ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MICHEL PETROVITCH

Une transcendante entière et son rôle d'élément de comparaison

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 31 (1914), p. 441-454

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1914_3_31__441_0>

UNE TRANSCENDANTE ENTIÈRE

ET

SON ROLE D'ÉLÉMENT DE COMPARAISON,

PAR M. MICHEL PETROVITCH,

à Belgrade.

I. — Transcendante $\Delta(z, \alpha)$ et quelques-unes de ses propriétés.

1. La série

$$\Delta(z, \alpha) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n^{\alpha n}}, \tag{1}$$

où α est une constante à partie réelle positive, représente une fonction entière de z, laquelle, grâce à la simplicité de son coefficient général, se prête facilement à l'étude de ses diverses particularités par les procédés de la théorie générale des fonctions.

Ainsi, c'est une fonction de genre fini, appartenant, par son mode de croissance, au type

$$z^h e^{g z^k},$$

où h, g, k sont des constantes positives.

Lorsque z croît indéfiniment dans la direction des valeurs réelles positives, la fonction Δ tend asymptotiquement vers la fonction [1]

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha e}}\, z^{\frac{1}{2\alpha}} e^{\frac{\alpha}{e} z^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{2}$$

[1] E. LINDELÖF, *Mémoire sur la théorie des fonctions entières* (*Acta Soc. Fennicæ*, t. XXXI, p. 30-41). *Voir* aussi *Bull. des Sciences mathém.*, 2e série, t. XXVII, 1903.

Elle a une infinité de zéros et le module du $p^{\text{ième}}$ croît avec son rang p au moins aussi vite que p^α.

2. Le cas particulier

$$\Delta(z, 1) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n^n}, \tag{3}$$

qui se présente dans plusieurs problèmes généraux, se prête, grâce à la possibilité de l'exprimer par une intégrale définie très simple, à une étude plus approfondie.

La formule connue

$$\left\{ \begin{aligned} &\int_0^1 u^n\, dt = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}} \\ &(u = -t \log t) \end{aligned} \right. \tag{4}$$

conduit directement à la formule

$$\Delta(z, 1) = z \int_0^1 e^{zu}\, dt + 1, \tag{5}$$

valable pour toute valeur, réelle ou imaginaire de z. On en tire

$$\frac{d^k \Delta}{dz^k} = \int_0^1 u^{k-1}(k + zu)\, e^{zu}\, dt, \tag{6}$$

ce qui, avec la formule (5), conduit immédiatement aux inégalités suivantes, où r désigne le module de z :

$$|\Delta| < r e^{\frac{r}{e}} + 1,$$

$$|\Delta^{(k)}| < k! \left[\frac{1}{k^k} + \frac{r}{(k+1)^{k+1}} \right] e^{\frac{r}{e}},$$

ou encore

$$|\Delta^{(k)}| < (ke + r) \frac{\Delta}{r e^k}.$$

Pour toute valeur réelle et positive de x et y, on a

$$\begin{aligned} \Delta(x + y, 1) &< e^{\frac{x}{e}} (x + y) \frac{\Delta(y, 1) - 1}{y} + 1, \\ \Delta(x, 1) &> e\left(e^{\frac{x}{e}} - 1\right) + 1. \end{aligned}$$

Pour toute valeur réelle négative de z, on a

$$\Delta(z, 1) > z e^{\frac{z}{e}} + 1,$$
$$\Delta^{(k)}(z, 1) > k! \left[\frac{1}{k^k} + \frac{z}{(k+1)^{k+1}}\right] e^{\frac{z}{e}}.$$

Lorsque z tend vers l'infini dans une direction quelconque à droite de l'axe imaginaire, le module de $\Delta(z, 1)$, ainsi que celui d'une quelconque de ses dérivées, augmente indéfiniment, mais au plus aussi vite que l'expression $ze^{\frac{z}{e}}$; pour les directions à gauche de cet axe, ces modules tendent vers zéro.

Lorsque z croît indéfiniment dans la direction des valeurs réelles positives, $\Delta(z, 1)$ tend asymptotiquement vers l'expression

$$\text{(7)} \qquad A e^{\frac{z}{e}} \sqrt{z},$$

où A est la constante numérique

$$\text{(8)} \qquad A = \sqrt{\frac{2\pi}{e}} = 1,52034\ldots.$$

La valeur asymptotique de la $k^{\text{ième}}$ dérivée de $\Delta(z, 1)$ sera

$$\text{(9)} \qquad B e^{\frac{z}{e}} \sqrt{z},$$

B étant la constante

$$\text{(10)} \qquad B = \sqrt{\frac{2\pi}{e^{2k+1}}}.$$

La courbe

$$y = \Delta(x, 1)$$

a la droite $y = -1$ comme asymptote pour $x = -\infty$; lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$ la courbe commence à décroître au-dessous de cette droite, coupe l'axe des x en un point qui se trouve entre $x = -39$ et $x = -40$, atteint un minimum négatif

$$y = -0,68772\ldots$$

pour une valeur négative de x, à partir de laquelle elle commence à croître, coupe de nouveau l'axe des x en un point qui se trouve compris entre

$$x = -1{,}405 \qquad \text{et} \qquad x = -1{,}406,$$

coupe ensuite la droite $y = -1$ à l'origine et croît indéfiniment en tendant asymptotiquement vers la courbe

$$y = \mathrm{A}\sqrt{x}\, e^{\frac{x}{e}}.$$

La fonction $\Delta(z, 1)$ a deux zéros réels négatifs (compris entre les limites indiquées tout à l'heure) et une infinité de zéros imaginaires qui se trouvent tous en dehors de la bande comprise entre les deux droites

$$y + e\pi = 0 \qquad \text{et} \qquad y - e\pi = 0,$$

et dont les modules croissent au moins aussi vite que leur rang.

La fonction $a + \Delta(z, 1)$, où a est une constante, a au plus deux zéros réels, à savoir, en désignant par λ la constante $\lambda = 0{,}68772\ldots$ égale à la valeur du minimum négatif de $\Delta(z, 1)$:

1° Si $a > \lambda$ il n'y a pas de zéros réels;

2° Si $a = \lambda$ il y a un zéro réel double;

3° Si $a < \lambda$ il y a deux zéros simples négatifs.

II. — Transcendante $\Delta(z, \alpha)$ comme élément de comparaison.

3. La transcendante $\Delta(z, \alpha)$, intéressante par elle-même par la simplicité de la loi du coefficient général de son développement taylorien, se présente dans plusieurs questions d'ordre plus général et notamment dans diverses questions relatives à des fonctions entières. Il se trouve que certaines particularités caractéristiques des fonctions à étudier se traduisent par des inégalités entre le coefficient général a_n du développement taylorien, représentant la fonction, et une fonction déterminée de son rang n, coïncidant avec le coefficient général du développement de la transcendante $\Delta(z, \alpha)$. Les particularités connues de celle-ci, en vertu des relations générales existant entre la loi de variation des coefficients a_n et les particularités (mode de croissance, valeur asymptotique, limites de variation, densité des zéros, etc.) de la fonction correspondante, peuvent alors conduire à

des propriétés des fonctions à étudier. La transcendante $\Delta(z, 1)$ se présente ainsi comme élément de comparaison et de calcul pouvant rendre de véritables services.

Je signalerai dans ce travail quelques cas où cette transcendante se présente de cette façon.

4. Étant donnée une fonction entière *simple* $f(z)$ (c'est-à-dire exprimable par un produit de facteurs primaires privé de facteur exponentiel), on sait que si, à partir d'un certain r, son module maximum $M(r)$ satisfait à l'inégalité

$$M(r) < e^{Ar^{\frac{1}{\alpha}}},$$

A et α étant des constantes positives, le coefficient général du développement

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

satisfera à l'inégalité

$$|\sqrt[n]{a_n}| < \left(\frac{Ae}{n\alpha}\right)^{\alpha}(1+\varepsilon) \tag{11}$$

$\left(\text{où } \varepsilon \text{ tend vers zéro avec } \frac{1}{n}\right)$ dès que n surpasse une certaine limite [1].

Il s'ensuit que le module du coefficient a_n d'une pareille fonction est, à partir d'un certain rang, constamment plus petit que le coefficient correspondant d'une transcendante $\Delta(\lambda z, \beta)$, où λ et β sont deux constantes positives.

Tel est, par exemple, le cas d'une fonction entière simple quelconque d'un genre fini; le genre étant p, la fonction croîtra moins vite que $e^{r^{p+1}}$ et ce qui précède lui est applicable.

Lorsque le genre est égal à zéro, on aura une inégalité pareille s'étendant à tous les coefficients a_n. En effet, si l'on envisage un produit canonique

$$\chi(z) = \prod\left(1 - \frac{z}{\alpha_k}\right) \tag{12}$$

de facteurs primaires du genre zéro, en vertu de l'inégalité

$$1 + x < e^x \qquad (x > 0),$$

---

(1) E. Lindelöf, *loc. cit.*, p. 34.

on aura l'inégalité

$$\chi(z) < \prod\left(1 + \frac{r}{\rho_k}\right) < e^{\mu r}, \tag{13}$$

où

$$\left\{\begin{aligned} & r = |z|, \qquad \rho_k = |\alpha_k|, \\ & \mu = \sum_1^\infty \frac{1}{\rho_k}, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

valable pour toute valeur de z. Ceci conduit à

$$|a_n| < \frac{e^{\mu r}}{r^n} \tag{15}$$

ou bien à

$$|a_n| < \left(\frac{\mu e}{n}\right)^n, \tag{16}$$

le second membre de (16) étant le minimum de (15) atteint pour $r = \frac{n}{\mu}$.

La fonction $\Delta(\mu e z, 1)$ se présente donc comme élément de comparaison et l'on conclut, par exemple, de la dernière inégalité que *le module d'une série*

$$1 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

ayant son coefficient général b_n égal à la $k^{\text{ième}}$ puissance du coefficient général d'une fonction entière simple du genre zéro, est plus petit que $\Delta(hr, k)$, où h désigne la constante

$$h = (\mu e)^k;$$

que le module de son $p^{\text{ième}}$ zéro croît au moins aussi vite que p^k, etc.

5. *La transcendante $\Delta(z, \alpha)$ se présente aussi comme élément de comparaison pour toute série*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{17}$$

à coefficients réels ou imaginaires, tels que la série ayant pour terme général

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \tag{18}$$

converge. En désignant ce rapport par c_n, on trouve de proche en proche

$$|a_n| = c_0 c_1 \ldots c_{n-1} |a_0|,$$

d'où l'on tire

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{c_0 + c_1 + \ldots + c_{n-1}}{n} |a_0|,$$

et, *a fortiori*,

(19) $$|a_n| < |a_0| \frac{\mu^n}{n^n} \qquad (n \geqq 1),$$

où μ désigne la constante égale à la source de la série

$$c_0 + c_1 + c_2 + \ldots.$$

On en conclut que $f(z)$ représente une fonction entière de z dont le module, pour toute valeur de z, est plus petit que

$$|a_0| \Delta(\mu r, 1),$$

r désignant le module de z.

Le résultat du n° 2 sur la limite supérieure de $\Delta(z, 1)$ montre alors que le module de $f(z)$ est, pour toute valeur de z, plus petit que

$$|a_0| \left(1 + \mu r e^{\frac{\mu r}{e}}\right).$$

Il s'ensuit, par exemple, que l'intégrale de Jensen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r e^{\theta i})| \, d\theta,$$

rattachée à $f(z)$, a sa valeur toujours plus petite que

$$\log |a_0| + \log \left(1 + \mu r e^{\frac{\mu r}{e}}\right);$$

que les zéros de $f(z)$ croissent au moins aussi vite que leur rang, etc.

D'une manière plus générale, s'il existe un nombre réel positif α tel que la série ayant pour terme général

(20) $$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|^{\frac{1}{\alpha}}$$

converge, en désignant ce rapport par h_n, on trouve

$$|a_n| < |a_0| \left(\frac{h_0 + h_1 + \ldots + h_{n+1}}{n} \right)^{\alpha n}$$

et, *a fortiori*,

$$(21) \qquad |a_n| < |a_0| \left(\frac{\nu}{n} \right)^{\alpha n},$$

ν étant la somme de la série convergente

$$h_0 + h_1 + h_2 + \ldots,$$

de sorte qu'on aura l'expression

$$|a_0| \Delta(\nu z, \alpha)$$

comme élément de comparaison.

6. Soit

$$(22) \qquad f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

une série ayant pour coefficient général a_n un déterminant d'ordre n, formé d'éléments réels ou imaginaires, tels que la série à double entrée, formée des carrés de leurs modules, converge uniformément pour n indéfiniment croissant.

En désignant par s_k^n la somme de carrés des modules des éléments de la $k^{\text{ième}}$ colonne du déterminant a_n, on aura, d'après le théorème de M. Hadamard sur le maximum du déterminant,

$$|a_n| < \sqrt{s_1^n s_2^n \ldots s_k^n},$$

d'où l'on tire

$$(23) \qquad |a_n| < \left(\frac{s_1^n + s_2^n + \ldots + s_n^n}{n} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

Si l'on désigne donc par B^2 la somme de la série uniformément convergente

$$(24) \qquad s_1^n + s_2^n + s_3^n + \ldots,$$

on aura

$$(25) \qquad |a_n| < \frac{B^n}{n^{\frac{n}{2}}} \qquad (n \gtreqless 1),$$

ce qui fait voir que *la série $f(z)$ représente une fonction entière de z, dont le module, pour toute valeur de z, est plus petit que* $\Delta\left(\mathrm{B}r, \frac{1}{2}\right)$.

L'expression de la valeur asymptotique de $\Delta(z, \alpha)$ met alors en évidence le fait que *le module de $f(z)$ croît moins vite que la fonction*

$$r e^{\frac{\mathrm{B}^2 r^2}{2e}}.$$

Il s'ensuit, par exemple, que l'intégrale de Jensen, rattachée à $f(z)$, a sa valeur plus petite que

$$\log \Delta\left(\mathrm{B}r, \frac{1}{2}\right);$$

que les zéros de $f(z)$ croissent au moins aussi vite que la racine carrée de leur rang, etc.

7. Envisageons maintenant la série

$$\varphi(z) = 1 + a_p z + a_{2p} z^2 + \ldots, \tag{26}$$

où a_k est un déterminant d'ordre k de l'espèce précédente. L'inégalité (26) fournit alors

$$|a_{np}| < \frac{\mathrm{D}^n}{n^{\frac{np}{2}}} \qquad (n \gtreqless 1), \tag{27}$$

où D est une constante.

Il s'ensuit que le rôle d'une limite supérieure du module de la fonction entière $\varphi(z)$ est joué par $\Delta\left(\mathrm{D}r, \frac{p}{2}\right)$; que, par suite, ce module croît moins vite que la fonction

$$r^{\frac{1}{p}} e^{g r^{\frac{2}{p}}},$$

où g est la constante

$$g = \frac{p \mathrm{B}^{\frac{2}{p}}}{2e};$$

que l'intégrale de Jensen, rattachée à $\varphi(z)$, a sa valeur plus petite que

$$\log \Delta\left(\mathrm{D}r, \frac{p}{2}\right);$$

que les zéros de $\varphi(z)$ croissent au moins aussi vite que la puissance $\frac{p}{2}$ de leur rang, etc.

On aurait des conclusions analogues pour les séries dont le coefficient général est la $p^{\text{ième}}$ puissance du déterminant précédent a_n.

8. Soient

$$(28) \qquad u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots$$

les termes, réels ou imaginaires, d'une série S, fonctions d'une variable t, la série étant absolument et uniformément convergente pour les valeurs de t appartenant à une région déterminée (D) dans le plan de cette variable.

Considérons la série

$$(29) \qquad f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

ayant pour coefficient général l'expression

$$(30) \qquad a_n = \int_L u_1 u_2 \ldots u_n \, dt,$$

l'arc d'intégration L étant de longueur finie et compris dans la région (D). Les inégalités

$$|u_1 u_2 \ldots u_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n|}{n}$$

et

$$|u_1| + \ldots + |u_n| < \mu,$$

où μ est la somme de la série convergente $\Sigma |u_i|$, entraînent l'inégalité

$$(31) \qquad |a_n| < \frac{s\mu^n}{n^n} \qquad (n \geqq 1),$$

où s est la longueur de l'arc d'intégration.

On en conclut que *la série* (29) *représente une fonction entière de z, dont le module est, pour toute valeur de z, plus petit que*

$$(32) \qquad 1 + s[\Delta(\mu r, 1) - 1].$$

Le résultat du n° 2 sur la limite supérieure de $\Delta(z, 1)$ montre alors que le module de $f(z)$ est, pour toute valeur de z, plus petit que

$$1 + s\mu r e^{\frac{\mu r}{e}},$$

et que, par suite, l'intégrale de Jensen, rattachée à $f(z)$, a sa valeur plus petite que

$$\log\left(1 + s\mu r e^{\frac{\mu r}{e}}\right),$$

d'où l'on peut tirer des conclusions à l'égard des zéros de $f(z)$.

9. La transcendante $\Delta(z, \alpha)$ fournit des limites supérieures et inférieures et le mode de croissance d'une foule de fonctions entières.

Ainsi, dans le cas de la fonction

$$\sum_0^\infty \frac{\Gamma(1+bn)}{\Gamma(1+an)} z^n, \tag{33}$$

où a et b sont deux constantes positives, avec $a > b$, d'après la formule d'approximation de la fonction Γ, on aura

$$\frac{\Gamma(1+bn)}{\Gamma(1+an)} = \theta \sqrt{\frac{b}{a}} \frac{p^n}{n^{(a-b)n}},$$

où p désigne la constante

$$p = \left(\frac{b}{e}\right)^b \left(\frac{e}{a}\right)^a, \tag{34}$$

et θ étant une quantité dont la valeur est comprise entre

$$\begin{cases} \lambda_1 = e^{-\frac{1}{12}} = 0,9202\ldots, \\ \lambda_2 = e^{\frac{1}{12}} \;= 1,0869\ldots. \end{cases} \tag{35}$$

Pour toute valeur réelle et positive de z, la valeur de la fonction (33) est comprise entre les valeurs

$$1 + \lambda_1 \sqrt{\frac{b}{a}} [\varphi(z) - 1]$$

et

$$1 + \lambda_2 \sqrt{\frac{b}{a}} [\varphi(z) - 1],$$

où

$$\varphi(z) = \Delta(pz, a - b).$$

Pour la fonction

$$(36) \qquad \sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\Gamma(1 + an)} z^n,$$

on trouve que, pour $z > 0$, sa valeur est comprise entre

$$\frac{\mu_1}{\sqrt{a}}[\psi(z) - 1]$$

et

$$\frac{\mu_2}{\sqrt{a}}[\psi(z) - 1],$$

où

$$\psi(z) = \Delta(pz, a),$$

μ_1 et μ_2 étant les constantes numériques

$$\mu_1 = \frac{e^{-\frac{1}{12}}}{\sqrt{2\pi}} = 0,3671\ldots,$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0,3990\ldots$$

et p étant la constante

$$p = \left(\frac{e}{a}\right)^a.$$

Pour la fonction

$$\sum_{0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma(1 + bn)}{\Gamma(1 + an)}\right]^h z^n$$

(où a, b, h sont des constantes positives, avec $a > b$), on trouve que, pour $z > 0$, sa valeur est comprise entre

$$1 + \beta_1[\chi(z) - 1]$$

et

$$1 + \beta_2[\chi(z) - 1],$$

où

$$\chi(z) = \Delta(mz, \alpha),$$

β_1, β_2, m, α étant des constantes ayant pour valeurs

$$\beta_1 = e^{-\frac{h}{12}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}},$$
$$\beta_2 = e^{\frac{n}{12}}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{h}{2}},$$
$$m = \left(\frac{b}{e}\right)^{bh}\left(\frac{e}{a}\right)^{ah},$$
$$\alpha = (a-b)h.$$

On aurait, de la même manière, des limites inférieures et supérieures des fonctions dont le coefficient général de z^n serait égal au produit d'un nombre quelconque de coefficients généraux correspondant à des fonctions précédentes.

10. Remarquons que la transcendante $\Delta(z, 1)$ se présente aussi comme élément de réduction pour certaines classes d'intégrales définies. Tel est le cas des intégrales par lesquelles se calcule l'aire limitée par l'axe des x, les ordonnées correspondant à $x = 0$ et $x = 1$, et l'arc d'une courbe d'intégrale quelconque d'une équation linéaire et homogène d'un ordre quelconque, réductible à l'aide du changement de variable indépendante

$$x \log x = t,$$

à une équation à coefficients constants E. L'intégrale générale de cette dernière équation étant la somme de termes de la forme

$$C e^{rt} \quad \text{et} \quad C t^k e^{rt}$$

(C étant une constante d'intégration et r une racine d'ordre k de l'équation algébrique caractéristique de E), l'aire en question s'exprime par une somme de termes de la forme

$$C\int_0^1 e^{rt}\,dx = C\frac{\Delta(-r, 1) - 1}{r},$$
$$C\int_0^1 t^k e^{rt}\,dx = C\frac{d^k}{dr^k}\left[\frac{\Delta(-r, 1) - 1}{r}\right],$$

relatifs à toutes les racines de l'équation algébrique caractéristique rattachée à E.

Il en est de même des intégrales définies fournissant l'aire totale, à droite de l'axe Oy, limitée par l'axe Ox et l'arc d'une courbe intégrale quelconque d'une équation linéaire et homogène d'un ordre quelconque, réductible à l'aide du changement

$$x e^{-x} = t, \qquad y = e^{-x} z,$$

à une équation à coefficients constants F. L'aire cherchée s'exprime par une somme de termes de la forme

$$C \frac{\Delta(r, 1) - 1}{r},$$
$$C \frac{d^k}{dr^k} \left[\frac{\Delta(r, 1) - 1}{r} \right],$$

relatifs à toutes les racines de l'équation caractéristique rattachée à F.