ÉMILE PICARD

Sur une classe de transcendantes généralisant les fonctions elliptiques et les fonctions abéliennes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 30 (1913), p. 247-253
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1913_3_30__247_0>

SUR

UNE CLASSE DE TRANSCENDANTES

GÉNÉRALISANT

LES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET LES FONCTIONS ABÉLIENNES,

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. Dans deux Mémoires insérés dans les *Acta mathematica* (t. XVIII et XXIII), j'ai indiqué une classe étendue de transcendantes nouvelles satisfaisant à certaines équations fonctionnelles. Ayant repris cette question dans mon cours en avril 1911, en donnant les démonstrations dans tous leurs détails, je voudrais faire quelques remarques générales à ce sujet.

Soit donnée une transformation birationnelle

$$(\mathrm{T})\qquad \left\{\begin{array}{l} X_1 = R_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n = R_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{array}\right.$$

admettant le point double $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. On pourra, en général, écrire dans le voisinage de ce point

$$\begin{array}{l} X_1 = a_1 x_1 + Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n = a_n x_n + Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{array}$$

les termes Q étant des développements de Mac-Laurin sans termes du premier degré.

Les transcendantes uniformes dont il s'agit, $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$, admettent une première période, soit $2\pi i$; relativement au changement de z en $z+\omega$ (ω étant une quantité que nous pouvons supposer réelle et positive), on a d'autre part

$$\begin{gathered} f_1(z+\omega) = \mathrm{R}_1[f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(z+\omega) = \mathrm{R}_n[f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)]. \end{gathered}$$

J'ai démontré l'existence de telles fonctions, ayant partout à distance finie le caractère de fonctions rationnelles, en procédant par approximations successives. Mon point de départ était le suivant. Soit tout d'abord, dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$, une bande parallèle à l'axe Oy, limitée à gauche par l'axe des y et à droite par une parallèle AB à Oy située à une distance ω de l'origine; on considère de plus une bande de largeur très petite (fixe d'ailleurs), comprenant Oy à son intérieur, limitée à gauche par la parallèle i' à Oy et à droite par la parallèle i au même axe. Soit maintenant l'équation fonctionnelle

$$f(z+\omega) - af(z) = \mathrm{P}(z),$$

$\mathrm{P}(z)$ étant une fonction méromorphe dans tout le plan, admettant la période $2\pi i$, et holomorphe dans la bande ii'. On démontre qu'on peut satisfaire à cette équation par une fonction $f(z)$, de période $2\pi i$, méromorphe dans tout le plan, et holomorphe dans la première bande (Oy, AB) et un peu au delà à droite et à gauche.

Ceci démontré, partons de fonctions doublement périodiques de seconde espèce

$$f_1^0(z), \quad f_2^0(z), \quad \ldots, \quad f_n^0(z),$$

aux multiplicateurs respectifs $(1, a_1), (1, a_2), \ldots, (1, a_n)$, et envisageons les approximations successives correspondant aux équations

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} f_1^{(p)}(z+\omega) = a_1 f_1^{(p)}(z) + \mathrm{Q}_1[f_1^{(p-1)}(z), f_2^{(p-1)}(z), \ldots, f_n^{(p-1)}(z)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n^{(p)}(z+\omega) = a_n f_n^{(p)}(z) + \mathrm{Q}_n[f_1^{(p-1)}(z), f_2^{(p-1)}(z), \ldots, f_n^{(p-1)}(z)]. \end{array} \right.$$

Bien entendu, les séries Q peuvent cesser d'être convergentes, mais, d'après leur provenance, leur signification n'en est pas moins déterminée.

On suppose que les fonctions initiales $f_1^0(z), \ldots, f_n^0(z)$ n'aient pas de pôles dans la bande ii'. De plus, toutes les fonctions

$$(2) \qquad f_1^{(p)}(z), \quad f_2^{(p)}(z), \quad \ldots, \quad f_n^{(p)}(z)$$

deviennent, quel que soit p, infinies respectivement dans la bande (Oy, AB), comme

$$(3) \qquad f_1^0(z), \quad f_2^0(z), \quad \ldots, \quad f_n^0(z).$$

Ces conditions, jointes à la périodicité $2\pi i$, déterminent successivement, dans tout le plan, les termes de la suite (2), en s'appuyant sur le lemme préliminaire énoncé ci-dessus.

On démontre enfin que, *si les modules des termes de la suite* (3) *sont assez petits dans la bande* ii', *les termes de la suite* (2) *ont des limites parfaitement déterminées pour* $p=\infty$. Ce sont les transcendantes cherchées.

2. On pourrait, pour arriver au même résultat, procéder en faisant d'autres approximations successives. Par exemple, comme je l'avais fait dans mes premières recherches sur ce sujet, remplaçons x_1, $x_2, \ldots, x_n$ par $\mu x_1, \mu x_2, \ldots, \mu x_n$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$, par $\mu X_1, \mu X_2, \ldots, \mu X_n$ (μ étant une constante) dans la transformation T du début. Nous pourrons, en prenant la transformation sous la seconde forme, écrire

$$(4) \qquad \begin{cases} X_1 = a_1 x_1 + P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n = a_n x_n + P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, \mu). \end{cases}$$

On peut alors chercher à satisfaire aux équations fonctionnelles qui correspondent à (4), en prenant pour $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ des séries ordonnées suivant les puissances de μ, soit

$$(5) \qquad \begin{cases} f_1(z) = f_1^0(z) + \mu f_1^{(1)}(z) + \ldots + \mu^p f_1^{(p)}(z) + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(z) = f_n^0(z) + \mu f_n^{(1)}(z) + \ldots + \mu^p f_n^{(p)}(z) + \ldots. \end{cases}$$

On prend pour $f_1^0(z), \ldots, f_n^0(z)$ des fonctions arbitraires doublement périodiques de seconde espèce aux multiplicateurs $(1, a_1), \ldots,$

$(1, a_n)$. Quant à

$$f_1^{(p)}(z), \quad \ldots, \quad f_n^{(p)}(z) \qquad (p \geqq 1), \tag{6}$$

elles sont *holomorphes* dans la bande (Oy, AB).

Dans ces conditions, tous les coefficients des puissances de μ sont déterminés dans les développements (5), et l'on peut établir que, *si le module de μ est suffisamment petit*, les séries convergent et donnent, dans la première bande, les fonctions cherchées. L'extension se fait ensuite dans tout le plan au moyen de l'équation fonctionnelle elle-même.

3. Si l'on n'assujettissait pas les fonctions de la suite (6) à être holomorphes dans la première bande (Oy, AB), on pourrait obtenir d'autres développements analogues à (5). Reprenons les formules du paragraphe précédent en nous bornant, pour simplifier l'écriture, au cas de deux équations. Soit

$$\begin{aligned} X &= R(x, y), \\ Y &= S(x, y) \end{aligned}$$

la transformation birationnelle; en remplaçant x et y par μx et μy, puis X et Y par μX et μY, on obtient

$$\begin{aligned} X &= ax + P(x, y, \mu), \\ Y &= bx + Q(x, y, \mu). \end{aligned}$$

En partant des développements

$$\begin{aligned} f(z) &= f_0(z) + \mu f_1(z) + \mu^2 f_2(z) + \ldots, \\ \varphi(z) &= \varphi_0(z) + \mu \varphi_1(z) + \mu^2 \varphi_2(z) + \ldots, \end{aligned}$$

et substituant, il vient

$$\begin{aligned} f_0(z + \omega) &= a f_0(z), \\ \varphi_0(z + \omega) &= b \varphi_0(z), \end{aligned}$$

et, d'une manière générale,

$$\left\{ \begin{aligned} f_p(z + \omega) &= a f_p(z) + P_p(f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}) \\ \varphi_p(z + \omega) &= b \varphi_p(z) + Q_p(f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}) \end{aligned} \right. \qquad (p \geqq 1), \tag{7}$$

les P_p et Q_p étant des polynomes. Au lieu de procéder, comme au paragraphe précédent, pour obtenir les f_p et φ_p, c'est-à-dire les supposer holomorphes ($p \geqq 1$) dans la première bande (Oy, AB), on peut déterminer f_p et φ_p, en prenant pour elles des polynomes en

$$f_0, \quad \varphi_0, \quad \ldots, \quad f_{p-1}, \quad \varphi_{p-1},$$

qui sont complètement déterminés par les équations (7). On obtient alors pour $f(z)$ et $\varphi(z)$ des développements conduisant à des expressions définies pour toute valeur de μ, mais les fonctions uniformes $f(z)$ et $\varphi(z)$ ainsi obtenues ne sont pas méromorphes dans tout le plan de la variable z. Elles admettent, *comme points singuliers essentiels*, les pôles de f_0 et φ_0.

On peut d'ailleurs arriver par une autre voie aux fonctions précédentes. Supposons $|a| > 1$, $|b| > 1$, et envisageons les équations fonctionnelles

$$\mathrm{F}(au, bv) = \mathrm{R}[\mathrm{F}(u, v), \Phi(u, v)],$$
$$\Phi(au, bv) = \mathrm{S}[\mathrm{F}(u, v), \Phi(u, v)].$$

Comme je l'ai montré [1], elles définissent des fonctions uniformes $\mathrm{F}(u, v)$ et $\Phi(u, v)$ de u et v dans les plans des variables complexes u et v, holomorphes autour de $u = v = 0$, et ayant partout à distance finie le caractère de fonctions rationnelles. On voit alors qu'en posant

$$f(z) = \mathrm{F}[f_0(z), \varphi_0(z)], \qquad \varphi(z) = \Phi[f_0(z), \varphi_0(z)],$$

on obtient des fonctions uniformes de z, satisfaisant à nos équations fonctionnelles primitives; elles ont *comme points singuliers essentiels* les pôles de $f_0(z)$ et de $\varphi_0(z)$.

4. J'ai essayé autrefois d'étendre les recherches ci-dessus, de manière à obtenir des fonctions de plusieurs variables, généralisant les fonctions abéliennes comme les fonctions du paragraphe I généralisent les fonctions elliptiques. Mais des difficultés nouvelles se présentent et je n'ai pas abouti. Il ne sera peut-être pas cependant sans intérêt d'indiquer ces difficultés en se bornant d'ailleurs à un cas très parti-

---

[1] Voir *Comptes rendus*, 4 juillet 1904, et aussi la Note I dans le Tome II de ma *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, p. 465. Le cas de $a = b$ avait été envisagé à un autre point de vue par M. Poincaré (*Journal de Mathématiques*, 1890).

culier. Soient ω et ω' deux constantes positives et soient

$$\begin{array}{ll} X = R(x, y), & X = R'(x, y), \\ Y = S(x, y), & Y = S'(x, y) \end{array}$$

deux substitutions birationnelles *permutables* du type considéré antérieurement avec le point double $x = y = 0$. Une question se pose naturellement. *Existe-t-il des fonctions uniformes $f(z, z')$ et $\varphi(z, z')$ des deux variables complexes z et z', ayant partout à distance finie le caractère de fonctions rationnelles, admettant par rapport à z et à z' les périodes $2\pi i$, et telles que :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(z+\omega, z') = R[f(z, z'), \varphi(z, z')], & f(z, z'+\omega') = R'[f(z, z'), \varphi(z, z')], \\ \varphi(z+\omega, z') = S[f(z, z'), \varphi(z, z')], & \varphi(z, z'+\omega') = S'[f(z, z'), \varphi(z, z')]. \end{array} \right. \tag{8}$$

En suivant la même marche qu'au paragraphe 3, on est conduit à former le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_0(z+\omega, z') = a f_0(z, z'), & f_p(z+\omega, z') = a f_p(z, z') + P_p[f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}], \\ \varphi_0(z+\omega, z') = b \varphi_0(z, z'), & \varphi_p(z+\omega, z') = b \varphi_p(z, z') + Q_p[f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}], \end{array} \right.$$

où $p \geqq 1$, et le système analogue pour la seconde substitution

$$\left\{ \begin{array}{ll} f_0(z, z'+\omega') = a' f_0(z, z'), & f_p(z, z'+\omega') = a' f_p(z, z') + P'_p[f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}], \\ \varphi_0(z, z'+\omega') = b' \varphi_0(z, z'), & \varphi_p(z, z'+\omega') = b' \varphi_p(z, z') + Q'_p[f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}]. \end{array} \right.$$

Considérons, dans les plans des deux variables complexes z et z', les premières bandes (Oy, AB) et (Oy', A'B') relatives respectivement à ω et ω'. Pour appliquer l'analyse qui a réussi plus haut, il faudrait pouvoir satisfaire aux équations (9) et (10) par des fonctions de périodes $2\pi i$, f_p et φ_p, holomorphes quand z et z' sont respectivement dans la première bande de leur plan (p étant supérieur ou égal à *un*). Or, *cela n'est pas possible en général* [1], et l'on ne peut arriver par cette voie à prouver l'existence, *qui reste douteuse*, de fonctions périodiques uniformes de deux variables ayant partout, à distance finie, le caractère de fonctions rationnelles, et satisfaisant aux équations fonctionnelles (8).

[1] Les deux transformations birationnelles et permutables envisagées sont générales, c'est-à-dire ne présentent aucune particularité en dehors des hypothèses explicitement faites.

On peut au contraire facilement, en opérant comme à la fin du paragraphe précédent et s'appuyant sur ce que les substitutions sont permutables, satisfaire aux équations (9) et (10) en prenant pour f_p et φ_p des polynomes en $f_0, \varphi_0, \ldots, f_{p-1}, \varphi_{p-1}$; il ne reste plus alors d'arbitraire que f_0 et φ_0, pour lesquelles on peut prendre des fonctions arbitraires quadruplement périodiques de seconde espèce. Mais on obtient ainsi des fonctions uniformes de z et de z' *ayant des singularités essentielles à distance finie*. Les transcendantes ainsi obtenues sont d'une nature tout autre que les fonctions abéliennes. Le doute exprimé plus haut subsiste donc, et une recherche intéressante reste à faire, qui mérite d'être tentée.

5. A un tout autre point de vue, l'étude précédente appellerait encore des recherches ultérieures. Nous avons démontré l'existence de fonctions satisfaisant aux relations fonctionnelles, en supposant que certaines fonctions initiales (§ 1) ou bien le nombre μ (§ 2) sont assez petits. Nous avons ainsi trouvé des solutions *voisines de zéro* dans une région convenablement choisie. *Nous avons raisonné par continuité*, comme on le fait dans tant de théories, passant d'une solution (ici la solution $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$) à une solution voisine. Le prolongement de ces fonctions (par rapport à μ, par exemple), resterait à étudier; dans les questions les plus diverses on rencontre toujours devant soi les mêmes difficultés.