ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉTIENNE DELASSUS

Sur les mouvements des systèmes matériels dépendant d'un nombre fini de paramètres et soumis à des liaisons d'ordre quelconque

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 30 (1913), p. 489-520

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1913_3_30__489_0>

SUR LES

MOUVEMENTS DES SYSTÈMES MATÉRIELS

DÉPENDANT D'UN NOMBRE FINI DE PARAMÈTRES

ET

SOUMIS A DES LIAISONS D'ORDRE QUELCONQUE;

PAR M. ÉT. DELASSUS,

Professeur à l'Université de Bordeaux.

Introduction.

Dans plusieurs Notes insérées en 1911 aux *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences et dans un Mémoire ([1]) des *Annales de l'École Normale*, j'ai exposé une théorie des mouvements des systèmes soumis à des liaisons du premier ordre, linéaires ou non linéaires.

Dans une Note plus récente ([2]) j'ai indiqué la généralisation de ces notions pour les liaisons d'ordre quelconque.

Je me propose ici de faire un exposé d'ensemble de cette théorie en renvoyant, pour les démonstrations des propriétés spéciales au premier ordre, à mon Mémoire précédemment cité et en exposant, d'une façon détaillée, les démonstrations qui ne sont qu'indiquées dans cette Note.

1. FORME CANONIQUE GÉNÉRALE DE LA LIAISON D'UN SYSTÈME. — Lorsque les paramètres q qui définissent le système ne sont assujettis à aucune

([1]) *Sur les liaisons et les mouvements des systèmes matériels* (*Annales de l'École Normale*, 1912).

([2]) *Sur les liaisons d'ordre quelconque des systèmes matériels* (*C. R. Acad. Sc.*, 15 avril 1912).

condition, comme par exemple les six paramètres qui définissent la position d'un solide libre, nous dirons que le système est soumis à une *liaison nulle*.

Nous dirons que le système est soumis à une liaison non nulle L, si les q sont assujettis à vérifier des équations finies ou différentielles ordinaires. L'ensemble de ces équations forme un système d'équations différentielles ordinaires, qu'on devra essentiellement supposer *compatibles* et dont feront partie, non seulement les équations données, mais aussi toutes celles qui en résultent par des dérivations jusqu'à un ordre quelconque et par des combinaisons.

Si l'on applique à ce système les résultats généraux que j'ai démontrés relativement aux formes canoniques des systèmes différentiels, on voit qu'on peut grouper les équations de ce système par ordres, de telle façon que :

1° Les équations d'ordre quelconque μ sont distinctes par rapport aux dérivées $q^{(\mu)}$ et, parmi elles, on trouve toutes les équations déduites par dérivation des équations d'ordre $\mu - 1$;

2° Il existe un ordre canonique n, qui est un invariant, tel que, parmi les équations de cet ordre, on en trouve au moins une qui ne soit pas dérivée d'une équation d'ordre $n - 1$ ou conséquence de ces équations dérivées et tel que, pour toute valeur de μ supérieure à n, les équations d'ordre μ soient uniquement les dérivées des équations d'ordre $\mu - 1$. Le système se mettra donc sous la forme canonique

$$
(\mathrm{L}_n)\left\{\begin{array}{llllllll}
A_1 = 0, & \ldots, & & & & & & \\
\dfrac{dA_1}{dt} = 0, & \ldots, & B_1 = 0, & \ldots, & & & & \\
\dfrac{d^2A_1}{dt^2} = 0, & \ldots, & \dfrac{dB_1}{dt} = 0, & \ldots, & C_1 = 0, & \ldots, & & \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots & & \\
\dfrac{d^nA_1}{dt^n} = 0, & \ldots, & \dfrac{d^{n-1}B_1}{dt^{n-1}} = 0, & \ldots, & \dfrac{d^{n-2}C_1}{dt^{n-2}} = 0, & \ldots & & \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, & & & \\
\dfrac{dK_1}{dt} = 0, & \ldots, & L_1 = 0, & \ldots, & & & &
\end{array}\right.
$$

où nous nous arrêtons à l'ordre canonique n, dans laquelle les A sont des fonctions des q et de t, les B des fonctions des q, q' et de t, les C des fonctions des q, q', q'' et de t, etc., et où les équations L existent effectivement, sans quoi, l'ordre canonique serait moindre que n.

Tout système L_n définit une liaison et son ordre canonique n sera dit *l'ordre de la liaison*. Pour abréger le langage, nous garderons la même désignation L_n pour la liaison et pour le système différentiel qui sert à la définir.

2. La notion générale de mouvement parfait. — L'étude physique des mouvements, dans les cas les plus simples, montre que de quelque façon qu'on réalise physiquement les liaisons en supprimant, ou tout au moins rendant négligeables les actions perturbatrices telles que frottements, résistances de milieux, etc., on tend toujours vers le même mouvement complètement déterminé, et sans aucune ambiguïté, par les seules valeurs initiales des paramètres q et de leurs dérivées q'.

Nous avons donc là la notion d'un mouvement limite, mouvement idéal dans lequel les liaisons disparaissent, en quelque sorte physiquement, pour ne laisser subsister que leur trace analytique, c'est-à-dire le système différentiel qui les définit.

D'une façon générale, *considérons un système* S, *soumis à une liaison analytique* L_n, *et demandons-nous si l'on peut avoir la conception, comme mouvements limites de mouvements obtenus au moyen de réalisations physiques effectives et de plus en plus parfaites de la liaison* L_n, *de mouvements dans lesquels ne reste plus trace de ces réalisations et qui sont complètement déterminés et sans ambiguïté par les seules valeurs initiales des* q *et des* q' *quand on donne les forces agissantes, et cela quelles que soient ces forces.*

Si nous pouvons concevoir de tels mouvements, nous les appellerons *mouvements parfaits du système* S *soumis à la liaison* L_n.

Les équations du mouvement parfait seront des équations déterminant les fonctions q de la seule variable t au moyen d'un nombre limité de constantes arbitraires q^0 et q'^0. Ces fonctions satisferont donc à un système d'équations différentielles ordinaires que nous désignerons par $\mathfrak{M}$. Mais ces fonctions q satisfont par hypothèse aux équations L_n de la liaison, donc celles-ci doivent se retrouver dans $\mathfrak{M}$, qui sera ainsi composé de deux groupes d'équations :

1° Les équations L_n qui dépendent uniquement de la définition *géométrique* du système S;

2° Les équations $\mathfrak{D}$ qui dépendent, d'une part, de la définition dynamique de S, c'est-à-dire de la répartition des masses, et, d'autre part, des forces agissantes F qui peuvent dépendre arbitrairement des q et des q'.

Ces deux groupes sont donc de natures bien distinctes. Le système S étant défini géométriquement ainsi que la liaison L_n, il pourra arriver qu'en fixant d'une façon particulière convenable la répartition des masses ainsi que la nature et la disposition des forces, il puisse y avoir des réductions entre les équations L_n et les équations $\mathfrak{D}$. Mais nous ne connaissons pas ces équations $\mathfrak{D}$, de sorte que nous devons raisonner en laissant complètement indéterminées les forces et la composition interne de S, c'est-à-dire sans tenir compte des réductions possibles entre L_n et $\mathfrak{D}$.

Le système $\mathfrak{M}$ devant déterminer tous les q sans aucune ambiguïté, en n'introduisant comme arbitraires que des q^0 et des q'^0, ce système doit, d'après les théorèmes généraux, être d'ordre canonique *deux* et toutes ses équations du second ordre doivent être linéaires par rapport aux q''. De ce qu'il n'y a aucune réduction entre les deux portions de $\mathfrak{M}$ ou de ce que ce fait doit avoir lieu sans tenir compte des réductions possibles, résulte alors immédiatement que L_n et $\mathfrak{D}$ doivent posséder chacun ces deux propriétés ou plus exactement que, pour chacun de ces systèmes pris séparément, il ne doit exister aucune équation du troisième ordre ou des ordres suivants qui ne soit la dérivée d'aucune équation de l'ordre précédent.

L_n doit donc être d'ordre *deux* au maximum et ses équations du second ordre doivent être linéaires par rapport aux q''. Si L_n est d'ordre *zéro* ou *un*, cette dernière condition est réalisée d'elle-même, mais il n'en est pas ainsi forcément si $n = 2$.

Nous conviendrons de dire qu'*une liaison* L_n *est linéaire*, et alors nous la représenterons par L_n^l, si ses équations d'ordre n sont linéaires par rapport aux dérivées $q^{(n)}$.

Divisons alors les liaisons en deux grandes classes :

Liaisons de première classe. — Nous ferons entrer dans cette catégorie :

1° La liaison nulle;
2° Toutes les liaisons finies L_0;
3° Toutes les liaisons du premier ordre L_1;
4° Toutes les liaisons *linéaires* du second ordre L_2^1.

Liaisons de seconde classe. — Cette catégorie contiendra toutes les liaisons *non linéaires* du second ordre et toutes les liaisons d'ordre supérieur au second.

Les considérations qui précèdent nous conduisent donc à cette conclusion :

La notion de mouvement parfait ne peut pas exister pour un système soumis à une liaison de seconde classe.

Existe-elle pour les systèmes soumis à des liaisons de première classe?

Si elle existe réellement, quelles sont les équations générales de ces mouvements?

3. Liaisons réalisantes. — Soit une liaison $\mathcal{L}_m$, entre des paramètres que nous séparerons en deux groupes : les paramètres q d'une part, les paramètres p d'autre part.

Il peut arriver que des équations $\mathcal{L}_m$ on ne puisse tirer aucune équation ne contenant pas les inconnues p; on peut alors se donner arbitrairement les q en fonction de t et le système, considéré comme aux seules inconnues p, est toujours compatible. On dit alors que l'élimination des p est impossible et que *la liaison $\mathcal{L}_m$ entre les q et les p entraîne la liaison nulle entre les q.*

Supposons au contraire que le système $\mathcal{L}_m$ ne possède pas une solution générale dans laquelle les q peuvent être tous pris arbitrairement, Ce système donnera donc naissance à des relations ne contenant que les inconnues q; autrement dit, l'élimination des inconnues p sera possible et conduira à un système différentiel L_n entre les inconnues q.

Ce nouveau système L_n définira une liaison entre les q et nous dirons que *la liaison* $\mathcal{L}_m$ *entre les* q *et les* p *entraîne la liaison* L_n *entre les* q ou encore que *la liaison* L_n *est réalisée par la liaison* $\mathcal{L}_m$.

Il est à remarquer de suite qu'*il n'y a aucune relation de grandeur entre* m *et* n si l'on excepte le cas $m = 0$ qui donne forcément $n = 0$ sans que la réciproque soit vraie.

Au point de vue mécanique, le cas le plus intéressant est celui de

$$m \leqq n,$$

parce que les seules liaisons que nous savons réaliser physiquement sont des liaisons finies et des liaisons du premier ordre, ces dernières apparaissant plus compliquées que les premières. Une liaison nous paraît donc d'autant plus compliquée, physiquement, que son ordre est plus élevé, de sorte que, si nous pouvons entraîner une liaison entre les q au moyen d'une liaison d'ordre moindre entre ces paramètres et d'autres paramètres auxiliaires p, nous aurons effectué une modification qui, au point de vue analytique, sera une simple transformation, mais qui, au point de vue mécanique, sera une véritable réduction.

Cette notion de réduction peut aussi s'étendre au cas de $m = n$, car parmi les liaisons d'un même ordre, il peut en exister qui soient, physiquement, d'une nature plus simple que les autres; par exemple pour $m = n = 1$, les liaisons linéaires sont les seules dont on connaisse les réalisations physiques, donc si L_1 non linéaire se déduit de $\mathcal{L}_1$ linéaire, il y a réduction.

4. Réalisations parfaites. — Soit L_n réalisée par $\mathcal{L}_m$. Désignons par $E_\mu = 0, \ldots$ les équations d'ordre μ de L_n et par $\mathcal{E}_\mu = 0$ celles de $\mathcal{L}_m$. Parmi les équations $\mathcal{E}_\mu = 0$ on doit retrouver toutes les équations $E_\mu = 0$ et il reste un certain nombre d'équations d'ordre μ distinctes par rapport aux $q^{(\mu)}$, $p^{(\mu)}$, mais qui ne sont pas forcément distinctes par rapport aux $p^{(\mu)}$, de sorte que l'élimination des $p^{(\mu)}$ pourra donner des équations qui seront effectivement d'ordre n, contiendront effectivement les inconnues p non éliminables en vertu des équations d'ordre moindre et ne contiendront pas les $p^{(\mu)}$. En définitive, pour chaque ordre μ, les équations de $\mathcal{L}_m$ pourront se répartir en

trois groupes :

$$E_\mu = 0, \qquad \ldots,$$
$$\omega_\mu = 0, \qquad \ldots,$$
$$\Omega_\mu = 0, \qquad \ldots.$$

Les premiers ne contiennent pas les p et leurs dérivées, ce sont les équations d'ordre μ de L_n.

Les secondes contiennent effectivement les $p, p', \ldots,$ mais non les $p^{(\mu)}$ et forment avec les premières un système distinct par rapport aux $q^{(\mu)}$.

Enfin les troisièmes sont distinctes par rapport aux $p^{(\mu)}$.

Soit λ *le plus grand des deux nombres* m *et* n. Supposons que les *équations intermédiaires d'ordre* λ, $\omega_\lambda = 0$, n'existent pas. Les équations $\mathcal{E}_\lambda$ de $\mathcal{L}_m$ se réduisent alors aux deux groupes :

$$\mathcal{E}_\lambda \begin{cases} E_\lambda = 0, & \ldots, \\ \Omega_\lambda = 0, & \ldots, \end{cases}$$

puisqu'on est au delà de l'ordre de $\mathcal{L}_m$, les équations $\mathcal{E}_{\lambda+1}$ seront les dérivées des équations $\mathcal{E}_\lambda$, c'est-à-dire

$$\mathcal{E}_{\lambda+1} \begin{cases} \dfrac{dE_\lambda}{dt} = 0, & \ldots, \\[2mm] \dfrac{d\Omega_\lambda}{dt} = 0, & \ldots; \end{cases}$$

mais d'après les hypothèses faites sur les E_λ et les Ω_λ, les premières sont indépendantes des p et les secondes distinctes par rapport aux $p^{(\lambda+1)}$, de sorte qu'il n'y a pas d'équations intermédiaires d'ordre $\lambda + 1$. On peut recommencer sur cet ordre le raisonnement fait sur l'ordre λ et ainsi de suite, de sorte que, si les équations intermédiaires n'existent pas pour l'ordre λ, elles n'existent pour aucun des ordres suivants.

Réciproquement, supposons que les équations $\omega_\lambda = 0$ existent effectivement. Les équations $\mathcal{E}_\lambda$ et $\mathcal{E}_{\lambda+1}$ auront la composition

$$\mathcal{E}_\lambda \left\{ \begin{array}{ll} E_\lambda = 0, & \ldots, \\ \omega_\lambda = 0, & \ldots, \\ \Omega_\lambda = 0, & \ldots, \end{array} \right. \qquad \mathcal{E}_{\lambda+1} \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dE_\lambda}{dt} = 0, & \ldots, \\ \dfrac{d\omega_\lambda}{dt} = 0, & \ldots. \\ \dfrac{d\Omega_\lambda}{dt} = 0, & \ldots, \end{array} \right.$$

les équations $\frac{d\Omega_\lambda}{dt} = 0$ sont distinctes par rapport aux $p^{(\lambda+1)}$. Les équations $\frac{dE_\lambda}{dt} = 0$ sont indépendantes des p et sont les seules équations d'ordre n indépendantes des p, car on est au delà de l'ordre de L_n. Les équations $\frac{d\omega_\lambda}{dt} = 0$ ne contiennent pas les $p^{(\lambda+1)}$; elles forment avec les $\frac{dE_\lambda}{dt} = 0$ un système distinct par rapport aux $q^{(\lambda+1)}$; elles contiennent effectivement les $p, p', \ldots,$ sans quoi elles formeraient avec les précédentes un système d'équations distinctes par rapport aux $q^{\lambda+1}$ et indépendantes des p, et les équations $\frac{dE_\lambda}{dt} = 0$ ne seraient pas toutes les équations d'ordre λ de L_n, ce qui est contraire à l'hypothèse

$$\lambda \geqq n.$$

On en conclut qu'il existe effectivement des équations intermédiaires pour l'ordre $\lambda + 1$ et, en recommençant le raisonnement sur ce nouvel ordre, on en conclut que, pour tout ordre supérieur à λ il existe effectivement des équations intermédiaires.

Au point de vue où nous nous plaçons, c'est-à-dire au point de vue de l'existence des équations intermédiaires pour les ordres successifs, il ne peut donc se présenter que deux cas :

Premier cas. — Il existe des équations $\omega_\lambda = 0$. Il existe alors effectivement des équations intermédiaires pour tous les ordres à partir de λ.

Deuxième cas. — Il n'y a pas d'équations $\omega_\lambda = 0$. Les équations intermédiaires cessent certainement d'exister à partir de l'ordre λ ou d'un ordre moindre ν; *nous dirons alors que la réalisation de* L_n *par* $\mathfrak{L}_m$

est parfaite à partir de l'ordre ν, *lequel est forcément inférieur ou égal au plus grand des deux nombres* m *et* n.

Considérons le cas particulier important déjà signalé

$$m \leqq n,$$

en supposant la réalisation parfaite à partir de l'ordre ν satisfaisant à l'inégalité fondamentale qui devient ici

$$\nu \leqq n.$$

On peut reprendre la première partie du raisonnement relatif à l'arrêt des équations intermédiaires, raisonnement qui montre qu'à partir du plus grand des deux nombres m et ν, les équations de L_n se déduiront successivement par de simples dérivations. Si donc

$$\nu > m,$$

on aura

$$n \leqq \nu,$$

et par conséquent, en vertu de l'inégalité fondamentale,

$$n = \nu > m,$$

Si, au contraire,

$$\nu \leqq m,$$

on aura

$$n \leqq m$$

et, d'après l'inégalité qui existe par hypothèse entre m et n,

$$n = m.$$

Donc, *l'inégalité*

$$m < n$$

entraîne l'égalité

$$\nu = n.$$

Supposons-nous dans ce cas; les équations $\mathcal{E}_n$ de $\mathcal{L}_m$ se déduiront par dérivation des équations $\mathcal{E}_{n-1}$, donc seront linéaires par rapport aux $p^{(n)}$ et $q^{(n)}$. En éliminant les $p^{(n)}$ on aura des équations linéaires par rapport aux $q^{(n)}$ qui, puisqu'il n'y a pas d'équations intermédiaires d'ordre n, devront, en vertu des équations $\mathcal{E}_{n-1}$, $\mathcal{E}_{n-2}$, ..., devenir indépendantes des inconnues p. Or, ces équations des ordres inférieurs définissent un certain nombre des quantités q, q', ..., $q^{(n-1)}$, p, p', ..., $p^{(n-1)}$ en fonction des autres. Si nous désignons les premières par la lettre u et les secondes par la lettre v, elles définissent les u en fonction des v. Les équations linéaires aux $q^{(n)}$ sont à coefficients fonctions des u et des v, si l'on y remplace les u en fonction des v, elles ne cessent pas d'être linéaires, mais leurs coefficients ne contiennent plus aucun des v qui sont des dérivées des p. Il en résulte donc :

Les liaisons L_n^1 sont les seules admettant des réalisations parfaites par des liaisons d'ordre moindre.

Faisons le même raisonnement en supposant

$$m = n.$$

Les équations $\mathcal{E}_n$ ne sont plus forcément linéaires parce qu'elles ne sont pas les dérivées des équations $\mathcal{E}_{n-1}$. Pour pouvoir rétablir le raisonnement, il nous faut les supposer linéaires, c'est-à-dire supposer que la liaison réalisante $\mathfrak{L}_n$ est linéaire, et alors il n'y a rien à changer, la même conclusion subsiste, c'est-à-dire :

Les liaisons L_n^1 sont les seules admettant des réalisations parfaites par des liaisons linéaires du même ordre.

Ce qui est la généralisation du théorème que M. Levi-Civita et moi avons donné pour les liaisons du premier ordre (*voir* Mémoire cité).

Revenons au cas où m est inférieur à n.

Supposons que le système $\mathfrak{L}_m$ ait été mis sous forme canonique résolue régulière avec les inconnues prises dans l'ordre p_1, p_2, ..., q_1, q_2, ..., comme je l'ai indiqué dans mon Mémoire « sur l'extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles » et supposons, si m est inférieur à $n-1$, qu'on le prolonge sous cette forme jusqu'à l'ordre $n-1$.

Pour chaque ordre μ inférieur ou égal à $n-1$, les équations $\mathcal{E}_\mu$ se décomposeront alors en deux groupes, le premier résolu par rapport à des $p^{(\mu)}$ et le second résolu par rapport à des $q^{(\mu)}$, mais dans lequel ne figure aucun $p^{(\mu)}$; désignons d'une façon générale par α et β les dérivées des q et des p par rapport auxquelles sont résolues les équations $\mathcal{E}_{n-2}$, $\mathcal{E}_{n-3}$, ..., par γ et δ les $q^{(n-1)}$ et $p^{(n-1)}$ par rapport auxquelles sont résolues les équations $\mathcal{E}_{n-1}$. Enfin désignons par ces lettres accentuées les dérivées analogues autres que celles-ci.

Les équations $\mathcal{E}_{n-1}$ se composeront d'un premier groupe résolu par rapport aux δ et d'un second groupe résolu par rapport aux γ et ne contenant pas les δ et δ' ainsi que les α et β. Il sera de la forme

$$\gamma = \sigma(\gamma', \alpha', \beta', t).$$

Comme $m < n$, nous obtiendrons toutes les équations $\mathcal{E}_n$ en dérivant les équations $\mathcal{E}_{n-1}$.

Le premier groupe donnera des équations résolues par rapport aux $\frac{d\delta}{dt}$, c'est-à-dire par rapport à des $p^{(n)}$. Le second groupe donnera des équations ne contenant pas de $p^{(\mu)}$ et résolu par rapport à des $\frac{d\gamma}{dt}$, c'est-à-dire par rapport à des $q^{(\mu)}$. Mais à l'ordre n, il ne doit pas y avoir d'équations intermédiaires; donc ces expressions des $\frac{d\gamma}{dt}$ doivent être indépendantes des β' et δ' quand on y remplace en fonction des α', β', γ', δ' ceux des $\frac{d\alpha'}{dt}$ et $\frac{d\beta'}{dt}$ qui sont des α, γ, β, δ.

Les équations considérées sont

$$\frac{d\gamma}{dt} = \sum \frac{\partial\sigma}{\partial\gamma'}\frac{d\gamma'}{dt} + \sum \frac{\partial\sigma}{\partial\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt} + \sum \frac{\partial\sigma}{\partial\beta'}\frac{d\beta'}{dt} + \frac{\partial\sigma}{\partial t}.$$

Les $\frac{\partial\sigma}{\partial\gamma'}$ ne contiennent que les γ', α', β', donc ne peuvent subir aucune modification ; si la propriété a lieu, c'est qu'ils sont indépendants des β', donc que l'équation est de la forme

$$\gamma = \theta(\gamma', \alpha', t) + \varphi(\alpha', \beta', t).$$

Considérons alors la fonction

$$\Phi = \gamma - \theta(\gamma', \alpha', t);$$

c'est une fonction des q, q', ..., $q^{(n-1)}$ où ne figurent pas les inconnues p; elle nous permet d'écrire l'équation considérée sous la forme

$$\frac{d\Phi}{dt}=\sum\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'}\frac{d\alpha'}{dt}+\sum\frac{\partial\varphi}{\partial\beta'}\frac{d\beta'}{dt}+\frac{\partial\varphi}{\partial t};$$

le second membre ne contient que des dérivées d'ordre $n-1$ au plus; si l'on y fait les remplacements indiqués, on n'introduira jamais de dérivées d'ordre n et toutes les dérivées β' et δ' des p devront disparaître; il deviendra ainsi une fonction Ψ des $q, q', \ldots, q^{(n-1)}$. Nous voyons ainsi que toutes les équations d'ordre n de L_n seront de la forme

$$\frac{d\Phi}{dt}=\Psi,$$

Φ et Ψ étant des fonctions des q et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$.

Nous conviendrons de désigner par la notation L'_n *les liaisons dont les équations d'ordre n peuvent être mises sous cette forme.* Ces liaisons sont des cas particuliers des liaisons L^1_n. Nous pouvons alors énoncer la propriété :

Les liaisons L'_n *sont les seules pouvant posséder des réalisations parfaites par des liaisons d'ordre moindre,*

qui complète celle donnée antérieurement en montrant que les liaisons L^1_n ne possèdent pas toutes des réalisations parfaites par des liaisons d'ordre moindre.

Après avoir démontré ces propriétés qui limitent les cas où les réalisations parfaites peuvent exister, il faut démontrer les réciproques.

Considérons une liaison L^1_n. Considérons le système $\mathcal{L}_n$ obtenu en adjoignant aux équations L^1_n un certain nombre d'équations choisies arbitrairement, contenant les q et leurs dérivées jusqu'à l'ordre n, contenant des inconnues auxiliaires p et leurs dérivées jusqu'à l'ordre n, ces équations étant linéaires par rapport aux $p^{(n)}$, $q^{(n)}$ et distinctes par rapport aux $p^{(n)}$. Le nouveau système sera évidemment d'ordre n, linéaire et, pour aucun des ordres $0, 1, \ldots, n$, il n'y aura d'équations intermédiaires; donc la réalisation sera parfaite à partir de l'ordre zéro. On pourrait voir plus généralement qu'il existe des réalisations parfaites et linéaires à partir d'un ordre quelconque ν inférieur ou égal à n. Donc :

Pour qu'une liaison L_n *possède des réalisations parfaites et linéaires du même ordre, il faut et il suffit qu'elle soit une* L_n^1.

Considérons maintenant une L'_n, elle peut s'écrire :

$$\begin{array}{llllllll}
A_1 = 0, & \ldots, & & & & & & \\
\dfrac{dA_1}{dt} = 0, & \ldots, & B_1 = 0, & \ldots, & & & & \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & & & & \\
\dfrac{d^{n-1}A_1}{dt^{n-1}} = 0, & \ldots, & \dfrac{d^{n-2}B_1}{dt^{n-2}} = 0, & \ldots, & K_1 = 0, & \ldots, & & \\
\dfrac{d^{n}A_1}{dt^{n}} = 0, & \ldots, & \dfrac{d^{n-1}B_1}{dt^{n-1}} = 0, & \ldots, & \dfrac{dK_1}{dt} = 0, & \ldots, & \dfrac{dL_1}{dt} = L_2, & \ldots,
\end{array}$$

les L_1 et les L_2 étant des fonctions des $q, q', \ldots, q^{(n-1)}$.

Soient $M_1, \ldots$ des fonctions en nombre égal à celui des L_1 contenant les $q, q', \ldots$, jusqu'à l'ordre $n-2$, contenant des inconnues auxiliaires p en nombre au moins égal à celui des L_1, avec leurs dérivées jusqu'à l'ordre $n-2$ et distinctes par rapport aux $p^{(n-2)}$.

Considérons alors la liaison $\mathcal{L}_{n-1}$ ayant pour équations

$$\begin{array}{llllll}
A_1 = 0, & & & & & \\
\dfrac{dA_1}{dt} = 0, & \ldots, & B_1 = 0, & \ldots, & & \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & & \\
\dfrac{d^{n-1}A_1}{dt^{n-1}} = 0, & \ldots, & \dfrac{d^{n-2}B_1}{dt^{n-2}} = 0, & \ldots, & K_1 = 0, & \ldots, \\
\end{array}$$

$$L_1 = M_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{dM_1}{dt} = L_2, \qquad \ldots.$$

L'élimination des p se fait par l'élimination immédiate des M et donne visiblement le système L'_n, donc $\mathcal{L}_{n-1}$ est bien une liaison réalisante de L'_n. Formons les équations d'ordre n de $\mathcal{L}_{n-1}$, nous aurons

$$\frac{d^n A_1}{dt^n} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^{n-1}B_1}{dt^{n-1}} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{dK_1}{dt} = 0, \qquad \ldots,$$

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{dM_1}{dt}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^2M_1}{dt^2} = \frac{dL_2}{dt};$$

les équations

$$\frac{d^2 M_1}{dt^2} = \frac{dL_2}{dt}, \qquad \ldots$$

sont résolubles par rapport aux $p^{(n)}$ parce que les M_1 sont distincts par rapport aux $p^{(n-2)}$, elles forment le groupe Ω_n. Quant aux autres équations, elles sont indépendantes des p, sauf celles de la forme

$$\frac{dL_1}{'} = \frac{dM_1}{dt};$$

mais en vertu des équations d'ordre $n-1$ de $\mathfrak{L}_{n-1}$, elles peuvent s'écrire

$$\frac{dL_1}{dt} = L_2$$

et deviennent aussi indépendantes des p. Il n'y a donc pas d'équations intermédiaires pour l'ordre n et la réalisation est bien parfaite, de sorte que :

Pour que la liaison L_n possède des réalisations parfaites par des liaisons d'ordre moindre, il faut et il suffit qu'elle soit une L'_n.

Considérons une liaison L_n quelconque, prolongeons ses équations jusqu'à un ordre arbitraire m, égal ou supérieur à n, et adjoignons au système L_n un groupe Ω_m d'équations d'ordre m distinctes par rapport aux dérivées $p^{(m)}$, des inconnues auxiliaires p; nous aurons évidemment une liaison $\mathfrak{L}_m$ réalisante de L_n et qui ne donnera, pour aucun ordre, d'équations intermédiaires; donc :

Toute liaison possède effectivement des réalisations parfaites par des liaisons d'ordre égal ou supérieur.

Terminons par cette remarque que les équations intermédiaires n'existent jamais pour l'ordre zéro, de sorte que :

Toute réalisation d'une L_0 par une $\mathfrak{L}_0$ est une réalisation parfaite.

5. Réalisations a tendance parfaite. — Pour bien concevoir la notion de réalisation parfaite et celle que nous allons exposer, il faut consi-

dérer les équations d'ordre μ d'une liaison L_n comme des relations entre les $q^{(\mu)}$, c'est-à-dire y considérer les $q, q', \ldots, q^{(\mu-1)}$ comme des quantités données. Autrement dit, les équations E_μ ne sont plus, pour nous, des équations entre les $q, q', \ldots, q^{(\mu)}$, mais des équations entre les $q^{(\mu)}$.

A ce point de vue, une réalisation $\mathcal{L}_m$ d'une L_n donne des équations intermédiaires d'ordre μ qui ne contiennent pas les $p^{(\mu)}$ et par conséquent sont des équations entre les $q^{(\mu)}$ qui viennent s'ajouter aux équations E_μ de L_n, de sorte qu'une réalisation donne en général plus d'équations entre les $q^{(\mu)}$ que la liaison elle-même.

La notion de réalisation parfaite correspond à l'idée qu'à partir d'un certain ordre la liaison réalisante ne donne entre les $q^{(\mu)}$ que les relations de la liaison proposée.

Considérons maintenant une réalisation dépendant d'un système (a) de constantes arbitraires. Pour les a quelconques, la liaison $\mathcal{L}_m$ donne, aux divers ordres, des relations entre les $q^{(\mu)}$ qui sont distinctes par rapport à ces $q^{(\mu)}$. Si les (a) tendent vers un système (a^0) pour lequel ces équations tendent vers des équations limites encore distinctes, la liaison $\mathcal{L}_m$ tend vers une liaison limite $\mathcal{L}_m^0$ qui est encore une liaison réalisante de L_n. Mais si ces équations cessent d'être distinctes à la limite; si, par exemple, certaines s'évanouissent en devenant des identités, la conclusion ne subsiste pas, *la réalisation ne tend vers aucune réalisation limite*.

Supposons que (a) tendant vers (a^0), ces équations autres que les E_μ soient développables suivant les puissances des $a - a^0$ et que, à partir d'un certain ordre, elles commencent par des termes de degré ε. On voit facilement que, si cela a lieu à l'ordre λ déjà défini, cela aura lieu indéfiniment, car les équations ω, à partir de cet ordre, se déduisent par de simples dérivations. Nous aurons donc une réalisation $\mathcal{L}_m$ qui, lorsque (a) tendra vers (a^0), ne tendra vers aucune réalisation limite, mais qui donnera entre les $q^{(\mu)}$ des relations se réduisant, à la limite et à partir d'un certain ordre, aux seules relations existant entre ces dérivées par suite de la liaison L_n. Nous dirons alors que *la réalisation est à tendance parfaite*.

Désignons d'une façon générale par ω_μ une fonction des $q, q', \ldots, q^{(\mu)}$ ne contenant pas les $p^{(\mu)}$, de façon que $\omega_\mu = 0$ soit, à notre point de vue, une relation entre les $q^{(\mu)}$ et désignons par s_μ la différence entre le nombre des paramètres q et le nombre des équations E_μ de la liaison L_n.

Soit m un nombre quelconque égal ou supérieur à n. Choisissons arbitrairement des fonctions ω_m satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Ces fonctions dépendent de constantes arbitraires a et leurs développements suivant les puissances des $a - a^0$ commençant par des termes d'ordre ε;

2° Leur nombre est au plus égal à s_m;

3° Elles forment avec les E_m un système distinct par rapport aux $q^{(m)}$;

4° Les p ne sont pas éliminables entre les équations $\omega_m = 0$.

Il est bien évident qu'en adjoignant à L_n ces équations $\omega_m = 0$, on aura une nouvelle liaison $\mathcal{L}_m$ réalisante de L_n et qui sera à tendance parfaite quand (a) tendra vers (a^0), puisque les équations $\omega_m = 0$ et toutes les équations dérivées tendront à devenir des identités.

Si l'on introduit l'hypothèse que le nombre des ω_m est précisément s_m, on a des équations $\mathcal{E}_m$ donnant tous les $q^{(m)}$ en fonction des p et q jusqu'à l'ordre $m - 1$, de sorte que $\mathcal{L}_m$ est linéaire, donc :

Toute liaison possède des réalisations à tendance parfaite par des liaisons, et même des liaisons linéaires, d'ordre égal ou supérieur.

Et l'on peut remarquer que, dans le procédé indiqué, les équations auxiliaires n'existent pas jusqu'à l'ordre m et cessent d'exister à partir de cet ordre quand on néglige les infiniment petits d'ordre $\varepsilon + 1$. On peut donc dire qu'à ces infiniment petits près la réalisation est parfaite à partir de l'ordre zéro.

Considérons maintenant des réalisations par des liaisons d'ordre moindre et commençons par une L_n^1 formée d'une seule équation

$$L = 0$$

ou

$$\Sigma A q^{(n)} = B,$$

les A et B étant des fonctions des $q, q', \ldots, q^{(n-1)}$.

Choisissons arbitrairement autant de fonctions α et autant de fonctions β qu'il y a de $q^{(n)}$ figurant dans cette équation et satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les fonctions α et β ne dépendent que des $q, q', \ldots, q^{(n-2)}$, $p, p', \ldots, p^{(n-2)}$;

2° Il n'existe entre les fonctions $\frac{\beta}{\alpha}$ aucune relation indépendante des p;

3° Les développements des α et des β suivant les puissances des $a - a^0$ commencent par des termes de degré ε.

Si alors nous prenons le système $\mathcal{L}_{n-1}$

$$\alpha_1 q_1^{(n-1)} = \beta_1, \qquad \alpha_2 q_2^{(n-1)} = \beta_2, \qquad \ldots, \qquad \Sigma \mathrm{A} \frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \mathrm{B},$$

et si nous formons ses équations d'ordre n nous trouvons

$$\alpha_1 q_1^{(n)} + \frac{d\alpha_1}{dt} q_1^{(n-1)} = \frac{d\beta_1}{dt}, \qquad \ldots, \qquad \sum \mathrm{A} \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) + \sum \frac{d\mathrm{A}}{dt} \frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \frac{d\mathrm{B}}{dt};$$

la dernière est une équation qui contient en général les $p^{(n)}$, ne nous en occupons pas; les premières se réduisent toutes à des identités, quand on néglige les infiniment petits d'ordre $\varepsilon + 1$. Mais on ne peut pas dire qu'elles donnent des relations toutes évanouissantes, car en vertu des premières équations d'ordre $n - 1$, on peut les écrire

$$\alpha_1 q_1^{(n)} + \frac{\beta_1}{\alpha_1} \frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{d\beta_1}{dt}, \qquad \ldots$$

ou

$$q_1^{(n)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right), \qquad \ldots,$$

et, si on les ajoute après les avoir respectivement multipliées par les A, on obtient la combinaison

$$\Sigma \mathrm{A} q^{(n)} = \Sigma \mathrm{A} \frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

c'est-à-dire, en vertu de la dernière équation d'ordre $n - 1$,

$$\Sigma \mathrm{A} q^{(n)} = \mathrm{B}.$$

Cette combinaison, indépendante des a, ne se réduit donc pas à une identité et est précisément l'équation L'_n. Nous obtenons donc cette relation accompagnée d'autres qui s'évanouissent à la limite.

Prenons maintenant une L'_n quelconque dont les équations d'ordre n seront

$$\frac{d^n A_1}{dt^n} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{dK}{dt} = 0, \quad L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad \ldots,$$

les L étant linéaires aux $q^{(n)}$.

Formons, au moyen de paramètres auxiliaires λ_1, la liaison $\mathcal{L}_{n-1}$ réalisant avec tendance parfaite, et comme il vient d'être indiqué, la liaison représentée par l'unique équation L_1.

Faisons de même, au moyen de paramètres λ_2, pour la relation L_2 et ainsi de suite, désignons d'une façon générale par p les paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ et adjoignons aux équations E_{n-1} tous les groupes d'équations d'ordre $n-1$ ainsi obtenus.

Nous formerons ainsi une liaison $\mathcal{L}_{n-1}$ dont les équations d'ordre u seront composées des E_n et d'autres relations évanouissantes, de sorte que la réalisation sera bien à tendance parfaite, donc :

Toute liaison linéaire possède des réalisations à tendance parfaite par des liaisons de l'ordre immédiatement inférieur.

Cette notion de réalisation à tendance parfaite, et particulièrement le nom caractéristique que nous avons adopté, repose sur le fait que les équations intermédiaires disparaissent à la limite. En réalité, il n'y a là qu'une apparence et la question peut être présentée d'une façon plus rigoureuse sous la forme suivante :

Supposons, par exemple, que les équations intermédiaires commencent par des termes d'ordre ε, et faisons tendre (a) vers (a^0) en faisant dépendre les a d'un paramètre ρ qui tendra vers zéro. Les $a - a^0$ contiendront ρ en facteur et les rapports

$$\frac{a - a^0}{\rho}$$

tendront, pour $\rho = 0$, vers des limites α. Les équations intermédiaires débuteront alors par un terme en ρ^ε dont le coefficient sera l'ensemble des termes d'ordre ε où l'on aura remplacé les $a - a^0$ par les α, ce sera un polynome de degré ε par rapport à ces α. Si, dans ces équations intermédiaires, on supprime ρ^ε qui est en facteur, on trouvera des équations qui tendront vers des équations limites parfaitement déterminées quand ρ tendra vers zéro, mais ces équations limites dépendent des α, c'est-à-dire de la façon dont (a) tend vers (a^0).

Si l'on considère les a comme les coordonnées d'un point A dans un hyperespace, nous voyons apparaître la notion de réalisation à tendance parfaite sous la nouvelle forme.

Si une réalisation dépend, comme constantes arbitraires, des coordonnées d'un point A *dans un hyperespace, cette réalisation tend en général vers une réalisation limite quand le point* A *tend vers une position* A_0.

Quand la réalisation est à tendance parfaite pour A_0, *elle tend vers une réalisation limite, mais qui est variable avec la direction dans laquelle* A *tend vers* A_0.

Il y a donc à la limite, une indétermination dont on pourra profiter, non pour faire disparaître les équations intermédiaires, mais pour leur donner des propriétés conduisant aux mêmes conséquences que leur disparition.

6. Les mouvements abstraits d'un système soumis a une liaison de première classe. — Soit L la liaison de première classe, soit S l'énergie d'accélérations et soit $\Sigma Q\,\delta q$ le travail virtuel des forces données sur le système où les q sont indépendants; formons la fonction de M. Appell

$$R = S - \Sigma Q q'',$$

et écrivons les équations du minimum de cette forme quadratique des q'', ceux-ci étant liés par les équations

$$E_2 = 0, \qquad \dots$$

du second ordre de L. Nous appliquons ainsi *le principe de M. Appell* et parvenons aux équations avec multiplicateurs

$$\frac{\partial R}{\partial q''_1} = \sum \lambda \frac{\partial E_2}{\partial q''_1}, \qquad \ldots,$$
$$E_0 = 0, \qquad \ldots,$$
$$E_1 = 0, \qquad \ldots,$$
$$E_2 = 0, \qquad \ldots,$$

qui définissent les q et λ en fonction de t, sans aucune ambiguïté, quand on se donne les valeurs initiales des q et q' satisfaisant aux équations E_0 et E_1 de la liaison.

Nous définissons ainsi des fonctions q du temps, c'est-à-dire un mouvement au sens cinématique, mais non au sens dynamique, car ce mouvement, qui est *analytiquement* déterminé par les forces qui agissent sur le système, ne correspond, pour l'instant, à aucune idée dynamique. Nons l'appellerons *mouvement abstrait* et le but que nous allons nous proposer sera de montrer que *les mouvements parfaits, dont nous pouvons avoir physiquement et mécaniquement la notion, sont précisément ces mouvements abstraits.*

7. La propriété fondamentale des réalisations parfaites. — Soit L_n une liaison de première classe réalisée d'une façon parfaite par une liaison $\mathcal{L}_m$ également de première classe.

Soient Σ le système considéré aux paramètres q et R la fonction de M. Appell qui lui correspond.

Soit Σ_1 un système auxiliaire aux paramètres p. Son énergie d'accélération s'annule quand la masse totale devient nulle, car les masses de tous les points matériels qui la composent deviennent alors simultanément nulles. Ce fait pourra se mettre en évidence par un facteur ε qui s'annule avec la masse totale.

La liaison L_n de Σ résulte de la liaison $\mathcal{L}_m$ de $\Sigma + \Sigma_1$. Considérons ce système sur lequel n'agissent que les forces données appliquées à Σ, la fonction de M. Appell sera la somme des fonctions relatives à Σ et Σ_1 et comme aucune force n'est appliquée à Σ_1 la seconde partie se réduira à l'énergie d'accélération de Σ_1 et contiendra ε en facteur. On aura donc

$$\mathcal{R} = R + \varepsilon R_1,$$

R ne dépendant que des q, q', q'' et R_1 que des p, p', p''.

La réalisation étant parfaite, les équations intermédiaires du second ordre n'existent pas, puisque m et n ne sont ni l'un ni l'autre supérieurs à 2. Les équations du second ordre de $\mathfrak{L}_n$ se composent donc des équations E_2 et d'équations Ω_2 distinctes par rapport aux p''.

Ceci posé, donnons au système $\Sigma + \Sigma_1$ soumis aux forces données qui agissent sur Σ et à la liaison de première classe $\mathfrak{L}_m$, le mouvement abstrait correspondant à un système de valeurs initiales des q et q' satisfaisant aux équations E_0 et E_1 de la liaison L_n et à un système quelconque de valeurs initiales des p et p' satisfaisant aux autres équations des ordres zéro et un de $\mathfrak{L}_m$.

Nous aurons les équations de ce mouvement abstrait en appliquant à $\mathfrak{R}$ le principe de M. Appell, ce qui donnera les équations

$$\frac{\partial R}{\partial q''_1} = \Sigma\lambda\frac{\partial E_2}{\partial q''_1} + \Sigma\mu\frac{\partial \Omega_2}{\partial q''_1}, \qquad \ldots,$$
$$\varepsilon'\frac{\partial R_1}{\partial p''_1} = \Sigma\mu\frac{\partial \Omega_2}{\partial p''_1}, \qquad \ldots,$$
$$E_0 = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_0 = 0, \quad \ldots,$$
$$E_1 = 0, \quad \ldots, \quad \omega_1 = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_1 = 0, \quad \ldots,$$
$$E_2 = 0, \quad \ldots, \quad \Omega_2 = 0, \quad \ldots.$$

De ce que les Ω_2 sont distinctes par rapport aux p'' résulte que les équations de la seconde ligne sont distinctes par rapport aux μ et nous donneront pour ces inconnues des expressions dans lesquelles ε sera en facteur. Si nous changeons ces inconnues en posant d'une façon générale

$$\mu = \varepsilon\sigma,$$

les équations des deux premières lignes deviendront

$$\frac{\partial R}{\partial q''_1} = \Sigma\lambda\frac{\partial E_2}{\partial q''_1} + \varepsilon\Sigma\sigma\frac{\partial \Omega_2}{\partial q''_1},$$
$$\frac{\partial R_1}{\partial p''_1} = \Sigma\sigma\frac{\partial \Omega_2}{\partial p''_2},$$

et, sans qu'il soit nécessaire de faire un raisonnement rigoureux qui, d'ailleurs, ne présente aucune difficulté, on voit que ε tendant vers zéro, ces équations tendent vers

$$\frac{\partial R}{\partial q''_1} = \Sigma\lambda \frac{\partial E_2}{\partial q''_1},$$
$$\frac{\partial R_1}{\partial p''_1} = \Sigma\sigma \frac{\partial \Omega_2}{\partial p''_2},$$

qui mettent en évidence ce fait capital que les équations du mouvement abstrait de $\Sigma + \Sigma_1$ se décomposent, à la limite, en deux systèmes distincts :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial R}{\partial q''_1} = \Sigma\lambda \dfrac{\partial E_2}{\partial q''_1}, & \dots, \\ E_0 = 0, & \dots, \\ E_1 = 0, & \dots, \\ E_2 = 0, & \dots, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{llll} & \dfrac{\partial R_1}{\partial p''_1} = \Sigma\sigma \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial p''_1}, & & \dots, \\ \omega_0 = 0, & \dots, & \Omega_0 = 0, & \dots, \\ \omega_1 = 0, & \dots, & \Omega_1 = 0, & \dots, \\ & \Omega_2 = 0, & & \end{array}\right.$$

et que le premier n'est autre que celui qui définit le mouvement abstrait de Σ de sorte que :

Si une L_n de première classe est réalisée d'une façon parfaite par une $\mathfrak{L}_m$ également de première classe, quelle que soit la nature géométrique du système auxiliaire Σ_1 et la répartition des masses dans ce système, lorsque sa masse totale tend vers zéro, le mouvement abstrait du système total tend vers un mouvement qui, pour la portion Σ considérée isolément, n'est autre que le mouvement abstrait de cette portion.

Il est à remarquer que, si la réalisation n'avait pas été parfaite, on serait arrivé, par le même raisonnement, aux équations limites

$$\begin{array}{llllll} & \dfrac{\partial R}{\partial q''_1} = \Sigma\lambda \dfrac{\partial E_2}{\partial q''_1} + \Sigma\nu \dfrac{\partial \omega_2}{\partial q''_1}, & & \dots, & & \\ & \dfrac{\partial R_1}{\partial p''_1} = \Sigma\sigma \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial p''_1}, & & \dots, & & \\ E_0 = 0, & \dots, & \Omega_0 = 0, & \dots, & & \\ E_1 = 0, & \dots, & \omega_1 = 0, & \dots, & \Omega_1 = 0, & \dots, \\ E_2 = 0, & \dots, & \omega_2 = 0, & \dots, & \Omega_2 = 0, & \dots, \end{array}$$

et il n'y aurait pas eu séparation, car les ω_2 contiennent les p. Cette séparation provient de la non-existence des termes $\nu \frac{\partial \omega_2}{\partial q_1''}$, laquelle résulte de la non-existence des équations $\omega_2 = 0$.

8. La propriété fondamentale des réalisations a tendance parfaite. — Soit $\mathfrak{L}_m$ une liaison de première classe fournissant une réalisation à tendance parfaite de la liaison L_n de première classe.

Laissons fixes les constantes arbitraires a, composons arbitrairement le système auxiliaire Σ_1, donnons à $\Sigma + \Sigma_1$ son mouvement abstrait, et faisons tendre vers zéro la masse de Σ_1, nous obtiendrons le mouvement défini par les dernières équations du paragraphe précédent, mouvement qui dépendra des constantes a. Enfin, faisons tendre (a) vers (a_i^0).

Les équations ω_2 certainement et peut-être certaines des équations Ω_0, ω_1, Ω_1, Ω_2 pourront contenir en facteur une puissance du paramètre ρ dont il a déjà été question et tendront, après suppression de ce facteur vers des équations limites, mais qui dépendront des α déjà définis, et que nous désignerons par les mêmes lettres accentuées. Si alors nous faisons rentrer le facteur ρ^ε dans les multiplicateurs ν que nous désignerons, ainsi modifiés, par ν', nous obtenons, en ne prenant que les équations du second ordre, le système

$$(Q')\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial R}{\partial q_1''} = \Sigma\lambda \dfrac{\partial E_2}{\partial q_1''} + \Sigma\nu' \dfrac{\partial \omega_2'}{\partial q_1''}, \qquad \ldots, \\ E_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \omega_2' = 0, \qquad \ldots, \end{array}\right. \qquad (P)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial R_1}{\partial p_1''} = \Sigma\sigma \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial p_1''}, \\ \Omega_2 = 0, \end{array}\right.$$

qui, considéré comme un système d'équations du premier degré aux inconnues q'', λ, ν', p'', σ, se décompose en deux. Le premier ne contient que les q'', λ, ν' et les détermine, le second détermine ensuite les p'' et les σ.

Considérons alors le système auxiliaire

$$(Q)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial R}{\partial q_1''} = \Sigma\zeta \dfrac{\partial E_2}{\partial q_1''}, \qquad \ldots, \\ E_2 = 0, \quad \ldots, \end{array}\right.$$

qui détermine les inconnues q'' et ζ en fonction des q, q'. Substituons ces expressions des q'' dans les équations $\omega_2' = 0$. Nous obtenons ainsi des équations homogènes par rapport aux α qui donnent lieu aux remarques suivantes :

1° Les équations $\omega_2 = 0$ contiennent effectivement les inconnues p, mais on peut évidemment construire la réalisation à tendance parfaite en ne faisant figurer les inconnues p que dans les termes d'ordre supérieur à ε des développements des ω_2, de sorte que les ω'_2 ne dépendront pas des inconnues p et les équations en α ne contiendront que les q et q'.

2° Si l'on prend des fonctions ω_2 dépendant d'un nombre suffisamment grand de paramètres a, les termes de degré ε étant des fonctions des q, q' suffisamment générales, les équations en α seront en nombre moindre que les α; donc, elles pourront être certainement vérifiées pour des valeurs des α fonctions des q et des q' et non toutes identiquement nulles.

Faisons tendre (a) vers (a^0) en adoptant ce système des valeurs des α; le système limite Q' sera évidemment vérifié en prenant les ν' nuls et les q'' et λ égaux aux q'' et ζ déterminés par le système Q. Si nous tenons compte des valeurs zéro, connues *a priori* des ν', nous voyons que le système se réduit à

$$(\mathrm{Q})\ \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial q''_1} = \Sigma\lambda \dfrac{\partial \mathrm{E}_2}{\partial q''_1}, & \ldots, \\ \mathrm{E}_2 = 0, \end{cases} \qquad (\mathrm{P})\ \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial p''_1} = \Sigma\sigma \dfrac{\partial \Omega_2}{\partial p_1}, \\ \Omega_2 = 0, \end{cases}$$

et il y a séparation des paramètres q et p comme dans le cas des réalisations parfaites avec cette différence que la disparition des termes

$$\nu \frac{\partial \omega_2}{\partial q''},$$

au lieu de provenir de ce que les ω_2 n'existent pas, provient de ce que les multiplicateurs ν' deviennent nuls.

Nous résumerons ces résultats en disant :

Si la réalisation à tendance parfaite d'une L_n *de première classe par une* $\mathfrak{L}_m$ *de première classe est suffisamment indéterminée, on peut, pour chaque système de forces appliqué à* Σ, *trouver une direction issue de* A_0, *indépendante de la nature géométrique et de la constitution interne du système auxiliaire Σ_1 de masse nulle, et telle que* A *tendant vers* A_0 *dans cette direction, le mouvement abstrait de* $\Sigma + \Sigma_1$ *tende vers un mouvement limite qui, pour la partie* Σ *considérée isolément, n'est autre que le mouvement abstrait de cette portion.*

9. Réalisations directes. Réalisations effectives. — Nous dirons qu'une liaison L_n d'un système S est réalisée d'une *façon immédiate*, si elle résulte uniquement du contact des corps constitutifs de S entre eux ou avec d'autres corps fixes.

Ces contacts peuvent avoir lieu avec la simple condition géométrique, c'est-à-dire avec glissement, roulement et pivotement, et alors ne donnent que des relations entre les q, et la liaison est forcément une L_0 ou bien peuvent avoir lieu en assujettissant certains d'entre eux à des conditions de roulement ou de pivotement qui s'expriment par des relations finies entre les q et des relations linéaires entre les q' et alors la liaison est forcément une L_1^1.

Nous dirons qu'une réalisation $\mathcal{L}_m$ d'une L_n est *directe* si, considérant les paramètres auxiliaires comme ceux d'un système S_1, la liaison $\mathcal{L}_m$ du système $S + S_1$ est réalisable d'une façon immédiate.

Nous admettons, à propos de ces réalisations directes, les deux propriétés suivantes dont nous ne possédons pas actuellement la démonstration générale, mais qui sont extrêmement vraisemblables, de sorte que nous ne les considérons pas comme des postulats :

1° *Toute liaison* L_0 *admet des réalisations* $\mathcal{L}_0$ *directes*, réalisations qui, d'après une remarque antérieure, sont certainement parfaites.

2° *Toute liaison* L_1^1 *admet des réalisations* $\mathcal{L}_1^1$ *parfaites et directes.* — Nous dirons qu'une réalisation est *indirecte*, si la liaison réalisante possède une réalisation directe; il y a alors deux réalisations superposées. On passe de L_n à $\mathcal{L}_m$ par l'introduction de paramètres p d'un système auxiliaire S_1 et, pour réaliser la liaison $\mathcal{L}_m$ de $S + S_1$, il faut introduire de nouveaux paramètres r et un nouveau système S_2, la liaison de $S + S_1 + S_2$ étant une liaison immédiate.

Nous dirons qu'une réalisation est *effective*, quand la notion de mouvement parfait existe pour la liaison réalisante, de sorte que ces réalisations effectives ne peuvent être que des réalisations au moyen de liaisons de la première classe.

Une autre notion, qui s'introduit aussi dans la question qui nous occupe, est celle de réalisation avec ou sans réduction. Il y a réduction si la liaison réalisante $\mathcal{L}_m$ est plus simple que la liaison réalisée L_n. Nous devrons donc considérer comme réalisation avec réduction celle d'une L_n par une $\mathcal{L}_{n-k}$; la réalisation d'une L_n par une $\mathcal{L}_{n+k}$ sera toujours sans réduction, même si k est nul, à moins que ce ne soit une réalisation d'une L_n non linéaire par une $\mathcal{L}_n^1$.

10. La notion de mouvement parfait pour une L_0 ou une L_1^1 réalisable d'une façon immédiate. — Nous avons la notion physique de résistances passives au mouvement d'un système; ces forces proviennent, soit du milieu à l'intérieur duquel se fait le mouvement, soit des liaisons imposées au système et leur propriété caractéristique est de donner, pour tout déplacement infiniment petit du système, c'est-à-dire pour tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons, un travail négatif. On peut concevoir que ces résistances soient de plus en plus faibles, donc que leur travail soit de plus en plus petit et tende vers zéro. Réciproquement, si ce travail est nul, c'est que toutes les résistances sont nulles, puisqu'il est une somme de termes négatifs dont chacun ne peut s'annuler qu'avec la résistance correspondante.

La notion physique de réalisation immédiate et sans résistances passives se traduit donc par le fait que *le travail virtuel des résistances du milieu et des forces de liaisons est toujours nul;* d'où l'on déduit, par la démonstration classique, le principe des travaux virtuels, le principe de Dalembert et enfin le principe de M. Appell, c'est-à-dire celui du minimum de la fonction

$$R = S - \Sigma Q q''.$$

Donc, *lorsque le système est soumis à une L_0 réalisée d'une façon immédiate, le mouvement tend, lorsqu'on s'approche physiquement de plus en plus de la suppression complète des résistances passives, vers un mouvement idéal déterminé complètement et sans ambiguïté par les valeurs initiales des q et des q'. C'est ce mouvement que nous appellerons le* mouvement parfait *du système. Ce mouvement parfait coïncide avec le mouvement abstrait.*

11. La notion de mouvement parfait pour une L_0 ou une L_1^1 quelconques. — Elles admettent une réalisation parfaite par une $\mathcal{L}_0$ ou une $\mathcal{L}_1^1$ réalisable d'une façon immédiate. Donnons à $\Sigma + \Sigma_1$, Σ_1 ayant une masse nulle, le mouvement parfait défini précédemment, c'est-à-dire le mouvement abstrait; puisque la réalisation est parfaite, il en résulte le mouvement abstrait de Σ, c'est-à-dire un mouvement indépendant de la réalisation choisie, de la forme et de la constitution du système réalisant, satisfaisant aux conditions imposées par la notion de mouvement parfait et coïncidant, quand la liaison possède une réalisation immédiate avec le mouvement parfait défini dans ce cas.

La notion mécanique de mouvement parfait nous conduit donc naturellement et sans contradiction au mouvement abstrait.

12. La notion du mouvement parfait pour une L_1 quelconque. — Une L_1 quelconque possède toujours des réalisations $\mathcal{L}_1^1$ à tendance parfaite. Donnons à $\Sigma + \Sigma_1$ (Σ_1 de masse nulle) le mouvement parfait que nous venons de définir, c'est-à-dire son mouvement abstrait et faisons tendre A vers A_0 dans la direction qui correspond au système de forces appliqué à Σ, il en résultera, à la limite, le mouvement abstrait de Σ, c'est-à-dire un mouvement indépendant de la réalisation à tendance parfaite choisie, de la forme et de la constitution du système réalisant, satisfaisant aux conditions imposées par la notion de mouvement parfait et coïncidant, quand la liaison L_1 est une L_1^1, avec le mouvement parfait déjà défini dans ce cas.

C'est ce mouvement qui sera le mouvement parfait pour la liaison L_1 et nous trouvons encore que c'est le mouvement abstrait.

13. La notion de mouvement parfait pour une L_2'. — Une telle liaison possède une réalisation parfaite par une L_1 pour laquelle nous avons la notion de mouvement parfait.

Le mouvement parfait de $\Sigma + \Sigma_1$ (mouvement abstrait) donnera, pour Σ, le mouvement abstrait qui, toujours par le même raisonnement, correspondra bien à la notion dynamique de mouvement parfait et que nous prendrons comme définition du mouvement parfait.

14. La notion de mouvement parfait pour une L_2^1 quelconque. — Elle

possède des réalisations L_1 à tendance parfaite et l'on a la notion de mouvement parfait pour une L_1. Si l'on donne à $\Sigma + \Sigma_1$ ce mouvement (mouvement abstrait) et qu'on fasse tendre A vers A_0 dans la direction qui correspond au système des forces appliquées à Σ, on trouve, à la limite, le mouvement abstrait de Σ sur lequel on fait les remarques, comme au paragraphe 12, et qui coïncide avec le mouvement parfait déjà défini quand L_2^1 est une L_2'. Nous le prendrons encore comme définition du mouvement parfait.

15. Théorème général. — Ce qui précède peut se résumer comme il suit :

La notion dynamique de mouvement parfait existe effectivement pour toute liaison de première classe.

Les mouvements parfaits d'un système soumis à une liaison de première classe sont ses mouvements abstraits.

16. Mouvements parfaits produits par des réalisations sans réduction. — Pour nous élever progressivement à la notion de mouvement parfait pour toutes les liaisons de première classe, nous avons chaque fois, soit d'une façon parfaite, soit à tendance parfaite, réalisé la liaison, soit par une liaison linéaire du même ordre, soit par une liaison non linéaire mais d'ordre moindre, c'est-à-dire employé une réalisation avec réduction.

Mais toute liaison possède des réalisations parfaites ou à tendance parfaite sans réduction.

Une L_0 possède des réalisations parfaites et à tendance parfaite par des $\mathcal{L}_1$ et par des $\mathcal{L}_2^1$.

Une L_1 possède de telles réalisations par des $\mathcal{L}_1$ ou des $\mathcal{L}_2^1$ et une L_2^1 en possède par des $\mathcal{L}_2^1$.

Considérons, d'une façon générale, une réalisation parfaite ou à tendance parfaite d'une L_n de première classe par une $\mathcal{L}_m$ de première classe sans qu'il y ait réduction. Puisque $\mathcal{L}_m$ est de première classe, nous avons la notion de mouvement parfait de $\Sigma + \Sigma_1$, nous savons que c'est le mouvement abstrait et que celui ci entraîne, soit directement, soit à la limite, le mouvement abstrait de Σ, c'est-à-dire, puisque L_n est de première classe, le mouvement parfait de Σ; donc :

Si l'on fait une réalisation parfaite ou à tendance parfaite d'une liaison de première classe par une liaison quelconque de première classe, le mouvement parfait du système total entraîne toujours le mouvement parfait du système proposé.

17. Mouvements concrets. — La notion de mouvement parfait, développée dans ce qui précède, repose sur l'idée que la notion physique de liaison est inséparable de l'idée de réalisation matérielle de cette liaison, que cette réalisation matérielle admet un état limite de perfection dans lequel les résistances passives sont nulles, et qu'enfin il existe des catégories très étendues de telles réalisations matérielles donnant toujours le même mouvement quelle que soit la forme et la constitution interne du système auxiliaire de masse nulle. Ce sont ces liaisons qui nous permettent de concevoir le mouvement en faisant abstraction de la réalisation elle-même.

Pour des liaisons de première classe, il existe des réalisations (non parfaites ou non à tendance parfaite) qui ne permettent pas cette abstraction; pour les liaisons de seconde classe, il n'existe aucune réalisation la permettant.

Quelle est alors la notion la plus parfaite de mouvement à laquelle nous pouvons parvenir?

Considérons une liaison absolument quelconque L_n, on sait, par l'introduction d'inconnues auxiliaires convenables, ramener le système L_n à être du premier ordre et linéaire, ce qui revient à dire qu'on peut toujours réaliser L_n par une $\mathcal{L}_1^1$ qu'on saura réaliser d'une façon soit directe, soit immédiate; finalement, par l'introduction d'un système convenable et suffisamment compliqué, nous réaliserons L_n par une $\mathcal{L}_1^1$ réalisée elle-même d'une façon immédiate.

Le mouvement idéal au point de vue physique sera le mouvement de $\Sigma + \Sigma_1$ soumis à $\mathcal{L}_1^1$ et n'éprouvant, de la part de cette liaison et du milieu, aucune résistance passive. Ce sera le mouvement parfait de $\Sigma + \Sigma_1$; mais comme la réalisation n'est pas parfaite, les équations de ce mouvement, données à la fin du paragraphe 7, ne se décomposeront pas. Le mouvement de Σ ne sera pas complètement déterminé par les valeurs initiales des q, q' et dépendra en outre de la fonction R_1, c'est-à-dire de la forme et de la constitution interne du système auxiliaire.

Généralisant cette conception, considérons une réalisation d'une liaison quelconque $\mathcal{L}_m$ de première classe. La notion la plus idéale que nous pourrons nous faire du mouvement s'obtiendra évidemment en donnant à $\Sigma + \Sigma_1$ le mouvement le plus parfait possible au point de vue physique, c'est-à-dire son mouvement parfait, puisque $\mathcal{L}_m$ est de première classe.

Pour rappeler que ces mouvements dépendent du système réalisant et ne peuvent pas se concevoir en faisant abstraction de la réalisation concrète de la liaison, nous les appellerons *mouvements concrets*.

Pour une liaison quelconque L_n, nous n'avons physiquement aucune notion directe de mouvement. Il faut la réaliser par une $\mathcal{L}_m$ pour laquelle cette notion existe indépendamment de toute idée de réalisation, sans quoi il faudrait faire une nouvelle réalisation, et ces deux réalisations superposées constitueraient une réalisation de L_n autre que celle par $\mathcal{L}_m$. La notion de mouvement pour L_n ne peut donc être fournie que par des réalisations au moyen de liaisons pour lesquelles existe la notion de mouvement parfait, c'est-à-dire des liaisons de première classe; donc :

Les mouvements les plus parfaits dont on peut avoir la notion mécanique, pour les systèmes soumis à des liaisons de seconde classe, sont les mouvements concrets obtenus en réalisant la liaison par des liaisons de première classe, et donnant au système réalisant le mouvement parfait. Ces mouvements concrets dépendent de la forme et de la constitution interne du système réalisant et, de plus, les conditions initiales propres du système proposé ne sont pas suffisantes pour les déterminer complètement et sans ambiguïté.

Les systèmes soumis à des liaisons de première classe possèdent des mouvements concrets, lesquels coïncident avec les mouvements parfaits ou tendent vers les mouvements parfaits, si la réalisation est parfaite ou est à tendance parfaite.

Les équations des mouvements concrets s'obtiennent par l'application du principe de M. Appell au système total.

18. Conclusion. — Faisons abstraction des résistances de milieu qui peuvent être considérées comme des forces données et ne considé-

rons comme véritables résistances que celles introduites par la liaison elle-même ou plus exactement par sa réalisation matérielle, c'est-à-dire les forces de frottement.

Nous avons donné la notion mécanique la plus générale de mouvement sans frottement, ce qui nous a conduit, pour toutes les liaisons, aux mouvements concrets et, pour les liaisons de première classe, aux mouvements parfaits.

Nous avons vu que les premiers étaient donnés par l'application du principe de M. Appell au système total et les derniers par l'application du même principe au système considéré.

Ce principe n'est donc pas un postulat analytique, c'est une conséquence rigoureuse de la notion générale de mouvement sans frottement. Si, de plus, nous remarquons (1) que ce principe donne précisément les équations que fournit le principe de Dalembert appliqué, pour former les termes à multiplicateurs, aux relations linéaires entre les q'' constituées par les équations E_2 de la liaison de première classe, nous arrivons finalement à cette conclusion :

Le principe de Dalembert appliqué aux équations du second ordre d'une liaison quelconque de première classe est le principe absolument général de la dynamique des systèmes sans frottement et à un nombre fini de paramètres.

19. Variations concrètes et variations parfaites dans la théorie des percussions. — Nous désignerons par « variation » d'un système soumis à des percussions données, l'ensemble des $\Delta q'$ qui résultent de ces percussions.

La notion de *variation parfaite*, analogue comme conception à celle de mouvement parfait, implique l'idée des $\Delta q'$ déterminés complètement et sans ambiguïté par les valeurs des q et des q', donc déterminés par des équations de premier degré, de sorte que les équations de liaisons doivent donner entre les $\Delta q'$ des relations linéaires. Cette notion ne peut donc pas exister pour les L_1 non linéaires.

La notion de non-frottement conduit immédiatement à la notion de

(1) Delassus, *Les diverses formes du principe de Dalembert et les équations générales du mouvement des systèmes soumis à des liaisons quelconques* (*C. R. Acad. des Sc.*, 20 janvier 1913).

variation parfaite pour une L_0 ou L_1^1 réalisée immédiatement et de là en résulte la même notion pour une liaison L_0 ou L_1^1 quelconque puisqu'elle possède toujours une réalisation parfaite et directe par une $\mathfrak{L}_0$ ou une $\mathfrak{L}_1^1$.

En effet, dans le cas de la réalisation immédiate, on est conduit au principe analogue à celui de Dalembert et à des équations analogues à celles de Lagrange exprimant que, si l'on forme la force vive $2T$ en y remplaçant les q' par les $\Delta q'$, puis le travail des percussions

$$\Sigma Q\, \delta q,$$

où l'on remplace les δq par les $\Delta q'$ et qu'enfin on forme la fonction

$$R = 2T - \Sigma Q\, \delta q$$

qui est ainsi une forme quadratique des Δq, cette fonction R est minima pour les valeurs des $\Delta q'$ résultant des percussions appliquées.

Prenons le cas d'une L_0 ou L_1^1 quelconque, nous aurons une réalisation $\mathfrak{L}_0$ ou $\mathfrak{L}_1^1$ immédiate et parfaite, donc sans équations intermédiaires d'ordre *un* et les équations du minimum de R se décomposeront comme dans le cas du mouvement, ce qui permettra d'en tirer les mêmes conséquences.

Au point de vue des percussions, les liaisons se divisent donc en deux classes, la première étant composée des L_0 et des L_1^1 et la seconde de toutes les autres.

Pour toute liaison de première classe, la notion de variation parfaite existe effectivement.

Pour une liaison de seconde classe, il faudra passer par l'intermédiaire d'une réalisation au moyen d'une liaison de première classe et l'on n'aura plus que des *variations concrètes* dépendant de la forme et de la constitution interne du système réalisant.

Ainsi *la théorie des percussions donne lieu à une théorie analogue à celle des mouvements mais beaucoup plus simple.*

La première classe s'arrête aux L_1^1 *au lieu d'aller jusqu'aux* L_2^1.

Il n'y a pas lieu de faire intervenir les réalisations à tendance parfaite.

Enfin toute cette théorie peut être résumée en un principe général analogue à celui de M. Appell, et encore relatif au minimum d'une certaine forme quadratique.