+i)\infty}^s e^{ix^2} dx &= -e^{is^2} \int_0^\infty e^{-t} \frac{dx}{dt} dt \\ &= -\frac{e^{is^2}}{2s} \left[i + \frac{1}{2s^2} - i \frac{3}{4s^4} - \frac{15}{8s^6} \right. \\ &\quad \left. + i \frac{105}{16s^8} + \dots + (-1)^k i^{k+1} \frac{1.3.5\dots(2k-1)}{2^k s^{2k}} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc finalement les formules suivantes, en séparant dans l'intégrale les parties réelle et imaginaire :

$$\begin{aligned} \int_0^s \cos x^2 dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{C}{2s} \cos s^2 + \frac{S}{2s} \sin s^2, \\ \int_0^s \sin x^2 dx &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{S}{2s} \cos s^2 - \frac{C}{2s} \sin s^2. \end{aligned}$$

En désignant par S et C les développements,

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2s^2} - \frac{15}{8s^6} + \frac{945}{32s^{10}} + \dots + (-1)^p \frac{1.3.5\dots(4p+1)}{2^{2p+1} s^{4p+2}} + \dots, \\ S &= 1 - \frac{3}{4s^4} + \frac{105}{16s^8} + \dots + (-1)^p \frac{1.3.5\dots(4p-1)}{2^{2p} s^{4p}} + \dots \end{aligned}$$

Nous trouvons ainsi les développements de Cauchy (1). Ils ne sont pratiques que si s est assez grand.

Lorsque s est petit, on se rend compte, sur la figure 5, qu'il cesse d'être raisonnable d'intégrer sur les lignes de plus grande pente. Le mieux sera alors d'employer la méthode de Knochenhauer (2). En intégrant par parties on trouve

$$\int_0^s e^{ix^2} dx = x e^{ix^2} - 2i \int_0^s x^2 e^{ix^2} dx,$$

$$\int_0^s e^{ix^2} dx = e^{ix^2} \left(x - i \frac{2}{3} x^3 \right) - \frac{4}{3} \int_0^s x e^{ix^2} dx,$$

.....

Pour des intégrales plus compliquées, nous aurons l'occasion de nous servir de cette méthode, lorsqu'une des limites de l'intégrale s'approchera d'un col.

Si j'ai rappelé ces formules approchées pour les intégrales de Fresnel, c'est seulement à titre d'exemple tout à fait simple de ce genre de calculs.

IV. — Intégrale d'Airy.

Étudions d'abord l'intégrale de $-\infty$ à $+\infty$

$$A(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x^3 - \nu x)} dx.$$

L'exposant est

$$\omega = i(x^3 - \nu x).$$

Les cols sont donnés par la condition

$$\frac{d\omega}{dx} = 0, \quad 3x^2 - \nu = 0, \quad x = \pm \sqrt{\frac{\nu}{3}}.$$

Il y a donc deux cols situés, symétriquement par rapport à l'origine, sur l'axe réel si ν est positif, sur l'axe imaginaire si ν est négatif.

En un point

$$x = \xi + i\eta,$$

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. XV, p. 534.

(2) *Die Undulationstheorie des Lichtes*, p. 36. Berlin, 1839.

la partie réelle de ω est

$$X = \eta(\eta^2 - 3\xi^2 + \nu).$$

La ligne $X = 0$ se compose de l'axe réel, et de deux hyperboles dont les asymptotes sont

$$\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\eta.$$

Si ν est positif, ces hyperboles coupent l'axe réel aux cols; si ν est

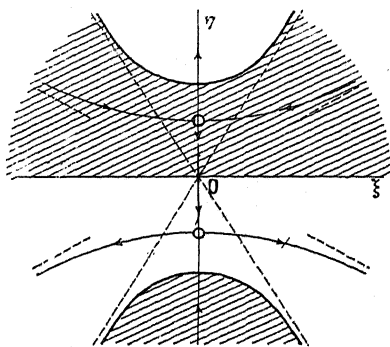


Fig. 6. $\nu < 0$.

négatif, elles coupent l'axe imaginaire aux points d'ordonnées $\pm\sqrt{\nu}$. L'aspect du plan imaginaire est donné par les figures ci-contre (fig. 6, 7, 8).

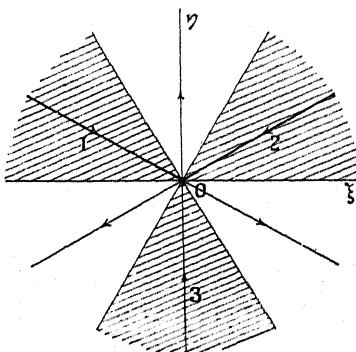


Fig. 7. $\nu = 0$.

Lorsque ν est nul, les deux cols se trouvent confondus à l'origine. L'origine est alors un point triple pour l'exposant ω ; en ce point,

on a

$$\frac{d\varpi}{dx} = 0, \quad \frac{d^2\varpi}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3\varpi}{dx^3} = 6i,$$

et le plan complexe prend l'aspect très simple représenté sur la figure 7.

Sur chacune des figures j'ai tracé en trait plus épais la ligne de plus

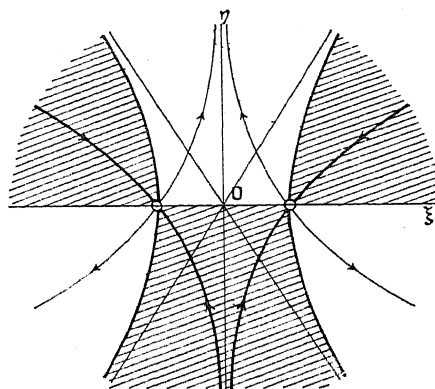


Fig. 8. $\varphi > 0$.

grande pente choisie comme chemin d'intégration. Ce chemin d'intégration part de $(-1 + \frac{i}{\sqrt{3}})\infty$ pour aboutir à $(1 + \frac{i}{\sqrt{3}})\infty$. Il se complète par des portions du cercle de l'infini, rejoignant l'axe réel; mais sur celles-ci l'intégrale est nulle, car X est infini négatif. Calculons l'intégrale pour les différents cas.

1° Cas où $\varphi < 0$. — Posons $\varphi = -\varphi'$ ($\varphi' > 0$).

Les cols sont

$$x_0 = \pm i \sqrt{\frac{\varphi'}{3}}.$$

Le chemin d'intégration passe par le col supérieur, et la valeur de l'exposant à ce col est

$$\varpi_0 = -2 \left(\frac{\varphi'}{3} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Nous posons auprès du col

$$t = \varpi_0 - \varpi = (x - x_0)^2 [\sqrt{3}\varphi' - i(x - x_0)].$$

D'après les formules générales, on trouve alors

$$(17) \quad \left. \begin{aligned} \Phi \\ \Phi_1 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(3\nu')^{\frac{1}{4}}} t^{-\frac{1}{2}} + \frac{i}{3\nu'} - \frac{15}{8(3\nu')^{\frac{7}{4}}} t^{\frac{1}{2}} - i \frac{4}{(3\nu')^{\frac{5}{2}}} t \right. \\ \left. + \frac{1155}{128(3\nu')^{\frac{13}{4}}} t^{\frac{3}{2}} + i \frac{21}{(3\nu')^{\frac{5}{2}}} t^2 - \frac{51051}{1024(3\nu')^{\frac{19}{4}}} t^{\frac{5}{2}} + \dots \right. \\ \left. + \frac{i^p}{(3\nu')^{\frac{3p+1}{4}}} \frac{(\rho+1)(\rho+3)\dots(3\rho-1)}{2^p p!} t^{\frac{\rho-1}{2}} + \dots \right].$$

Les deux expressions Φ et Φ_1 diffèrent par le signe choisi devant $(3\nu')^{\frac{1}{4}}$. On constate facilement, en cherchant la valeur prise par ce développement tout au voisinage du col, que

$$\begin{aligned} \Phi & \text{ correspond à } -(3\nu')^{\frac{1}{4}}, \\ \Phi_1 & \text{ » } + (3\nu')^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

L'intégrale est alors donnée par le développement

$$(18) \quad A(\nu) = \sqrt{\pi} \frac{e^{-2\left(\frac{\nu'}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}{(3\nu')^{\frac{1}{4}}} \left[1 - \frac{15}{16} \frac{1}{(3\nu')^{\frac{3}{2}}} + \frac{3465}{512(3\nu')^3} - \frac{765765}{8192(3\nu')^{\frac{9}{2}}} + \dots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^p}{(3\nu')^{\frac{3p}{2}}} \frac{1.3.5\dots(6p-1)}{(2p)! 2^{3p}} + \dots \right].$$

J'ai tenu compte de ce que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(n+1) = n \Gamma(n).$$

2° Cas où $\nu > 0$. — Les cols sont

$$x_0 = \pm \sqrt{\frac{\nu}{3}}.$$

Le chemin d'intégration traverse ces deux cols, comme le montre la figure 8. En chaque col l'exposant est

$$\omega_0 = -i 2 \left(\frac{\nu}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Calculons d'abord la valeur de l'intégrale auprès du col

$$x_0 = +\sqrt{\frac{\nu}{3}}.$$

Nous posons

$$t = w_0 - w = (x - x_0)^2 [-i\sqrt{3\nu} - i(x - x_0)].$$

D'après les formules générales, on trouve

$$(19) \quad \left. \begin{aligned} \Phi \\ \Phi_1 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{(3\nu)^{\frac{1}{4}}} t^{-\frac{1}{2}} - \frac{i}{3\nu} - \frac{15}{8} \frac{e^{i\frac{7\pi}{4}}}{(3\nu)^{\frac{7}{4}}} t^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{(3\nu)^{\frac{5}{2}}} t \\ & + \frac{1155}{128} \frac{e^{i\frac{13\pi}{4}}}{(3\nu)^{\frac{13}{4}}} t^{\frac{3}{2}} + i \frac{21}{(3\nu)^{\frac{5}{2}}} t^2 - \frac{51051}{1024} \frac{e^{i\frac{19\pi}{4}}}{(3\nu)^{\frac{19}{4}}} t^{\frac{5}{2}} + \dots \\ & + \frac{e^{i\frac{3p+1}{4}\pi}}{(3\nu)^{\frac{3p+1}{4}}} \frac{(p+1)(p+3)\dots(3p-1)}{2^p p!} t^{\frac{p-1}{2}} + \dots \end{aligned} \right].$$

Les deux expressions Φ, Φ_1 diffèrent par le signe choisi devant $(3\nu)^{\frac{1}{4}}$. On trouve facilement que Φ correspond au signe $-$ et Φ_1 au signe $+$. L'intégrale auprès de ce col est donc

$$(20) \quad I_1 = \sqrt{\pi} \frac{e^{-i\left[2\left(\frac{\nu}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right]}}{(3\nu)^{\frac{1}{4}}} \left[\begin{aligned} & 1 + \frac{15}{16} \frac{i}{(3\nu)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3465}{512(3\nu)^3} - i \frac{765765}{8192(3\nu)^{\frac{5}{2}}} + \dots \\ & + \frac{i^p}{(3\nu)^{\frac{3p}{2}}} \frac{1.3.5\dots(6p-1)}{(2p)! 2^{3p}} + \dots \end{aligned} \right].$$

On passe du col $x_0 = +\sqrt{\frac{\nu}{3}}$ au col symétrique $x_0 = -\sqrt{\frac{\nu}{3}}$ en changeant le signe devant $\left(\frac{\nu}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ et en remplaçant $e^{i\frac{\pi}{4}}$ par $e^{-i\frac{\pi}{4}}$. On voit que cela revient, dans le développement ci-contre, à changer le signe devant i . L'intégrale correspondante I_2 est imaginaire conjuguée de I_1 .

En faisant la somme des deux développements, il vient

$$(21) \quad A(\nu) = \frac{2}{(3\nu)^{\frac{1}{4}}} \left\{ C \cos \left[2\left(\frac{\nu}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right] + S \sin \left[2\left(\frac{\nu}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4} \right] \right\}$$

avec

$$C = \sqrt{\pi} \left[1 - \frac{3465}{512(3\nu)^3} + \dots + \frac{(-1)^p}{3\nu^{3p}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (12p-1)}{(4p)! 2^{6p}} \right],$$

$$S = \sqrt{\pi} \left[\frac{15}{16} \frac{1}{(3\nu)^{\frac{3}{2}}} - \frac{765 \cdot 765}{8192(3\nu)^{\frac{9}{2}}} + \dots + \frac{(-1)^p}{(3\nu)^{\frac{6p+3}{2}}} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (12p+5)}{(4p+2)! 2^{6p+3}} + \dots \right].$$

On peut vérifier facilement que les développements ainsi trouvés pour l'intégrale d'Airy concordent exactement avec ceux que Stokes avait obtenus par une méthode assez pénible (1).

3° Cas où ν est voisin de zéro. — Nous écrivons alors l'intégrale sous la forme

$$A(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\nu x} e^{ix^3} dx,$$

traitant $e^{-i\nu x}$ comme fonction $\varphi(x)$ lentement variable et posant

$$\nu = ix^3.$$

Le plan complexe prend alors l'aspect représenté sur la figure 7 ($\cos \nu = 0$). Notre chemin d'intégration se composera de deux droites 1 et 2.

Posons

$$-t = ix^3 \quad (x^3 = it).$$

L'intégrale s'écrit

$$\int_0^{\infty} (\Phi_1 - \Phi) e^{-t} dt$$

avec

$$\left. \begin{array}{l} \Phi \\ \Phi_1 \end{array} \right\} = \frac{dx}{dt} e^{-i\nu x}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{i^{\frac{1}{3}}}{3t^{\frac{2}{3}}}.$$

On vérifie facilement que :

$$\left. \begin{array}{ll} \Phi & \text{correspond à } i^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{6}}, \\ \Phi_1 & \text{» } i^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6}}. \end{array} \right.$$

(1) Cf. STOKES, *Math. Phys. Papers*, vol. II, p. 332.

ce qui donne les développements :

$$(22) \quad \begin{cases} \Phi = \frac{1}{3} e^{i\frac{5\pi}{6}} \left[t^{-\frac{2}{3}} - i \frac{\nu}{1!} e^{i\frac{5\pi}{6}} t^{-\frac{1}{3}} - \dots - \frac{(-i\nu)^n}{n!} e^{i\frac{5n\pi}{6}} t^{\frac{n-2}{3}} - \dots \right], \\ \Phi_1 = \frac{1}{3} e^{i\frac{\pi}{6}} \left[t^{-\frac{2}{3}} - i \frac{\nu}{1!} e^{i\frac{\pi}{6}} t^{-\frac{1}{3}} - \dots - \frac{(-i\nu)^n}{n!} e^{i\frac{n\pi}{6}} t^{\frac{n-2}{3}} - \dots \right]. \end{cases}$$

Le terme général de $\Phi, -\Phi$ est

$$\frac{(-i\nu)^n t^{\frac{n-2}{3}}}{3 n!} \left[e^{i\frac{n+1}{6}\pi} - e^{i(n+1)\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)} \right].$$

Si $n + 1$ est impair, le terme entre crochets donnera

$$2 \cos \frac{n+1}{6} \pi;$$

si $n + 1$ est pair, il donnera

$$2i \sin \frac{n+1}{6} \pi.$$

Et l'on trouve finalement

$$(23) \quad A(\nu) = \frac{2}{3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \cos \frac{\pi}{6} + \frac{\nu}{1!} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \sin \frac{2\pi}{6} - \frac{\nu^2}{2!} \Gamma(1) \cos \frac{3\pi}{6} \right. \\ \left. - \frac{\nu^2}{3!} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \sin \frac{4\pi}{6} - \dots - (-1)^{p-1} \frac{\nu^{2p-1}}{(2p-1)!} \Gamma\left(\frac{2p}{3}\right) \right. \\ \left. \times \sin \frac{2p\pi}{6} + (-1)^p \frac{\nu^{2p}}{(2p)!} \Gamma\left(\frac{2p+1}{3}\right) \cos \frac{(2p+1)\pi}{6} + \dots \right].$$

Les fonctions Γ se calculent par les formules bien connues :

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n \Gamma(n), \\ \log \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) &= 0,427\,962\,749\,3, \\ \log \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) &= 0,131\,656\,491\,6. \end{aligned}$$

Dans cette série, un certain nombre de termes sont nuls, ceux qui correspondent à des sinus de multiples de π ou à des cosinus de $(2p+1)\frac{\pi}{2}$.

On vérifiera facilement que ce sont tous les termes pour lesquels la fonction Γ porte sur un nombre entier.

La série ainsi trouvée est exactement celle donnée par Airy. Elle est absolument convergente pour toute valeur de ν , mais son emploi n'est pratique que si ν est assez petit.

V. — Intégrale d'Airy limitée.

Il m'était nécessaire de montrer comment ces développements déjà bien connus se retrouvent par la méthode de col pour pouvoir les utiliser dans l'étude de la fonction

$$A(\nu, r, s) = \int_r^s e^{i(x^3 - \nu x)} dx.$$

L'étude de cette fonction est, comme je l'ai rappelé dans l'Introduction, nécessaire pour la connaissance des interférences auprès d'une caustique, lorsque le diaphragme est une fente.

Il suffira d'étudier l'intégrale

$$A(\nu, -\infty, s) = \int_{-\infty}^s e^{i(x^3 - \nu x)} dx,$$

car l'on a

$$A(\nu, -\infty, s) - A(\nu, -\infty, r) = A(\nu, r, s).$$

Pourtant, comme nous ne calculons que des développements approchés, il serait mauvais d'employer cette formule lorsque r et s sont voisins.

Étudions d'abord ce cas. On a

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial r} = e^{i(r^3 - \nu r)}, \\ \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} = i e^{i(r^3 - \nu r)} (3r^2 - \nu), \\ \frac{\partial^3 A}{\partial r^3} = e^{i(r^3 - \nu r)} [i6r - (3r^2 - \nu)^2], \\ \frac{\partial^4 A}{\partial r^4} = e^{i(r^3 - \nu r)} [6i - 18r(3r^2 - \nu) - i(3r^2 - \nu)^3], \\ \dots \end{array} \right.$$

(¹) G. AIRY, *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, t. VIII, 1848, Part V, p. 593.

et l'on obtient l'intégrale développée en série de Taylor

$$(24') \quad A(r, s) = \frac{\partial A}{\partial r}(s-r) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2}(s-r)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 A}{\partial r^3}(s-r)^3 + \dots$$

Voyons maintenant comment on peut étudier l'intégrale

$$A(\nu, s) = \int_{-\infty}^s e^{i(x^3 - \nu x)} dx.$$

1° $\nu < 3s^2$. — Ce cas correspond aux figures 9 et 10 suivant que ν est positif ou négatif.

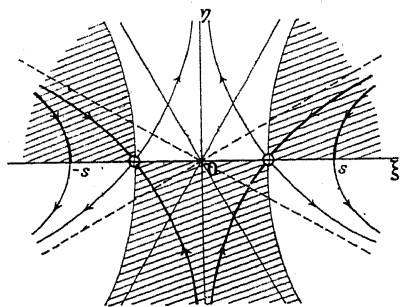


Fig. 9. $\nu > 0$.

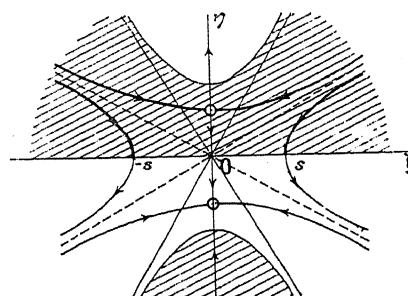


Fig. 10. $\nu < 0$.

Si s est positif on doit prendre, quel que soit le signe de ν ,

$$A(\nu, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x^3 - \nu x)} dx - \int_s^{+\infty} e^{i(x^3 - \nu x)} dx,$$

cette dernière intégrale étant prise sur la ligne de plus grande pente passant par s . Pour la calculer, nous poserons

$$t = \omega_s - \omega = (x-s) [-i(3s^2 - \nu) - i3s(x-s) - i(x-s)^2].$$

L'intégrale s'écrira

$$S = \int_s^{+\infty} e^{\omega} dx = e^{i(s^3 - \nu s)} \int_0^{+\infty} e^{-t} \Phi dt.$$

L'expression

$$\Phi = \frac{dx}{dt}$$

se calcule facilement au moyen des formules générales et l'on a

$$(25) \quad S = e^{i(s^2 - \nu s)} \left\{ \frac{i}{3s^2 - \nu} + \frac{6s}{(3s^2 - \nu)^2} + i \frac{6}{(3s^2 - \nu)^3} \left(1 - \frac{18s^2}{3s^2 - \nu} \right) - \frac{360s(6s^2 + \nu)}{(3s^2 - \nu)^4} + i \frac{360}{(3s^2 - \nu)^5} \left[1 - \frac{7s}{3s^2 - \nu} + \frac{378s^2}{(3s^2 - \nu)^2} \right] + \dots \right\}.$$

Et l'on a finalement

$$(25 \text{ bis}) \quad A(\nu, -\infty, s) = A(\nu) - S \quad (\nu < 3s^2, s > 0).$$

Si s est négatif on verra facilement qu'on doit prendre l'intégrale de $-\infty$ à s sur la ligne de plus grande pente aboutissant en s ; cette intégrale sera égale à $-S$ si S représente toujours le développement ci-dessus :

$$(25 \text{ ter}) \quad A(\nu, -\infty, s) = -S \quad (\nu < 3s^2, s < 0).$$

2° $\nu > 3s^2$. — La figure 11 correspond à ce cas. On voit que,

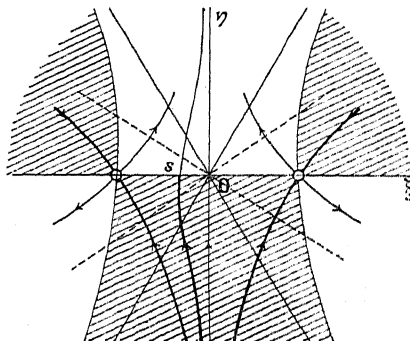


Fig. 11.

quel que soit le signe de s , le chemin d'intégration choisi ira de $-\infty$ à $-i\infty$ par le col négatif, puis de $-i\infty$ à s par la ligne de plus grande pente aboutissant en s .

La deuxième intégrale n'est autre que $-S$, et la première a déjà été calculée; c'est le développement I_2 , imaginaire conjugué du développement I_1 , donné par la formule (20),

$$(26) \quad A(\nu, s) = I_2 - S \quad (\nu > 3s^2).$$

3° Ces formules cessent d'être pratiques dans deux cas seulement :

- a. Lorsque s est voisin d'un col, $\nu \approx 3s^2$.
- b. Lorsque ν étant voisin de zéro ou négatif, s est voisin de zéro.

a. $\nu \approx 3s^2$. — Le point s est voisin d'un des deux cols; on fera alors l'intégration jusqu'au col voisin de s , puis au moyen des formules (24) on fera l'intégration le long de l'axe réel depuis le col jusqu'à s .

s négatif, voisin de $-\sqrt{\frac{\nu}{3}}$. — Il faut d'abord calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{\frac{\nu}{3}}} e^{\nu x} dx = -\int_0^{\infty} e^{-t} \Phi dt \quad \left(t = \nu_{\text{col}} - \nu, \Phi = \frac{dx}{dt} \right).$$

Le développement de Φ se déduit de la formule (19) en changeant le signe devant $\nu^{\frac{1}{2}}$ et en remplaçant $e^{i\frac{\pi}{4}}$ par $-e^{-i\frac{\pi}{4}}$. L'intégration donne

$$\begin{aligned} (27) \quad & A\left(\nu, -\infty, -\sqrt{\frac{\nu}{3}}\right) \\ &= \frac{1}{2} e^{i^2\left(\frac{\nu}{3}\right)^{\frac{3}{2}}} \left[-\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{(3\nu)^{\frac{1}{4}}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{i}{3\nu} \Gamma(1) + \frac{15}{8} \frac{e^{-i\frac{7\pi}{4}}}{(3\nu)^{\frac{7}{4}}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \right. \\ & \quad - \frac{4}{(3\nu)^{\frac{5}{2}}} \Gamma(2) - \frac{1155}{128} \frac{e^{-i\frac{13\pi}{4}}}{(3\nu)^{\frac{13}{4}}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) + i \frac{21}{(3\nu)^4} \Gamma(3) \\ & \quad + \frac{51051}{1024} \frac{e^{-i\frac{19\pi}{4}}}{(3\nu)^{\frac{19}{4}}} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) - \dots \\ & \quad \left. - (-1)^{3p+1} \frac{e^{-i\frac{3p+1}{4}\pi}}{(3\nu)^{\frac{3p+1}{4}}} \frac{(p+1)(p+3)\dots(3p-1)}{2^p p!} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Il reste encore à faire l'intégration du col jusqu'en s au moyen des formules (24).

On trouve ainsi

On obtient donc, pour le cas $s < 0$, $\nu \approx 3s^2$:

$$(28 \text{ bis}) \quad A(\nu, -\infty, s) = A\left(\nu, -\infty, -\sqrt{\frac{\nu}{3}}\right) + A\left(\nu, -\sqrt{\frac{\nu}{3}}, s\right).$$

Pour le cas $s > 0$, $\nu \approx 3s^2$, on trouve :

$$(28 \text{ ter}) \quad A(\nu, -\infty, s) = I_2 + A\left(\nu, -i\infty, \sqrt{\frac{\nu}{3}}\right) + A\left(\nu, \sqrt{\frac{\nu}{3}}, s\right).$$

I_2 est imaginaire conjugué du développement I, [éq. (20)].

$A\left(\nu, -i\infty, \sqrt{\frac{\nu}{3}}\right)$ se déduit de (27) par le changement de $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ en $e^{i\frac{\pi}{4}}$.

$A\left(\nu, \sqrt{\frac{\nu}{3}}, s\right)$ se déduit de (28) par le changement de signe devant $\sqrt{\frac{\nu}{3}}$.

b. ν et s voisins de zéro. — On fera l'intégration jusqu'à l'origine, comme au cas ν voisin de zéro, ce qui donne, d'après (22), (23),

$$(29) \quad A(\nu, -\infty, 0) = -\frac{1}{3} e^{i\frac{5\pi}{6}} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - i \frac{\nu}{1!} e^{i\frac{5\pi}{6}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \frac{(-i\nu)^n}{n!} e^{i\frac{5n\pi}{6}} \Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right) + \dots \right];$$

il restera ensuite à faire $A(\nu, 0, s)$ d'après les formules (24) qui se réduisent à

$$A(\nu, 0, s) = \frac{s}{1} + \frac{i}{2!} \left(\frac{s^4}{4} - \nu \frac{s^2}{2} \right) - \frac{1}{3!} \left(\frac{s^7}{7} - 2\nu \frac{s^5}{5} + \nu^2 \frac{s^3}{3} \right) - \dots$$

Et l'on aura

$$(29 \text{ bis}) \quad A(\nu, -\infty, s) = A(\nu, -\infty, 0) + A(\nu, 0, s).$$

Il faudra employer cette formule pour ν voisin de zéro, positif, et pour ν négatif tant que ν ne sera pas très grand en valeur absolue.

Pour ν négatif, grand en valeur absolue, on emploiera simplement les formules (25) et (25 ter)

$$A(\nu, -\infty, s) = -S \quad (s > 0 \text{ ou } s < 0).$$

La contribution de $A(\nu)$ pour le cas où s est positif [formule (25 bis)] pouvant être négligée complètement devant S .

Les développements ainsi trouvés permettent donc de calculer sans difficultés les valeurs de l'intégrale

$$A(\nu, r, s) = \int_r^s e^{i(x^3 - \nu x)} dx.$$

Il n'existe, jusqu'à présent, qu'une table tout à fait restreinte de cette intégrale, calculée par Lord Rayleigh (1).

VI. — Interférences dans le plan focal lorsque l'aberration de sphéricité existe.

Nous avons vu, dans l'Introduction, que l'étude des interférences dans le plan focal, lorsque l'aberration de sphéricité n'est pas corrigée, se ramène à l'étude de l'intégrale

$$M(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x^4 - \nu x)} dx,$$

si l'ouverture peut être considérée comme pratiquement infinie

$$M(\nu, r, s) = \int_r^s e^{i(x^4 - \nu x)} dx,$$

lorsque le diaphragme est une fente.

L'exposant est

$$\nu = i(x^4 - \nu x).$$

Les cols sont donnés par la condition

$$\begin{aligned} \frac{d\nu}{dx} = 0, \quad 4x^3 - \nu = 0, \\ x = \left(\frac{\nu}{4}\right)^{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

(1) Lord RAYLEIGH, *Phil. Mag.*, 5^e série, t. VIII, 1879, p. 404.

Si x_0 est la racine réelle, les autres cols sont

$$x_1 = x_0 e^{i \frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad x_2 = x_0 e^{i \frac{4\pi}{3}}.$$

En un point,

$$x = \xi + i\eta;$$

la partie réelle x de l'exposant ϖ est

$$X = 4\eta\xi(\eta^2 - \xi^2) + \nu\eta.$$

L'axe réel ($\eta = 0$) est une des lignes sur lesquelles X est nul. Le reste de la courbe $X = 0$ se compose de trois branches, symétriques par rapport à l'axe réel; une de ces branches coupe l'axe réel au col x_0 ; les asymptotes de la courbe sont les axes de coordonnées et leurs bissectrices.

En vertu de la relation

$$M(-\nu) = -M(\nu),$$

il nous suffira d'étudier le cas où ν est positif.

Lorsque ν est nul, les trois cols sont confondus à l'origine, qui est un point triple pour l'exposant ϖ en ce point.

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \varpi}{\partial x^3} = 0, \quad \frac{\partial^4 \varpi}{\partial x^4} = i4!$$

L'aspect du plan complexe est représenté sur la figure 13.

Lorsque ν est positif, le plan complexe prend l'aspect de la figure 12. On calcule facilement que les lignes de plus grande pente pour X passant par le col x_0 sont inclinées à 45° . Elles font les angles $\frac{\pi}{12}$ et $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$ pour x_1 ; $-\frac{\pi}{12}$ et $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$ pour le col x_2 .

En effet, soit x_n un col

$$x_n = x_0 e^{i \frac{2n\pi}{3}} \quad (n = 0, 1, 2);$$

un point au voisinage du col sera

$$x = x_n + \rho e^{i\omega} \quad (\rho \text{ petit});$$

on pourra écrire

$$\varpi - \varpi_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2} \right)_n \rho^2 e^{i2\omega} = i6x_n^2 \rho^2 e^{i2\omega},$$

$$\varpi - \varpi_n = 6x_0^2 \rho^2 e^{i \left(\frac{4n\pi}{3} + 2\omega + \frac{\pi}{2} \right)}.$$

Les lignes de plus grande pente pour la partie réelle X de ω sont celles

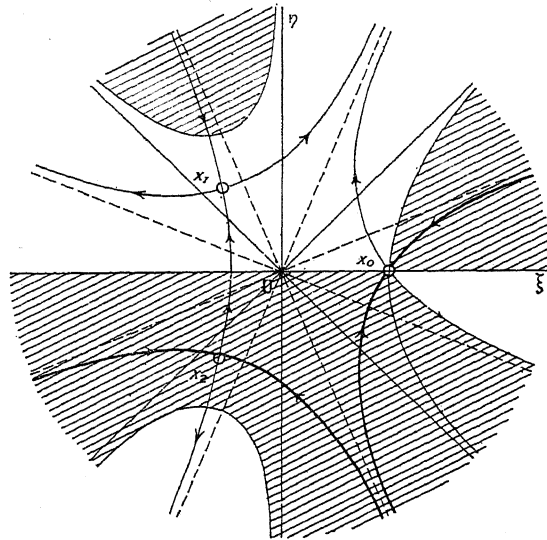


Fig. 12. $\nu > 0$.

pour lesquelles la partie imaginaire Y reste constante. Elles sont donc données par

$$\frac{4n\pi}{3} + 2\omega = k\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\omega = -\frac{2n\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

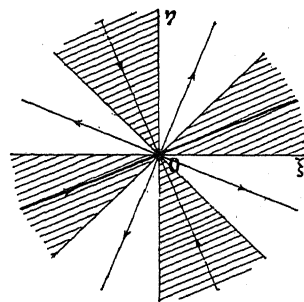


Fig. 13. $\nu = 0$.

On trouve ainsi les résultats annoncés.

La valeur de ω en un col x_n est

$$\omega_n = -i3x_n^{\frac{2}{3}}.$$

Le chemin d'intégration, marqué en trait plein sur chaque figure, part de $e^{i\frac{3\pi}{8}}\infty$ pour aboutir à $e^{i\frac{\pi}{8}}\infty$. Le raccord à l'infini, avec l'axe réel, fournit une contribution nulle à l'intégrale, comme je l'ai déjà remarqué à propos de l'intégrale d'Airy.

1° ν voisin de zéro. — Lorsque ν est petit, nous pouvons considérer $e^{-i\nu x}$ comme lentement variable, et écrire l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x^4 - \nu x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{ix^4} dx \quad (\varphi = e^{-i\nu x}).$$

L'exposant est $\omega = ix^4$, pour lequel le plan complexe a l'aspect de la figure 13. Le chemin d'intégration étant la droite,

$$x = \rho e^{i\frac{\pi}{8}}.$$

Posons

$$t = -ix^4,$$

$$x^4 = it,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i^{\frac{1}{4}}}{4t^{\frac{3}{4}}}.$$

L'intégrale s'écrira

$$\int e^{i(x^4 - \nu x)} dx = \int_0^{\infty} e^{-t} (\Phi_1 - \Phi) dt,$$

avec

$$(30) \quad \left. \begin{array}{l} \Phi_1 \\ \Phi \end{array} \right\} = \varphi(x) \frac{dx}{dt} = \frac{e^{i\frac{\pi}{8}}}{4} \left[\pm t^{-\frac{3}{4}} + \frac{\nu}{1} e^{-i\frac{3\pi}{8}} t^{-\frac{1}{2}} \right. \\ \left. \pm \frac{\nu^2}{2!} e^{-i\frac{3\pi}{4}} t^{-\frac{1}{4}} \pm \dots \pm \frac{\left(\pm \nu e^{-i\frac{3\pi}{8}} \right)^n}{n!} t^{\frac{n-3}{4}} \pm \dots \right]$$

en vérifiant que

$$\Phi_1 \text{ correspond à } i^{\frac{1}{4}} = + e^{i\frac{\pi}{8}},$$

$$\Phi \quad \quad \quad \text{»} \quad i^{\frac{1}{4}} = - e^{i\frac{\pi}{8}},$$

et en développant

$$\varphi(x) = e^{-i i^{\frac{1}{4}} \nu i^{\frac{1}{4}}} = e^{-i^{\frac{5}{4}} \nu i^{\frac{1}{4}}} = e^{\pm i e^{-i\frac{3\pi}{8}} \nu i^{\frac{1}{4}}}.$$

Et l'intégrale s'écrit

$$(30 \text{ bis}) \quad M(\nu) = \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{\nu^2}{2!} e^{-i\frac{3\pi}{4}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{\nu^4}{4!} e^{-i\frac{3\pi}{2}} \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) + \dots + \frac{\nu^{2n}}{2n!} e^{-i\frac{3n\pi}{4}} \Gamma\left(\frac{2n+1}{4}\right) + \dots \right].$$

Cette série est absolument convergente, elle ne sera néanmoins pratique que si ν est petit.

2° $\nu > 0$. — Dans ce cas (*fig. 12*), nous avons à calculer l'intégrale auprès des deux cols x_0 et x_2 .

a. *Intégrale* I_0 *auprès de* x_0 . — Suivant la méthode générale, nous poserons

$$t = w_0 - w = (x - x_0)^2 [-i6x_0^2 - i4x_0(x - x_0) - i(x - x_0)^2].$$

Notre intégrale s'écrira

$$\int_0^\infty (\Phi_1 - \Phi) e^{-t} dt$$

avec

$$(31) \quad \left. \begin{array}{l} \Phi_1 \\ \Phi \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left[\pm \frac{1+i}{2\sqrt{3}x_0} t^{-\frac{1}{2}} - \frac{i}{9x_0^3} \mp \frac{(1-i)}{\sqrt{3}x_0^5} \frac{7}{144} t^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{486x_0^7} t \mp \frac{1+i}{\sqrt{3}x_0^9} \frac{1755}{62208} t^{\frac{3}{2}} + \dots \right].$$

Et l'on obtient

$$(31 \text{ bis}) \quad I_0 = \sqrt{\pi} e^{-i3x_0^4} \left[\frac{1+i}{2\sqrt{3}x_0} - \frac{7(1-i)}{288\sqrt{3}x_0^5} - \frac{1755\sqrt{3}(1+i)}{248832x_0^9} - \dots \right].$$

L'intégrale I_2 auprès du col x_2 se déduit immédiatement de I_0 par le remplacement, dans le développement, de x_0 par

$$x_2 = x_0 e^{-i\frac{2\pi}{3}},$$

$$(31 \text{ ter}) \quad I_2 = \sqrt{\pi} e^{-\frac{3}{2}x_0^4(\sqrt{3}+i)} \left[\frac{e^{-\frac{i\pi}{12}}}{\sqrt{6}x_0} + \frac{7}{144} \frac{e^{\frac{i\pi}{12}}}{\sqrt{6}x_0^5} - \frac{1755}{124416} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{e^{-\frac{i\pi}{12}}}{x_0^9} + \dots \right].$$

Et l'on a finalement

$$M(\nu) = I_0 + I_2.$$

VII. — Même intégrale. Limite finie.

Nous voulons étudier maintenant l'intégrale

$$M(\nu, r, s) = \int_r^s e^{i(x^4 - \nu x)} dx.$$

On peut se borner au cas $\nu > 0$, car l'on a

$$M(\nu, r, s) = -M(-\nu, -s, -r).$$

Lorsque r et s ne sont pas trop voisins, on utilise la relation

$$M(\nu, r, s) = M(\nu, -\infty, s) - M(\nu, -\infty, r).$$

Et il suffit d'étudier l'intégrale

$$M(\nu, -\infty, s) = \int_{-\infty}^s e^{i(x^4 - \nu x)} dx.$$

Lorsque r et s sont voisins on utilise un développement de Taylor,

$$(32) \quad M(\nu, r, s) = e^{i(r^4 - \nu r)} \left\{ \begin{aligned} & (s-r) + \frac{i(s-r)^2}{2!} (4r^3 - \nu) \\ & + \frac{(s-r)^3}{3!} [i 12r^2 - (4r^3 - \nu)^2] \\ & + \frac{(s-r)^4}{4!} [-24r^2(4r^3 - \nu) + i 24r - i(4r^3 - \nu)^3] \\ & + \frac{(s-r)^5}{5!} [-48r(10r^3 - \nu) + i 24 \\ & \quad - i 36r^2(4r^3 - \nu)^2 + (4r^3 - \nu)^4] \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}.$$

Étudions donc $M(\nu, -\infty, s)$.

1° $s^3 > \frac{\nu}{4}$. s se trouve en position I (fig. 14). Nous prendrons

$$(33) \quad M(\nu, -\infty, s) = M(\nu, -\infty, +\infty) - S,$$

S désignant l'intégrale prise de s à $+\infty$ sur la ligne de plus grande pente passant par s .

Calculons l'intégrale S sur la ligne de plus grande pente passant en s .

Nous poserons

$$t = w_s - w = (x - s) [-i(4s^3 - \nu) - i6s^2(x - s) - i4s(x - s)^2 - i(x - s)^3]$$

et

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{dx}{dt} &= \frac{i}{4s^3 - \nu} - \frac{12s^2}{(4s^3 - \nu)^3} t - i \frac{12s}{(4s^3 - \nu)^4} \left(1 - 18 \frac{s^3}{4s^3 - \nu} \right) t^2 \\ &- \frac{4}{(4s^3 - \nu)^5} \left[1 - \frac{120s^3}{4s^3 - \nu} + \frac{1080s^6}{(4s^3 - \nu)^2} \right] t^3 \\ &+ i \frac{420s^2}{(4s^3 - \nu)^7} \left[1 - \frac{30s^3}{4s^3 - \nu} + \frac{216s^6}{(4s^3 - \nu)^2} \right] t^4 + \dots \end{aligned}$$

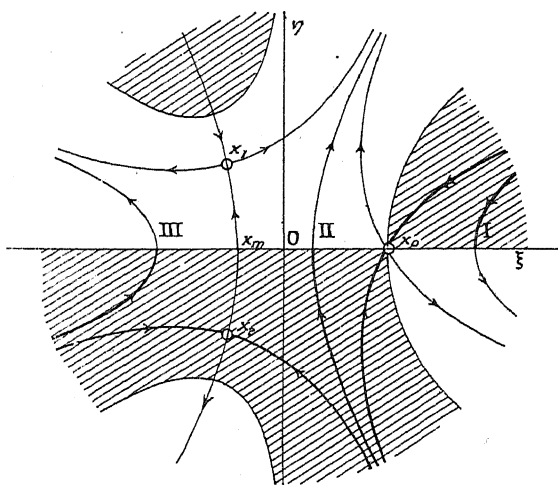


Fig. 14.

D'où la valeur de l'intégrale

$$\begin{aligned} (33 \text{ bis}) \quad S &= e^{w_s} \int_0^\infty e^{-t} \Phi(t) dt \\ &= e^{i(s^4 - \nu s)} \left\{ \frac{i}{4s^3 - \nu} - \frac{12s^2}{(4s^3 - \nu)^3} - i \frac{24s}{(4s^3 - \nu)^4} \left(1 - 18 \frac{s^3}{4s^3 - \nu} \right) \right. \\ &\quad - \frac{24}{(4s^3 - \nu)^5} \left[1 - \frac{120s^3}{4s^3 - \nu} + \frac{1080s^6}{(4s^3 - \nu)^2} \right] \\ &\quad \left. + i \frac{10080s^2}{(4s^3 - \nu)^7} \left[1 - \frac{30s^3}{4s^3 - \nu} + \frac{216s^6}{(4s^3 - \nu)^2} \right] + \dots \right\}. \end{aligned}$$

2° $x_m < s < \left(\frac{\nu}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$. — Le point x_m est le point où la ligne de plus grande pente qui passe par les deux cols x_1, x_2 coupe l'axe réel. La

valeur de x_m est facile à calculer. La ligne $x_1 x_m x_2$ est une ligne de plus grande pente pour la partie réelle X de l'exposant ω ; sur cette ligne Y est constant, égal à

$$\frac{3}{2} x_0^4.$$

Sur l'axe réel,

$$Y = x^4 - \nu x,$$

x_m est racine de l'équation

$$x_m^4 - \nu x_m = \frac{3}{2} x_0^4 \quad \text{avec} \quad x_0 = \left(\frac{\nu}{4}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Par approximations successives, on trouve

$$x_m = 0,3704 x_0.$$

Lorsque s est en position II on trouve

$$(34) \quad M(\nu, -\infty, s) = I_2 - S.$$

3° $s < x_m$. — Dans ce cas on a

$$(34') \quad M(\nu, -\infty, s) = -S.$$

Ces deux expressions (34) deviennent équivalentes si ν n'est pas petit. En effet I_2 disparaît comme

$$e^{-\frac{3\sqrt{3}}{2} x_0^4} = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{3\nu}{4}\right)^{\frac{4}{3}}},$$

et devient vite négligeable devant S.

Ces développements cessent d'être pratiques pour les trois cas suivants :

- a. s voisin de $\left(\frac{\nu}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$.
- b. s voisin de x_m .
- c. s et ν petits.

Le cas b n'est pas à étudier particulièrement, car, si ν est grand, il suffira d'écrire

$$M(\nu, -\infty, s) = -S,$$

en négligeant le terme I_2 dans les équations (34) en vertu de la remarque ci-dessus; si ν est petit, on retombe sur le cas c .

a. s voisin de $\left(\frac{\nu}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$. — On fera l'intégration jusqu'au col x_0 , et de x_0 à s on intégrera sur l'axe réel en se servant des formules (32). On trouve ainsi, en utilisant le développement (31),

$$(35) \quad \mathbf{M}(\nu, -\infty, s) \\ = \mathbf{I}_2 + \frac{e^{-i3x_0^3}}{2} \left[\frac{1+i}{2\sqrt{3}x_0} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{i}{9x_0^3} \Gamma(1) - \frac{(1-i)7}{\sqrt{3}x_0^5 144} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \right. \\ \left. + \frac{7}{486x_0^7} \Gamma(2) - \frac{(1+i)1755}{\sqrt{3}x_0^9 62208} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) + \dots \right] \\ + e^{-i3x_0^3} \left[(s-x_0) + i \frac{(s-x_0)^3}{3!} 12x_0 \right. \\ \left. + i \frac{(s-x_0)^4}{4!} 24x_0 + \frac{(s-x_0)^5}{5!} (24i - 288x_0^4) + \dots \right] + \dots$$

b. ν et s petits. — On intégrera de $-\infty$ à 0 sur la droite $x = -\rho e^{i\frac{\pi}{8}}$, en utilisant le développement (30), puis de 0 à s sur l'axe réel au moyen des formules (32),

$$(36) \quad \mathbf{M}(\nu, -\infty, s) \\ = \frac{e^{i\frac{\pi}{8}}}{4} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{\nu}{1} e^{-i\frac{3\pi}{8}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right. \\ \left. + \frac{\nu^2}{2!} e^{-i\frac{3\pi}{4}} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \frac{\nu^n e^{-i\frac{3n\pi}{8}}}{n!} \Gamma\left(\frac{n+1}{4}\right) + \dots \right] \\ + s - i\nu \frac{s^2}{2!} - \nu^2 \frac{s^3}{3!} + i\nu^3 \frac{s^4}{4!} \\ + \frac{s^5}{5!} (24i + \nu^4) - \frac{s^6}{6!} (i\nu^5 - 48\nu) - \frac{s^7}{7!} (\nu^7 + i72\nu^2) + \dots$$

Ce dernier développement cesserait d'être pratique pour des valeurs un peu grandes de ν et s .

Nous avons donc pu calculer des développements approchés valables dans tous les cas possibles. Il n'existe, je crois, aucune table numérique de l'intégrale que nous venons d'étudier.

VIII. — Interférences auprès d'un foyer imparfait.

Lorsqu'on veut étudier les interférences tout autour d'un foyer, imparfait, et non plus seulement dans le plan focal, il faut connaître l'intégrale

$$(1) \quad \Phi(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x^4 + ux^2 - vx)} dx,$$

si l'ouverture peut être considérée comme infinie, et

$$\Phi(u, v, r, s) = \int_r^s e^{i(x^4 + ux^2 - vx)} dx,$$

si l'ouverture est une fente.

Dans les paragraphes précédents nous avons étudié le cas $u = 0$. Les formules ainsi calculées peuvent être utilisées lorsque u est petit. En effet, si l'on développe e^{iux^2} en série, on voit que l'on peut mettre $\Phi(u, v, r, s)$ sous la forme

$$\Phi(u, v, r, s) = \Phi(0, v, r, s) + iu \Psi_2(v, r, s) + \dots + \frac{(iu)^n}{n!} \Psi_{2n}(v, r, s).$$

En désignant par Ψ l'intégrale,

$$(37) \quad \Psi_{2n}(v, r, s) = \int_r^s e^{i(x^4 - vx)} x^{2n} dx = \frac{\partial^{2n} \Phi(0, v, r, s)}{\partial v^{2n}}.$$

Ce développement sera d'un usage peu pratique, même pour le cas où u est petit.

A. *u petit*. — Nous écrirons dans ce cas l'intégrale sous la forme

$$\int \varphi(x) e^{i(x^4 - vx)} dx$$

avec

$$\varphi(x) = e^{iux^2}.$$

L'exposant ϖ est alors le même qu'aux paragraphes VI et VII; le chemin d'intégration est identique. Il faut remplacer les formules obtenues par les suivantes, auxquelles j'ai gardé le même numérotage :

1° ν petit :

$$(30 a) \quad \left. \begin{array}{l} \Phi \\ \Phi_1 \end{array} \right\} = \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{4} \left[\pm t^{-\frac{3}{4}} + \nu e^{-i\frac{3\pi}{8}} t^{-\frac{1}{2}} \pm \left(\frac{\nu^2}{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}} - u e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) t^{-\frac{1}{4}} \right. \\ \left. + \left(\frac{\nu^3}{6} e^{-i\frac{9\pi}{8}} - u\nu e^{-i\frac{5\pi}{8}} \right) \right. \\ \left. \pm \left(\frac{\nu^4}{24} e^{-i\frac{3\pi}{2}} + i \frac{u\nu^2}{2} + \frac{u^2}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} \right) t^{\frac{1}{4}} + \dots \right].$$

Et la valeur de l'intégrale est

$$(30 a bis) \quad \Phi(u, \nu) = \frac{e^{\frac{i\pi}{8}}}{2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{\nu^2}{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}} - u e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\nu^4}{24} e^{-i\frac{3\pi}{2}} + i \frac{u\nu^2}{2} + \frac{u^2}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}} \right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) + \dots \right].$$

2° $\nu > 0$. — Après du col x_0 on développera φ en série

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1(x - x_0) + \varphi_2(x - x_0)^2 + \dots$$

avec

$$\varphi_0 = e^{iux_0^2}, \quad \varphi_1 = i 2 u x_0 \varphi_0, \quad \varphi_2 = (iu - 2 u^2 x_0^2) \varphi_0, \\ \varphi_3 = - \left(2 x_0 u^2 - i \frac{4}{3} u^3 x_0^3 \right) \varphi_0, \quad \varphi_4 = \left(- \frac{u^2}{2} - i 2 u^3 x_0^3 + \frac{2}{3} u^4 x_0^4 \right) \varphi_0.$$

On obtient alors

$$(31 a) \quad \left. \begin{array}{l} \Phi \\ \Phi_1 \end{array} \right\} = \frac{e^{iux_0^2}}{2} \left\{ \pm \frac{1+i}{2\sqrt{3}x_0} t^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{i}{9x_0^3} + \frac{u}{3x_0} \right) \right. \\ \pm \left[\frac{(1-i)2u^2x_0^2 - (1+i)3u}{12\sqrt{3}x_0^3} - \frac{(1+i)7}{144\sqrt{3}x_0^5} \right] t^{\frac{1}{2}} \\ + \left[\frac{i(2u^3x_0^5 + 2ux_0 - 3u) - u^2x_0^3}{54x_0^6} + \frac{7}{486x_0^7} \right] t \\ \pm \left[\frac{\left(\frac{u^2}{2} - \frac{2}{3}u^4x_0^4 \right) (1+i) - (1-i)2u^3x_0^2}{72\sqrt{3}x_0^5} \right. \\ \left. + \frac{10u^3x_0^3(1-i) - 15u^2x_0(1+i)}{324\sqrt{3}x_0^6} \right. \\ \left. + \frac{110(1+i)u^2x_0^2 - 125u(1-i)}{2592\sqrt{3}x_0^7} - \frac{1755(1+i)}{62208\sqrt{3}x_0^9} \right] t^{\frac{3}{2}} + \dots \left. \right\}$$

et

$$(31 a bis) \quad I_0^\alpha = \sqrt{\pi} e^{-i(3x_0^4 - ux_0^2)}$$

$$\times \left[\begin{aligned} & \frac{1+i}{2\sqrt{3}x_0} + \frac{(1-i)2u^2x_0^2 - (1+i)3u}{24\sqrt{3}x_0^3} - \frac{(1+i)7}{288\sqrt{3}x_0^5} \\ & + \sqrt{3} \frac{\left(\frac{u^2}{2} - \frac{2}{3}u^4x_0^4\right)(1+i) - 2u^3x_0^2(1-i)}{288x_0^5} \\ & + \sqrt{3} \frac{10u^3x_0^3(1-i) - 15u^2x_0(1+i)}{1296x_0^6} \\ & + \sqrt{3} \frac{110u^2x_0^2(1+i) - 125u(1-i)}{10368x_0^7} - \frac{1755\sqrt{3}(1+i)}{248832x_0^9} \\ & + \dots \end{aligned} \right].$$

Après du col x_2 on a

$$(31 a ter) \quad I_2^\alpha = \sqrt{\pi} e^{-\frac{1}{2}[3x_0^4\sqrt{3}+i]+ux_0^2(\sqrt{3}-i]}$$

$$\times \left(\begin{aligned} & -\frac{e^{-i\frac{\pi}{12}}}{\sqrt{6}x_0} + \frac{2u^2x_0^2e^{i\frac{5\pi}{12}} - 3ue^{i\frac{\pi}{4}}}{12\sqrt{6}x_0^3} - 7\frac{e^{-i\frac{5\pi}{12}}}{144\sqrt{6}x_0^5} \\ & + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\frac{u^2}{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}} + \frac{2}{3}u^4x_0^4e^{-i\frac{\pi}{12}} - 2u^3x_0^2e^{-i\frac{\pi}{4}}}{144x_0^5} \\ & + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{10u^3x_0^3e^{-i\frac{\pi}{4}} - 15u^2x_0e^{-i\frac{5\pi}{12}}}{648x_0^6} \\ & + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{110u^2x_0^2e^{-i\frac{5\pi}{12}} + 125ue^{i\frac{5\pi}{12}}}{5184x_0^7} - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1755e^{i\frac{\pi}{4}}}{124416x_0^9} \\ & + \dots \end{aligned} \right).$$

On trouve finalement

$$\Phi(u, v) = I_0^\alpha + I_2^\alpha.$$

Le terme I_2^α est en général très petit devant I_0^α , par suite de l'exponentielle en facteur.

B. Voyons maintenant comment étudier l'intégrale directement, au

cas où u et v ne sont pas petits. L'exposant est

$$w = i(x^3 + ux^2 - vx).$$

Les cols sont donnés par la condition

$$(38) \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad 4x^3 + 2ux - v = 0.$$

Posons

$$p = \frac{u}{2}, \quad q = \frac{v}{4}.$$

L'équation s'écrit

$$x^3 + px - q = 0.$$

Si l'on désigne par \mathfrak{a} et \mathfrak{b} les expressions

$$\mathfrak{a} = \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\mathfrak{b} = \left(\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \right)^{\frac{1}{3}},$$

les trois solutions de l'équation sont

$$(38') \quad \begin{cases} x_0 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \\ x_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathfrak{a} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathfrak{b}, \\ x_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \mathfrak{a} + e^{i\frac{2\pi}{3}} \mathfrak{b}. \end{cases}$$

Plusieurs cas sont à distinguer :

I. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$. — Les quantités \mathfrak{a} , \mathfrak{b} sont réelles. Dans ce cas, x_0 est réel; x_1 et x_2 sont imaginaires conjugués, c'est-à-dire donnent deux cols symétriques par rapport à l'axe réel.

II. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$. — $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Les deux cols x_1 , x_2 sont confondus en un seul, situé sur l'axe réel. On a alors

$$x_1 = x_2 = -\frac{x_0}{2}.$$

III. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$. — \mathfrak{a} et \mathfrak{b} sont imaginaires conjugués; x_0 , x_1 , x_2 sont réels.

Nous nous bornerons au cas où q est positif, en vertu de la relation

$$\Phi(2p, 4q, r, s) = +\Phi(2p, -4q, -r, -s).$$

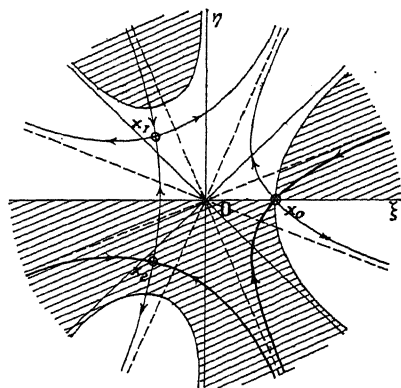


Fig. 15. $\frac{q^2}{3} + \frac{p^3}{27} > 0.$

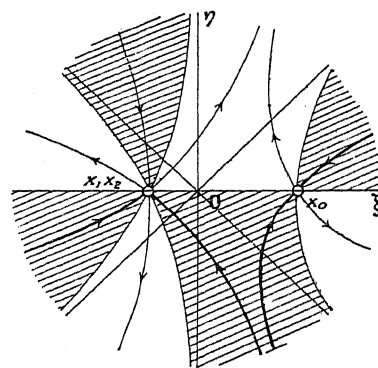


Fig. 16. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0.$

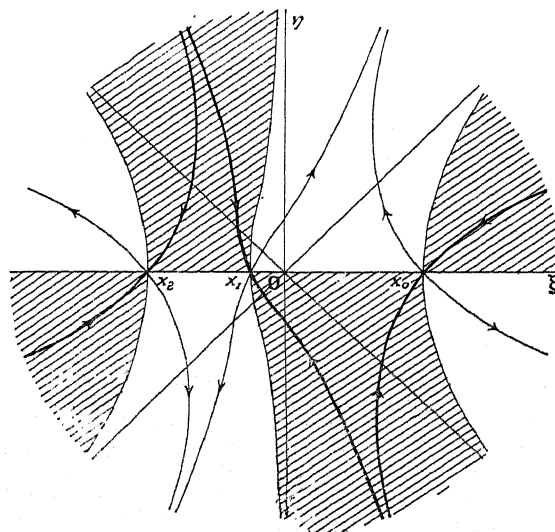


Fig. 17. $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0.$

Nous remarquerons aussi que la courbe $X = 0$ est symétrique par rapport à l'axe réel, et comprend cet axe. Les différents aspects du plan complexe sont représentés par les figures 15, 16 et 17.

La courbe $X = 0$ a pour asymptotes les deux axes et leurs diago-

nales. Les asymptotes de lignes de plus grande pente correspondent aux angles $\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$.

Dans le cas I, le chemin d'intégration se compose de deux lignes de plus grande pente passant par les cols x_2 et x_0 .

Dans le cas II, le chemin d'intégration se compose de deux branches aboutissant au col double, et d'une ligne de plus grande pente passant par le dernier col.

Dans le cas III, le chemin d'intégration passe par les trois cols. On voit facilement, puisque l'axe réel fait toujours partie de la courbe $X=0$, que pour tous les cols situés sur l'axe réel les lignes de plus grande pente sont à 45° . Dans le cas $4p^3 + 27q^2 = 0$, les lignes de plus grande pente auprès du col double sont inclinées à $\pm 30^\circ$ et 90° .

Calculons la valeur de l'intégrale auprès du col x_0 . L'exposant a , en ce col, la valeur

$$\omega_0 = i(x_0^4 + 2px_0^2 - 4qx_0) = i(px_0^2 - 3qx_0).$$

Nous poserons

$$t = \omega_0 - \omega = (x - x_0)^2 [-i(6x_0^2 + 2p) - i4x_0(x - x_0) - i(x - x_0)^2].$$

L'intégrale auprès de x_0 s'écrira

$$I_0 = e^{\omega_0} \int_0^\infty e^{-t} (\Phi_1 - \Phi) dt,$$

où Φ, Φ_1 représentent $\frac{dx}{dt}$. On trouve

$$(39) \quad \left. \begin{aligned} \Phi_1 \\ \Phi \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{aligned} &\pm \frac{1+i}{2\sqrt{3x_0^2+p}} t^{-\frac{1}{2}} - \frac{ix_0}{(3x_0^2+p)^2} \\ &\pm \frac{3}{8} \frac{1-i}{(3x_0^2+p)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{2} - \frac{5x_0^2}{3x_0^2+p} \right) t^{\frac{1}{2}} \\ &- \frac{x_0}{(3x_0^2+p)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3}{4} - \frac{8x_0^2}{3x_0^2+p} \right) t \\ &\pm \frac{(1+i)35}{64(3x_0^2+p)^{\frac{5}{2}}} \left[\frac{1}{4} - \frac{3x_0^2}{3x_0^2+p} + \frac{33x_0^4}{(3x_0^2+p)^2} \right] t^{\frac{3}{2}} + \dots \end{aligned} \right\},$$

ce qui donne pour l'intégrale le développement

$$(39 \text{ bis}) \quad I_0^b = \frac{\sqrt{\pi} e^{i(p x_0^2 - 3q x_0)}}{2\sqrt{3x_0^2 + p}} \left\{ 1 + i + \frac{3}{8} \frac{1-i}{(3x_0^2 + p)^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{5x_0^2}{3x_0^2 + p} \right) - \frac{105(1+i)}{128(3x_0^2 + p)^4} \left[\frac{1}{4} - \frac{3x_0^2}{3x_0^2 + p} + \frac{33x_0^2}{(3x_0^2 + p)^2} + \dots \right] \right\}.$$

Les intégrales I_1^b , I_2^b auprès des cols x_1 , x_2 fournissent exactement le même développement. Et l'on trouve

$$(40) \quad \begin{cases} \text{I.} & \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0, & \Phi(2p, 4q) = I_0^b + I_2^b, \\ \text{III.} & \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0, & \Phi(2p, 4q) = I_0^b + I_1^b + I_2^b. \end{cases}$$

Il faut se rappeler que dans I_1^b on a $3x_1^2 + p < 0$ et dans I_2^b , $3x_2^2 + p > 0$, car dans le cas III, p est négatif, compris entre $-3x_1^2$ et $-3x_2^2$.

Dans le cas I, le terme I_0^b devient rapidement plus important que I_2^b , lorsque $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ n'est pas petit. En effet, I_2 contient en facteur

$$e^{i(p x_2^2 - 3q x_2)};$$

or, on a

$$\begin{aligned} x_2 &= -a - ib \quad (a > 0, b > 0), \\ e^{i(p x_2^2 - 3q x_2)} &= e^{-2pab - 3qb} e^{i(p(a^2 - b^2) + 3qa)}. \end{aligned}$$

Lorsque $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ n'est pas petit, a , b sont grands, et l'on peut voir que l'exposant $-2pab - 3qb$ est négatif, grand en valeur absolue.

II. Reste le cas où $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ est voisin de zéro.

Posons

$$q = q' + k;$$

k est petit, positif ou négatif, q' étant la valeur qui satisfait à

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q'^2}{4} = 0;$$

nous aurons pour l'exposant l'expression

$$\omega = i(x^2 + 2px^2 - 4qx) = \omega' - i4kx.$$

Et nous ferons l'intégrale

$$\int e^{-i4kx} e^{i\omega'} dx$$

sur le chemin d'intégration marqué (*fig. 16*) auprès du col x_1, x_2 . Mais pour l'intégration auprès du col x_0 , nous garderons l'expression I_0^b [éq. (39 *bis*)].

Après du col x, x_2 nous poserons

$$t = w_1 - w = (x + x_3)^3 [i4x_3 - i(x + x_3)],$$

en appelant $-x_3$ l'abscisse du col; je rappelle que l'on a dans ce cas

$$x^3 + px - q' = (x + x_3)^2 (x - 2x_3) \quad (p = -3x_3^2, q' = 2x_3^3).$$

Nous aurons, conformément aux notations générales,

$$\varphi = e^{-i4kx} = e^{i4kx_3} \left(1 + \frac{x + x_3}{1} + \dots + \frac{(x + x_3)^n}{n!} + \dots \right).$$

On trouve alors

$$(41) \quad \left. \begin{aligned} \Phi \\ \Phi_1 \end{aligned} \right\} = \frac{\varphi_3}{3} \left[\left(\frac{-i}{4x_3} \right)^{\frac{1}{3}} t^{-\frac{2}{3}} + \left(\frac{-i}{4x_3} \right)^{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{1}{6x_3} \right) t^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{-i}{4x_3} \right)^{\frac{3}{3}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4x_3} + \frac{1}{16x_3^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \left(\frac{-i}{4x_3} \right)^{\frac{4}{3}} \left(1 + \frac{1}{x_3} + \frac{7}{12x_3^2} + \frac{35}{216x_3^3} \right) t^{\frac{1}{3}} \right. \\ \left. + \frac{1}{24} \left(\frac{-i}{4x_3} \right)^{\frac{5}{3}} \left(1 + \frac{5}{3x_3} + \frac{5}{3x_3^2} + \frac{55}{54x_3^3} + \frac{385}{1296x_3^4} \right) t^{\frac{2}{3}} + \dots \right].$$

On voit facilement que

$$\begin{aligned} \Phi & \text{ correspond à } (-i)^{\frac{1}{3}} = -e^{i\frac{\pi}{6}}, \\ \Phi_1 & \quad \text{»} \quad (-i)^{\frac{1}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$

Et l'intégrale auprès de col $-x_3$ devient

$$(41 \text{ bis}) \quad J_3 = \frac{1}{3} e^{i(x_3^3 + 2p x_3^2 + 4q x_3)} \left[\frac{2 \cos \frac{\pi}{6}}{(4x_3)^{\frac{1}{3}}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) - i \frac{\sqrt{3}}{(4x_3)^{\frac{2}{3}}} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{6x_3} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{2x_3} \left(1 + \frac{1}{2x_3} + \frac{1}{8x_3^2} \right) \Gamma(1) \right. \\ \left. - \frac{i\sqrt{3}}{6(4x_3)^{\frac{4}{3}}} \left(1 + \frac{1}{x_3} + \frac{7}{12x_3^2} + \frac{35}{216x_3^3} \right) \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \right. \\ \left. - \frac{\cos \frac{\pi}{6}}{12(4x_3)^{\frac{5}{3}}} \left(1 + \frac{5}{3x_3} + \frac{5}{3x_3^2} + \frac{55}{54x_3^3} + \frac{385}{1296x_3^4} \right) \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) + \dots \right].$$

Les fonctions Γ seront faciles à obtenir par les relations $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$,

$$\log \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 0,4279627493,$$

$$\log \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 0,1316564916.$$

L'intégrale complète sera

$$\Phi(2p, 4q) = J_3 + I_0^b.$$

Il est facile de se rendre compte que ces développements sont pratiques pour toute valeur non trop petite de u (c'est-à-dire de p). Si u est petit, la formule (40) pour le cas III cesse d'être pratique, car les cols x_0, x_1, x_2 sont très voisins de l'origine ensemble, et dans l'expression

$$(40) \quad \text{III. } \Phi = I_0^b + I_1^b + I_2^b,$$

les trois développements I_0^b, I_1^b, I_2^b sont très grands avec des signes différents.

De même ici, J_3 et I_0^b sont très grands, de signes différents; l'approximation est très mauvaise. C'est ce qui nous a forcé, au début de ce paragraphe, à calculer pour ce cas des formules spéciales.

IX. — Même intégrale. Limites finies.

Comme nous l'avons remarqué au paragraphe 8, nous pouvons nous borner au cas où ν est positif.

L'intégrale

$$\Phi(u, \nu, r, s) = \int_r^s e^{i(x^4 + ux^2 - \nu x)} dx,$$

dans laquelle nous continuerons à poser [éq. (37)]

$$u = 2p, \quad \nu = 4q,$$

pour la commodité de l'écriture, pourra être décomposée en deux :

$$\Phi(2p, 4q, r, s) = \Phi(2p, 4q, -\infty, s) - \Phi(2p, 4q, -\infty, r),$$

sauf si r et s sont voisins. On utilisera dans ce cas un développement

Ces développements cessent d'être pratiques dans deux cas (*cf.* § VII) :

a. s voisin de $\left(\frac{\nu}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$;

b. s et ν petits.

a. s voisin de $\left(\frac{\nu}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$. — Il faut faire l'intégration jusqu'au col x_0 , et de x_0 à s intégrer sur l'axe réel.

L'intégration jusqu'en x_0 donne, en utilisant la formule (31a),

$$(44) \quad \Phi(u, \nu, -\infty, x_0) = I_2^a + \frac{e^{-i(3x_0^3 - ux_0^2)}}{2} \left\{ \frac{1+i}{2\sqrt{3}x_0} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{i}{9x_0^3} + \frac{u}{3x_0}\right) \Gamma(1) \right. \\ + \left[\frac{(1-i)2u^2x_0^2 - (1+i)3u}{12\sqrt{3}x_0^3} - \frac{(1+i)7}{144\sqrt{3}x_0^5} \right] \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ + \left[\frac{i(2u^3x_0^3 + 2ux_0 - 3u) - u^3x_0^3}{54x_0^6} + \frac{7}{486x_0^7} \right] \Gamma(2) \\ + \dots \left. \right\}.$$

L'intégrale jusqu'en s sera

$$\Phi(u, \nu, -\infty, s) = \Phi(u, \nu, -\infty, x_0) + \Phi(u, \nu, -x_0, s);$$

la dernière expression (intégrale de x_0 à s) se calculant par la formule (42), puisque x_0 et s sont voisins, on fera $r = x_0$ et l'on se rappellera que l'on a

$$x_0^3 = \frac{\nu}{4} = q.$$

b. s et ν petits. — Comme au paragraphe VII on intégrera de $-\infty$ à 0 sur la droite $x = -\rho e^{i\frac{\pi}{3}}$ en utilisant le développement (30a); on aura ainsi

$$\Phi(u, \nu, -\infty, 0)$$

et

$$\Phi(u, \nu, -\infty, s) = \Phi(u, \nu, -\infty, 0) + \Phi(u, \nu, 0, s),$$

cette dernière intégrale étant à calculer par la formule (42), car s est

voisin de zéro,

$$(45) \quad \Phi(u, v, -\infty, 0) = \frac{e^{i\frac{\pi}{8}}}{4} \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) + v e^{-i\frac{3\pi}{8}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{v^2}{2} e^{-i\frac{3\pi}{4}} - u e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{v^2}{6} e^{-i\frac{9\pi}{8}} - uv e^{-i\frac{5\pi}{8}}\right) \Gamma(1) + \left(\frac{v^4}{24} e^{-i\frac{3\pi}{2}} + \frac{iu v^2}{2} + \frac{u^2}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) + \dots \right\}$$

Cas B : u (et p) quelconques. — Les cas à distinguer sont les suivants :

1° $s > x_0$:

$$(\Phi_{2p, 4q, -\infty, s}) = \Phi(2p, 4q) - S$$

(cf. fig. 18).

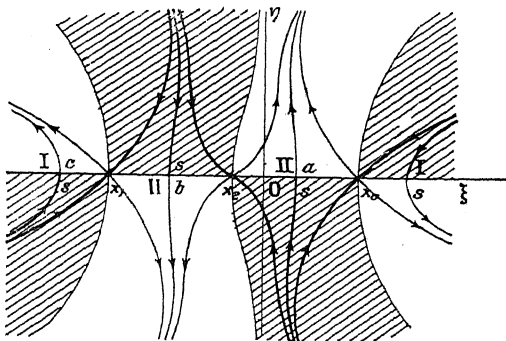


Fig. 18.

2° $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$:

$$(46) \quad \begin{cases} a. & x_1 < s < x_0, & \Phi(2p, 4q, -\infty, s) = +I_2^b + I_1^b + S; \\ b. & x_2 < s < x_1, & \Phi(2p, 4q, -\infty, s) = +I_2^b - S; \\ c. & s < x_2, & \Phi(2p, 4q, -\infty, s) = -S. \end{cases}$$

Pour $I_1, I_2, \Phi(2p, 4q)$, cf. les formules (39 bis), (40) et (41 bis).

3° $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$. — Appelons x_m le point où la ligne de plus grande

penne qui passe par x_1 et x_2 coupe l'axe réel (cf. *fig.* 14).

$$\begin{aligned} x_m < s < x_0, & \quad \Phi(2p, 4q, -\infty, s) = I_2 - S; \\ s < x_m, & \quad \Phi(2p, 4q, -\infty, s) = -S. \end{aligned}$$

Cf. (39 bis) et (40).

Dès que le col x_2 est assez éloigné de l'axe réel, ce qui a lieu si $\frac{p^2}{4} + \frac{q^3}{27}$ est grand, l'intégrale I_2 devient négligeable et l'on peut admettre, pour toute valeur de s inférieure à x_0 , l'expression

$$(46 \text{ bis}) \quad \Phi(2p, 4q, -\infty, s) = -S.$$

$$4^\circ \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \approx 0 :$$

$$\begin{aligned} x_3 < s < x_0, & \quad \Phi(2p, 4q, -\infty, s) = J_3 - S; \\ s < x_3, & \quad \Phi(2p, 4q, -\infty, s) = -S. \end{aligned}$$

Pour J_3 , cf. (41 bis).

Calculons donc l'expression de S

$$S = \int_{x=s}^{x=-\infty} e^w dx = e^{w_1} \int_0^\infty e^{-t} \Phi dt,$$

où

$$w = i(x^3 + 2px^2 - 4qx),$$

avec

$$\begin{aligned} t = w_s - w = (x-s)[-i4(s^3 + ps - q) \\ - i2(3s^2 + p)(x-s) - i4s(x-s)^2 - i(x-s)^3]. \end{aligned}$$

Le développement de Φ en fonction de t se calcule par les formules générales (15), (16). Et, en se rappelant que

$$\int_0^\infty e^{-t} t^n dt = n! \quad (n \text{ entier}),$$

on trouve

$$(47) \quad S = e^{i(s^3 + 2ps^2 - 4qs)} \left\{ \begin{aligned} & \frac{i}{4(s^3 + ps - q)} + \frac{3s^2 + p}{16(s^3 + ps - q)^3} + \frac{3i}{32(s^3 + ps - q)^4} \left[s - \frac{(3s^2 + p)^2}{2(s^3 + ps - q)} \right] \\ & - \frac{3}{128(s^3 + ps - q)^5} \left[1 - 10 \frac{s(3s^2 + p)}{s^3 + ps - q} + \frac{5}{2} \frac{(3s^2 + p)^3}{(s^3 + ps - q)^2} \right] \\ & + i \frac{15}{512(s^3 + ps - q)^7} \left[3(7s^2 + p) - \frac{7s(3s^2 + p)}{s^3 + ps - q} + \frac{7}{2} \frac{(3s^2 + p)^4}{s^3 + ps - q} \right] \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}.$$

Plusieurs cas particuliers nous échappent encore; nos développements cessent d'être valables lorsque s est voisin d'un col x_c . Il faudra alors faire l'intégration jusqu'au col x_c , puis, de x_c en s , utiliser le développement de Taylor (42) qui se simplifie :

$$\begin{aligned} \Phi(2\rho, 4q, x_c, s) = e^{i(\rho x_c^2 + 3q x_c)} \left\{ (s - x_c) + \frac{(s - x_c)^3}{3!} i 4(3x_c^2 + \rho) \right. \\ + \frac{(s - x_c)^4}{4!} i 24 x_c \\ + \frac{(s - x_c)^5}{5!} [i 24 - 32(3x_c^2 + \rho)] \\ + \dots \left. \right\}. \end{aligned}$$

Pour intégrer de $-\infty$ à x_c nous utiliserons les formules (39) :

1° Si le point s est auprès du col x_0 , on a

$$\Phi(2\rho, 4q, -\infty, x_0) = (I_2' + I_1' \text{ ou } I_2' \text{ ou } J_3) - e^{w_0} \int_0^{+\infty} e^{-t} \Phi(x_0 t) dt.$$

Il faut, dans la parenthèse, choisir

$$\begin{aligned} I_2' + I_1' & \quad \text{si l'on a} \quad \frac{q^2}{4} + \frac{\rho^3}{27} < 0, \\ I_2' & \quad \text{»} \quad \frac{q^2}{4} + \frac{\rho^3}{27} > 0, \\ J_3 & \quad \text{»} \quad \frac{q^2}{4} + \frac{\rho^3}{27} \approx 0. \end{aligned}$$

La valeur de la dernière intégrale s'obtient immédiatement :

$$\begin{aligned} (48) \quad & - e^{w_0} \int_0^{+\infty} e^{-t} \Phi(x_0 t) dt \\ & = \frac{e^{i(\rho x_0^2 - 3q x_0)}}{2} \left\{ \frac{1+i}{2\sqrt{3x_0^2 + \rho}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{i x_0}{(3x_0^2 + \rho)^2} \Gamma(1) \right. \\ & \quad + \frac{3}{8} \frac{1-i}{(3x_0^2 + \rho)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{2} - \frac{5x_0^2}{3x_0^2 + \rho} \right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ & \quad + \frac{x_0}{(3x_0^2 + \rho)^2} \left(\frac{3}{4} - \frac{8x_0^2}{3x_0^2 + \rho} \right) \Gamma(2) \\ & \quad \left. - \frac{(1+i)35}{64(3x_0^2 + \rho)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{1}{4} - \frac{3x_0^2}{3x_0^2 + \rho} + \frac{33x_0^4}{(3x_0^2 + \rho)^2} \right] \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

2° Si le point s est voisin du col x_1 ,

$$\Phi(2p, 4q, -\infty, x_1) = I_2^b - e^{w_1} \int_0^\infty e^{-t} \Phi(x_1 t) dt,$$

cette dernière intégrale désignant l'expression (48) où l'on remplacera x_0 par x_1 .

3° Si le point s est voisin de x_2 ,

$$\Phi(2p, 4q, -\infty, x_2) = -e^{-w_2} \int_0^\infty e^{-t} \Phi(x_2, t) dt$$

[expression (48)].

Nous avons ainsi obtenu des développements valables pour tous les cas. Les développements cessent d'être pratiques lorsque p est petit. On devra alors employer les formules du cas A.

Je terminerai en montrant comment se fait la liaison entre les résultats que nous venons de calculer pour les interférences auprès d'un foyer, et les résultats classiques sur les interférences auprès d'une caustique (intégrale d'Airy).

Reportons-nous à la figure 2 (Introduction), nous constaterons facilement que la courbe

$$4p^3 + 27q^2 = 0$$

est la caustique. Les franges au voisinage de la caustique ont donc une forme plus compliquée que celle qu'indique l'intégrale d'Airy, lorsqu'on les étudie auprès d'un foyer.

Un point de la caustique éloigné du foyer correspondra à p et q assez grands. Dans ce cas, les cols x_0 d'une part, x_1 et x_2 d'autre part, seront fort loin l'un de l'autre. Montrons que l'intégrale auprès des cols x_1 , x_2 peut alors, en première approximation, se ramener à une intégrale d'Airy.

On a, en effet, auprès de x_3

$$\begin{aligned} w = i(x^4 + 2px^2 - 4qx) = & -i[4x_3(x + x_3)^3 - 4k(x + x_3)] \\ & + i(x_3^4 + 2px_3^2 - 4q'x_3), \end{aligned}$$

ce qui s'écrit, en posant $x + x_3 = -y$ et utilisant les expressions de pq en fonction de x_3 ,

$$w = i(4x_3 y^3 - 4ky) - ip^2.$$

L'intégrale s'écrit alors, pour le voisinage des cols x_1, x_2 ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\psi} dx = e^{-i\eta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(kx_2 y^3 - ky^2)} dy.$$

Cette dernière intégrale est une intégrale d'Airy. Ce terme correspondra, comme on s'en rendra facilement compte, à l'effet produit par les points de l'onde lumineuse voisins du pied Ω du rayon tangent à la branche de la caustique voisine du point étudié P.

L'intégrale auprès du col x_2 correspond à l'éclairement dû aux points voisins de Ω' , pied du rayon qui passe au point P étudié et est tangent à la deuxième branche de la caustique.

Nous retrouvons donc ce résultat classique : l'éclairement en un point P est dû surtout aux points de l'onde voisins des pieds des rayons géométriques passant en P.

Lorsque $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ est positif, le point P est dans l'ombre géométrique, et n'est éclairé que par un rayon $P\Omega'$ tangent à la deuxième branche de la caustique ; c'est le cas I (§ VIII) dans lequel l'intégrale auprès du col x_0 fournit le terme principal.

Lorsque $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ est négatif, le point P se trouve à l'intérieur de la caustique (cas III, § VIII) ; trois rayons lumineux se croisent en P, correspondant aux trois cols x_0, x_1, x_2 .

Lorsque les cols sont assez éloignés l'un de l'autre, l'intégrale auprès du col se réduit au premier terme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha(x-x_{col})^2} dx,$$

c'est-à-dire à une intégrale de Fresnel, pour une ouverture illimitée, résultat évident *a priori*.

Si un des bords, σ par exemple (*fig. 2*), de l'écran se trouve près du pied Ω du rayon, la limite s de l'intégrale se trouve proche du col x_c , et l'on trouve, comme première approximation,

$$\int_{-\infty}^s e^{i\alpha(x-x_{col})^2} dx,$$

une intégrale de Fresnel, à traiter comme nous l'avons fait au paragraphe II.

Le problème des interférences derrière une lentille auprès de la caustique et auprès du foyer, se trouve donc en pratique complètement résolu au moyen des formules approchées que j'ai calculées dans ces derniers paragraphes. Les formules, comme je l'ai dit dans l'Introduction, se rapportent au cas où le diaphragme est une fente. Le cas, plus important dans la pratique, d'un diaphragme circulaire s'en déduit directement (*voir* fin de l'Introduction). Il suffit d'effectuer la différentiation par rapport à ν des formules déjà calculées.

Dans ces formules interviennent :

Soit ν directement ;

Soit, dans les formules de la série A, la quantité

$$x_0 = \left(\frac{\nu}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

dont la différentiation par rapport à ν est immédiate ;

Soit, dans les formules de la série B, les racines x_0, x_1, x_2 de l'équation aux cols

$$x^3 + px - q = 0.$$

La différentiation de ces quantités est aussi simple ; x_0, x_1, x_2 se calculent au moyen des quantités [*cf.* éq. (38)]

$$a_0 = \left(\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$b_0 = \left(\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Le calcul des dérivées donne

$$(49) \quad \begin{cases} \frac{\partial a_0}{\partial \nu} = \frac{1}{4} \frac{\partial a_0}{\partial q} = \frac{a_0}{24 \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \\ \frac{\partial b_0}{\partial \nu} = \frac{-b_0}{24 \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \end{cases}$$

On en déduit de suite :

$$\frac{\partial x_0}{\partial \nu} = \frac{-b_0 + a_0}{24 \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

et

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{-15 e^{-i \frac{2\pi}{3}} + 30 e^{i \frac{2\pi}{3}}}{24 \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial v} = \frac{-15 e^{i \frac{2\pi}{3}} + 30 e^{-i \frac{2\pi}{3}}}{24 \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

On formera donc très facilement les développements relatifs au cas du diaphragme circulaire centré.

Je n'ai pas besoin d'insister sur les applications pratiques de ces formules. Elles permettent d'étudier complètement la question du pouvoir séparateur d'instruments d'optique pour lesquels l'aberration de sphéricité existe. Lord Rayleigh avait déjà remarqué à ce sujet qu'il ne suffit pas de connaître les interférences seulement dans le plan focal des rayons centraux. Par suite des interférences, ce n'est pas dans ce plan que la tache lumineuse centrale est la plus resserrée, mais dans un plan intermédiaire entre le foyer des rayons centraux et celui des foyers marginaux. C'est sur ce plan qu'on met automatiquement au point lorsqu'on règle l'instrument.

Dans certaines séries d'expériences sur la scintillation des étoiles, on observe essentiellement le déplacement des franges d'interférence auprès du foyer. Ayant mis l'étoile au point, on enfonce l'oculaire légèrement, de façon que l'image prenne l'aspect d'un cercle lumineux. Par suite des scintillations, ce cercle s'élargit ou se resserre. La variation d'aspect de cette image donne quelques renseignements sur la scintillation. Nos formules précises, permettant de calculer exactement la position des franges d'interférence auprès du foyer, permettront de tirer des renseignements précis de ces expériences.

On pourra, dans la grande majorité des cas, simplifier beaucoup l'emploi de ces formules; très souvent il suffira de ne garder que le premier terme du développement, quelquefois deux ou trois termes. Ce ne serait que pour des expériences de très haute précision qu'on devrait utiliser les développements complets.