ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CHARLES RIQUIER

Sur l'existence d'intégrales satisfaisant à des conditions données le long d'un contour

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 30 (1913), p. 9-52
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1913_3_30__9_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR

L'EXISTENCE D'INTÉGRALES

SATISFAISANT A DES CONDITIONS DONNÉES LE LONG D'UN CONTOUR.

PAR M. CHARLES RIQUIER.

Les conditions auxquelles il est fait allusion dans le titre ci-dessus sont relatives aux valeurs que doivent prendre, sur un contour donné, les intégrales d'un système différentiel partiel et quelques-unes de leurs dérivées calculées suivant la normale au contour, ces intégrales étant d'ailleurs simplement assujetties à être analytiques et régulières dans le voisinage du contour, c'est-à-dire dans l'intérieur d'une zone suffisamment mince située de part et d'autre.

Nous commençons par observer (première Partie) que, dans une recherche de ce genre, on peut tout aussi bien, au lieu de la famille des normales, faire intervenir n'importe quelle famille de courbes coupant sans contact le contour donné. Cette remarque, en même temps qu'elle fournit une compréhension plus large des questions à traiter, est aussi de nature à en faciliter l'exposé.

Nous considérons ensuite (deuxième Partie) un système partiel de g équations, impliquant un nombre égal de fonctions inconnues,

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_g,$$

des deux variables indépendantes réelles x, y, et présentant la forme linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées. En désignant par

$$k_1, \quad k_2, \quad \ldots, \quad k_g$$

ses ordres respectifs relativement aux g inconnues, et supprimant par la pensée, dans les équations proposées, tous les termes d'ordres respectivement inférieurs, nous construisons une forme algébrique de degré

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_g,$$

aux indéterminées X, Y, dont les coefficients, fonctions de x, y, se déduisent de ceux des termes conservés par un mécanisme très simple (*voir* n° 8). Cela étant, si, d'une part, on se donne un contour analytique régulier dans le voisinage duquel les coefficients du système soient des fonctions analytiques régulières; si, d'autre part, on suppose que, pour tout point (x, y) situé dans le voisinage de ce contour, le faisceau obtenu en égalant à zéro la forme algébrique aux indéterminées X, Y ne contienne que des droites imaginaires (l'entier $k_1 + k_2 + \ldots + k_g$ est alors nécessairement pair), le système proposé admet un et un seul groupe d'intégrales, u_1, u_2, $\ldots$, u_g, régulières dans le voisinage du contour, et telles qu'en adjoignant à u_1, u_2, $\ldots$, u_g respectivement leurs $k_1 - 1$, $k_2 - 1$, $\ldots$, $k_g - 1$ premières dérivées prises suivant la normale au contour, ces $k_1 + k_2 + \ldots + k_g$ fonctions se réduisent sur le contour à des fonctions analytiques données.

Dans le cas le plus simple, $g = 1$, on a l'énoncé suivant :

Soit

$$A_0 \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} + A_1 \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n-1}\, \partial y} + \ldots + A_{2n} \frac{\partial^{2n} u}{\partial y^{2n}} + \ldots = 0$$

une équation aux dérivées partielles d'ordre pair $2n$, linéaire par rapport à l'inconnue u et à ses dérivées : si, dans le voisinage d'un contour analytique régulier donné, les coefficients de l'équation sont des fonctions analytiques régulières de x, y, et que les droites du faisceau

$$A_0 X^{2n} + A_1 X^{2n-1} Y + \ldots + A_{2n} Y^{2n} = 0$$

soient toutes imaginaires, l'équation proposée admet une et une seule intégrale, régulière dans le voisinage du contour, et telle qu'en lui adjoignant ses $2n-1$ premières dérivées prises suivant la normale au contour, ces $2n$ fonctions se réduisent sur le contour à des fonctions analytiques données.

Ces résultats ont fait l'objet d'une Note communiquée à l'Académie des Sciences le 8 mai 1911. Dans l'exposé qui suit, nous avons, pour fixer les idées et simplifier l'écriture, supposé $g=3$.

PREMIÈRE PARTIE.

---

1. Désignant par r, θ deux variables indépendantes réelles, et par r_0, R deux valeurs particulières fixes de la première ($r_0 < \mathrm{R}$), considérons, dans l'espace $[[r, \theta]]$, la région $\mathfrak{R}_{r,\theta}$, évidemment normale [1], définie par la double inégalité

$$r_0 < r < \mathrm{R} \qquad (\theta \text{ quelconque});$$

relativement à deux axes rectangulaires $\mathrm{O}r$, $\mathrm{O}\theta$, tracés dans un plan, cette région se trouve graphiquement représentée par l'intérieur de la bande indéfinie comprise entre les deux droites

$$r = r_0, \qquad r = \mathrm{R},$$

parallèles à l'axe $\mathrm{O}\theta$.

Soient maintenant

$$\mathrm{E}(r, \theta), \quad \mathrm{F}(r, \theta)$$

deux fonctions jouissant dans cette région des diverses propriétés suivantes :

1° Elles sont olotropes [2] (et réelles);

2° Elles admettent par rapport à θ la période 2π, en sorte qu'on a,

---

[1] Pour la signification de ce terme et de quelques autres, *voir* notre Ouvrage intitulé : *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Chap. III.

[2] *Ibid.*

quels que soient r, θ,

$$\begin{aligned} E(r, \theta + 2\pi) &= E(r, \theta), \\ F(r, \theta + 2\pi) &= F(r, \theta); \end{aligned}$$

3° Leur déterminant différentiel

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial E}{\partial r} & \dfrac{\partial E}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial F}{\partial r} & \dfrac{\partial F}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

est constamment différent de zéro ;

4° Les relations numériques

$$\begin{aligned} E(r_1, \theta_1) &= E(r_2, \theta_2), \\ F(r_1, \theta_1) &= F(r_2, \theta_2) \end{aligned}$$

ne peuvent avoir lieu en même temps que si l'on a à la fois

$$r_1 - r_2 = 0, \qquad \theta_1 - \theta_2 = 2p\pi,$$

où p désigne quelque entier.

Ces hypothèses entraînent diverses conséquences que nous allons énumérer.

I. Soient x, y deux autres variables liées aux premières par les relations

$$\text{(1)} \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= E(r, \theta), \\ y &= F(r, \theta). \end{aligned} \right.$$

A la région $\mathfrak{R}_{r,\theta}$, ci-dessus spécifiée, correspond, dans l'espace $[[x, y]]$, une région, $\mathfrak{R}_{x,y}$, formée par l'ensemble des points qui, en vertu des formules (1), correspondent (avec répétition possible) aux divers points de $\mathfrak{R}_{r,\theta}$. Je dis que *la région* $\mathfrak{R}_{x,y}$ *est elle-même normale.*

Tout d'abord, cette région est continue.

Effectivement, l'un quelconque de ses points se trouve fourni par quelque point de la région $\mathfrak{R}_{r,\theta}$, dont on substitue les coordonnées dans les seconds membres de (1) pour calculer les valeurs correspondantes des premiers membres. Cela étant, soient

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2)$$

deux points arbitrairement choisis dans $\mathfrak{R}_{x,y}$, et

$$(r_1, \theta_1), \quad (r_2, \theta_2)$$

deux points de $\mathfrak{R}_{r,\theta}$ fournissant respectivement les précédents, comme il vient d'être dit. Joignons (r_1, θ_1) à (r_2, θ_2) par un chemin continu entièrement situé dans la région $\mathfrak{R}_{r,\theta}$: tout le long de ce chemin, $E(r, \theta)$ et $F(r, \theta)$ deviennent des fonctions continues d'une certaine variable réelle, et le point (x, y) défini par les formules (1) décrit dès lors un chemin continu dépendant de cette variable, entièrement situé dans la région $\mathfrak{R}_{x,y}$, et commençant à (x_1, y_1) pour finir à (x_2, y_2).

En second lieu, tout point de la région $\mathfrak{R}_{x,y}$ est le centre de quelque domaine [1] entièrement situé dans cette région.

Soit, en effet, (x_1, y_1) un point de la région $\mathfrak{R}_{x,y}$, fourni par quelque point, (r_1, θ_1), de la région $\mathfrak{R}_{r,\theta}$. Le système (1) admet alors la solution numérique

$$(x_1, y_1, r_1, \theta_1),$$

et il résulte d'ailleurs de nos hypothèses que le déterminant différentiel des deux fonctions $E(r, \theta)$, $F(r, \theta)$ est différent de zéro pour $r - r_1 = \theta - \theta_1 = 0$. A partir de cette solution numérique, le système (1) est donc résoluble par rapport à r, θ conformément au principe général des fonctions implicites, et, dans le voisinage des valeurs x_1, y_1, r_1, θ_1, il équivaut numériquement au système des formules de résolution : or, x et y étant arbitraires dans ce dernier système, et le point (r_1, θ_1) étant le centre de quelque domaine intérieur à $\mathfrak{R}_{r,\theta}$, on voit que la région $\mathfrak{R}_{x,y}$ comprendra tous les points (x, y) suffisamment rapprochés de (x_1, y_1).

Les diverses conditions requises pour la nature normale de la région $\mathfrak{R}_{x,y}$ se trouvent ainsi satisfaites.

II. Si, dans les formules (1), on donne à r une valeur fixe, on obtient

---

[1] *Voir* l'Ouvrage cité plus haut, n° 30.

une courbe pour laquelle les coordonnées x, y d'un point variable sont fonctions de θ; inversement, si l'on donne à θ une valeur fixe, on obtient une courbe où les coordonnées d'un point variable sont fonctions de r.

Cela étant :

1° La famille $r =$ const. se compose de courbes fermées dont chacune s'obtient tout entière en faisant varier θ de 0 à 2π, en vertu de la périodicité des fonctions $E(r, \theta)$, $F(r, \theta)$ relativement à la variable θ. Pour la même raison, la famille $\theta =$ const. s'obtient tout entière en égalant θ aux diverses valeurs de ce même intervalle.

2° Aucune courbe des deux familles ne présente de point singulier, et deux courbes, $r = r_1$, $\theta = \theta_1$, appartenant respectivement aux deux familles, ne peuvent être tangentes au point commun, M, fourni par (r_1, θ_1).

Effectivement, pour constater l'existence de la tangente en M à la courbe $r = r_1$ et avoir ses paramètres directeurs, il faut successivement introduire l'hypothèse numérique $r = r_1$ dans les seconds membres de (1), prendre les dérivées premières des résultats (par rapport à θ), et y faire $\theta = \theta_1$; ou, ce qui revient au même, former d'abord les deux dérivées

$$\frac{\partial E(r, \theta)}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial F(r, \theta)}{\partial \theta},$$

et y faire ensuite $r = r_1$, $\theta = \theta_1$. D'un autre côté, pour constater, en ce même point M, l'existence de la tangente à la courbe $\theta = \theta_1$ et avoir ses paramètres directeurs, il faut introduire l'hypothèse numérique $\theta = \theta_1$ dans les seconds membres de (1), prendre les dérivées premières des résultats (par rapport à r), et y faire $r = r_1$; ou, ce qui revient au même, former d'abord les deux dérivées

$$\frac{\partial E(r, \theta)}{\partial r}, \quad \frac{\partial F(r, \theta)}{\partial r},$$

et y faire ensuite $r = r_1$, $\theta = \theta_1$. En résumé donc, pour constater, au point M, l'existence des tangentes aux deux courbes considérées et avoir les paramètres directeurs de ces tangentes, il suffit de donner à r et θ les valeurs numériques r_1 et θ_1 dans les deux colonnes respectives du déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial E}{\partial r} & \frac{\partial E}{\partial \theta} \\ \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial \theta} \end{vmatrix};$$

ce dernier étant différent de zéro, le point M n'est un point singulier pour aucune des deux courbes, et ces dernières s'y coupent sans contact.

3° Si, dans une courbe $r = \text{const.}$, on fait varier θ de 0 à 2π ($0 \leqq \theta \leqq 2\pi$), on n'obtient chaque point (x, y) qu'une seule fois (à l'exception du point final, qui, en vertu de la périodicité supposée, coïncide avec le point initial). De même, si, dans une courbe $\theta = \text{const.}$, on fait varier r entre r_0 et $R (r_0 < r < R)$, on n'obtient chaque point (x, y) qu'une seule fois.

4° En supposant $r_1 - r_2$ différent de zéro, les deux courbes $r = r_1$, $r = r_2$ n'ont aucun point commun. Même chose pour les deux courbes $\theta = \theta_1$, $\theta = \theta_2$, si $\theta_1 - \theta_2$ n'est pas un multiple entier de 2π.

Dans ce qui suit, nous nommerons *couronne* la région (normale) de l'espace $\|x, y\|$ comprise entre deux courbes de la famille $r = \text{const.}$ (on doit faire abstraction des deux courbes frontières).

5° Si l'on considère une courbe déterminée de la famille $r = \text{const.}$, par exemple $r = r'$, on peut assigner une constante positive, α, indépendante du point choisi sur la courbe, et telle que le cercle de rayon α décrit de ce point comme centre soit tout entier intérieur à la région $\mathfrak{R}_{x,y}$.

Effectivement, tous les points de la courbe considérée s'obtiennent en introduisant l'hypothèse numérique $r = r'$ dans les seconds membres des formules (1), et faisant varier θ dans l'intervalle [limité et complet ([1])]

$$0 \leqq \theta \leqq 2\pi.$$

Puisque la courbe fait partie de la région $\mathfrak{R}_{x,y}$ et que cette dernière est normale (I), il existe, pour une valeur déterminée, θ_0, du paramètre θ, quelque constante positive, α_0, telle que le cercle de rayon α_0 décrit

([1]) *Voir* l'Ouvrage cité, Chap. I.

du point correspondant de la courbe comme centre soit tout entier intérieur à $\mathfrak{R}_{x,y}$. Pour une autre valeur, θ_1, du paramètre, il existe quelque constante positive analogue, α_1. Il est visible d'ailleurs que, si θ_1 est suffisamment voisin de θ_0, on peut choisir α_1 de manière que sa différence à α_0 soit moindre que toute quantité donnée. Il existe dès lors, en vertu de propositions générales relatives aux régions à la fois limitées et complètes, quelque constante positive, α, possédant dans toute l'étendue de l'intervalle la propriété requise.

6° Si l'on considère, comme ci-dessus (5°), une courbe déterminée, $r = r'$, de la famille $r = \text{const.}$, on peut, une constante positive, ε, étant donnée, assigner une constante positive, β, telle que, dans l'intérieur de la couronne comprise entre les deux courbes

$$r = r' - \beta, \qquad r = r' + \beta,$$

la distance d'un point quelconque à un point convenablement choisi de la courbe $r = r'$ tombe au-dessous de ε.

Désignant, en effet, par r_1, r_2 deux valeurs numériques telles que l'on ait

$$r_0 < r_1 < r' < r_2 < \mathrm{R},$$

considérons, dans la région $\mathfrak{R}_{r,\theta}$ de l'espace $[[r, \theta]]$, le fragment limité et complet défini par les relations

$$\left\{\begin{array}{l} r_1 \leqq r \leqq r_2, \\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi. \end{array}\right. \tag{2}$$

Les fonctions $\mathrm{E}(r, \theta)$, $\mathrm{F}(r, \theta)$ y étant continues, on peut assigner une constante positive, γ, telle que, deux points étant arbitrairement choisis dans le fragment sous la seule condition d'être à une distance mutuelle moindre que γ, la différence des valeurs correspondantes de $\mathrm{E}(r, \theta)$ présente un module moindre que $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, et de même la différence des valeurs correspondantes de $\mathrm{F}(r, \theta)$: les deux points correspondants de la région $\mathfrak{R}_{x,y}$ seront dès lors à une distance mutuelle moindre que ε. Cela étant, si, dans le fragment (2) de la région $\mathfrak{R}_{r,\theta}$, et de part et d'autre de la droite $r = r'$, on trace deux parallèles à cette droite qui en soient à une distance β égale ou inférieure à γ, tout point compris entre ces deux parallèles sera à une distance de quelque point de la droite moindre que γ, et la couronne correspondante de la région $\mathfrak{R}_{x,y}$ jouira bien, dès lors, de la propriété énoncée.

2. Désignant par r, ρ, θ trois paramètres arbitraires, considérons actuellement les deux systèmes de formules

$$\left\{\begin{array}{l} x = \mathrm{E}(r, \theta), \\ y = \mathrm{F}(r, \theta). \end{array}\right. \tag{3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \mathrm{H}(\rho, \theta), \\ y = \mathrm{K}(\rho, \theta), \end{array}\right. \tag{4}$$

dont les seconds membres sont supposés satisfaire aux conditions suivantes :

1° Dans la région $\mathfrak{R}_{r,\theta}$ de l'espace $\|r, \theta\|$ définie par la double inégalité

$$r_0 < r < \mathrm{R} \qquad (\theta \text{ quelconque}), \tag{5}$$

les fonctions $\mathrm{E}(r, \theta)$, $\mathrm{F}(r, \theta)$ jouissent des diverses propriétés spécifiées au début du numéro précédent, c'est-à-dire qu'elles sont olotropes, admettent par rapport à θ la période 2π, possèdent un déterminant différentiel constamment différent de zéro, et qu'enfin les relations numériques

$$\mathrm{E}(r_1, \theta_1) = \mathrm{E}(r_2, \theta_2),$$
$$\mathrm{F}(r_1, \theta_1) = \mathrm{F}(r_2, \theta_2),$$

lorsqu'on les suppose simultanément vérifiées, entraînent de toute nécessité

$$r_1 - r_2 = 0, \qquad \theta_1 - \theta_2 = 2p\pi.$$

où p désigne quelque entier.

2° Semblablement, dans la région $\mathfrak{R}_{\rho,\theta}$ de l'espace $\|\rho, \theta\|$ définie par la double inégalité

$$\rho_0 < \rho < \mathrm{P} \qquad (\theta \text{ quelconque}), \tag{6}$$

les fonctions $\mathrm{H}(\rho, \theta)$, $\mathrm{K}(\rho, \theta)$ sont olotropes, admettent par rapport à θ la période 2π, possèdent un déterminant différentiel constamment différent de zéro, et les relations numériques

$$H(\rho_1, \theta_1) = H(\rho_2, \theta_2),$$
$$K(\rho_1, \theta_1) = K(\rho_2, \theta_2),$$

lorsqu'on les suppose simultanément vérifiées, entraînent de toute nécessité

$$\rho_1 - \rho_2 = 0, \qquad \theta_1 - \theta_2 = 2p\pi.$$

3° Si l'on désigne par r', ρ' certaines valeurs numériques déterminées vérifiant respectivement les relations

$$r_0 < r' < R, \qquad \rho_0 < \rho' < P,$$

l'hypothèse numérique $r = r'$, introduite dans les seconds membres de (3), fournit les deux mêmes fonctions de θ que l'hypothèse numérique $\rho = \rho'$, introduite dans les seconds membres de (4), en sorte que les deux systèmes de formules représentent alors le même contour.

Désignons maintenant par $u(x, y)$ une fonction de x et de y qui, si l'on considère la région définie par (3) et (5), soit olotrope dans une couronne suffisamment mince renfermant le contour $r = r'$, et qui, si l'on considère la région définie par (4) et (6), le soit dans une couronne suffisamment mince renfermant le contour $\rho = \rho'$: comme, par hypothèse, les deux contours coïncident, il résulte de diverses remarques présentées plus haut (n° 1, II, 5° et 6°) que l'un quelconque de ces deux derniers faits est une conséquence de l'autre. Si l'on forme alors les deux fonctions composées

$$u[E(r, \theta), F(r, \theta)], \tag{7}$$
$$u[H(\rho, \theta), K(\rho, \theta)], \tag{8}$$

l'hypothèse numérique $r = r'$, introduite dans la fonction (7) et ses dérivées de tous ordres relatives à r, les réduit à des fonctions olotropes de θ admettant la période 2π; et la même chose a lieu pour la fonction (8) et ses dérivées de tous ordres relatives à ρ dans l'hypothèse numérique $\rho = \rho'$.

Cela étant, *pour que la fonction composée (7) et ses $n - 1$ premières dérivées relatives à r se réduisent, pour $r = r'$, à n fonctions olotropes* *données de* θ (*admettant la période* 2π),

(9) $$\upsilon(\theta),\quad \upsilon_1(\theta),\quad \upsilon_2(\theta),\quad \ldots,\quad \upsilon_{n-1}(\theta),$$

il faut et il suffit que la fonction composée (8) *et ses* $n-1$ *premières dérivées relatives à* ρ *se réduisent, pour* $\rho = \rho'$, *à* n *autres fonctions olotropes de* θ (*admettant la même période*),

(10) $$\upsilon(\theta),\quad \sigma_1(\theta),\quad \sigma_2(\theta),\quad \ldots,\quad \sigma_{n-1}(\theta).$$

Pour calculer ces dernières, (10), *quand on se donne les premières*, (9), *ou inversement, il suffit de connaître les fonctions* $\mathrm{E}(r, \theta)$, $\mathrm{F}(r, \theta)$, $\mathrm{H}(\rho, \theta)$, $\mathrm{K}(\rho, \theta)$, *exclusion faite de la composante* $u(x, y)$, *dont l'existence est simplement admise.*

I. Désignons par $x, y, \ldots$ des variables en nombre quelconque g; par $\theta, \ldots$ d'autres variables en nombre quelconque j; par

$$\lambda(\theta, \ldots),\quad \mu(\theta, \ldots),\quad \ldots,$$

g fonctions connues de $\theta, \ldots$ (elles sont en même nombre que les variables $x, y, \ldots$); par u une fonction non connue de $x, y, \ldots$; par

(11) $$\mathrm{U},\quad \mathrm{U}_x,\quad \mathrm{U}_y,\quad \ldots,\quad \mathrm{U}_{x^2},\quad \mathrm{U}_{xy},\quad \mathrm{U}_{y^2},\quad \ldots$$

les fonctions composées de $\theta, \ldots$ auxquelles se réduisent respectivement

$$u,\quad \frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \ldots,$$

quand on y fait à la fois

$$x = \lambda(\theta, \ldots),\qquad y = \mu(\theta, \ldots),\qquad \ldots.$$

Désignant ensuite par A, B, C, D, ..., E, F, G, ..., diverses fonctions connues de $\theta, \ldots$, considérons l'expression

(12) $$\mathrm{A} + \mathrm{BU} + \mathrm{CU}_x + \mathrm{DU}_y + \ldots + \mathrm{EU}_{x^2} + \mathrm{FU}_{xy} + \mathrm{GU}_{y^2} + \ldots,$$

linéaire par rapport à quelques-unes des quantités (11).

Cela étant, *une différentiation d'ordre quelconque par rapport au* *groupe des variables* θ, ..., *exécutée sur* (12), *donne une nouvelle expression linéaire, comme* (12), *par rapport au groupe des quantités* (11) : car une différentiation d'ordre 1, relative à θ par exemple, donne pour résultat l'expression

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial A}{\partial\theta}+\frac{\partial B}{\partial\theta}U+\frac{\partial C}{\partial\theta}U_x+\frac{\partial D}{\partial\theta}U_y+\dots\\
&\quad+\frac{\partial E}{\partial\theta}U_{x^2}+\frac{\partial F}{\partial\theta}U_{xy}+\frac{\partial G}{\partial\theta}U_{y^2}+\dots\\
&\quad+B\left(U_x\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}+U_y\frac{\partial\mu}{\partial\theta}+\dots\right)+C\left(U_{x^2}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}+U_{xy}\frac{\partial\mu}{\partial\theta}+\dots\right)\\
&\quad+D\left(U_{xy}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}+U_{y^2}\frac{\partial\mu}{\partial\theta}+\dots\right)+\dots\\
&\quad+E\left(U_{x^3}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}+U_{x^2y}\frac{\partial\mu}{\partial\theta}+\dots\right)+F\left(U_{x^2y}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}+U_{xy^2}\frac{\partial\mu}{\partial\theta}+\dots\right)\\
&\quad+G\left(U_{xy^2}\frac{\partial\lambda}{\partial\theta}+U_{y^3}\frac{\partial\mu}{\partial\theta}+\dots\right)+\dots,
\end{aligned}$$

de même forme que (12), et la même chose a lieu, dès lors, quel que soit l'ordre de la différentiation.

II. Étant donnés deux systèmes de relations (en nombre limité), linéaires par rapport à quelques-unes des quantités (11) avec des coefficients fonctions de θ, ..., nous dirons que le second est une *combinaison multiplicatoire* du premier, si, les seconds membres des deux systèmes ayant été réduits à zéro par la simple transposition de leurs termes dans les premiers membres, chacune des équations du second système peut s'obtenir en multipliant les diverses équations du premier par des facteurs convenablement choisis [fonctions de θ, ... et indépendants des quantités (11)], et ajoutant les produits membre à membre.

Si chacun des deux systèmes proposés est une combinaison multiplicatoire de l'autre, nous dirons que les deux systèmes sont en *corrélation multiplicatoire*.

Par exemple, si un système de m équations, linéaire par rapport à quelques-unes des quantités (11) [avec des coefficients fonctions de θ, ...], est résoluble par rapport à m d'entre elles conformément à l'algorithme de Cramer, il est en corrélation multiplicatoire avec le système constitué par les m formules de résolution : il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter au calcul élémentaire à l'aide duquel on passe du système donné aux formules de résolution, et inversement.

Étant donnés trois systèmes, si le dernier est une combinaison multiplicatoire du second, et le second une combinaison multiplicatoire du premier, le dernier est aussi, comme on le voit sans peine, une combinaison multiplicatoire du premier. On en déduit que si deux systèmes, comparés à un même troisième, sont avec lui en corrélation multiplicatoire, ils jouissent aussi, l'un par rapport à l'autre, de cette même propriété.

III. *Si deux systèmes*, S, T, *ayant la forme ci-dessus spécifiée, sont en corrélation multiplicatoire* (II), *les deux systèmes qui s'en déduisent respectivement par toutes les différentiations possibles des ordres* 0, 1, 2, ..., m (*relatives au groupe des variables* θ, ...) *jouissent de la même propriété.*

Notre proposition étant vraie d'elle-même pour $m = 0$ (puisque la conclusion est alors identique à l'hypothèse), il suffit de faire voir qu'en la supposant vraie pour une valeur quelconque m, elle l'est encore pour la valeur suivante $m + 1$.

A cet effet, nommons S′ et T′ les groupes respectivement déduits de S et T par toutes les différentiations possibles du premier ordre; S″ et T″ les groupes respectivement déduits de S et T par toutes les différentiations possibles du second ordre; et ainsi de suite. On suppose que chacun des deux systèmes

$$(S, S', \ldots, S^{(m)}), \tag{13}$$
$$(T, T', \ldots, T^{(m)}) \tag{14}$$

est une combinaison multiplicatoire de l'autre, et il s'agit de prouver que la même chose a lieu pour les deux systèmes

$$(S, S', \ldots, S^{(m)}, S^{(m+1)}), \tag{15}$$
$$(T, T', \ldots, T^{(m)}, T^{(m+1)}), \tag{16}$$

que le système (16), par exemple, est une combinaison multiplicatoire du système (15).

Effectivement, le système (16) se compose du système (14) et du groupe $T^{(m+1)}$. Or, toute équation du système (14), étant, d'après l'hypothèse, une combinaison multiplicatoire de (13), est, par là même, une combinaison multiplicatoire de (15).

Considérons maintenant une équation quelconque du groupe $T^{(m+1)}$, ou, ce qui revient au même, une équation quelconque déduite de $T^{(m)}$ par différentiation première. En désignant par

$$L_1 = 0, \qquad L_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad L_k = 0$$

les équations du système (13), et par

$$\chi_1, \quad \chi_2, \quad \ldots, \quad \chi_k$$

des multiplicateurs convenablement choisis [indépendants des quantités (11)], toute équation du groupe $T^{(m)}$ est de la forme

$$\chi_1 L_1 + \chi_2 L_2 + \ldots + \chi_k L_k = 0.$$

Si on la différentie par rapport à une variable quelconque, θ, du groupe $\theta, \ldots$, l'équation résultante peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial \theta} L_1 + \frac{\partial \chi_2}{\partial \theta} L_2 + \ldots + \frac{\partial \chi_k}{\partial \theta} L_k + \chi_1 \Omega_\theta(L_1) + \chi_2 \Omega_\theta(L_2) + \ldots + \chi_k \Omega_\theta(L_k) = 0,$$

où le symbole Ω_θ désigne une dérivation première relative à θ, effectuée suivant la règle des fonctions composées. Cela étant, il suffit d'observer que les équations

$$\begin{gathered} L_1 = 0, \qquad L_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad L_k = 0, \\ \Omega_\theta(L_1) = 0, \qquad \Omega_\theta(L_2) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Omega_\theta(L_k) = 0 \end{gathered}$$

appartiennent toutes au système (15).

IV. Supposons, pour fixer les idées et simplifier l'écriture, que la fonction (non connue) u dont il est question à l'alinéa I dépende des trois variables x, y, z, et soient

$$(17) \qquad x = \lambda(\theta, \ldots), \qquad y = \mu(\theta, \ldots), \qquad z = \nu(\theta, \ldots)$$

les trois fonctions connues de $\theta, \ldots$ qu'on substitue respectivement à ces variables. Considérant alors une expression linéaire par rapport aux quantités $U_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}$, nous nommerons *partie principale* de cette expression l'ensemble des termes où la somme $\alpha+\beta+\gamma$ est la plus forte : dans l'expression considérée, et notamment dans sa partie principale, il y a avantage, comme nous le ferons plus loin, à désigner symboliquement par la notation $X^\alpha Y^\beta Z^\gamma$ ce que nous avons désigné jusqu'ici par la notation $U_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}$, c'est-à-dire la fonction composée de $\theta, \ldots$ à laquelle se réduit $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} u}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$ lorsqu'on y effectue les substitutions (17). Par exemple, l'expression

$$\begin{aligned}&AU_{x^2}+A'U_{y^2}+A''U_{z^2}+2BU_{yz}+2B'U_{zx}+2B''U_{xy}\\&\quad+2CU_x+2C'U_y+2C''U_z+DU+E\end{aligned}$$

(où A, A′, A″, B, B′, B″, C, C′, C″, D, E désignent des fonctions connues de $\theta, \ldots$) sera représentée par le polynome

$$\begin{aligned}&AX^2+A'Y^2+A''Z^2+2BYZ+2B'ZX+2B''XY\\&\quad+2CX+2C'Y+2C''Z+DU+E,\end{aligned}$$

et sa partie principale

$$AU_{x^2}+A'U_{y^2}+A''U_{z^2}+2BU_{yz}+2B'U_{zx}+2B''U_{xy}$$

par la forme quadratique

$$AX^2+A'Y^2+A''Z^2+2BYZ+2B'ZX+2B''XY,$$

Il est bon de noter ici le point suivant.

Considérons une expression linéaire par rapport à quelques-unes des quantités (11), et effectuons sur elle une différentiation relative à une variable quelconque, θ, du groupe $\theta, \ldots$, ce qui nous donnera une deuxième expression de même nature (I) ; puis, dans l'une et l'autre expression, représentons symboliquement la partie principale par une forme algébrique en X, Y, Z. Cela étant, il est très facile de voir que *la deuxième forme algébrique se déduit de la première en la multipliant par la forme linéaire*

$$\lambda'_0 X+\mu'_0 Y+\nu'_0 Z.$$

où $\lambda'_0, \mu'_0, \nu'_0$ désignent les dérivées premières de λ, μ, ν par rapport à θ.

V. Considérons actuellement des formes linéaires en nombre égal à celui des indéterminées X, Y, Z,

$$(18)\qquad \begin{cases} a_1 X + b_1 Y + c_1 Z = X', \\ a_2 X + b_2 Y + c_2 Z = Y', \\ a_3 X + b_3 Y + c_3 Z = Z', \end{cases}$$

et construisons avec elles les diverses expressions $X'^{\alpha} Y'^{\beta} Z'^{\gamma}$, en nombre $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$, pour lesquelles la somme $\alpha + \beta + \gamma$ est égale à m : chacune de ces expressions est une forme algébrique de degré m en X, Y, Z, où les coefficients (fonction des a, des b et des c) sont en nombre $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$. Cela étant, *si le déterminant qui a pour éléments les coefficients des formes linéaires* (18) *est différent de zéro, celui qui a pour éléments les coefficients des formes d'ordre m ainsi construites jouit de la même propriété.*

Posons en effet, pour abréger, $\frac{(m+1)(m+2)}{2} = M$ et, dans les M expressions $X'^{\alpha} Y'^{\beta} Z'^{\gamma}$, considérons X', Y', Z' comme trois variables indépendantes : nous aurons ainsi M formes algébriques de degré m en X', Y', Z', se réduisant chacune à un terme unique dont le coefficient est 1, et il est clair qu'en multipliant ces M formes algébriques (respectivement identiques à M termes dissemblables ayant pour coefficient l'unité) par les constantes indéterminées $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_M$, et ajoutant les produits, la $(M+1)^{\text{ième}}$ forme algébrique qui en résulte ne peut être identiquement nulle en X', Y', Z' que si l'on a à la fois

$$\delta_1 = 0, \qquad \delta_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \delta_M = 0.$$

Dans les M + 1 formes de degré m que nous venons de considérer, remplaçons maintenant X', Y', Z' par les formes linéaires (18) : nous obtiendrons ainsi M + 1 formes algébriques de degré m en X, Y, Z, dont la dernière est la somme des M premières respectivement multipliées par $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_M$. Pour qu'elle soit identiquement nulle en X, Y, Z il faut et il suffit, puisque les coefficients des formes (18) sont les éléments d'un déterminant différent de zéro, qu'elle le soit en X', Y', Z' avant la substitution, et, par suite, que les multiplicateurs δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_M$ soient tous nuls : si donc, une fois la substitution opérée, on égale à zéro ses divers coefficients, le système ainsi obtenu, composé de M équations linéaires et homogènes par rapport aux M multiplicateurs, admet la solution unique

$$\delta_1 = 0, \qquad \delta_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \delta_M = 0,$$

et présente, par suite, un déterminant différent de zéro. Or, en permutant dans celui-ci les lignes avec les colonnes, on tombe précisément sur celui qui a pour éléments les coefficients des M premières formes.

VI. Revenons à notre énoncé général, et reportons-nous au début du présent numéro 2.

En développant $E(r, \theta)$, $F(r, \theta)$, seconds membres des formules (3), suivant les puissances de $r - r'$, il vient

$$x = \lambda(\theta) + \frac{r - r'}{1} e_1(\theta) + \frac{(r - r')^2}{1.2} e_2(\theta) + \ldots,$$

$$y = \mu(\theta) + \frac{r - r'}{1} f_1(\theta) + \frac{(r - r')^2}{1.2} f_2(\theta) + \ldots;$$

dans ces formules,

$$\begin{array}{llll} \lambda(\theta), & e_1(\theta), & e_2(\theta), & \ldots, \\ \mu(\theta), & f_1(\theta), & f_2(\theta), & \ldots \end{array}$$

sont les fonctions olotropes (connues) de θ, à la période 2π, auxquelles se réduisent, pour $r = r'$, les fonctions $E(r, \theta)$, $F(r, \theta)$, et leurs dérivées de tous ordres relatives à r; les premières d'entre ces fonctions satisfont, quel que soit θ, à l'inégalité

$$\begin{vmatrix} e_1(\theta) & \lambda'(\theta) \\ f_1(\theta) & \mu'(\theta) \end{vmatrix} \neq 0,$$

qui se déduit de l'inégalité supposée

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial E}{\partial r} & \dfrac{\partial E}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial F}{\partial r} & \dfrac{\partial F}{\partial \theta} \end{vmatrix} \neq 0$$

par l'introduction de l'hypothèse numérique $r = r'$.

Il importe de noter ce qui suit :

Désignons par

$$U, \quad U_x, \quad U_y, \quad U_{x^2}, \quad \ldots$$

ce que deviennent respectivement

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \ldots,$$

quand on y remplace les variables x, y respectivement par $\lambda(\theta)$, $\mu(\theta)$: si l'on prend la dérivée d'ordre m par rapport à r de la fonction composée

$$u[E(r, \theta), F(r, \theta)],$$

et qu'on fasse dans cette dérivée $r = r'$, on obtient visiblement une expression linéaire et homogène par rapport aux quantités

$$U_{x^\alpha y^\beta} \qquad (\alpha + \beta = 1, 2, \ldots, m),$$

avec des coefficients connus, fonctions périodiques de θ à la période 2π. Or, la partie principale (IV) de l'expression dont il s'agit est, comme nous allons le voir, susceptible d'une représentation symbolique fort simple.

Effectivement, dans la dérivée d'ordre m relative à r de la fonction composée $u(x, y)$, la partie linéaire et homogène par rapport aux diverses dérivées d'ordre m de la composante peut se représenter symboliquement par

$$\left(x'_r \frac{\partial}{\partial x} + y'_r \frac{\partial}{\partial y}\right)^m u,$$

où x'_r, y'_r désignent les dérivées premières relatives à r de

$$x = E(r, \theta), \quad y = F(r, \theta).$$

Or, dans l'hypothèse numérique $r = r'$,

$$x, \quad y, \quad x'_r, \quad y'_r$$

se réduisent respectivement à

$$\lambda(\theta), \quad \mu(\theta), \quad e_1(\theta), \quad f_1(\theta),$$

et il en résulte, pour la partie principale dont nous nous occupons, la représentation symbolique

$$(e_1 X + f_1 Y)^m.$$

Semblablement, si l'on développe $H(\rho, \theta)$, $K(\rho, \theta)$, seconds membres des formules (4), suivant les puissances de $\rho - \rho'$, il vient

$$x = \lambda(\theta) + \frac{\rho - \rho'}{1} h_1(\theta) + \frac{(\rho - \rho')^2}{1 \cdot 2} h_2(\theta) + \ldots,$$

$$y = \mu(\theta) + \frac{\rho - \rho'}{1} k_1(\theta) + \frac{(\rho - \rho')^2}{1 \cdot 2} k_2(\theta) + \ldots;$$

dans ces formules,

$$\begin{array}{llll} \lambda(\theta), & h_1(\theta), & h_2(\theta), & \ldots, \\ \mu(\theta), & k_1(\theta), & k_2(\theta), & \ldots \end{array}$$

sont les fonctions olotropes (connues) de θ, à la période 2π, auxquelles se réduisent, pour $\rho = \rho'$, les fonctions $H(\rho, \theta)$, $K(\rho, \theta)$, et leurs dérivées de tous ordres relatives à ρ. L'inégalité supposée

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial H}{\partial \rho} & \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \frac{\partial K}{\partial \rho} & \frac{\partial K}{\partial \theta} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

donne, pour $\rho = \rho'$,

$$\begin{vmatrix} h_1(\theta) & \lambda'(\theta) \\ k_1(\theta) & \mu'(\theta) \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Enfin, si l'on prend la dérivée d'ordre m relative à ρ de la fonction composée

$$u[H(\rho, \theta), K(\rho, \theta)],$$

et qu'on fasse dans cette dérivée $\rho = \rho'$, on obtient une expression linéaire et homogène par rapport aux diverses quantités

$$U_{x^\alpha y^\beta} \qquad (\alpha + \beta = 1, 2, \ldots, m),$$

dont la partie principale se trouve symboliquement représentée par

$$(h_1 X + k_1 Y)^m.$$

VII. Dans la démonstration de notre énoncé général, nous examinerons successivement les hypothèses $n = 1, 2, 3, 4$; le lecteur généralisera sans peine.

A. La proposition est vraie d'elle-même pour $n = 1$.

B. La proposition est vraie pour $n = 2$.

Pour que la fonction $u[\mathrm{E}(r, \theta), \mathrm{F}(r, \theta)]$ et sa dérivée première relative à r se réduisent, pour $r = r'$, à des fonctions données, υ, υ_1 (à la période 2π), de la variable θ, il faut et il suffit que l'on ait, quel que soit θ,

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{U} = \upsilon, \\ & e_1 \mathrm{X} + f_1 \mathrm{Y} = \upsilon_1. \end{aligned} \right.$$

Semblablement, les identités qui expriment que la fonction $u[\mathrm{H}(\rho, \theta), \mathrm{K}(\rho, \theta)]$ et sa dérivée première relative à ρ se réduisent, pour $\rho = \rho'$, à des fonctions données de la variable θ, ont pour premiers membres

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{U}, \\ & h_1 \mathrm{X} + k_1 \mathrm{Y}. \end{aligned} \right.$$

Or, la première des identités (19) entraîne comme conséquence nécessaire l'identité

$$(21) \qquad \lambda' \mathrm{X} + \mu' \mathrm{Y} = \upsilon',$$

et comme, en vertu de nos hypothèses, le déterminant

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} e_1 & f_1 \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, on peut, de la deuxième relation (19) et de la relation (21), tirer en fonctions connues de θ les quantités symboliquement représentés par X, Y : on connaît ainsi, par là même, la seconde des fonctions (20), que nous désignerons par σ_1. Si l'on considère alors les deux systèmes

$$(23) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{U} = \upsilon, \\ & \lambda' \mathrm{X} + \mu' \mathrm{Y} = \upsilon', \\ & e_1 \mathrm{X} + f_1 \mathrm{Y} = \upsilon_1, \end{aligned} \right.$$

$$(24) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{U} = \upsilon, \\ & \lambda' \mathrm{X} + \mu' \mathrm{Y} = \upsilon', \\ & h_1 \mathrm{X} + k_1 \mathrm{Y} = \sigma_1, \end{aligned} \right.$$

on voit qu'ils sont en corrélation multiplicatoire (II) : car, le déterminant

$$\begin{vmatrix} h_1 & k_1 \\ \lambda' & \mu' \end{vmatrix}$$

étant, comme (22), différent de zéro, les deux systèmes sont réduits (par rapport à U, X, Y), et il résulte d'ailleurs de la définition de σ_1 que le second est une conséquence numérique du premier; les formules de résolution sont donc de part et d'autre identiques, et les systèmes (23), (24), dont chacun est en corrélation multiplicatoire avec elles, jouissent vis-à-vis l'un de l'autre de cette même propriété.

Cela étant, pour que les identités (19) soient satisfaites, il faut et il suffit que les identités

$$(25) \qquad \begin{cases} U = \upsilon, \\ h_1 X + k_1 Y = \sigma_1 \end{cases}$$

le soient elles-mêmes : car les identités (19), supposées vérifiées, entraînent (23), par conséquent (24), et en particulier (25); inversement, les identités (25), supposées vérifiées, entraînent (24), par conséquent (23), et en particulier (19).

On voit en même temps que la connaissance des fonctions υ, υ_1 entraîne celle des fonctions υ, σ_1, et réciproquement, sans qu'il soit besoin de connaître $u(x, y)$.

C. La proposition est vraie pour $n = 3$.

Pour que la fonction $u[E(r, \theta), F(r, \theta)]$ et ses dérivées première et seconde relatives à r se réduisent, pour $r = r'$, à des fonctions données, υ, υ_1, υ_2 (à la période 2π), de la variable θ, il faut et il suffit que l'on ait, quel que soit θ (VI),

$$(26) \qquad \begin{cases} U = \upsilon, \\ e_1 X + f_1 Y = \upsilon_1, \\ (e_1 X + f_1 Y)^2 + \ldots = \upsilon_2. \end{cases}$$

Semblablement, les identités qui expriment que la fonction $u[H(\rho, \theta), K(\rho, \theta)]$ et ses dérivées première et seconde relatives à ρ se réduisent, pour $\rho = \rho'$, à des fonctions données de la variable θ, ont pour premiers membres

$$(27)\qquad \begin{cases} U, \\ h_1 X + k_1 Y, \\ (h_1 X + k_1 Y)^2 + \ldots. \end{cases}$$

Or (IV), la première identité (26) entraîne

$$(28)\qquad \lambda' X + \mu' Y = \upsilon',$$

$$(29)\qquad (\lambda' X + \mu' Y)^2 + \ldots = \upsilon'',$$

et la deuxième entraîne

$$(30)\qquad (e_1 X + f_1 Y)(\lambda' X + \mu' Y) + \ldots = \upsilon'_1.$$

D'autre part, le déterminant des formes linéaires

$$e_1 X + f_1 Y,$$
$$\lambda' X + \mu' Y$$

étant différent de zéro, celui des formes quadratiques

$$(e_1 X + f_1 Y)^2,$$
$$(e_1 X + f_1 Y)(\lambda' X + \mu' Y),$$
$$(\lambda' X + \mu' Y)^2$$

jouit de la même propriété (V) : on peut donc, après avoir tiré de la deuxième relation (26) et de (28), en fonctions connues de θ, les quantités symboliquement représentées par X, Y, tirer semblablement de la troisième relation (26), de (29) et de (30) les quantités symboliquement représentées par X^2, XY, Y^2. Et l'on connaît ainsi, par là même, les deux dernières des fonctions (27), que nous représenterons respectivement par σ_1 et σ_2.

Si l'on considère alors les deux systèmes

$$(31)\qquad \begin{cases} U = \upsilon, \\ \lambda' X + \mu' Y = \upsilon', \\ e_1 X + f_1 Y = \upsilon_1, \\ (\lambda' X + \mu' Y)^2 + \ldots = \upsilon'', \\ (e_1 X + f_1 Y)(\lambda' X + \mu' Y) + \ldots = \upsilon'_1, \\ (e_1 X + f_1 Y)^2 + \ldots = \upsilon_2 \end{cases}$$

et

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l} U = \upsilon, \\ \lambda' X + \mu' Y = \upsilon', \\ h_1 X + k_1 Y = \sigma_1, \\ (\lambda' X + \mu' Y)^2 + \ldots = \upsilon'', \\ (h_1 X + k_1 Y)(\lambda' X + \mu' Y) + \ldots = \sigma'_1, \\ (h_1 X + k_1 Y)^2 + \ldots = \sigma_2, \end{array}\right.$$

on voit aisément qu'ils sont en corrélation multiplicatoire. Effectivement, les systèmes (23) et (24) jouissant, comme nous l'avons établi, de cette propriété, il en sera de même (III) de ceux qu'on en déduit respectivement par les différentiations des ordres 0, 1, c'est-à-dire des systèmes respectivement formés par les cinq premières équations (31) et par les cinq premières équations (32). D'autre part, il résulte de la définition de σ_2 que la dernière équation (32) est une conséquence du système (31). Enfin, le déterminant des formes linéaires

$$\begin{array}{l} h_1 X + k_1 Y, \\ \lambda' X + \mu' Y \end{array}$$

étant différent de zéro, et par suite aussi celui des formes quadratiques

$$\begin{array}{l} (h_1 X + k_1 Y)^2, \\ (h_1 X + k_1 Y)(\lambda' X + \mu' Y), \\ (\lambda' X + \mu' Y)^2, \end{array}$$

le système (32) possède, comme (31), la propriété d'être réduit (par rapport aux quantités U, X, Y, X^2, XY, Y^2). Puisque (32) est une conséquence de (31), les formules de résolution sont donc de part et d'autre identiques, et les deux systèmes, dont chacun se trouve en corrélation multiplicatoire avec elles, jouissent vis-à-vis l'un de l'autre de cette même propriété.

Cela étant, pour que les identités (26) soient satisfaites, il faut et il suffit que les identités

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{l} U = \upsilon, \\ h_1 X + k_1 Y = \sigma_1, \\ (h_1 X + k_1 Y)^2 + \ldots = \sigma_2 \end{array}\right.$$

le soient elles-mêmes : car les identités (26), supposées vérifiées, entraînent (31), par conséquent (32), et en particulier (33); inversement, les identités (33), supposées vérifiées, entraînent (32), par conséquent (31), et en particulier (26).

On voit en même temps que la connaissance des fonctions $\upsilon, \upsilon_1, \upsilon_2$ entraîne celle des fonctions $\upsilon, \sigma_1, \sigma_2$, et réciproquement, sans qu'il soit besoin de connaître $u(x, y)$.

D. La proposition est vraie pour $n = 4$.

Pour que la fonction $u[E(r, \theta), F(r, \theta)]$ et ses dérivées première, seconde et troisième relatives à r se réduisent, pour $r = r'$, à des fonctions données, $\upsilon, \upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$ (à la période 2π), de la variable θ, il faut et il suffit que l'on ait, quel que soit θ,

$$(34) \qquad \left\{ \begin{array}{l} U = \upsilon, \\ e_1 X + f_1 Y) = \upsilon_1, \\ (e_1 X + f_1 Y)^2 + \ldots = \upsilon_2, \\ (e_1 X + f_1 Y)^3 + \ldots = \upsilon_3. \end{array} \right.$$

Semblablement, les identités qui expriment que la fonction $u[H(\rho, \theta), K(\rho, \theta)]$ et ses dérivées première, seconde et troisième relatives à ρ se réduisent, pour $\rho = \rho'$, à des fonctions données de la variable θ, ont pour premiers membres

$$(35) \qquad \left\{ \begin{array}{l} U, \\ h_1 X + k_1 Y, \\ (h_1 X + k_1 Y)^2 + \ldots \\ (h_1 X + k_1 Y)^3 + \ldots. \end{array} \right.$$

Or, la première identité (34) entraîne

$$(36) \qquad \lambda' X + \mu' Y = \upsilon',$$

$$(37) \qquad (\lambda' X + \mu' Y)^2 + \ldots = \upsilon'',$$

$$(38) \qquad (\lambda' X + \mu' Y)^3 + \ldots = \upsilon''';$$

la deuxième entraîne

$$(39) \qquad (e_1 X + f_1 Y)(\lambda' X + \mu' Y) + \ldots = \upsilon'_1,$$

$$(40) \qquad (e_1 X + f_1 Y)(\lambda' X + \mu' Y)^2 + \ldots = \upsilon''_1;$$

et la troisième entraîne

$$(41) \qquad (e_1 X + f_1 Y)^2(\lambda' X + \mu' Y) + \ldots = \upsilon'_2.$$

D'autre part, le déterminant des formes linéaires

$$e_1 X + f_1 Y,$$
$$\lambda' X + \mu' Y$$

étant différent de zéro, celui des formes quadratiques

$$(e_1 X + f_1 Y)^2,$$
$$(e_1 X + f_1 Y)(\lambda' X + \mu' Y),$$
$$(\lambda' X + \mu' Y)^2$$

et celui des formes cubiques

$$(e_1 X + f_1 Y)^3,$$
$$(e_1 X + f_1 Y)^2(\lambda' X + \mu' Y),$$
$$(e_1 X + f_1 Y)(\lambda' X + \mu' Y)^2,$$
$$(\lambda' X + \mu' Y)^3$$

jouissent de la même propriété : on peut donc, après avoir tiré de la deuxième équation (34) et de (36), en fonctions connues de θ, les quantités symboliquement représentées par X, Y, tirer semblablement de la troisième équation (34), de (37) et de (39) les quantités symboliquement représentées par X^2, XY, Y^2, puis de la quatrième équation (34), de (38), de (40) et de (41) les quantités symboliquement représentées par X^3, X^2Y, XY^2, Y^3. Et l'on connaît ainsi, par là même, les trois dernières des fonctions (35), que nous représenterons respectivement par σ_1, σ_2, σ_3.

Si l'on considère alors les deux systèmes

$$(42)\quad \begin{cases} U = \upsilon, \\ \lambda' X + \mu' Y = \upsilon', \\ e_1 X + f_1 Y = \upsilon_1, \\ (\lambda' X + \mu' Y)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \upsilon'', \\ (e_1 X + f_1 Y)(\lambda' X + \mu' Y) + \ldots = \upsilon'_1, \\ (e_1 X + f_1 Y)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \upsilon_2, \\ (\lambda' X + \mu' Y)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \upsilon''', \\ (e_1 X + f_1 Y)(\lambda' X + \mu' Y)^2 + \ldots = \upsilon''_1, \\ (e_1 X + f_1 Y)^2(\lambda' X + \mu' Y) + \ldots = \upsilon'_2, \\ (e_1 X + f_1 Y)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \upsilon_3 \end{cases}$$

et

$$(43)\quad \left\{\begin{array}{l}
U = \upsilon, \\
\lambda' X + \mu' Y = \upsilon', \\
h_1 X + k_1 Y = \sigma_1, \\
(\lambda' X + \mu' Y)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \upsilon'', \\
(h_1 X + k_1 Y)\ (\lambda' X + \mu' Y) + \ldots = \sigma'_1, \\
(h_1 X + k_1 Y)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \sigma_2, \\
(\lambda' X + \mu' Y)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \upsilon''', \\
(h_1 X + k_1 Y)\ (\lambda' X + \mu' Y)^2 + \ldots = \sigma''_1, \\
(h_1 X + k_1 Y)^2 (\lambda' X + \mu' Y) + \ldots = \sigma'_2, \\
(h_1 X + k_1 Y)^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \sigma_3,
\end{array}\right.$$

on voit aisément qu'ils sont en corrélation multiplicatoire. Effectivement, les systèmes (31) et (32) jouissant, comme nous l'avons établi, de cette propriété, il en sera de même de ceux qu'on en déduit respectivement par les différentiations d'ordres 0, 1, c'est-à-dire des systèmes respectivement formés par les neuf premières équations (42) et par les neuf premières équations (43). D'autre part, il résulte de la définition de σ_3 que la dernière équation (43) est une conséquence du système (42). Enfin, le déterminant des formes linéaires

$$\begin{array}{l} h_1 X + k_1 Y, \\ \lambda' X + \mu' Y \end{array}$$

étant différent de zéro, et par suite aussi celui des formes quadratiques

$$\begin{array}{l} (h_1 X + k_1 Y)^2, \\ (h_1 X + k_1 Y)(\lambda' X + \mu' Y), \\ (\lambda' X + \mu' Y)^2, \end{array}$$

et celui des formes cubiques

$$\begin{array}{l} (h_1 X + k_1 Y)^3, \\ (h_1 X + k_1 Y)^2 (\lambda' X + \mu' Y), \\ (h_1 X + k_1 Y)\ (\lambda' X + \mu' Y)^2, \\ (\lambda' X + \mu' Y)^3, \end{array}$$

le système (43) possède, comme (42), la propriété d'être réduit (par rapport aux quantités U, X, Y, X^2, XY, Y^2, X^3, X^2Y, XY^2, Y^3). Puisque (43) est une conséquence de (42), les formules de résolution sont donc de part et d'autre identiques, et les deux systèmes, dont chacun se trouve en corrélation multiplicatoire avec elles, jouissent vis-à-vis l'un de l'autre de cette même propriété.

Cela étant, pour que les identités (34) soient satisfaites, il faut et il suffit que les identités

$$(44)\qquad \left\{\begin{array}{l} U = \upsilon, \\ h_1 X + k_1 Y = \sigma_1, \\ (h_1 X + k_1 Y)^2 + \ldots = \sigma_2, \\ (h_1 X + k_1 Y)^3 + \ldots = \sigma_3 \end{array}\right.$$

le soient elles-mêmes : car les identités (34), supposées vérifiées, entraînent (42), par conséquent (43), et en particulier (44); inversement, les identités (44), supposées vérifiées, entraînent (43), par conséquent (42) et en particulier (34).

On voit en même temps que la connaissance des fonctions υ, υ_1, υ_2, υ_3 entraîne celle des fonctions υ, σ_1, σ_2, σ_3, et réciproquement, sans qu'il soit besoin de connaître $u(x, y)$.

E. Ce mode de raisonnement peut être indéfiniment poursuivi, et l'on verra sans peine que, si la proposition à établir est vraie jusqu'à une certaine valeur n, elle l'est pour la valeur suivante $n + 1$.

3. L'énoncé formulé au début du numéro précédent est susceptible d'une forme géométrique intéressante que nous allons indiquer (n° 5). Nous poserons à cet effet la définition suivante :

Soient x, y deux variables indépendantes (réelles); $u(x, y)$ une fonction de ces deux variables, olotrope dans une certaine région; C une courbe de la région, représentée par les formules

$$(45)\qquad x = \xi(r), \qquad y = \eta(r),$$

où r désigne un paramètre arbitraire : on ne considère cette courbe que dans une portion dépourvue de point singulier, et où chaque point ne soit obtenu qu'une seule fois. Un sens positif ayant été adopté pour les arcs sur la courbe C, supposons que les coordonnées x, y d'un point variable de la courbe aient été exprimées *en fonctions de l'arc s*; en les remplaçant par ces nouvelles valeurs dans la fonction $u(x, y)$, on obtiendra une fonction composée, u_s, ne dépendant que de la seule variable s. Cela étant, nous nommerons *dérivée d'ordre n* de $u(x, y)$ *prise suivant la courbe* C la dérivée d'ordre n (par rapport à s) de la fonction composée u_s. Cette définition est visiblement indépendante de l'origine choisie sur la courbe pour compter les arcs; les dérivées des ordres impairs changent simplement de signe lorsqu'on change le sens positif.

Si l'on considère, au lieu de u_s, la fonction composée

$$u_r = u[\xi(r), \eta(r)],$$

ses dérivées de tous ordres jouissent, par rapport à celles de u_s, de la propriété suivante :

Pour que la fonction composée u_s et ses dérivées des ordres $1, 2, \ldots, n-1$ prennent, en un point donné de la courbe (45), des valeurs numériques données, il faut et il suffit que la fonction composée u_r et ses dérivées des mêmes ordres prennent, au point dont il s'agit, certaines autres valeurs numériques : pour calculer ces dernières lorsqu'on se donne les premières, ou inversement, il suffit de connaître les fonctions $\xi(r)$, $\eta(r)$, exclusion faite de la composante $u(x, y)$, dont l'existence est simplement admise.

Effectivement, si l'on considère sur la courbe une région dépourvue de point singulier, l'arc s est une fonction olotrope (connue) de r ayant pour dérivée première la quantité essentiellement différente de zéro

$$\sqrt{\left(\frac{d\xi}{dr}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dr}\right)^2}, \tag{46}$$

en sorte que, inversement, r peut s'exprimer en fonction olotrope de s : la fonction u_s peut donc se déduire de u_r en y remplaçant r par sa valeur en fonction de s. Les valeurs correspondantes de u_r, u_s sont naturellement les mêmes; quant à leurs dérivées des ordres $1, 2, \ldots, n-1$, elles satisfont, en vertu de la règle des fonctions composées, aux relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{du_s}{ds} &= \frac{du_r}{dr}\frac{dr}{ds},\\
\frac{d^2 u_s}{ds^2} &= \frac{d^2 u_r}{dr^2}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + \frac{du_r}{dr}\frac{d^2 r}{ds^2},\\
\frac{d^3 u_s}{ds^3} &= \frac{d^3 u_r}{dr^3}\left(\frac{dr}{ds}\right)^3 + 3\frac{d^2 u_r}{dr^2}\frac{dr}{ds}\frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{du_r}{dr}\frac{d^3 r}{ds^3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\frac{d^{n-1} u_s}{ds^{n-1}} &= \frac{d^{n-1} u_r}{dr^{n-1}}\left(\frac{dr}{ds}\right)^{n-1} + \ldots.
\end{aligned}$$

Comme $\frac{dr}{ds}$, inverse arithmétique du radical (46), est différent de zéro, les coefficients de

$$\frac{du_r}{dr},\quad \frac{d^2 u_r}{dr^2},\quad \frac{d^3 u_r}{dr^3},\quad \ldots,\quad \frac{d^{n-1} u_r}{dr^{n-1}}$$

dans ces équations successives le sont également : en sorte que ces équations, résolues en fait par rapport aux $n-1$ premières dérivées de u_s, peuvent l'être tout aussi bien par rapport aux $n-1$ premières dérivées de u_r. On en déduit immédiatement le point à établir.

4. Revenons actuellement aux formules (3) posées au début du n° 2,

$$x = \mathrm{E}(r, \theta), \qquad y = \mathrm{F}(r, \theta),$$

et faisons sur leurs seconds membres, $\mathrm{E}(r, \theta)$, $\mathrm{F}(r, \theta)$, les diverses hypothèses qui s'y trouvent énumérées. Si l'on considère le contour fermé

$$(47) \qquad x = \lambda(\theta), \qquad y = \mu(\theta),$$

fourni par les formules (3) dans l'hypothèse numérique $r = r'$, et dont un point variable dépend de θ, on peut dire qu'à tout point de ce contour correspond, d'après les mêmes formules (3), une courbe dont un point variable dépend de r.

Cela étant, *pour qu'une fonction $u(x, y)$ et ses dérivées des ordres* 1, 2, ..., $n-1$, *prises suivant les courbes* $\theta =$ const. *de la famille* (3), *se réduisent, sur le contour* (47), *à des fonctions olotropes données de* θ

(*admettant nécessairement*, comme on va le voir, *la période* 2π), *il faut et il suffit que la fonction composée*

$$u[\mathrm{E}(r, \theta), \mathrm{F}(r, \theta)]$$

et ses dérivées des ordres $1, 2, \ldots, n-1$ *par rapport à* r *se réduisent, pour* $r = r'$, *à certaines autres fonctions olotropes de* θ (*admettant la même période*). *Pour calculer ces dernières lorsqu'on se donne les premières, ou inversement, il suffit de connaître les fonctions* $\mathrm{E}(r, \theta)$, $\mathrm{F}(r, \theta)$, *exclusion faite de la composante* $u(x, y)$, *dont l'existence est simplement admise.*

Effectivement, si l'on convient, comme il est naturel de le faire, de compter l'arc d'une courbe quelconque $\theta =$ const. de la famille (3) à partir de son point d'intersection avec le contour (47), cet arc s est une fonction de r et θ vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial s}{\partial r} = \sqrt{\left[\frac{\partial \mathrm{E}(r, \theta)}{\partial r}\right]^2 + \left[\frac{\partial \mathrm{F}(r, \theta)}{\partial r}\right]^2},$$

avec la condition initiale

$$s = 0 \qquad \text{pour} \qquad r = r'.$$

Inversement, le radical étant (en vertu de nos hypothèses) différent de zéro, r est une fonction olotrope de s et θ ayant pour dérivée par rapport à s l'inverse arithmétique du radical. Cela étant, si, dans l'expression $u[\mathrm{E}(r, \theta), \mathrm{F}(r, \theta)]$, que nous désignerons plus simplement par u_r, on remplace r par sa valeur en fonction de s et θ, l'expression u_s ainsi obtenue nous fournira, par des différentiations relatives à s, les dérivées de la fonction $u(x, y)$ prises suivant une courbe quelconque $\theta =$ const. de la famille (3). Or, il vient, en différentiant $n-1$ fois :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_s}{\partial s} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s}, \\
\frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2} &= \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + \frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}, \\
\frac{\partial^3 u_s}{\partial s^3} &= \frac{\partial^3 u_r}{\partial r^3}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^3 + 3\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + \frac{\partial u_r}{\partial r}\frac{\partial^3 r}{\partial s^3}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{\partial^{n-1} u_s}{\partial s^{n-1}} &= \frac{\partial^{n-1} u_r}{\partial r^{n-1}}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^{n-1} + \ldots.
\end{aligned}$$

En introduisant, dans les premiers et les seconds membres de ces formules, les hypothèses numériques initiales $r = r'$, $s = 0$, les diverses quantités qui y figurent se réduisent à de simples fonctions de θ; celles d'entre ces fonctions qui figurent dans les seconds membres admettant (toujours en vertu de nos hypothèses) la période de 2π, il en sera de même des premiers membres; comme enfin $\frac{\partial r}{\partial s}$ est essentiellement différent de zéro, les formules, résolues en fait par rapport aux déterminations initiales de

$$\frac{\partial u_s}{\partial s}, \quad \frac{\partial^2 u_s}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial^3 u_s}{\partial s^3}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} u_s}{\partial s^{n-1}},$$

peuvent l'être tout aussi bien par rapport aux déterminations initiales de

$$\frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^3 u_r}{\partial r^3}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} u_r}{\partial r^{n-1}}.$$

5. Le simple rapprochement des nos 2 et 4 fournit immédiatement l'énoncé auquel nous avons fait allusion plus haut (no 3).

Considérant les formules (3) et (4),

$$x = \mathrm{E}(r, \theta), \qquad x = \mathrm{H}(\rho, \theta),$$
$$y = \mathrm{F}(r, \theta), \qquad y = \mathrm{K}(\rho, \theta),$$

posées au début du no 2; faisons sur leurs seconds membres, $\mathrm{E}(r, \theta)$, $\mathrm{F}(r, \theta)$, $\mathrm{H}(\rho, \theta)$, $\mathrm{K}(\rho, \theta)$, les diverses hypothèses qui s'y trouvent énumérées, et soit

$$x = \lambda(\theta), \qquad y = \mu(\theta) \tag{48}$$

le contour fermé que fournissent concurremment, d'une part, les formules (3) dans l'hypothèse numérique $r = r'$, d'autre part, les formules (4) dans l'hypothèse numérique $\rho = \rho'$.

Cela étant, *pour qu'une fonction $u(x, y)$ et ses dérivées des ordres* 1, $2, \ldots, n-1$, *prises suivant les courbes* $\theta =$ const. *de la famille* (3), *se réduisent, sur le contour fermé* (48), *à des fonctions olotropes données de* θ (*admettant la période* 2π), *il faut et il suffit que la fonction $u(x, y)$ dont il s'agit et ses dérivées des ordres* $1, 2, \ldots, n-1$, *prises suivant les courbes* $\theta =$ const. *de la famille* (4), *se réduisent, sur le même con-*

tour (48), *à certaines autres fonctions olotropes de* θ (*admettant la même période*). *Pour calculer ces dernières lorsqu'on se donne les premières, ou inversement, il suffit de connaître les fonctions* $E(r, \theta)$, $F(r, \theta)$, $H(\rho, \theta)$, $K(\rho, \theta)$, *exclusion faite de la fonction* $u(x, y)$, *dont l'existence est simplement admise.*

6. Nous terminerons cette première Partie par l'observation suivante :

Étant donné un contour analytique régulier quelconque, dont un point variable dépend du paramètre arbitraire θ (avec une période qu'on peut toujours supposer égale à 2π), les équations de la normale au contour renferment, avec θ, un deuxième paramètre arbitraire r : or, il est aisé de voir que, pour le voisinage du contour, les seconds membres (fonctions de r et θ) de ces dernières équations remplissent les diverses conditions spécifiées au début du n° 1.

Effectivement, soient

$$x = \lambda(\theta), \qquad y = \mu(\theta) \tag{49}$$

les formules qui représentent le contour analytique régulier donné : les fonctions $\lambda(\theta)$, $\mu(\theta)$ qui y figurent sont olotropes dans tout l'intervalle de $-\infty$ à $+\infty$, sans que leurs dérivées premières $\lambda'(\theta)$, $\mu'(\theta)$ s'annulent jamais en même temps; elles admettent en outre la période 2π; enfin, les relations numériques

$$\lambda(\theta_1) = \lambda(\theta_2), \qquad \mu(\theta_1) = \mu(\theta_2)$$

ne peuvent avoir lieu à la fois que si l'on a

$$\theta_1 - \theta_2 = 2p\pi,$$

où p désigne quelque entier.

En un point quelconque du contour, la normale est représentée par les formules

$$\left\{\begin{aligned} x &= \lambda(\theta) + r\,\mu'(\theta), \\ y &= \mu(\theta) - r\,\lambda'(\theta), \end{aligned}\right. \tag{50}$$

où r désigne une deuxième variable indépendante; ces dernières formules se réduisent à (49) dans l'hypothèse numérique $r = 0$, et nous avons à établir qu'en désignant par ε un nombre positif suffisamment petit, leurs seconds membres remplissent, dans la région

$$-\varepsilon < r < \varepsilon \qquad (\theta \text{ quelconque}),$$

les quatre conditions énumérées au début du n° 1.

On voit immédiatement que les seconds membres dont il s'agit sont olotropes dans la région indéfinie

$$r \text{ quelconque}, \qquad \theta \text{ quelconque},$$

et qu'ils admettent par rapport à θ la période 2π. Ils ont d'ailleurs pour déterminant différentiel

$$(51) \qquad \begin{vmatrix} \mu' & \lambda' + r\mu'' \\ -\lambda' & \mu' - r\lambda'' \end{vmatrix} = \lambda'^2 + \mu'^2 + r(\lambda'\mu'' - \mu'\lambda''),$$

quantité dont le module est supérieur à

$$\lambda'^2 + \mu'^2 - \operatorname{mod} r \operatorname{mod}(\lambda'\mu'' - \mu'\lambda'');$$

or, dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq 2\pi$, et par suite pour toutes les valeurs réelles de θ, la somme $\lambda'^2 + \mu'^2$, qui ne s'annule jamais, reste constamment supérieure à quelque nombre positif fixe, l, convenablement choisi, tandis que, d'autre part, le module de $\lambda'\mu'' - \mu'\lambda''$ reste constamment inférieur à un autre nombre positif fixe, L (¹) : il vient donc

$$\operatorname{mod}[\lambda'^2 + \mu'^2 + r(\lambda'\mu'' - \mu'\lambda'')] > l - \operatorname{mod} r\,\mathrm{L},$$

d'où résulte que, pour r suffisamment petit, le premier membre et, par suite, le déterminant différentiel (51) sont constamment différents de zéro.

Reste à faire voir que, dans l'intérieur d'une bande indéfinie suffisamment mince ayant pour médiane $r = 0$, les relations numériques

$$(52) \qquad \begin{cases} \lambda(\theta_1) + r_1\mu'(\theta_1) = \lambda(\theta_2) + r_2\mu'(\theta_2), \\ \mu(\theta_1) - r_1\lambda'(\theta_1) = \mu(\theta_2) - r_2\lambda'(\theta_2) \end{cases}$$

(¹) Cela en vertu des propositions générales relatives aux régions à la fois limitées et complètes (*voir* l'Ouvrage cité, Chap. I).

ne peuvent être vérifiées en même temps que si l'on a à la fois

$$r_1 - r_2 = 0, \qquad \theta_1 - \theta_2 = 2p\pi,$$

où p désigne quelque entier; ou, ce qui revient au même, que, dans une bande suffisamment mince, limitée aux deux valeurs $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ (et les comprenant), les relations dont il s'agit ne peuvent être vérifiées en même temps que si l'on a à la fois

$$r_1 - r_2 = 0,$$

$\theta_1 - \theta_2 =$ l'une des trois valeurs 0, 2π, -2π.

Tout d'abord, si l'on désigne par θ_0 une valeur quelconque de θ, et que l'on pose

$$x_0 = \lambda(\theta_0), \qquad y_0 = \mu(\theta_0),$$

le système (50) admet la solution numérique

$$r = 0, \qquad \theta = \theta_0, \qquad x = x_0, \qquad y = y_0,$$

et peut être résolu par rapport à r et θ, conformément au principe général des fonctions implicites, à partir de cette solution numérique. Si donc on note graphiquement les variables r, θ à l'aide de deux axes rectangulaires, Or, $O\theta$, tracés dans un plan, et que, du point $r = 0$, $\theta = \theta_0$ comme centre, on trace un carré suffisamment petit, ayant ses côtés parallèles aux axes, il y aura, comme on sait, une correspondance *point par point* entre l'intérieur de ce carré et la région de l'espace $[[x, y]]$ déterminée par les formules (50) pour les valeurs de (r, θ) intérieures au carré. En s'astreignant alors à ne faire varier (r, θ) que dans ces limites, il est manifeste que les relations (52), supposées vérifiées en même temps, entraînent de toute nécessité

$$r_1 = r_2, \qquad \theta_1 = \theta_2.$$

Ainsi donc, si l'on considère sur la droite $r = 0$ un point quelconque, θ_0, il existe quelque constante positive, δ_0, telle que, dans l'intérieur d'un carré parallèle aux axes ayant son centre au point θ_0 et ses côtés égaux en longueur à δ_0, les relations (52), supposées vérifiées en même temps, entraînent comme conséquences nécessaires

$$r_1 = r_2, \qquad \theta_1 = \theta_2.$$

Si l'on considère un autre point, θ'_0, de la droite, il existe quelque constante positive analogue, δ'_0. Il est visible d'ailleurs que si le point θ'_0 est suffisamment voisin de θ_0, on peut choisir δ'_0 de manière que sa différence à δ_0 soit moindre que toute quantité donnée. Il existe dès lors quelque constante positive, δ, possédant la propriété dont il s'agit en tout point de l'intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ [1] et, par suite, sur l'étendue indéfinie de la droite $r = 0$.

Cela étant, partageons l'intervalle de 0 à 2π en intervalles dont l'amplitude soit moindre que $\frac{\delta}{2}$, et soient

$$0, \quad \theta', \quad \theta'', \quad \theta''', \quad \ldots, \quad \theta^{(n)}, \quad 2\pi$$

les valeurs de θ qui limitent les intervalles partiels successifs.

Tout d'abord, si l'on fait varier respectivement θ_1 et θ_2 dans deux intervalles partiels qui ne soient pas à la fois les deux intervalles extrêmes, et qui soient séparés l'un de l'autre par un intervalle au moins, il est impossible que, dans deux rectangles ayant pour médianes respectives ces deux intervalles partiels, pourvu que leur hauteur soit suffisamment petite, les relations (52) soient simultanément vérifiées, ou, en d'autres termes, que l'expression

$$\begin{aligned}(53)\qquad & [\lambda(\theta_1) - \lambda(\theta_2) + r_1\mu'(\theta_1) - r_2\mu'(\theta_2)]^2 \\ & + [\mu(\theta_1) - \mu(\theta_2) - r_1\lambda'(\theta_1) + r_2\lambda'(\theta_2)]^2\end{aligned}$$

puisse s'annuler : car, dans les limites où nous faisons varier θ_1 et θ_2, la partie indépendante de r_1 et r_2, savoir

$$[\lambda(\theta_1) - \lambda(\theta_2)]^2 + [\mu(\theta_1) - \mu(\theta_2)]^2,$$

ne s'annule jamais et reste constamment supérieure à une quantité positive fixe convenablement choisie; il en sera donc évidemment de même pour l'expression (53), si l'on suppose r_1 et r_2 numériquement assez petits. Il n'y a ainsi que trois cas à considérer, suivant que θ_1 et θ_2 varient respectivement : 1° dans deux intervalles partiels identiques; 2° dans deux intervalles contigus; 3° dans les deux intervalles extrêmes.

---

[1] Cela toujours en vertu des propositions générales dont il a déjà été question.

Si les deux intervalles partiels sont identiques, leur amplitude, moindre que $\frac{\delta}{2}$, est, à plus forte raison, moindre que δ, et il résulte de ce qui a été dit plus haut qu'en supposant r_1 et r_2 numériquement assez petits, les relations (52), supposées vérifiées en même temps, entraînent comme conséquences nécessaires

$$r_1 = r_2, \qquad \theta_1 = \theta_2.$$

Si les deux intervalles partiels sont contigus, leur réunion forme un intervalle partiel d'amplitude moindre que δ, et la conclusion précédente subsiste.

Enfin, si les deux intervalles partiels coïncident respectivement avec les deux extrêmes,

$$(54) \qquad \text{o} \quad \text{à} \quad \theta', \qquad \theta^{(g)} \quad \text{à} \quad 2\pi,$$

on observera qu'en substituant à ces derniers les intervalles respectifs

$$2\pi \quad \text{à} \quad 2\pi + \theta', \qquad \theta^{(g)} \quad \text{à} \quad 2\pi,$$

on obtient deux intervalles contigus $\left(\text{d'amplitude moindre que } \frac{\delta}{2}\right)$: en vertu de ce qui précède, les relations (52), simultanément vérifiées, entraînent comme conséquences nécessaires, si r_1 et r_2 sont numériquement assez petits,

$$r_1 - r_2 = \text{o}, \qquad \theta_1 - \theta_2 = \text{o};$$

si donc on revient aux intervalles (54), elles entraîneront

$$r_1 - r_2 = \text{o},$$
$$\theta_1 - \theta_2 = 2\pi \qquad \text{ou} \qquad -2\pi.$$

En conséquence, dans l'intérieur d'une bande indéfinie suffisamment mince, ayant pour médiane la droite $r = \text{o}$, les relations (52), supposées vérifiées en même temps, entraînent bien comme conséquences nécessaires

$$r_1 - r_2 = \text{o}, \qquad \theta_1 - \theta_2 = 2p\pi,$$

où p désigne quelque entier. C'est ce qui nous restait à établir.

SECONDE PARTIE.

7. Considérant, comme au n° 1, les formules

$$(55) \qquad \begin{cases} x = \mathrm{E}(r, \theta), \\ y = \mathrm{F}(r, \theta), \end{cases}$$

supposons que, dans la bande indéfinie

$$r_0 < r < \mathrm{R} \qquad (\theta \text{ quelconque})$$

de l'espace $[[r, \theta]]$, leurs seconds membres, $\mathrm{E}(r, \theta)$, $\mathrm{F}(r, \theta)$, soient olotropes, admettent par rapport à la variable θ la période 2π, possèdent un déterminant différentiel constamment différent de zéro, et qu'enfin les relations numériques

$$\mathrm{E}(r_1, \theta_1) = \mathrm{E}(r_2, \theta_2),$$
$$\mathrm{F}(r_1, \theta_1) = \mathrm{F}(r_2, \theta_2),$$

lorsqu'elles sont simultanément vérifiées, entraînent comme conséquences nécessaires

$$r_1 - r_2 = 0, \qquad \theta_1 - \theta_2 = 2p\pi,$$

où p désigne quelque entier. A cette bande indéfinie correspond, dans l'espace $[[x, y]]$, ce que nous avons appelé une *couronne* (n° 1, II, 4°), et il est clair que, si une fonction $f(x, y)$ est olotrope à l'intérieur de la couronne, la fonction

$$f[\mathrm{E}(r, \theta), \mathrm{F}(r, \theta)]$$

est olotrope à l'intérieur de la bande et admet par rapport à θ la période 2π.

Réciproquement, toute fonction de r et θ olotrope à l'intérieur de la bande et admettant par rapport à θ la période 2π devient, par le changement de variables que définissent les formules (55), une fonction de x, y olotrope à l'intérieur de la couronne. En premier lieu, la fonction donnée de r et θ se transforme en une fonction *bien définie* de x, y : car à tout point (x, y) de la couronne correspondent, il est vrai, une infinité de points (r, θ) de la bande, mais, en vertu de nos hypothèses, ces points sont tous situés sur une même parallèle à l'axe $O\theta$, et leurs coordonnées θ forment une progression arithmétique de raison 2π (indéfinie dans les deux sens), en sorte que la fonction donnée de r et θ prend en ces divers points *une seule et même valeur*. La fonction (bien définie) de x, y obtenue par le changement de variables est d'ailleurs olotrope dans la couronne. Effectivement, pour avoir la valeur de cette fonction dans le voisinage d'un point choisi comme on voudra à l'intérieur de la couronne, il suffit de considérer le développement taylorien de la fonction donnée (de r et θ) à partir de l'un des points correspondants de la bande, et d'y remplacer les accroissements de r et θ par les valeurs qu'en fournissent les formules de transformation résolues par rapport à r et θ conformément au principe général des fonctions implicites : or, on obtiendra ainsi, en vertu du principe général des fonctions composées, un développement entier par rapport aux accroissements des variables x, y.

8. Considérons maintenant un système différentiel partiel, comprenant, pour fixer les idées, trois équations, et impliquant un *nombre égal* de fonctions inconnues, u, v, w, des deux variables indépendantes réelles x et y. Nous supposerons que le système est linéaire par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées, et, désignant par m, n, p ses ordres respectifs relativement à u, v, w, nous mettrons en évidence, dans chaque équation, trois groupes linéaires et homogènes, le premier par rapport aux dérivées d'ordre m de u, le second par rapport aux dérivées d'ordre n de v, le troisième par rapport aux dérivées d'ordre p de w; nous aurons ainsi les relations

$$(56)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} \mathrm{A}_{1,\alpha} \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-\alpha}\,\partial y^\alpha} + \sum_{\beta=0}^{\beta=n} \mathrm{B}_{1,\beta} \frac{\partial^n v}{\partial x^{n-\beta}\,\partial y^\beta} + \sum_{\gamma=0}^{\gamma=p} \mathrm{C}_{1,\gamma} \frac{\partial^p w}{\partial x^{p-\gamma}\,\partial y^\gamma} + \ldots = 0, \\ &\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} \mathrm{A}_{2,\alpha} \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-\alpha}\,\partial y^\alpha} + \sum_{\beta=0}^{\beta=n} \mathrm{B}_{2,\beta} \frac{\partial^n v}{\partial x^{n-\beta}\,\partial y^\beta} + \sum_{\gamma=0}^{\gamma=p} \mathrm{C}_{2,\gamma} \frac{\partial^p w}{\partial x^{p-\gamma}\,\partial y^\gamma} + \ldots = 0, \\ &\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} \mathrm{A}_{3,\alpha} \frac{\partial^m u}{\partial x^{m-\alpha}\,\partial y^\alpha} + \sum_{\beta=0}^{\beta=n} \mathrm{B}_{3,\beta} \frac{\partial^n v}{\partial x^{n-\beta}\,\partial y^\beta} + \sum_{\gamma=0}^{\gamma=p} \mathrm{C}_{3,\gamma} \frac{\partial^p w}{\partial x^{p-\gamma}\,\partial y^\gamma} + \ldots = 0, \end{aligned} \right.$$

où les lettres A, B, C, affectées d'indices, désignent des fonctions (réelles) données de x, y. Des termes écrits ci-dessus nous déduisons, par un mécanisme évident, le déterminant du troisième ordre

$$(57)\qquad \begin{vmatrix} \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} A_{1,\alpha} X^{m-\alpha} Y^{\alpha} & \sum_{\beta=0}^{\beta=n} B_{1,\beta} X^{n-\beta} Y^{\beta} & \sum_{\gamma=0}^{\gamma=p} C_{1,\gamma} X^{p-\gamma} Y^{\gamma} \\ \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} A_{2,\alpha} X^{m-\alpha} Y^{\alpha} & \sum_{\beta=0}^{\beta=n} B_{2,\beta} X^{n-\beta} Y^{\beta} & \sum_{\gamma=0}^{\gamma=p} C_{2,\gamma} X^{p-\gamma} Y^{\gamma} \\ \sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} A_{3,\alpha} X^{m-\alpha} Y^{\alpha} & \sum_{\beta=0}^{\beta=n} B_{3,\beta} X^{n-\beta} Y^{\beta} & \sum_{\gamma=0}^{\gamma=p} C_{3,\gamma} X^{p-\gamma} Y^{\gamma} \end{vmatrix},$$

forme algébrique de degré $m+n+p$ aux indéterminées X, Y, ayant pour coefficients certaines fonctions connues de x, y.

Posons maintenant

$$(58)\qquad \begin{cases} x = \mathrm{E}(r, \theta), \\ y = \mathrm{F}(r, \theta), \end{cases}$$

les fonctions $\mathrm{E}(r, \theta)$, $\mathrm{F}(r, \theta)$ jouissant des diverses propriétés spécifiées au n° 1 et rappelées au numéro précédent. A la bande indéfinie de l'espace $[[r, \theta]]$ comprise entre les deux droites r_0, R, correspond ainsi, dans l'espace $[[x, y]]$, une couronne comprise entre les deux contours fermés r_0, R. Nous supposerons : 1° qu'à l'intérieur de la couronne, les divers coefficients du système proposé (les A, les B, les C et tous les autres) sont des fonctions olotropes de x, y; 2° que, pour tout point (x, y) intérieur à la couronne, le faisceau obtenu en égalant à zéro la forme algébrique (57) aux indéterminées X, Y ne contient que des droites imaginaires (le nombre $m+n+p$ est alors nécessairement pair).

Cela étant, et en désignant par r' une valeur numérique arbitrairement choisie entre r_0 et R, *le système proposé* (56) *admet un et un seul groupe d'intégrales*, u, v, w, *olotropes dans le voisinage du contour fermé* $r = r'$ (c'est-à-dire à l'intérieur d'une couronne suffisamment mince s'étendant de part et d'autre de cette ligne), *et telles qu'en adjoignant à* u, v, w *respectivement leurs* $m-1$, $n-1$, $p-1$ *premières dérivées prises suivant la normale au contour, ces* $m+n+p$ *fonctions* *se réduisent, sur le contour, à des fonctions olotropes données de* θ (*admettant la période* 2π).

I. *Si l'on effectue dans le système proposé* (56) *le changement de variables défini par les formules* (58), *le système résultant est, en vertu de l'hypothèse faite sur le déterminant* (57), *résoluble par rapport aux trois dérivées*

$$(59) \qquad \frac{\partial^m u}{\partial r^m}, \quad \frac{\partial^n v}{\partial r^n}, \quad \frac{\partial^p w}{\partial r^p}$$

dans toute l'étendue de la bande indéfinie comprise entre les deux droites r_0, R.

En désignant par f une fonction quelconque de x, y, l'expression générale de ses dérivées anciennes (relatives à x, y) à l'aide de ses dérivées nouvelles (relatives à r, θ) est, comme le montre un calcul facile, donnée par la formule

$$\frac{\partial^q f}{\partial x^{q-l}\,\partial y^l} = \Delta^q \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \theta}\right)^{q-l} \left(-\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \theta}\right)^l \frac{\partial^q f}{\partial r^q} + \ldots,$$

où Δ désigne l'inverse arithmétique du déterminant différentiel de $\mathrm{E}(r, \theta)$, $\mathrm{F}(r, \theta)$ par rapport à r et θ, c'est-à-dire une quantité qui, en vertu de nos hypothèses sur les seconds membres de (58), reste finie et différente de zéro dans toute l'étendue de la bande indéfinie comprise entre les deux droites r_0, R.

D'après cela, on voit immédiatement que pour avoir, au facteur près Δ^{m+n+p} (différent de zéro), le déterminant du système transformé par rapport aux trois dérivées (59), il suffit de faire, dans le déterminant (57),

$$x = \mathrm{E}(r, \theta), \qquad y = \mathrm{F}(r, \theta),$$
$$\mathrm{X} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \theta}, \qquad \mathrm{Y} = -\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \theta}.$$

Or, le résultat de cette substitution est forcément différent de zéro : car, quels que soient x, y dans la couronne, ou, ce qui revient au même, quels que soient r, θ dans la bande, le déterminant (57) ne peut s'annuler que si l'on a à la fois $X = 0$, $Y = 0$, et l'on sait que $\frac{\partial E}{\partial \theta}$, $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ ne peuvent être nuls en même temps.

II. Si, conformément à la conclusion de l'alinéa précédent I, on effectue la résolution du système transformé par rapport aux trois dérivées (59), le système résultant, linéaire, comme le proposé, par rapport à l'ensemble des fonctions inconnues et de leurs dérivées, est visiblement orthonome [1] (car c'est un système kowalevskien); de plus, les fonctions de r et θ qui jouent le rôle de coefficients dans les seconds membres sont olotropes dans la bande indéfinie comprise entre les deux droites r_0, R, et admettent, par rapport à la variable θ, la période 2π.

En vertu des n^{os} 6, 5, 4 et 7, la proposition qu'il s'agit d'établir actuellement revient à la suivante :

Il existe, pour le système transformé, un et un seul groupe d'intégrales olotropes dans une bande suffisamment mince située de part et d'autre de la droite r', admettant par rapport à la variable θ la période 2π, et telles que

$$(60)\qquad \left\{\begin{array}{llll} u, & \frac{\partial u}{\partial r}, & \ldots, & \frac{\partial^{m-1} u}{\partial r^{m-1}}, \\ v, & \frac{\partial v}{\partial r}, & \ldots, & \frac{\partial^{n-1} v}{\partial r^{n-1}}, \\ w, & \frac{\partial w}{\partial r}, & \ldots, & \frac{\partial^{p-1} w}{\partial r^{p-1}} \end{array}\right.$$

se réduisent, pour $r = r'$, à des fonctions olotropes données de θ (admettant la période 2π).

C'est ce que nous allons prouver dans ce qui suit.

III. *Il ne peut y avoir, pour le système transformé, qu'un seul groupe d'intégrales satisfaisant aux diverses conditions requises par l'énoncé de l'alinéa précédent* II.

Car, à cause de l'orthonomie du système, les développements taylo-

---

[1] *Voir* l'Ouvrage cité, Chap. VII.

riens des intégrales à partir d'un point déterminé de la droite r' sont eux-mêmes entièrement déterminés dès qu'on se donne les fonctions de θ auxquelles doivent se réduire respectivement, pour $r=r'$, les diverses quantités (60).

IV. Sur la droite r' de la bande indéfinie, considérons un point quelconque, et intégrons le système transformé à partir de ce point, en prenant comme données initiales celles qui figurent dans l'énoncé de l'alinéa II relativement aux diverses quantités (60). Je dis que, *quel que soit le point choisi sur la droite, les développements tayloriens ainsi obtenus pour les intégrales admettent des rayons de convergence (au moins) égaux à une quantité positive fixe, δ, convenablement choisie.*

Observons tout d'abord que si l'on choisit sur la droite r' deux points mutuellement distants de 2π, les développements tayloriens qui en résultent pour les intégrales ont de part et d'autre les mêmes coefficients. Effectivement, pour obtenir, aux facteurs numériques connus près, ceux d'entre les coefficients dont la donnée ne se trouve pas contenue dans les données relatives aux quantités (60), il suffit, comme on sait, d'adjoindre aux équations du système toutes celles qui s'en déduisent par différentiations; d'attribuer, dans le groupe illimité résultant, aux variables, aux inconnues et aux dérivées paramétriques, leurs valeurs initiales (données), et d'en déduire par résolutions successives les valeurs initiales des dérivées principales. Or, de part et d'autre, la variable r a la même valeur initiale r', et la variable θ a des valeurs initiales dont la différence est 2π : si donc on observe que les coefficients du système admettent par rapport à θ la période 2π, et que les données relatives aux quantités (60) l'admettent aussi, on voit immédiatement, d'abord, que les inconnues et leurs dérivées paramétriques ont de part et d'autre les mêmes valeurs initiales et, ensuite, que leurs dérivées principales jouissent de la même propriété. On obtient donc bien, de part et d'autre, les mêmes développements tayloriens. En conséquence, il suffit, pour établir le point que nous avons en vue, de considérer, sur la droite r', le fragment limité et complet

$$0 \leqq \theta \leqq 2\pi.$$

Or, si l'on intègre à partir d'un point, θ_0, du fragment, il existe quelque constante positive, δ_0, que les développements tayloriens ainsi obtenus pour les intégrales admettent comme rayon de convergence relativement aux deux variables r, θ; si l'on intègre à partir d'un autre point, θ_1, il existe quelque constante positive analogue, δ_1. Il est visible d'ailleurs que, si le point θ_1 est suffisamment voisin de θ_0, on peut choisir δ_1 de manière que sa différence à δ_0 soit moindre que toute quantité donnée. Il existe dès lors, en vertu des propositions générales relatives aux régions à la fois limitées et complètes ([1]), quelque constante positive, δ, possédant la propriété requise sur toute l'étendue du fragment, et, par suite, sur l'étendue indéfinie de la droite r'.

V. Si l'on intègre à partir d'un point déterminé (quelconque) de la droite r' avec les données initiales indiquées, il résulte de l'alinéa précédent (IV) que le groupe de pseudo-fonctions, u, v, w, ainsi obtenu est calculable par cheminement avec le rayon δ tout le long de cette droite. En désignant alors par δ' une constante positive arbitrairement choisie au-dessous de δ, et considérant une bande d'épaisseur $2\delta'$ qui ait pour médiane la droite r', il est visible que tous les chemins brisés tracés dans cette région avec des écarts maxima moindres que $\delta-\delta'$, et en faisant varier les deux variables r, θ *séparément et successivement dans l'ordre* θ, r, sont praticables pour nos trois pseudo-fonctions et conduisent à des développements successifs admettant des rayons de convergence égaux à $\delta-\delta'$. Cela étant, il résulte d'une proposition que nous avons établie ailleurs ([2]) que, dans la bande d'épaisseur $2\delta'$ spécifiée ci-dessus, nos pseudo-fonctions sont calculables par cheminement avec des rayons égaux à $\delta-\delta'$; elles y sont de plus monodromes, à cause de la forme convexe de la bande. Elles sont dès lors assimilables à des fonctions olotropes bien définies dans l'intérieur de cette bande et, par suite, dans l'intérieur de la bande d'épaisseur 2δ.

([1]) *Voir* l'Ouvrage cité, Chap. I.

([2]) *Sur quelques principes généraux relatifs à la théorie des fonctions d'un nombre quelconque de variables* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1907, p. 138 et suiv.).

Enfin, les intégrales ainsi obtenues ne peuvent manquer d'admettre, par rapport à la variable θ, la période 2π. En effet, si, sur la droite r', on considère deux points situés à une distance mutuelle égale à 2π, il résulte d'un raisonnement fait plus haut (IV) que les développements tayloriens de nos intégrales, construits successivement à partir de ces deux points, ont de part et d'autre les mêmes coefficients. Les intégrales admettent donc par rapport à θ la période 2π à l'intérieur d'une bande suffisamment mince s'étendant de part et d'autre de la droite r' et, par suite, à l'intérieur de toute bande plus large où elles seraient olotropes.

Ainsi se trouve achevée notre démonstration.

9. Nous arrivons enfin à la proposition qui fait l'objet principal du présent Mémoire.

Étant donné un contour analytique régulier quelconque, si, à l'intérieur d'une zone s'étendant de part et d'autre de cette ligne, les coefficients du système linéaire (56) *sont des fonctions olotropes de x, y, et que, pour tout point (x, y) de cette zone, le faisceau obtenu en égalant à zéro la forme algébrique* (57) *aux indéterminées* X, Y *ne contienne que des droites imaginaires, le système* (56) *admet un et un seul groupe d'intégrales, u, v, w, olotropes à l'intérieur d'une zone suffisamment mince s'étendant de part et d'autre du contour, et telles qu'en adjoignant à u, v, w respectivement leurs $m-1$, $n-1$, $p-1$ premières dérivées prises suivant la normale au contour, ces $m+n+p$ fonctions se réduisent sur le contour à des fonctions olotropes* (périodiques) *données.*

Cette proposition résulte du simple rapprochement des n^{os} 6 et 8.