

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL MONTEL

Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 29 (1912), p. 487-535

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1912_3_29_487_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1912, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES
FAMILLES DE FONCTIONS ANALYTIQUES

QUI ADMETTENT

DES VALEURS EXCEPTIONNELLES DANS UN DOMAINE;

PAR M. P. MONTEL.



Introduction.

Les théorèmes que M. Picard a découverts en 1879, le premier sur les valeurs d'une fonction entière, le second sur l'indétermination d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point essentiel, ont été l'origine d'un grand nombre de travaux.

Un premier groupe de ces travaux est relatif à la recherche d'une démonstration de ces théorèmes qui fasse simplement appel aux propositions élémentaires de l'Analyse, en évitant l'emploi de la fonction modulaire. C'est M. Borel qui, en 1896, est parvenu à construire une telle démonstration pour le premier théorème. Sa méthode a conduit M. Schottky à donner, en 1904, une démonstration du second théorème obtenue en suivant la même voie : cette démonstration a été simplifiée par M. Lindelöf.

D'autres séries de recherches ont permis d'arriver à d'importantes généralisations du premier théorème, relatives à la théorie des fonctions entières et à celle des fonctions multiformes. Nous n'aurons pas à nous en occuper dans les pages suivantes.

Enfin, de nombreux et remarquables travaux sont venus se grouper

autour du théorème que M. Landau a établi en 1904 et qui a apporté au premier théorème de M. Picard une précision nouvelle.

La proposition de M. Landau donne une propriété commune à toute une famille de fonctions analytiques admettant des valeurs exceptionnelles; d'autre part, des recherches récentes sur la convergence des séries de fonctions holomorphes, dues à MM. Vitali, Severini, Landau et Carathéodory et à moi-même, ont montré l'importance du rôle des valeurs exceptionnelles au point de vue de la convergence uniforme. Il apparaît donc comme naturel d'étudier en elles-mêmes les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine.

C'est cette étude que j'ai entreprise ici; les fonctions d'une telle famille sont rattachées les unes aux autres par une propriété remarquable: toute suite infinie de ces fonctions admet une ou plusieurs fonctions limites. Cette propriété apparaît comme la source des différents théorèmes récemment énoncés pour ces fonctions.

Dans le Chapitre I, j'ai étudié les propriétés générales des familles de fonctions telle que, de toute suite formée avec des fonctions de la famille, on puisse extraire une suite nouvelle convergeant uniformément vers une fonction limite finie ou vers l'infini: ce sont les *familles normales*. Les fonctions holomorphes, bornées en module, ou admettant un domaine de valeurs exceptionnelles, ou ne prenant ni la valeur 0 ni la valeur 1, lorsque la variable demeure dans un domaine fixe, forment des familles normales. Les fonctions qui, dans les mêmes conditions, peuvent prendre p fois les valeurs 0 ou 1 forment des *familles quasi-normales* dont les propriétés sont voisines de celles des familles normales. Enfin, j'ai considéré le cas plus général des fonctions qui peuvent prendre un nombre quelconque de fois les valeurs 0 et 1, l'ensemble des valeurs correspondantes de la variable étant assujéti à certaines restrictions.

Le Chapitre II est consacré à l'application de ces notions à l'étude de l'indétermination d'une fonction uniforme dans le voisinage de ses points essentiels. Je donne d'abord des démonstrations simples des théorèmes de M. Picard et de quelques propriétés des fonctions holomorphes lorsque la variable est à l'intérieur d'un angle ayant son sommet en un point singulier, en étendant les résultats obtenus

par M. Lindelöf. J'examine ensuite quelques cas où le théorème de M. Picard peut être appliqué à des ensembles discontinus de points singuliers. Je retrouve enfin les théorèmes de MM. Landau, Schottky, P. Lévy, et j'établis des théorèmes correspondants lorsque la fonction peut prendre p fois les valeurs 0 et 1 ou satisfait à des conditions plus générales.

Je m'occupe, dans le Chapitre III, de la convergence des séries de fonctions holomorphes : je montre comment les propositions obtenues récemment par divers auteurs ne sont que des formes différentes d'une même proposition fondamentale relative aux séries de fonctions appartenant à une famille normale, et j'établis quelques théorèmes nouveaux sur les séries de fonctions holomorphes qui peuvent prendre p fois les valeurs 0 ou 1, ou même sur des séries plus générales.

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans deux Notes insérées aux *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, le 20 novembre et le 26 décembre 1911.

CHAPITRE I.

LES FAMILLES NORMALES.

1. Soit

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots,$$

une suite infinie de fonctions holomorphes dans un domaine connexe D limité par un ou plusieurs contours simples; nous dirons que cette suite converge uniformément vers une fonction limite $f(x)$ à l'intérieur de D , si D_1 étant un domaine quelconque complètement intérieur à D , on peut faire correspondre à chaque nombre positif ε arbitrairement petit un entier p , tel que pour $n > p$ on ait

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

pour tout point x appartenant au domaine fermé D_1 . Il résulte d'un théorème de Weierstrass que la fonction $f(x)$ est holomorphe dans le domaine ouvert D et que les suites infinies formées par les dérivées

d'un ordre quelconque k des fonctions $f_n(x)$ convergent uniformément à l'intérieur de D vers la dérivée $f^{(k)}(x)$.

2. Soit x_0 un point intérieur au domaine D , en lequel la fonction $f(x)$ prend la valeur a , on peut énoncer la proposition suivante :

Si $f(x)$ n'est pas égale à la constante a , pour que $f(x_0)$ ait la valeur a , il faut et il suffit que, à partir d'un certain rang, les fonctions $f_n(x)$ prennent toutes la valeur a dans le voisinage de x_0 .

D'une manière précise, traçons un cercle C de centre x_0 et de rayon arbitrairement petit, je dis que pour n assez grand, toutes les fonctions $f_n(x)$ prennent la valeur a pour un point au moins de ce cercle si $f(x_0) = a$ et réciproquement.

Supposons le cercle C assez petit pour que l'équation

$$f(x) = a$$

n'ait à l'intérieur de ce cercle que la racine x_0 , ce qui est possible si $f(x)$ n'est pas égale à la constante a , et prenons n assez grand pour que le module de

$$\frac{f_n(x) - f(x)}{f(x) - a}$$

soit inférieur à 1 sur la circonférence C , ce qui est possible, puisque $f_n(x) - f(x)$ tend uniformément vers zéro sur cette circonférence et que $f(x) - a$, sur la circonférence, a un module minimum non nul. Dans ces conditions, les deux équations

$$f(x) - a = 0$$

et

$$f_n(x) - f(x) + f(x) - a = f_n(x) - a = 0$$

ont, à l'intérieur du cercle C , le même nombre de racines et, par conséquent, les fonctions $f_n(x)$ prennent toutes, au moins une fois, la valeur a dans le cercle C . Si x_0 est une racine multiple d'ordre p de l'équation $f(x) = a$, la fonction $f_n(x)$ prend p fois la valeur a dans le cercle C .

Réciproquement, soit x_0 un point autour duquel les équations

$$f_n(x) - a = 0$$

ont une racine au moins pour une infinité de valeurs de n , je dis que $f(x_0)$ est égal à a ; traçons, en effet, un cercle de centre x_0 et tel que pour tout point x de ce cercle, on ait

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre arbitrairement choisi; pour n assez grand, on aura dans ce cercle

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

et, par suite,

$$|f(x_0) - f_n(x)| < 2\varepsilon.$$

Soit x un point du cercle pour lequel $f_n(x) = a$, on en conclut

$$|f(x_0) - a| < 2\varepsilon,$$

et, comme ε est arbitraire,

$$f(x_0) = a.$$

3. Considérons une famille (F), composée de fonctions $f(x)$, holomorphes dans le domaine D et supposons que, dans chaque domaine D, intérieur à D, l'inégalité

$$|f(x)| < M,$$

M étant une constante, soit vérifiée pour toute fonction $f(x)$ de la famille et pour tout point x intérieur à D, : nous dirons que la famille (F) est composée de fonctions *bornées dans leur ensemble dans l'intérieur de D*. De toute suite infinie de fonctions appartenant à la famille (F), on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément à l'intérieur de D vers une fonction limite. Réciproquement, si une famille (F) de fonctions $f(x)$ holomorphes dans D, possède cette propriété que, de toute suite infinie de fonctions de (F), on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément vers une fonction limite, la famille (F) est composée de fonctions bornées dans leur ensemble dans l'intérieur de D ⁽¹⁾.

(1) Voir P. MONTEL, *Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe*, p. 22-27. Paris, Gauthier-Villars; 1910.

On sait qu'une famille de fonctions continues dans D est composée de fonctions *également continues à l'intérieur de D* , si D_1 étant un domaine intérieur à D , on peut faire correspondre à chaque nombre ε un nombre δ tel que, x et x' étant deux points de D_1 , dont la distance ne surpasse pas δ , l'inégalité

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

soit satisfaite pour toute fonction $f(x)$ de la famille. Des fonctions formant une famille également continue à l'intérieur de D sont bornées dans leur ensemble dans l'intérieur de D .

Si les fonctions sont holomorphes dans D , la réciproque est exacte. Soit, en effet, D_1 un domaine intérieur à D , limité par la frontière Γ_1 , qui n'a aucun point commun avec la frontière Γ de D , et soit Γ' la frontière d'un domaine contenu dans D et contenant D_1 . Désignons par L la longueur de Γ' et par h la distance non nulle des contours Γ_1 et Γ' ; x et x' étant deux points de D_1 , on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma'} \frac{f(z) dz}{z - x}, \\ f(x') &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma'} \frac{f(z) dz}{z - x'}, \\ f(x') - f(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma'} \frac{(x' - x) f(z)}{(z - x)(z - x')} dz; \end{aligned}$$

d'où, en désignant par M le module maximum de toutes les fonctions $f(x)$ sur la frontière Γ' ,

$$|f(x') - f(x)| < \frac{LM}{2\pi h^2} |x' - x|.$$

Le rapport $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ a un module borné dans le domaine D_1 : l'égalité continue en résulte.

4. Considérons maintenant une famille (\mathcal{F}) formée de fonctions holomorphes dans le domaine de D et possédant la propriété suivante : de toute suite infinie formée de fonctions de (\mathcal{F}) on peut extraire une

suite nouvelle convergeant uniformément, dans l'intérieur de D, vers une fonction finie ou vers l'infini (1).

Nous dirons aussi que toute suite infinie tirée de (\mathcal{F}) possède au moins une fonction limite.

Un tel ensemble de fonctions sera dit former une *famille normale*; si de la famille (\mathcal{F}) on extrait une famille (F) constituée par des fonctions de (\mathcal{F}) qui sont toutes bornées en un point P intérieur à D, la famille (F) sera formée de fonctions bornées dans leur ensemble dans l'intérieur de D, puisque de toute suite infinie de fonctions de (F), on pourra extraire une suite nouvelle convergeant uniformément vers une fonction finie.

5. Un exemple de familles normales nous sera fourni par l'ensemble des fonctions $f(x)$, pour lesquelles il existe une valeur α et un nombre positif η tels que

$$|f(x) - \alpha| > \eta$$

pour toutes les fonctions $f(x)$ et pour tous les points x de D. En d'autres termes, si l'on représente sur un plan les valeurs X de $f(x)$, il y a une région de ce plan dans laquelle les points X ne pénètrent pas. Le cas des fonctions bornées dans leur ensemble est un cas particulier du précédent. Pour montrer que les fonctions $f(x)$ forment une famille normale, considérons la famille formée par les fonctions

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x) - \alpha},$$

qui sont holomorphes dans D et pour lesquelles on a toujours

$$|\varphi(x)| < \frac{1}{\eta}.$$

Prenons une suite infinie de fonctions $f(x)$, il lui correspond une suite infinie de fonctions $\varphi(x)$; puisque les fonctions $\varphi(x)$ sont bornées dans leur ensemble à l'intérieur de D, on peut extraire, de cette

(1) On dit que la suite $f_n(x)$ converge uniformément vers l'infini, lorsque la suite $\frac{1}{f_n(x)}$ converge uniformément vers zéro.

suite de fonctions $\varphi(x)$, une autre suite

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

convergeant uniformément vers une fonction limite $\Phi(x)$. Les fonctions $\varphi(x)$ ne prennent jamais la valeur 0, puisque les fonctions $f(x)$ ne sont pas infinies dans D; il en résulte que la fonction $\Phi(x)$, si elle n'est pas identiquement nulle, n'a pas de zéro dans D : c'est une conséquence immédiate du théorème établi au paragraphe 2. La suite

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

où

$$f_n(x) = a + \frac{1}{\varphi_n(x)},$$

converge donc uniformément vers la fonction $a + \frac{1}{\Phi(x)}$, si $\Phi(x)$ n'est pas identiquement nulle : elle converge uniformément vers l'infini si $\Phi(x)$ est égale à zéro. Or, la suite $f_n(x)$ est extraite de la suite infinie de fonctions $f(x)$ que nous avons considérée; donc, de toute suite infinie de fonctions $f(x)$, on peut tirer une suite nouvelle convergeant uniformément vers une fonction limite finie ou vers l'infini : la famille des fonctions $f(x)$ est une famille normale.

6. On ramène immédiatement au cas précédent celui où les fonctions $f(x)$ ne prennent aucune des valeurs représentées par les points d'une courbe fermée Γ du plan des X. Cette courbe partage le plan en deux régions Δ_1 et Δ_2 . Lorsque x parcourt le domaine connexe D, le point $X = f(x)$ décrit un domaine connexe Δ situé tout entier dans Δ_1 ou tout entier dans Δ_2 . Soit alors une suite infinie de fonctions $f(x)$, il y a dans cette suite une infinité de fonctions pour lesquelles le domaine Δ est contenu dans Δ_1 , sinon il y a une infinité de fonctions pour lesquelles le domaine Δ est contenu dans Δ_2 . Pour chacune de ces suites infinies, le théorème du paragraphe précédent est applicable.

7. Passons maintenant au cas où les fonctions $f(x)$ ne prennent aucune des valeurs représentées par les points d'une courbe ouverte Γ

du plan des X , joignant le point a au point b . En d'autres termes, pour aucune des fonctions $f(x)$, le domaine Δ n'est traversé par Γ . Je dis que les fonctions $f(x)$ forment une famille normale.

Posons, en effet,

$$(1) \quad \varphi(x) = \log \left[\frac{f(x) - a}{f(x) - b} \right].$$

Chaque fonction $\varphi(x)$ est uniforme dans D , puisque, $X = f(x)$ ne traversant jamais Γ , ce point, lorsque x décrit un contour fermé, ne peut décrire que des courbes fermées ne contenant à leur intérieur aucun des points a et b , ou les contenant tous les deux. D'ailleurs $\varphi(x)$ est holomorphe dans D , puisque $f(x)$ ne prend jamais ni la valeur a ni la valeur b , et cette fonction ne s'annule pas dans le domaine. Pour achever de déterminer $\varphi(x)$, nous conviendrons que, en un point x_0 de D , la partie imaginaire du logarithme sera comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, la limite inférieure exclue. Dans ces conditions, puisque le point

$$\frac{X - a}{X - b}$$

ne peut tourner autour de l'origine lorsque x se déplace dans D , la partie imaginaire de $\varphi(x)$ sera toujours comprise entre -3π et $+3\pi$. Le point X ne sortira pas d'une bande du plan des X limitée par deux parallèles à l'axe des parties réelles menées à la distance 3π de cet axe. Par conséquent, les fonctions $\varphi(x)$ forment une famille normale.

Prenons une suite infinie de fonctions $f(x)$; la formule (1) lui fait correspondre une suite infinie de fonctions $\varphi(x)$: ces fonctions appartenant à une famille normale, on peut extraire de cette dernière suite une suite nouvelle

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \dots, \quad \varphi_n(x), \quad \dots$$

convergeant uniformément vers une fonction limite finie ou infinie $\Phi(x)$. Plaçons-nous d'abord dans le cas où $\Phi(x)$ n'est ni nulle ni infinie. La formule (1) fait correspondre aux fonctions $\varphi_n(x)$ des fonctions $f_n(x)$,

$$f_n(x) = \frac{a - b e^{\varphi_n(x)}}{1 - e^{\varphi_n(x)}},$$

et lorsque $\varphi_n(x)$ converge uniformément vers $\Phi(x)$, $f_n(x)$ converge uniformément vers $F(x)$ donnée par l'égalité

$$F(x) = \frac{\alpha - b e^{\Phi(x)}}{1 - e^{\Phi(x)}}.$$

Si $\Phi(x)$ est identiquement nulle, on voit immédiatement que les fonctions $\frac{1}{f_n(x)}$ convergent uniformément vers zéro.

Supposons, maintenant, que $\Phi(x)$ soit la constante infinie : puisque la partie imaginaire de $\varphi_n(x)$ est bornée, la partie réelle de ce nombre augmente indéfiniment en valeur absolue ; donc, pour n assez grand, l'une des deux inégalités suivantes est vérifiée :

$$|e^{\varphi_n(x)}| < \varepsilon \quad \text{ou} \quad |e^{-\varphi_n(x)}| < \varepsilon,$$

ε étant arbitrairement petit. Par conséquent, pour n assez grand, on a

$$\left| \frac{f(x) - a}{f(x) - b} \right| < \varepsilon$$

ou

$$\left| \frac{f(x) - b}{f(x) - a} \right| < \varepsilon.$$

Il résulte de là que le point $X = \varphi(x)$ est à l'intérieur d'un petit cercle tracé autour de a ou d'un petit cercle tracé autour de b ; par conséquent les fonctions $f_n(x)$ forment une famille normale : on peut en extraire une suite convergeant vers une limite qui est nécessairement ou la constante a ou la constante b , puisque $\varphi_n(x)$ doit augmenter indéfiniment.

En résumé, de toute suite infinie de fonctions $f(x)$, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément vers une fonction limite. Les fonctions $f(x)$ forment une famille normale (1).

8. Nous allons maintenant nous occuper des fonctions $f(x)$ admettant dans le domaine D trois valeurs exceptionnelles a, b, c . Nous pouvons toujours supposer que ces valeurs sont $0, 1, \infty$, en substituant

(1) Les résultats précédents peuvent facilement s'étendre aux familles de fonctions méromorphes dans D en modifiant un peu la définition de la convergence uniforme.

aux fonctions $f(x)$ les fonctions

$$\frac{f(x) - a}{f(x) - b} \cdot \frac{c - a}{c - b}.$$

Ceci posé, nous établirons la proposition suivante :

Les fonctions $f(x)$, holomorphes dans le domaine de D , où elles ne prennent ni la valeur 0 ni la valeur 1, forment une famille normale.

Nous utiliserons dans cette démonstration les propriétés de la fonction modulaire et de son inverse. Considérons l'intégrale elliptique

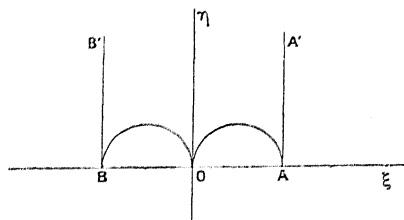
$$\int \frac{du}{\sqrt{u(u-1)(u-X)}}$$

et soit $v(X)$ le rapport de deux demi-périodes distinctes de cette intégrale; la fonction $v(X)$ est une fonction analytique de X n'ayant d'autre point singulier que $X = 0$, $X = 1$, $X = \infty$. Quel que soit le chemin suivi par X , le coefficient de i dans $v(X)$ garde un signe constant que nous supposerons positif. Si nous représentons les valeurs de

$$z = v(X)$$

dans un plan rapporté à deux axes rectangulaires $O\xi$, $O\eta$, le point z sera toujours dans le demi-plan situé du même côté que $O\eta$ par rapport à $O\xi$. La fonction $v(X)$ n'est pas uniforme et voici comment se permutent ses différentes déterminations : Traçons deux demi-cercles OA et OB orthogonaux à $O\xi$ et de diamètre égal à 1 et les deux

Fig. 1.



parallèles BB' et AA' à l'axe $O\eta$ (fig. 1). Le quadrilatère $B'BOAA'$, dont un sommet est à l'infini sur $O\eta$, sera appelé *quadrilatère fondamental* :

il se compose de deux côtés rectilignes AA' et BB' et de deux côtés circulaires OA et OB . Construisons l'image de trois de ses côtés par rapport au quatrième ⁽¹⁾, nous obtenons de nouveaux quadrilatères sur lesquels nous répéterons indéfiniment la même opération.

On couvre ainsi le demi-plan supérieur par un réseau de quadrilatères ; lorsque X tourne autour de l'un des points o ou 1 , le point z correspondant passe d'un quadrilatère à un autre : à chaque point X distinct des points o , 1 , ∞ correspond un point $z = v(X)$ unique ⁽²⁾ situé dans le quadrilatère fondamental, nous dirons que cette valeur est la valeur principale de la fonction $v(X)$ au point X .

Soit $X = \lambda(z)$ la fonction inverse de $v(X)$; c'est la fonction modulaire, c'est-à-dire le nombre, qui exprime le module en fonction du rapport des périodes. Cette fonction est uniforme et holomorphe dans le demi-plan supérieur des z ; elle admet l'axe $O\xi$ comme coupure essentielle ; lorsque z se déplace dans le demi-plan supérieur, la fonction $\lambda(z)$ ne prend jamais ni la valeur o ni la valeur 1 .

Ces propriétés rappelées, considérons la famille des fonctions $f(x)$; faisons-leur correspondre les fonctions $\varphi(x)$ définies par l'égalité

$$\varphi(x) = v[f(x)]$$

et par la condition que $\varphi(x_0)$ soit dans le quadrilatère fondamental, x_0 étant un point fixe choisi dans le domaine D . Les fonctions $\varphi(x)$ sont uniformes dans le domaine D , car si x décrit un contour fermé contenu dans D et pouvant se réduire à un point sans sortir de D , $f(x)$ doit décrire dans le plan des X un contour fermé pouvant se réduire à un point sans rencontrer ni le point o ni le point 1 , puisque $f(x)$ ne prend dans D aucune de ces valeurs ; dans ces conditions, $\varphi(x) = v(X)$ revient à sa valeur primitive. D'autre part, la partie imaginaire de $\varphi(x)$ est toujours positive, donc les fonctions $\varphi(x)$ forment une famille normale d'après le paragraphe 5.

⁽¹⁾ L'image d'une figure par rapport à un cercle est l'inverse de cette figure par rapport au cercle ; si le cercle se réduit à une droite l'image, est la figure symétrique par rapport à la droite.

⁽²⁾ Pour les points situés sur les segments (∞, o) et $(1, \infty)$, il faut encore choisir lesquels des côtés du quadrilatère fondamental on leur fera correspondre.

Considérons alors une suite infinie de fonctions $f(x)$ et supposons que les nombres $f(x_0)$ de cette suite aient d'autres valeurs limites que 0, 1, ∞ . Choisissons, dans la suite des $f(x)$, une suite nouvelle pour laquelle les nombres $f(x_0)$ aient la limite unique α , α étant différent de 0, 1, ∞ . Les fonctions $\varphi(x)$ correspondant à cette dernière suite appartiennent à une famille normale; on peut en extraire une suite

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

convergeant uniformément, à l'intérieur de D, vers une fonction limite $\Phi(x)$; d'ailleurs,

$$z_0 = \Phi(x_0) = \nu(\alpha)$$

est un nombre fini, donc la fonction $\Phi(x)$ est finie; si D_1 est un domaine intérieur à D, les valeurs de $\Phi(x)$ sont à l'intérieur d'un domaine Γ_1 , situé tout entier au-dessus de $O\xi$, puisque les points de cet axe ne peuvent être que des points frontières du domaine Γ , correspondant à D par l'égalité $z = \Phi(x)$.

Soit

$$f_n(x) = \lambda[\varphi_n(x)]$$

la fonction qui a donné naissance à φ_n ; puisque $\lambda(z)$ est une fonction uniforme et régulière de z dans le domaine Γ_1 , lorsque la suite $\varphi_n(x)$ a pour limite $\Phi(x)$, x étant dans le domaine D_1 , la suite $f_n(x)$ converge uniformément vers la fonction

$$F(x) = \lambda[\Phi(x)].$$

Ainsi, de la suite des fonctions $f(x)$ choisie, on a extrait une suite nouvelle convergeant vers une fonction limite dans un domaine D_1 , quelconque intérieur à D. D'ailleurs cette fonction limite ne prend jamais dans D ni la valeur 0 ni la valeur 1, d'après le paragraphe 2.

Supposons maintenant que les nombres $f(x_0)$ n'aient pas d'autres valeurs limites que 1, 0, ∞ , pour les fonctions de la suite infinie considérée. Si 1 est une des valeurs limites des nombres $f(x_0)$, nous extrairons de la suite donnée une suite nouvelle S dans laquelle les nombres $f(x_0)$ auront la seule valeur limite 1.

Soient alors les fonctions

$$g(x) = \frac{\log f(x) + 2i\pi}{4i\pi}$$

dans lesquelles $\log f(x)$ est déterminé par la condition que, au point x_0 , sa partie imaginaire est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$ (limite inférieure exclue). Les fonctions $g(x)$ sont uniformes dans D puisque $X = f(x)$ ne tourne jamais autour du point 0; elles ne prennent ni la valeur 0, ni la valeur 1, puisque $f(x)$ ne prenant jamais la valeur 1, son logarithme n'est jamais égal ni à $-2i\pi$ ni à $+2i\pi$ (1). D'autre part, la suite des fonctions $g(x)$ correspondant à la suite S des fonctions $f(x)$ a pour limite $\frac{1}{2}$ au point x_0 . On peut extraire de cette suite des fonctions $g(x)$ une suite nouvelle

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots$$

convergeant uniformément dans tout domaine D_1 vers une fonction limite finie $G(x)$. Les fonctions $f_n(x)$ correspondantes ont pour limite la fonction

$$F(x) = e^{2i\pi(2G(x)-1)},$$

holomorphe dans le domaine D_1 . D'ailleurs, puisque $F(x_0) = 1$, $F(x)$ est identique à 1.

Si les nombres $f(x_0)$ ont l'unique limite 0, on remplacera les fonctions $f(x)$ par $1 - f(x)$ et l'on sera conduit au même résultat. Si les nombres $f(x_0)$ ont comme seule limite l'infini, on remplacera les fonctions $f(x)$ par les fonctions $\frac{1}{f(x)}$: ces dernières donnant naissance à une suite convergeant vers une fonction limite finie $F_1(x)$ qui est nécessairement nulle, les fonctions $f(x)$ correspondantes donneront naissance à une suite convergeant uniformément vers l'infini.

En résumé, étant donnée une suite infinie quelconque S , composée avec des fonctions $f(x)$, on peut extraire de la suite S une suite S' qui converge pour tous les points d'un domaine D_1 quelconque intérieur

(1) On peut aussi prendre les fonctions $g(x) = \frac{1 + \sqrt{f(x)}}{2}$.

à D vers une fonction limite finie ou vers l'infini. Les fonctions $f(x)$ forment donc une famille normale ⁽¹⁾.

9. Supposons qu'on fasse la représentation conforme du domaine D sur un domaine Δ ; les fonctions $f(x)$, holomorphes dans le domaine D , vont devenir des fonctions holomorphes dans le domaine Δ . Je dis qu'une famille (\mathcal{F}) de fonctions $f(x)$, normale dans le domaine D , conduit à une famille normale dans le domaine Δ . Soient, en effet, x et x' deux points correspondants de D et de Δ , la fonction $f(x)$ devient une fonction $\varphi(x')$, et l'on a

$$\varphi(x') = f(x).$$

Prenons une suite infinie de fonctions $f(x)$, on peut en extraire une suite S ,

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

convergeant uniformément vers une fonction limite finie ou infinie $F(x)$; la suite correspondante

$$\varphi_1(x'), \varphi_2(x'), \dots, \varphi_n(x'), \dots$$

convergera uniformément vers une fonction $\Phi(x')$ prenant en x' la même valeur que la fonction $F(x)$ au point correspondant x ; on aura

$$\Phi(x') = F(x).$$

Supposons qu'on prenne la famille (\mathcal{F}_1) , formée des fonctions $f(x)$ de l'ensemble (\mathcal{F}) qui, en un point x_0 intérieur à D , ont un module inférieur à un nombre fixe α , on a, pour toutes ces fonctions,

$$|f(x_0)| < \alpha.$$

Soit D_1 un domaine intérieur à D et contenant x_0 dans son intérieur; la famille (\mathcal{F}_1) est composée de fonctions bornées dans D_1 ; en d'autres termes, il existe un nombre $M(\alpha)$ tel que, pour toute fonction $f(x)$

⁽¹⁾ Dans le cas où la fonction limite est finie, elle n'est jamais égale à zéro ni à un, à moins qu'elle ne se réduise à la constante zéro ou à la constante unité.

de la famille (\mathfrak{F}_1) et pour tout point x de D_1 , on ait

$$|f(x)| < M(\alpha).$$

Au point x_0 de D correspond un point x'_0 de Δ , et au domaine D_1 intérieur à D et contenant x_0 correspond un domaine Δ_1 intérieur à Δ et contenant x'_0 . Alors toutes les fonctions $\varphi(x')$ correspondant aux fonctions $f(x)$ de la famille (\mathfrak{F}_1) ont, dans le domaine Δ_1 , des modules inférieurs au même nombre $M(\alpha)$

$$|\varphi(x')| < M(\alpha),$$

pour tout point x' de Δ_1 et pour toute fonction $\varphi(x')$.

Il peut arriver, comme nous le verrons, que la famille des fonctions $\varphi(x')$ coïncide avec la famille des fonctions $f(x)$; on en déduit alors que les fonctions $f(x)$ sont, en module, inférieures à une même limite $M(\alpha)$ dans D_1 et dans Δ_1 ; c'est une remarque que nous aurons souvent à utiliser.

10. Un grand nombre des résultats précédemment établis peuvent être étendus aux familles de fonctions harmoniques de deux ou de plus de deux variables. Je n'en donnerai qu'un seul exemple : soit

$$(3) \quad U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$$

une suite infinie de fonctions harmoniques de deux variables et telles que, en chaque point,

$$U_n \leq U_{n+1}.$$

Les fonctions U_n forment une famille normale; puisque, si l'on considère les fonctions harmoniques associées V_n et les fonctions

$$f(x) = U_n + iV_n,$$

les valeurs de $X = f(x)$ ne pénètrent jamais dans la région du plan des X , dont les points ont des abscisses inférieures au minimum de U_1 dans le domaine D considéré: les fonctions $f(x)$ forment donc une famille normale et il en est de même des U_n et des V_n .

Il résulte de là que la suite croissante (3) converge vers une fonction limite finie ou vers l'infini; si en un point particulier P , du

domaine D , les valeurs des V_n sont bornées, la suite converge vers une fonction finie qui est harmonique et la convergence est nécessairement uniforme. C'est le théorème de Harnack.

41. Proposons-nous maintenant d'étudier la famille (\mathcal{G}) formée par les fonctions $f(x)$ qui sont holomorphes dans le domaine D et qui ne prennent pas plus de p fois la valeur 0 ni la valeur 1 dans l'intérieur de ce domaine; en d'autres termes, les équations

$$(4) \quad f(x) = 0, \quad f(x) = 1$$

n'ont pas plus de p racines dans l'intérieur de D , p étant un entier fixe indépendant de la fonction $f(x)$ de la famille.

La famille (\mathcal{G}) n'est pas une famille normale, mais ses propriétés sont voisines de celles d'une famille normale : appelons *quasi-infinie* une fonction égale à l'infini en tous les points intérieurs de D , sauf en un nombre *fini* d'entre eux; nous pourrons alors énoncer le théorème suivant :

Soit (\mathcal{G}) la famille des fonctions $f(x)$ holomorphes dans le domaine connexe D , à l'intérieur duquel chacune de ces fonctions ne prend pas plus de p fois la valeur 0 ni la valeur 1; de toute suite infinie formée avec les fonctions $f(x)$, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément vers une fonction limite finie ou vers une fonction quasi-infinie.

Supposons qu'on ait marqué, dans le domaine D , les points racines des équations (4) pour toutes les fonctions $f(x)$ de la famille (\mathcal{G}) et soit E l'ensemble dérivé de ces points racines. Nous allons montrer qu'on peut tracer, autour de chaque point P intérieur à D , un cercle ayant ce point pour centre et tel que toute suite infinie de fonctions $f(x)$ admette, dans le cercle, au moins une fonction limite finie, ou bien augmente indéfiniment en tous les points du cercle, sauf peut-être au centre.

Supposons d'abord que le point P n'appartienne pas à E . On peut alors tracer un cercle C de centre P et de rayon assez petit pour que les équations (4) n'aient pas de racines dans ce cercle, sauf pour un

nombre fini d'entre elles. Si l'on forme une suite infinie S avec des fonctions de la famille (f) , cette suite infinie aura au moins une fonction limite finie ou infinie dans C .

Plaçons-nous maintenant dans le cas où le point P appartient à E et traçons un cercle γ de centre P et intérieur à D . Soit une suite infinie S

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

formée avec des fonctions $f(x)$. Ou bien, quelque petit que soit le cercle γ' concentrique et intérieur à γ , les équations

$$f_n(x) = 0$$

ont, à partir d'un certain rang, p racines dans γ' ; ou bien, il existe un cercle γ' pour lequel une infinité de fonctions de la suite S ont $p - 1$ racines au plus dans γ' . Remplaçons alors la suite $f_n(x)$ par la suite $f'_n(x)$ de ces fonctions et le cercle γ par le cercle γ' . Ou bien, quelque petit que soit le cercle γ'' concentrique et intérieur à γ' , les équations

$$f'_n(x) = 0$$

ont, à partir d'un certain rang, toutes leurs racines (en nombre au plus égal à $p - 1$) dans γ'' ; ou bien, il existe un cercle γ'' tel qu'une infinité de fonctions $f'_n(x)$ aient $p - 2$ racines au plus dans ce cercle γ'' . Dans ce cas, nous remplaçons la suite $f'_n(x)$ par la suite $f''_n(x)$ de ces fonctions et le cercle γ' par le cercle γ'' . En continuant ainsi, nous arriverons à un cercle γ_1 et à une suite $f_{n_1}(x)$ extraite de S et telle que les équations

$$f_{n_1}(x) = 0$$

aient toujours, à partir d'un certain rang, toutes leurs racines dans un cercle quelconque arbitrairement petit concentrique à γ_1 , ou bien n'aient aucune racine dans γ_1 .

Raisonnons maintenant sur la suite $f_{n_1}(x)$ en nous occupant des équations

$$f_{n_1}(x) = 1.$$

En reprenant le même mode de démonstration, nous serons con-

duits à un cercle C de centre P et à une suite $f_\nu(x)$ extraite de S telle que, ou bien les équations

$$f_\nu(x) = 0, \quad f_\nu(x) = 1$$

n'aient pas de racines dans C et la suite $f_\nu(x)$ a, dans ce cas, au moins une fonction limite dans C , ou bien aient, à partir d'une certaine valeur de ν toutes leurs racines dans un cercle C' arbitrairement petit, concentrique et intérieur à C . Dans la couronne limitée par C et C' , les fonctions $f_\nu(x)$ ne prennent, à partir d'un certain rang, ni la valeur 0, ni la valeur 1; on peut donc extraire de la suite $f_\nu(x)$ une suite nouvelle $f_{\nu'}(x)$ qui, à l'intérieur de la couronne, converge uniformément vers une fonction limite finie ou vers l'infini. Dans le premier cas, la suite $f_{\nu'}(x)$ converge nécessairement dans le cercle C tout entier vers une limite finie, puisque les fonctions $f(x)$ sont régulières dans ce cercle; dans le second cas, la suite $f_{\nu'}(x)$ augmente indéfiniment en tout point de C , sauf peut-être au centre P , car si l'on remplace le cercle C' par un cercle concentrique et plus petit C'' , et si, en un point de la couronne CC'' , la suite $f_{\nu'}(x)$ n'augmentait pas indéfiniment, on pourrait extraire de cette suite une suite nouvelle qui convergerait dans la couronne vers une fonction limite partout finie, ce qui est impossible, puisque les nombres $f_{\nu'}(x)$ augmentent indéfiniment en tous points intérieurs à la couronne CC' contenue dans la couronne CC'' . On peut d'ailleurs supposer que, au point P , la suite finale converge vers une valeur limite, il suffit de choisir, parmi les fonctions $f_{\nu'}(x)$, une infinité d'entre elles convergeant en P vers une de leurs valeurs limites.

Soit maintenant D_1 , un domaine intérieur à D ; chaque point P de D_1 est le centre d'un cercle dans lequel la suite S admet au moins une fonction limite finie ou quasi-infinie. Il est possible de recouvrir entièrement le domaine D_1 à l'aide d'un nombre fini m de ces cercles, soient C_1, C_2, \dots, C_m ayant pour centres les points P_1, P_2, \dots, P_m .

De la suite S , on peut extraire une suite nouvelle

$$f_1^1(x), f_2^1(x), \dots, f_h^1(x), \dots$$

qui converge dans C_1 vers une limite holomorphe ou bien vers l'infini, sauf, peut-être, en P_1 .

De la suite $f_n'(x)$, on peut extraire une suite

$$f_1^2(x), f_2^2(x), \dots, f_n^2(x), \dots$$

qui converge dans C_1 et C_2 vers des fonctions limites finies ou quasi-infinies. En continuant ainsi, on arrivera à une suite

$$f_1^m(x), f_2^m(x), \dots, f_n^m(x), \dots$$

qui converge dans C_1, C_2, \dots, C_m vers une fonction limite $F(x)$. Je dis que si $F(x)$ est infinie dans l'un des cercles, elle est infinie dans tous les cercles (les centres peut-être exceptés) : en effet, si $F(x)$ est infinie dans un cercle C , elle l'est nécessairement dans tous les cercles voisins, puisque ceux-ci coupent le cercle C et que dans chaque cercle, F est finie partout ou infinie partout, sauf peut-être au centre ; de proche en proche, on voit que si $F(x)$ est infinie dans un cercle, elle l'est dans tout le domaine D_1 . Donc, ou bien $F(x)$ est partout finie dans D_1 , ou bien elle est infinie, sauf peut-être aux points P_1, P_2, \dots, P_m , en nombre limité. En définitive, $F(x)$ est finie ou quasi-infinie et la proposition est établie. Nous dirons que la famille (f) est une famille *quasi-normale*.

Donnons un exemple de famille quasi-normale : soit $Q(x)$ un polynôme de degré p admettant comme zéros p points P_1, P_2, \dots, P_p du domaine D et $R_n(x)$ un polynôme de degré p au plus à coefficients bornés, la suite

$$f_n(x) = nQ(x) + R_n(x)$$

est quasi-normale, car en tout point différent de P_1, P_2, \dots, P_p , $f_n(x)$ augmente indéfiniment ; on peut extraire de cette suite une suite nouvelle qui, en chaque point P_k , converge vers l'une des valeurs limites des polynômes $R_n(x)$ en ce point.

12. Un cas particulier intéressant nous est fourni par la famille (g_0) , formée par les fonctions $f(x)$, qui sont holomorphes dans le domaine D , qui ne prennent jamais dans D la valeur 0 et ne prennent pas plus de p fois la valeur 1. Cette famille est normale.

D'abord la famille (g_0) est quasi-normale ; de toute suite infinie S formée avec des fonctions $f(x)$, on peut extraire une suite nouvelle

convergeant uniformément vers une fonction holomorphe limite ou vers l'infini en tous les points intérieurs de D , sauf en un nombre fini de ces points P_1, P_2, \dots, P_k . Montrons que cette dernière hypothèse est impossible : pour cela, entourons le point P_i d'un petit cercle C_i de centre P_i et assez petit pour être contenu dans le domaine D et laisser à l'extérieur tous les autres points P . Dans le domaine fermé formé par le cercle C_i , les fonctions $\frac{1}{f_n(x)}$ de la suite sont régulières, elles convergent uniformément vers 0 sur la frontière, elles convergent donc vers 0 dans tout le cercle C_i . On en déduit aisément que la suite $\frac{1}{f_n(x)}$ converge uniformément vers 0 dans l'intérieur de D et, par conséquent, que la suite $f_n(x)$ converge uniformément vers l'infini dans l'intérieur de D . La famille (g_0) est donc une famille normale.

On peut aussi donner de cette proposition une démonstration directe qui est plus instructive. Considérons les fonctions

$$g(x) = [f(x)]^{\frac{1}{p+1}}$$

définies par la condition que, en un point x_0 de D , le nombre $g(x_0)$ ait une valeur bien déterminée, par exemple soit égal à la racine $(p+1)^{\text{ième}}$ de $f(x)$, dont l'argument est compris entre 0 et $\frac{2\pi}{p+1}$; la fonction $g(x)$ est uniforme et régulière dans D , puisque $f(x)$ ne s'annule pas dans ce domaine. En un point où $f(x)$ prend la valeur 1, $g(x)$ est égale à l'une des racines $(p+1)^{\text{ièmes}}$ de l'unité, et comme $f(x)$ ne prend pas plus de p fois la valeur 1, il y aura au moins une racine $(p+1)^{\text{ième}}$ de l'unité à laquelle $g(x)$ ne sera jamais égale dans D . Soit ω cette racine, la fonction $\frac{g(x)}{\omega}$ est holomorphe dans D et ne prend jamais la valeur 0 ni la valeur 1 dans ce domaine; la famille des fonctions $\frac{g(x)}{\omega}$ est normale; on en déduit aussitôt que la famille des fonctions

$$f(x) = \left[\frac{g(x)}{\omega} \right]^{p+1}$$

est aussi une famille normale (1).

(1) On aurait pu prendre aussi la famille $g(x) = \log f(x)$; remarquons en outre que

13. Considérons maintenant une famille de fonctions $f(x)$ holomorphes dans D . Désignons par E_0 l'ensemble dérivé des points racines des équations

$$(5) \quad f(x) = 0,$$

et par E_1 l'ensemble dérivé des points racines des équations

$$(6) \quad f(x) = 1.$$

Nous pouvons substituer, dans les raisonnements du paragraphe 11, à l'ensemble E dérivé des points racines des équations (5) et (6), c'est-à-dire à l'ensemble formé par la réunion des points de E_0 et de ceux de E_1 , l'ensemble F formé par les points communs à E_0 et à E_1 . Cet ensemble F est évidemment fermé. Dans ces conditions, autour de chaque point P intérieur à D , la famille (g) est une famille normale si le point P n'appartient pas à F et une famille quasi-normale si ce point appartient à F . D'une manière plus précise, on peut, autour de chaque point P intérieur à D , tracer un cercle de centre P et de rayon assez petit pour que, dans ce cercle, la famille soit normale ou quasi-normale. De toute suite infinie de fonctions $f(x)$, on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément, à l'intérieur de D , vers une fonction limite finie ou vers une fonction qui est infinie, sauf pour un nombre limité de points *appartenant* à F .

Considérons alors la famille (g_1) , constituée par les fonctions $f(x)$ de la famille (g) , qui sont bornées en un point x_0 *intérieur* à D et *n'appartenant pas* à F . C'est une famille de fonctions bornées également continues dans l'intérieur de D , puisque de toute suite infinie de fonctions de (g_1) , on peut extraire une suite nouvelle convergeant uniformément dans D vers une fonction limite qui, étant finie en un point x_0 n'appartenant pas à F , est nécessairement finie dans D .

Soit encore la famille (g_2) , constituée par les fonctions $f(x)$ de la famille (g) qui sont *bornées en une infinité de points intérieurs* à D dans leur ensemble ⁽¹⁾. Cette famille est aussi également continue, car toute

si $x = x_1$ est une racine multiple de l'équation $f(x) = 1$, nous ne compterons cette racine qu'une fois dans l'évaluation du nombre p .

(1) Nous dirons qu'une infinité de points sont intérieurs à D dans leur ensemble, lorsqu'ils admettent au moins un point limite intérieur à D .

suite infinie formée de fonctions de (\mathcal{G}_2) donne naissance à une suite convergeant uniformément dans l'intérieur de D vers une fonction limite qui, étant finie pour une infinité de points d'un domaine D_1 intérieur à D est finie en une infinité de points n'appartenant pas à F .

14. Soit maintenant une famille quelconque de fonctions $f(x)$ holomorphes dans D et désignons toujours par F l'ensemble commun à E_0 et à E_1 , c'est-à-dire l'ensemble des points qui sont à la fois limites pour les racines de l'équation (5) et pour les racines de l'équation (6). Soit P un point de F , traçons un cercle C de centre P et intérieur à D et désignons par μ et μ' les nombres des racines distinctes des équations (5) et (6) contenues dans le cercle C ; ou bien, quelque petit que soit le cercle C , l'un au moins des nombres μ ou μ' a une borne supérieure infinie, ou bien on peut trouver un cercle C dans lequel les nombres μ et μ' restent inférieurs à un entier fixe p . Dans le premier cas, le point P sera dit un point de F d'ordre *infini*; dans le second, le point P sera dit un point de F d'ordre *fini*; dans le cercle C qui correspond à un point P d'ordre fini, la famille des fonctions $f(x)$ est quasi-normale. Soit F_0 l'ensemble des points de F d'ordre fini, F_1 l'ensemble des points d'ordre infini; l'ensemble F_1 est fermé, mais l'ensemble F_0 ne l'est pas nécessairement.

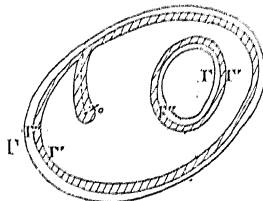
15. Supposons d'abord que l'ensemble F_1 ne contienne aucun point; je dis que la famille est quasi-normale dans D . Soit, en effet, D_1 un domaine intérieur à D , chaque point P de D_1 appartient à F_0 ou bien n'est pas un point de F . On peut donc tracer autour de chaque point P un cercle dans lequel les nombres μ et μ' sont bornés supérieurement. D'après le théorème de Borel-Lebesgue, on peut recouvrir entièrement le domaine D_1 à l'aide d'un nombre fini de tels cercles: on en conclut immédiatement que les nombres μ et μ' sont bornés dans D_1 et que la famille est quasi-normale dans D_1 , quel que soit D_1 ; elle est donc quasi-normale dans D .

16. Supposons maintenant que l'ensemble fermé F_1 puisse être arbitrairement distribué dans D avec les restrictions suivantes: F_1 n'est pas d'un seul tenant avec la frontière Γ de D et ne morcèle pas ce

domaine : nous entendons, par cette dernière expression, que deux points intérieurs à D et n'appartenant pas à F_1 (et il y a de tels points puisque F_1 n'est pas d'un seul tenant avec Γ) peuvent être joints par une courbe ne contenant aucun point de F_1 (1).

Soit alors S une suite infinie de fonctions de la famille; ou bien, en tout point n'appartenant pas à F , la suite augmente indéfiniment, ou bien il existe au moins un point x_0 n'appartenant pas à F , en lequel les valeurs des fonctions de S ont une de leurs limites finie. Nous extrayons alors de la suite S une suite nouvelle S' telle que, au point x_0 , les fonctions de S' aient une limite finie. Puisque F_1 ne morcèle pas le domaine, nous pouvons tracer une courbe γ unissant le point x_0 à Γ et ne contenant aucun point de F_1 . Traçons, à l'intérieur du domaine D , une courbe Γ' très voisine de la courbe formée par Γ et γ , laissant γ à l'extérieur et telle que, entre Γ' et les courbes Γ et γ , il n'y ait aucun point de F_1 , ce qui est possible, puisque F_1 est fermé et que les courbes Γ et γ ne contiennent aucun point de F_1 , et dans la région limitée par Γ' et Γ traçons une courbe Γ'' intérieure à D , très voisine de Γ et limitant ainsi un domaine D_1 intérieur à D et contenant x_0 (*fig. 2*). Nous désignerons par δ la région couverte de hachures sur

Fig. 2.



la figure, située entre les courbes Γ' et Γ'' , qui sont composées d'autant de morceaux que Γ .

La région δ ne contient aucun point de F_1 ; donc, dans cette région, les fonctions $f(x)$ forment une famille quasi-normale; la suite S' est bornée en x_0 , qui n'appartient pas à F , on peut en extraire une suite S'' convergeant uniformément dans le domaine δ vers une limite

(1) Si F_1 comprenait une partie de Γ et un ensemble F_2 , non d'un seul tenant avec Γ , on remplacerait Γ par une courbe voisine intérieure à D et contenant F_2 .

finie et, par conséquent, convergeant uniformément dans D_1 vers une fonction holomorphe limite. Donc, de toute suite S formée avec des fonctions de la famille, qui n'augmente pas indéfiniment en tous les points n'appartenant pas à F , on peut extraire une suite nouvelle admettant une fonction limite finie. Il en sera, en particulier, toujours ainsi, si les fonctions $f(x)$ sont bornées en un point intérieur à D n'appartenant pas à F ; donc : *Si une famille de fonctions holomorphes dans un domaine D est bornée en un point intérieur de ce domaine, point qui n'est pas à la fois limite des racines des équations*

$$f(x) = 0, \quad f(x) = 1;$$

si l'ensemble F , de ceux de ces points limites communs, qui sont d'ordre infini, ne morcèle pas le domaine et n'est pas d'un seul tenant avec la frontière Γ , la famille est également continue et, par conséquent, bornée dans l'intérieur du domaine.

Dans le cas où l'ensemble F_1 est discontinu dans le domaine fermé D , il ne peut morceler le domaine, ni être d'un seul tenant avec la frontière : le théorème est applicable. Un cas plus particulier encore est celui où F_1 est un ensemble dénombrable.

Enfin, le théorème est encore applicable dans le cas où F_1 morcèle le domaine, à condition cependant qu'il ne soit pas d'un seul tenant avec Γ et que le point x_0 puisse être joint à la frontière par une courbe ne contenant aucun point de F_1 . Il suffit de répéter les raisonnements qui précèdent; donc : *Si l'ensemble F_1 n'est pas d'un seul tenant avec la frontière Γ du domaine D , dans lequel les fonctions $f(x)$ sont holomorphes et si, en un point x_0 n'appartenant pas à F et pouvant être joint à la frontière par une courbe ne contenant aucun point de F_1 , les fonctions sont bornées, elles forment dans le domaine D une famille également continue.*

17. Je n'insiste pas sur les généralisations immédiates des théorèmes précédents, obtenues en substituant, aux nombres 0 et 1, des nombres quelconques a et b ou des nombres, variables avec la fonction $f(x)$, mais qui demeurent bornés ainsi que l'inverse de leur différence. On peut aussi remplacer les nombres a et b par des fonctions $a(x)$ et $b(x)$ holomorphes dans D et prendre, en particulier,

deux fonctions de la famille $f(x)$. Par exemple, si l'on fait jouer aux points d'intersection de deux fonctions $f(x)$ le rôle rempli, dans ce qui précède, par les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ est égale à 0 ou à 1, on obtient une série de cas dans lesquels la famille des fonctions $f(x)$ est normale ou également continue. Ces points d'intersection s'introduisent naturellement dans les recherches de M. P. Boutroux sur les fonctions limites de fonctions multiformes (1).

CHAPITRE II.

LES THÉORÈMES DE M. PICARD ET LEURS GÉNÉRALISATIONS.

18. Nous appliquerons tout d'abord les considérations qui précèdent à la démonstration des théorèmes de M. Picard, relatifs aux valeurs d'une fonction uniforme dans le voisinage d'un point singulier isolé :

1° Une fonction entière prend une infinité de fois toutes les valeurs, sauf une au plus ;

2° Une fonction uniforme, dans le voisinage d'un point essentiel isolé, prend toutes les valeurs, sauf deux au plus, à l'intérieur d'un cercle arbitrairement petit ayant ce point comme centre (2).

Le premier de ces théorèmes a été démontré par son auteur, en utilisant la fonction modulaire elliptique $v(X)$ du paragraphe 8 ; le second, par l'emploi d'une fonction modulaire elliptique et l'étude des substitutions qui laissent cette fonction invariable. Nous allons nous appuyer seulement sur l'existence de la fonction modulaire qui nous

(1) P. BOUTROUX, *Fonctions multiformes à une infinité de branches* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3^e série, t. XXII, 1905 ; *Sur les fonctions limites des fonctions multiformes* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXIV, 2^e sem. 1907) ; *Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre*, p. 25 et suiv. Paris, Gauthier-Villars ; 1908.

(2) E. PICARD, *Comptes rendus*, t. LXXXVIII, 1879. p. 1024-1027 ; t. LXXXIX, 1879, p. 662-665 et p. 745-747) ; *Mémoire sur les fonctions entières* (*Annales de l'École Normale*, 2^e série, t. IX, 1880).

a permis de démontrer que les fonctions uniformes dans un domaine où elles ne prennent ni la valeur 0 ni la valeur 1, forment dans ce domaine une famille normale.

19. Soit $f(x)$ une fonction entière, dont on suppose qu'elle ne prenne dans le plan aucune des deux valeurs a et b . On peut toujours supposer que ces valeurs sont 0 et 1 en remplaçant, s'il y a lieu, la fonction $f(x)$ par la fonction

$$\frac{f(x) - a}{b - a}.$$

Désignons par a_0 la valeur de $f(0)$. Toutes les fonctions holomorphes qui, dans le cercle de rayon 1, ne sont égales ni à 0 ni à 1 et prennent à l'origine la valeur a_0 , forment une famille (\mathcal{F}) également continue et, par conséquent, sont bornées dans un cercle quelconque de rayon plus petit que 1. Dans le cercle de rayon $\frac{1}{2}$, par exemple, les modules de ces fonctions sont inférieurs à un nombre fixe $M(a_0)$. Je dis que les fonctions $f_1(x')$, égales à a_0 à l'origine, holomorphes dans le cercle de rayon R , où elles ne prennent ni la valeur 0, ni la valeur 1, qui forment une famille également continue (\mathcal{F}_1) , sont, dans le cercle concentrique de rayon $\frac{R}{2}$, inférieures en module au même nombre $M(a_0)$. En effet, la transformation

$$x' = Rx$$

permet de passer d'une fonction $f(x)$ de la famille (\mathcal{F}) à une fonction $f_1(x') = f(Rx)$ de la famille (\mathcal{F}_1) et inversement, si $f_1(x')$ est relative au cercle de rayon R , la fonction $f(x) = f_1\left(\frac{x'}{R}\right)$ sera relative au cercle de rayon 1. Le nombre $M(a_0)$ est le même pour les deux familles (\mathcal{F}) et (\mathcal{F}_1) . C'est un cas particulier de la remarque que nous avons faite au paragraphe 9 sur les domaines qui se déduisent l'un de l'autre par une représentation conforme.

Il résulte de ce qui précède que $|f(x)| < M(a_0)$, dans un cercle quelconque : d'après le théorème de Liouville, $f(x)$ ne peut être qu'une constante.

J'ai exposé cette démonstration parce qu'elle va nous servir de guide

pour établir le deuxième théorème de M. Picard et parce qu'elle contient les généralisations récentes de ce théorème que nous en extrairons plus loin.

20. Donnons maintenant du deuxième théorème, une démonstration qui est particulièrement simple : elle repose sur l'emploi du théorème de Weierstrass relatif aux points essentiels ⁽¹⁾ et sur les propriétés des familles normales. Imaginons que $f(x)$ admette, autour du point origine, trois valeurs exceptionnelles, que nous pourrions toujours supposer être 0, 1, ∞ .

Considérons deux cercles C' et C'' , de rayon $\frac{R}{2}$ et $2R$, ayant l'origine pour centre et un point x_0 situé à la distance R de l'origine. Les fonctions $f(x)$, qui ne prennent ni la valeur 0 ni la valeur 1 dans l'anneau C', C'' , forment une famille normale; considérons, en particulier, celles de ces fonctions qui ont, au point x_0 , un module inférieur à un nombre fixe α . Elles forment une famille (\mathcal{F}) également continue et restent inférieures en module à un nombre fixe $M(\alpha)$ sur le cercle C de centre origine et de rayon R .

Ce nombre $M(\alpha)$ ne dépend pas de R ; en effet, la transformation conforme

$$x' = x_0 x$$

fait correspondre au point x_0 le point 1, aux cercles C, C', C'' , des cercles $\Gamma, \Gamma', \Gamma''$, de rayons 1, $\frac{1}{2}$, 2, concentriques à l'origine et, à la famille (\mathcal{F}) relative au point x_0 et à l'anneau C', C'' , une famille (\mathcal{F}_1) relative à l'anneau $\Gamma\Gamma''$ et au point 1. Le nombre $M(\alpha)$ est le même pour les deux anneaux $\Gamma\Gamma''$ et $C'C''$. Soit alors une fonction $f(x)$, uniforme autour de l'origine, qui est pour cette fonction un point singulier essentiel isolé; d'après le théorème de Weierstrass,

⁽¹⁾ Je me sers ici du théorème de Weierstrass de la même manière que M. Lindelöf dans les démonstrations qu'il a données du second théorème de M. Picard. Voir E. LINDELÖF, *Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, t. XXXV, n° 7, 1908); *Sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions monogènes* (*Compte rendu du Congrès de Stockholm*, 1909, p. 112-136).

on peut trouver une infinité de points $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ ayant pour unique point limite l'origine et en chacun desquels le module de $f(x)$ ne dépasse pas α , il suffit de choisir ces points de manière que

$$\left| f(x) - \frac{\alpha}{2} \right| < \frac{\alpha}{2}.$$

La fonction $f(x)$ appartenant, quel que soit R assez petit, à toutes les familles telles que (\mathcal{F}), on en déduit que cette fonction est inférieure en module à $M(\alpha)$, sur tous les cercles de centre origine et passant par les points $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$; entre deux cercles consécutifs quelconques, le module de $f(x)$ sera aussi inférieur à $M(\alpha)$. On en conclurait que la fonction $f(x)$ est bornée dans le voisinage de l'origine, ce qui est en contradiction avec le théorème de Weierstrass. La proposition est établie (¹).

21. En 1896, M. Borel (²) a donné, du premier théorème de M. Picard, une démonstration élémentaire, c'est-à-dire une démonstration qui n'introduit pas la fonction modulaire, et en 1904, M. Schottky (³) a donné une démonstration élémentaire du second théorème, démonstration qui s'appuie sur les idées de M. Borel et utilise, en les précisant, ses inégalités; toujours dans la même voie, M. Lindelöf (⁴) a simplifié la démonstration de M. Schottky.

Or, il est bien facile, en utilisant un des résultats établis par M. Schottky, de démontrer, par une voie élémentaire, le théorème du paragraphe 8, sur lequel repose la démonstration du second théorème de M. Picard que nous venons de donner. Le théorème fondamental

(¹) On remarquera que la démonstration n'utilise pas entièrement le théorème de Weierstrass : elle suppose seulement que $f(x)$ prenne dans le voisinage du point singulier, d'une part, une infinité de valeurs aussi voisines qu'on le veut d'une valeur exceptionnelle, l'infini, par exemple, d'autre part une infinité de valeurs non voisines de cette valeur exceptionnelle.

(²) E. BOREL, *Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Picard sur les fonctions entières* (*Comptes rendus*, t. CXXII, 1896, p. 1045-1048); *Leçons sur les fonctions entières*, Note I.

(³) F. SCHOTTKY, *Ueber den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen* (*Sitzungsberichte der Kön. Preussischen Akad. der Wissenschaften*, t. XLII, 1904, p. 1244-1262); *Ueber zwei Beweise des allgemeinen Picardschen Satzes* (*Ibid.*, t. XLVI, 1907).

(⁴) E. LINDELÖF, *Compte rendu du Congrès de Stockholm*, 1909.

de M. Schottky est le suivant : Une fonction $f(x)$, ne prenant ni la valeur 0, ni la valeur 1 dans un cercle de centre origine et de rayon R , a , dans le cercle concentrique de rayon $\frac{R}{2}$, un module inférieur à un nombre fixe $M(a_0)$, ne dépendant que de la valeur a_0 de $f(x)$ à l'origine.

On peut prendre, par exemple,

$$M(a_0) = e^{\frac{2^{2x}}{\sqrt{x}}},$$

en désignant par x le plus petit des nombres

$$|\log a_0|, \quad |\log(1 - a_0)|, \quad \left| \log \left(1 - \frac{1}{a_0} \right) \right|,$$

les logarithmes étant pris avec leur détermination principale; on déduit aussitôt de là que, si les nombres

$$a_0, \quad \frac{1}{a_0}, \quad 1 - a_0$$

ont un module supérieur à un nombre fixe ε , les fonctions $f(x)$ correspondantes sont bornées dans leur ensemble dans le cercle de rayon $\frac{R}{2}$. Il faudrait en déduire, pour arriver au théorème fondamental du paragraphe 8, que le même résultat subsiste, en supposant seulement un seul de ces modules supérieur à un nombre fixe, par exemple en supposant tous les a_0 bornés. En effet, si de cette hypothèse on conclut que les fonctions sont bornées dans le cercle de rayon $\frac{R}{2}$, il sera bien facile, en partant d'un point x_0 intérieur à un domaine D et en supposant que tous les $f(x_0)$ sont bornés, de démontrer qu'il en est de même dans tout domaine D_1 intérieur à D . Il suffira de remplacer x_0 par un point de la circonférence du cercle de rayon $\frac{R}{2}$ et de continuer de proche en proche, en prenant chaque fois pour le cercle de rayon R le plus grand cercle contenu dans D . Il faudrait donc démontrer que la famille (\mathcal{F}) des fonctions holomorphes dans le cercle de centre origine et de rayon R , ne prenant dans ce cercle ni la valeur 0 ni la valeur 1 et prenant à l'origine des valeurs a_0 telles

que $|a_0| < \alpha$, sont, dans le cercle concentrique de rayon $\frac{R}{2}$, inférieures en module à un nombre fixe $M(\alpha)$. Ce théorème a été démontré par M. Landau, et M. Bernays en a donné une démonstration fort simple qui permet de le déduire du résultat de M. Schottky (1). Il nous suffira, pour l'établir, de répéter les raisonnements de la fin du paragraphe 8 : soit S une suite infinie de fonctions appartenant à la famille (\mathcal{F}), on extraira de cette suite, une suite S' pour laquelle les valeurs a_0 ont pour unique limite α_0 ; si α_0 est différent de 0 ou de 1, il résulte, du théorème de M. Schottky, que cette suite est également continue : on peut donc en extraire une suite S'' convergeant vers une fonction limite dans le cercle de rayon $\frac{R}{2}$.

Supposons que le nombre α_0 soit égal à 1; nous considérerons les fonctions

$$g(x) = \frac{\log f(x) + 2i\pi}{4i\pi}$$

(dans lesquelles on donne à la partie imaginaire de $\log \alpha_0$ une valeur comprise entre $-\pi$ et $+\pi$, limite inférieure exclue), et nous raisonnerons comme au paragraphe 8. Si le nombre α_0 est égal à 0, on remplacera f par $1 - f$.

Donc, dans tous les cas, toute suite infinie composée de fonctions de la famille (\mathcal{F}) admet au moins une fonction limite : cette famille est donc normale dans le cercle de rayon $\frac{R}{2}$, et comme les fonctions sont bornées à l'origine, elles sont bornées dans ce cercle.

22. Le procédé de démonstration que nous avons utilisé pour le second théorème de Picard va nous conduire à des propositions dues à M. Lindelöf (2), que nous obtiendrons ainsi très simplement et compléterons, ainsi qu'à des propositions nouvelles. Il nous suffira de remplacer les anneaux du paragraphe 20 par des secteurs annulaires convenablement choisis.

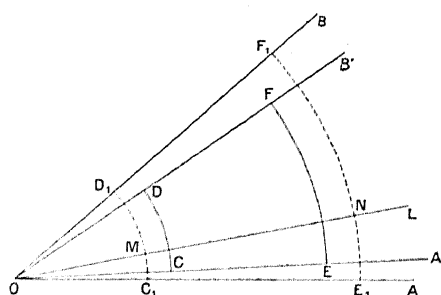
(1) Voir H. BOHR und E. LANDAU, *Ueber das Verhalten von $\zeta(s)$ und $\zeta_2(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$* (Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1910, p. 309). MM. Landau et Carathéodory ont publié la démonstration de M. Bernays dans leur Mémoire, *Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen* (Sitzungsberichte der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1911, p. 597).

(2) *Loc. cit.*

Soit $f(x)$ une fonction régulière à l'intérieur d'un secteur AOB où elle ne prend ni la valeur 0 ni la valeur 1 : Supposons que, x tendant vers zéro sur une droite OL intérieure au secteur, la fonction $f(x)$ demeure bornée ; cette fonction sera bornée dans un secteur A'OB' comprenant OL, dont les rayons extrêmes OA' et OB' sont aussi voisins qu'on le veut de OA et de OB.

Traçons des arcs de cercles de centre O et de rayons $R < OA$ et $\frac{R}{2}$, ces arcs coupent OA' en C et E, OB' en D et F (fig. 3). Supposons que

Fig. 3.



sur OL le module de $f(x)$ ne dépasse pas α , je dis que dans le quadrilatère curviligne CDEF, le module de $f(x)$ reste inférieur à un nombre $M(\alpha)$ indépendant de R , pourvu que R soit inférieur à OA . Considérons, en effet, le quadrilatère curviligne $C_1D_1E_1F_1$, formé par les droites OA et OB et par les cercles de centre O et de rayons $R(1 + \varepsilon)$ et $\frac{R}{2}(1 - \varepsilon)$, ε étant un nombre positif inférieur à 1 et tel que $R(1 + \varepsilon) < OA$. Toutes les fonctions $f(x)$ régulières dans ce quadrilatère, ne prenant dans son intérieur aucune des valeurs 0 ou 1 qui, en un point fixe, le milieu de MN, par exemple (M et N étant les points de rencontre de OL et des arcs C_1D_1 , E_1F_1), ont des valeurs dont le module ne dépasse pas α , sont bornées dans tout domaine intérieur à ce quadrilatère : par exemple, dans le domaine CDEF, le module de ces fonctions ne dépassera pas un nombre fixe $M(\alpha)$.

Je dis que $M(\alpha)$ ne dépend pas de R : remplaçons, en effet, x par $\frac{x'}{k}$, k étant un nombre positif, dans les fonctions $f(x)$; nous obtenons des fonctions $f_1(x') = f\left(\frac{x'}{k}\right)$; soit $C'D'E'F'$ le quadrilatère déduit

de CDEF par une homothétie de centre O et de rapport k . La transformation $x' = kx$ fait correspondre à la famille des fonctions $f(x)$ du domaine CDEF la famille des fonctions $f_1(x')$, qui possèdent les mêmes propriétés dans le quadrilatère C'D'E'F', et les fonctions $f_1(x')$ prennent, dans ce dernier quadrilatère, les mêmes valeurs que les fonctions $f(x)$ dans le premier. Le nombre $M(\alpha)$ est donc le même dans les deux cas. Si $k < 1$, la fonction particulière $f(x)$, que nous étudions, appartient à tous les quadrilatères C'D'E'F'; on a donc

$$|f(x)| < M(\alpha)$$

dans tout le secteur A'OB'; le nombre $M(\alpha)$ ne dépend pas de la fonction particulière $f(x)$ considérée, mais seulement de α et de la configuration géométrique introduite (1). En remplaçant $f(x)$ par $\frac{1}{f(x)}$ ou par $\frac{1}{1-f(x)}$, on voit que, si pour la fonction $f(x)$ le module de $f(x)$ ou de $1 - f(x)$ reste supérieur à un nombre fixe sur le rayon OL, il en sera de même dans tout le secteur A'OB'.

23. Je démontrerai maintenant un théorème plus précis : *Si la fonction $f(x)$ a pour limite le nombre α lorsque x tend vers zéro sur le rayon OL, elle tend uniformément vers α lorsque x tend vers zéro à l'intérieur du secteur A'OB' comprenant OL, et dont les rayons extrêmes OA' et OB' sont aussi voisins qu'on le veut de OA et OB.* On suppose toujours que $f(x)$ soit régulière dans le secteur et ne prenne ni la valeur 0, ni la valeur 1.

(1) On peut remarquer qu'il n'est pas nécessaire de donner à k toutes les valeurs inférieures à 1, mais une infinité dénombrable de ces valeurs choisies de manière que les quadrilatères C'D'E'F' balayent tout le secteur A'OB'. On peut prendre, par exemple, toutes les valeurs $\frac{1}{2^n}$. Il n'est donc pas nécessaire pour notre conclusion que $f(x)$ soit supposée bornée en tout point de OL; il suffit que pour une infinité de points distribués sur OL et tels que le rapport des distances à O de deux points consécutifs soit égal à $\frac{1}{2}$, le module de $f(x)$ ne dépasse pas α . Il suffit même que ce rapport ait sa plus grande limite différente de zéro.

Reprenons le raisonnement précédent et donnons à k les valeurs $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, ..., $\frac{1}{2^n}$, ...; soient les fonctions

$$f_1(x) = f\left(\frac{x}{2}\right), \quad f_2(x) = f\left(\frac{x}{2^2}\right), \quad \dots, \quad f_n(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right), \quad \dots$$

considérées à l'intérieur du quadrilatère CDEF; sur le segment MN, ces fonctions ont pour limite α , car pour n assez grand, $f_n(x)$ prend sur le segment MN les mêmes valeurs que $f(x)$ sur un segment très voisin de l'origine et placé sur OL. Or les fonctions $f_n(x)$ forment une famille normale convergeant vers α en tout point de MN; cette famille converge donc, dans le quadrilatère CDEF, vers une fonction holomorphe qui ne peut être que la constante α . La convergence étant uniforme, on a, pour $n \geq p$, $|f_n(x) - \alpha| < \varepsilon$, ε étant donné; or, les valeurs de $f_n(x)$, dans le quadrilatère CDEF, sont les mêmes que celles de $f(x)$ dans le quadrilatère homothétique C'D'E'F', le centre d'homothétie étant au point O et le rapport égal à $\frac{1}{2^n}$. Donc, pour tous les points contenus dans le secteur limité par OA' et OB' et le cercle de rayon $\frac{R}{2^p}$, secteur formé par la réunion de tous les quadrilatères C'D'E'F' pour $n \geq p$, on a

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Si $f(x)$ augmente indéfiniment sur le rayon OL, on peut appliquer le même raisonnement à $\frac{1}{f(x)}$, et l'on voit que $f(x)$ tend uniformément vers l'infini dans le secteur A'OB' (¹).

24. Nous avons vu, au paragraphe 22, que si $f(x)$ reste bornée lorsque x tend vers zéro sur un rayon OL, il en est de même pour tout rayon contenu dans le secteur AOB. Il en résulte que si, pour un

(¹) Dans son Mémoire (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXXV, n° 7, 1908), M. Lindelöf a établi que si $f(x)$ tend vers α sur un rayon OL, cette fonction ne peut tendre vers une limite différente de α sur aucun rayon OL' intérieur au secteur AOB. Il ajoute qu'il n'a pu réussir ni à former une fonction n'ayant pas pour limite α sur les rayons OL' ni à démontrer qu'il ne peut en exister. Le théorème établi dans le texte montre que cette dernière hypothèse est exacte.

rayon intérieur OL, une des valeurs limites de $f(x)$ est infinie, il en est de même pour tout autre rayon intérieur OL' car, dans le cas contraire, $f(x)$ étant bornée sur OL' le serait sur OL. Et l'on obtient des résultats semblables si l'une des valeurs limites est 0 ou 1. Voici un autre théorème dû à M. Lindelöf : *Les valeurs limites sont les mêmes pour deux courbes S et S', tangentes l'une et l'autre au point O à une droite OL intérieure au secteur AOB.* Soient, en effet, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ une suite infinie de points de S ayant l'origine pour unique point limite et tels que les valeurs de $f(x)$ en ces points aient pour unique limite le nombre fini α et $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots$ des points situés sur S', et tels que x_n et x'_n aient le même module. Puisque les courbes S et S' sont tangentes en O, le nombre $\frac{x'_n}{x_n}$ a pour limite l'unité lorsque n croît indéfiniment. Les fonctions

$$f_n(x) = f\left(\frac{x_n}{x_1}x\right)$$

forment une famille normale dans le quadrilatère CDEF; au point x , qu'on peut supposer à l'intérieur de ce quadrilatère, elles convergent vers α et sont par conséquent bornées. Il en résulte que ces fonctions sont également continues dans le domaine : à chaque nombre ε positif, correspond un nombre δ tel que, si deux points x et x' du quadrilatère sont une distance au plus égale à δ , on ait

$$|f_n(x') - f_n(x)| < \varepsilon$$

pour toute valeur de n ; prenons n assez grand pour que

$$\left|x_1\left(1 - \frac{x'_n}{x_n}\right)\right| < \delta,$$

on aura

$$f(x_n) = f_n(x_1), \quad f(x'_n) = f_n\left(\frac{x'_n}{x_n}x_1\right),$$

et, par suite,

$$|f(x_n) - f(x'_n)| < \varepsilon;$$

si n est assez grand pour que

$$|f(x_n) - \alpha| < \varepsilon,$$

on en déduit que

$$|f(x'_n) - \alpha| < 2\varepsilon,$$

$f(x'_n)$ a donc pour limite α . Nous avons supposé α fini; le cas où α est infini a été examiné au début.

Les résultats des paragraphes qui précèdent s'étendent aisément aux fonctions méromorphes qui ont trois valeurs exceptionnelles : on peut aussi en modifier les énoncés grâce à la représentation conforme ⁽¹⁾.

25. Proposons-nous maintenant d'étudier l'indétermination d'une fonction uniforme $f(x)$ dans le voisinage de ses points essentiels, lorsque ceux-ci forment un ensemble parfait discontinu E . Soit P un de ces points; lorsque x tend vers P , les valeurs de $f(x)$ possèdent un ensemble de valeurs limites qu'on appelle la *région d'indétermination* de $f(x)$ au point P : si la région couvre tout le plan, on dit que le point P est un point d'indétermination complète; dans le cas contraire, c'est un point d'indétermination incomplète. Soit α une valeur de la région d'indétermination, il existe une infinité de points $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ayant pour unique point limite le point P et tels que $f(x_n)$ ait pour limite α . Supposons que l'ensemble E soit constitué de manière que chaque point P puisse être considéré comme la limite d'une infinité d'anneaux Γ_n représentables d'une manière conforme sur un anneau fixe Γ_0 et dont chacun contient au moins un point x_n : le point x_n correspondra à un point x_n^0 du domaine Γ_0 qui demeure, quel que soit n , dans un domaine intérieur à Γ_0 . Nous verrons qu'il existe de tels ensembles E . Dans ces conditions, si a, b et c sont trois valeurs exceptionnelles autour de P , on peut recommencer, pour chaque point P un raisonnement presque identique à celui du paragraphe 20. On peut, d'ailleurs, toujours supposer que $a = 0, b = 1, c = \infty$, comme nous l'avons maintes fois remarqué.

Deux cas se présentent : 1° le point P est un point d'indétermination complète, nous sommes dans un cas voisin de celui du point essentiel isolé : la fonction ne peut admettre, autour de P , plus de deux valeurs exceptionnelles. Si tous les points d'un ensemble discontinu E , satisfaisant aux conditions précédentes sont des points d'indétermination complète, la fonction prend une infinité de fois

(1) Cf. le Mémoire déjà cité de M. Lindelöf où se trouvent en outre d'autres résultats relatifs à ces mêmes questions.

toutes les valeurs dans le voisinage de E , sauf deux au plus. 2° le point P est un point d'indétermination incomplète, sans être un point de continuité de $f(x)$. Dans ce cas on peut prendre, pour a et b , deux valeurs n'appartenant pas à la région d'indétermination; pour c , une valeur de cette région qui soit exceptionnelle, et pour le nombre α , introduit au paragraphe 20, une autre valeur de la région d'indétermination: si la valeur c existe, la fonction est régulière en P . Donc, si un point de E est un point d'indétermination incomplète, la fonction $f(x)$ prend, dans le voisinage de P , une infinité de fois toutes les valeurs de la région d'indétermination.

Donnons un exemple simple: considérons le segment $(0, 1)$ de l'axe $O\xi$ et soit E l'ensemble parfait discontinu obtenu de la manière suivante: on enlève du segment $(0, 1)$ les points intérieurs à un segment concentrique de longueur $\frac{1}{3}$, on opère de même sur chacun des segments qui restent et l'on répète indéfiniment cette opération.

Chacun des points de l'ensemble E peut être entouré d'une infinité d'anneaux circulaires semblables. D'autre part, cet ensemble ayant une mesure linéaire nulle, pour toute fonction uniforme $f(x)$ admettant les points de E comme points singuliers, ces points sont des points d'indétermination complète ⁽¹⁾. Les remarques qui précèdent sont applicables à cette fonction $f(x)$. On peut prendre, par exemple, pour la fonction $f(x)$, une série $\sum \frac{A_n}{x - a_n}$, dans laquelle a_n sont les extrémités des intervalles contigus à E et A_n des constantes convenablement choisies

26. Arrivons maintenant aux généralisations récentes du théorème de M. Picard sur les fonctions entières dont le point de départ a été le théorème que M. Landau a démontré en 1904 ⁽²⁾.

Soit D le domaine d'un cercle de centre origine et de rayon R et (\mathfrak{F}) ,

⁽¹⁾ Cette proposition est due à M. Painlevé. L'ensemble E est un ensemble ponctuel au sens de M. Painlevé (*Leçons de Stockholm*). Voir aussi pour la démonstration, L. ZORETTI, *Leçons sur le prolongement analytique*, p. 79. Paris, Gauthier-Villars; 1911.

⁽²⁾ *Ueber eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes* (*Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften*, t. XXXVIII, 1904, p. 1118-1133; *Ueber den Picardschen Satz* (*Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, Jahrgang 51, 1906, p. 252-318).

la famille des fonctions régulières dans ce cercle prenant à l'origine la même valeur α_0 , et ne prenant jamais dans le cercle ni la valeur 0 ni la valeur 1. Ces fonctions forment une famille normale et, comme elles sont bornées à l'origine, elles sont aussi bornées dans un cercle concentrique D_1 , de rayon θR ($0 < \theta < 1$). On a donc, pour toutes ces fonctions,

$$|f(x)| \leq M(\alpha_0, \theta).$$

Le nombre M ne dépend pas de R , puisque la transformation $x = Rx'$ fait correspondre à la famille relative à un cercle de rayon R , la famille relative au cercle de rayon 1. Nous obtenons ainsi le théorème de M. Schottky.

Le maximum M des modules de toutes les fonctions $f(x)$ dans D_1 est d'ailleurs atteint pour une fonction particulière $f_1(x)$ de la famille. Soit, en effet, $f_1^k(x)$ une fonction de la famille (\mathcal{F}) , pour laquelle le module maximum dans D_1 est égal à $M - \frac{1}{k}$. De la suite $f_1^k(x)$, on peut extraire une suite convergeant uniformément dans D_1 vers une fonction limite $f_1(x)$ et, pour cette fonction $f_1(x)$ qui ne prend aucune des valeurs 0 et 1 dans le domaine D_1 , le module maximum est M .

Si le domaine D_1 augmente, le nombre M croît avec θ et augmente indéfiniment lorsque θ tend vers l'unité. Il suffit de prendre une fonction particulière, par exemple $e^{\frac{R}{R-x}}$, appartenant à (\mathcal{F}) et dont le module augmente indéfiniment lorsqu'on s'approche du point R de la circonférence de D (1).

Si les fonctions $f(x)$ ne sont pas assujetties à prendre à l'origine des valeurs égales, mais simplement des valeurs dont le module ne dépasse pas α , la famille correspondante sera encore formée de fonctions bornées dans le cercle de rayon θR , et l'on aura, pour toutes ces fonctions,

$$|f(x)| < \Omega(\alpha, \theta),$$

Ω étant un nombre positif indépendant de R .

(1) C'est M. Carathéodory qui a donné la valeur exacte de $M(\alpha_0, \theta)$: *Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard* (*Comptes rendus*, t. CXLI, 1905, p. 1213-1215). M. P. Lévy a montré récemment que le produit $(1 - \theta)M$ reste compris entre deux nombres fixes lorsque θ tend vers l'unité : *Remarques sur le théorème de M. Picard* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XL, 1912, p. 25-39).

Le théorème de M. Schottky établi, celui de M. Landau rappelé au début de ce paragraphe et ses généralisations s'obtiennent, comme l'on sait, aisément. Considérons une fonction $f(x)$, régulière dans un cercle de rayon R , où elle ne prend ni la valeur 0, ni la valeur 1, et pour laquelle les deux premiers coefficients a_0 et a_1 de son développement taylorien sont donnés. Supposons que a_1 ne soit pas nul. Dans le cercle de rayon $\frac{R}{2}$, le module de $f(x)$ est inférieur à un nombre $M(a_0)$, qui ne dépend pas de R ; on a donc

$$|a_1| \leq \frac{M(a_0)}{\frac{R}{2}},$$

et, par suite,

$$R \leq \frac{2M(a_0)}{|a_1|}.$$

Il existe donc un nombre R_0 dépendant de a_0 et de a_1 seulement et tel que dans un cercle quelconque de rayon supérieur à R_0 , la fonction $f(x)$ possède un point singulier ou prenne l'une au moins des deux valeurs 0 et 1. Dans tout cercle de rayon inférieur, il existera une fonction $f(x)$ régulière et ne prenant aucune des valeurs 0 et 1. Il est bien facile de voir que pour le cercle de rayon R_0 lui-même, il existe une fonction $f(x)$ de cette espèce. Il suffit de remarquer que les fonctions $f\left(\frac{x}{R}\right)$ où $R < R_0$ sont bornées dans le cercle de rayon 1; si l'on considère alors une suite de nombres R_n , qui tendent en croissant vers R_0 , et une suite correspondante de fonctions $f\left(\frac{x}{R_n}\right)$, cette dernière suite a au moins une fonction limite dans le cercle de rayon 1. Cette fonction limite $\varphi(x)$ ne prend, dans le cercle, ni la valeur 0, ni la valeur 1. La fonction $f(x) = \varphi\left(\frac{x}{R_0}\right)$ possède les mêmes propriétés dans le cercle de rayon R_0 .

Au lieu de fixer a_0 et a_1 , on peut aussi fixer a_0 et a_n , en posant

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots,$$

on aura

$$|a_n| \leq \frac{M(a_0)}{\left(\frac{R}{2}\right)^n},$$

$$R \leq 2 \sqrt[n]{\frac{M(a_0)}{|a_n|}}.$$

On peut aussi déduire du théorème de M. Schottky, une proposition récente de M. P. Lévy. Si la valeur de la fonction $f(x)$ est fixée pour deux points d'un cercle D où elle est régulière et ne prend ni la valeur 0, ni la valeur 1, on peut trouver une limite supérieure de R . Cela résulte de l'égalité de continuité dans tout domaine D_1 des fonctions $f(x)$ qui sont bornées en un point de ce domaine. Le module de la différence des valeurs de $f(x)$ en deux points du domaine a une limite supérieure qui est infiniment petite lorsque les dimensions du domaine augmentent indéfiniment, comme le montre la formule établie au paragraphe 3. Si cette différence est finie, le domaine est, par suite, limité (¹).

27. Les théorèmes qui précèdent résultent des propriétés des familles normales. Ils peuvent être étendus aux familles étudiées au Chapitre I, que nous avons appelées *quasi-normales*, et dont certaines classes sont normales.

Soit (\mathcal{G}) la famille des fonctions régulières dans le cercle D , prenant à l'origine la valeur a_0 et telles que les équations

$$(7) \quad f(x) = 0, \quad f(x) = 1$$

n'aient pas plus de p racines. Nous supposons que les racines de l'une de ces équations soient toutes situées à l'extérieur d'un cercle concentrique à D et de rayon $\theta'R$ ($0 < \theta' < 1$). Ces fonctions étant bornées à l'origine et ce point n'étant pas un point limite commun des racines des deux équations (7), nous avons vu que leurs modules sont bornés dans tout cercle D_1 intérieur à D . Soit θR ($\theta' < \theta < 1$) le rayon d'un tel cercle. On aura, à l'intérieur de D_1 ,

$$|f(x)| < M(a_0, \theta, \theta', p),$$

M ne dépend pas de R parce que la transformation $x = Rx'$ fait correspondre aux fonctions relatives au cercle D les fonctions relatives au cercle de rayon unité. M dépend évidemment de p ; il suffit, pour le voir, de considérer la fonction $a_0 \left(1 - \frac{2x}{R}\right)^p$ qui, pour $x = -\frac{R}{2}$, est

(¹) Voir P. Lévy, *loc. cit.* L'auteur établit aussi un théorème plus général.

égale à $2^p a_0$; il dépend de θ , comme nous l'avons vu pour $p = 0$, et il dépend de θ' , comme le montre la fonction $a_0 + \frac{x}{\theta'}$.

Si, au lieu de fixer la valeur de $f(x)$ à l'origine, nous supposons seulement que son module soit inférieur à α , nous arriverons aux mêmes conclusions. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Soit

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

une fonction holomorphe dans le cercle de centre origine et de rayon R et telle que les équations

$$f(x) = 0, \quad f(x) = 1$$

n'aient pas plus de p racines dans le cercle, les racines de l'une de ces équations ayant toutes des modules supérieurs à $\theta'R$ ($0 < \theta' < 1$). Si l'on a

$$|a_0| < \alpha,$$

il existe un nombre $\Omega(\alpha, \theta, \theta', p)$ indépendant de R et tel que, pour tout point du cercle de centre origine et de rayon θR ($0 < \theta' < \theta < 1$), on ait

$$|f(x)| < \Omega(\alpha, \theta, \theta', p),$$

quelle que soit la fonction $f(x)$ (1).

Les théorèmes de M. Landau et leurs généralisations sont donc applicables aux fonctions qui prennent moins de p fois les valeurs 0 ou 1. Bien entendu, si la fonction $f(x)$ ne prend jamais l'une de ces deux valeurs, la restriction relative à la limite inférieure du module des racines disparaît.

28. Passons maintenant au cas où les équations (7) peuvent avoir un nombre quelconque de racines dans le cercle D . Nous supposons que l'origine n'est pas un point limite commun des racines de ces équations, que l'ensemble F , des points limites commun d'ordre infini

(1) Cf. P. BOUTROUX (*Comptes rendus*, t. CXXI, 1905, p. 305-307), *Propriété d'une fonction holomorphe dans un cercle où elle ne prend pas les valeurs 0 et 1* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXIV, 1906, p. 30-39); *Sur l'indétermination d'une fonction uniforme au voisinage d'une singularité transcendante* (*Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. XXV, 1908, p. 319-321).

ne soit pas d'un seul tenant avec la circonférence et, en outre, que le centre puisse être joint à la circonférence par une courbe ne rencontrant pas F_1 ; il suffit de se reporter au paragraphe 16 pour en conclure la proposition suivante :

Soit une famille de fonctions

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

holomorphes dans le cercle D de centre origine et de rayon R et F_1 , l'ensemble des points limites communs d'ordre infini des racines des équations

$$(7) \quad f(x) = 0, \quad f(x) = 1$$

situées dans D . Supposons que l'ensemble F_1 ne soit pas d'un seul tenant avec la circonférence et que le centre du cercle puisse être joint à la circonférence par une courbe ne contenant aucun point de F_1 . Si les valeurs de $f(x)$, à l'origine, ont un module inférieur à α et si les racines intérieures à D de l'une au moins des équations (7) ont un module supérieur à $\theta'R$ ($0 < \theta' < 1$), on aura, dans tout cercle concentrique D_1 , de rayon θR ($0 < \theta' < \theta < 1$),

$$|f(x)| < \Omega(\alpha, \theta, \theta', F_1).$$

On peut donner à cet énoncé un grand nombre de formes particulières simples : par exemple, si l'ensemble F_1 est *discontinu* dans le domaine fermé D , les autres hypothèses relatives à cet ensemble disparaissent. On peut aussi se fixer le chemin suivant lequel le centre du cercle peut être joint à la circonférence; par exemple, supposons que les points de F_1 soient tous à une distance $\theta'R$ de la circonférence et de tous les points du segment $(0, 1)$, on aura

$$|f(x)| < \Omega(\alpha, \theta, \theta')$$

dans tout cercle de rayon θR ($0 < \theta' < \theta < 1$).

Ici encore, on peut énoncer une série de théorèmes ayant pour point de départ le théorème de M. Landau. Supposons, par exemple, que l'ensemble F_1 soit discontinu dans le domaine fermé D , que le

point $x = 0$ soit à une distance au moins égale à $\theta'R$ des racines de l'une au moins des équations (7), si l'on fixe les coefficients a_0 et $a_1 \neq 0$ de la fonction $f(x)$, on en déduira une limite supérieure R_0 pour les fonctions $f(x)$. En d'autres termes, dans un cercle de rayon R supérieur à R_0 , toute fonction $f(x)$ dont les premiers coefficients du développement taylorien sont a_0 et a_1 sera telle que, ou l'ensemble F_1 n'est pas discontinu dans le cercle, ou, en deux points placés à une distance de l'origine inférieure à $\theta'R$, la fonction prendra la valeur 0 et la valeur 1. On peut de même fixer a_0 et a_n ou bien la valeur de $f(x)$ en deux points de D .

CHAPITRE III.

LA CONVERGENCE DES SÉRIES DE FONCTIONS HOLOMORPHES.

29. Soit

$$(8) \quad f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots,$$

une suite infinie de fonctions holomorphes dans le domaine connexe D . Le théorème classique que Weierstrass a publié en 1880 montre que si cette suite infinie converge uniformément dans le domaine fermé D vers une fonction limite $f(x)$, cette fonction $f(x)$ est holomorphe dans D . On sait, d'ailleurs, que si la suite converge uniformément sur la frontière, elle converge uniformément dans tout le domaine fermé, et que les suites formées par les dérivées d'ordre k des fonctions $f_n(x)$ convergent dans le domaine ouvert vers la dérivée d'ordre k de $f(x)$. Si la suite $f_n(x)$ converge seulement dans le domaine ouvert D , la fonction limite est holomorphe dans l'intérieur de D et la remarque relative aux dérivées subsiste.

En 1894, Stieltjes ⁽¹⁾ établit, dans une lettre à Hermite, le théorème suivant :

⁽¹⁾ *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, t. II, lettres n°s 399 et 400, p. 368 ; *Recherches sur les fractions continues (Annales de la Faculté de Toulouse, t. VIII, 1894)*.

Si, dans le domaine, les modules des fonctions $f_n(x)$ sont bornés dans leur ensemble et si la convergence uniforme a lieu dans une aire, si petite soit-elle, intérieure à D , la suite converge uniformément dans tout le domaine D .

On a ensuite montré que si les modules des fonctions $f_n(x)$ sont bornés dans leur ensemble et si la suite est convergente dans D , la convergence est uniforme ⁽¹⁾. Il suffit, d'ailleurs, que les f_n , continues dans D , soient bornées sur la frontière et convergent sur cette frontière ⁽²⁾. Enfin, M. Vitali a démontré, en 1904, que la convergence en une infinité de points intérieurs dans leur ensemble à D , suffit à assurer la convergence uniforme dans l'intérieur de D ⁽³⁾.

D'autre part, des théorèmes semblables ont été énoncés en remplaçant la condition que les fonctions $f_n(x)$ soient bornées dans D par la condition qu'elles ne prennent jamais dans ce domaine la valeur 0, ni la valeur 1. On a d'abord établi que si la suite (8) converge dans un domaine D où les fonctions $f_n(x)$ ne prennent ni la valeur 0, ni la valeur 1, la convergence est uniforme dans l'intérieur de ce domaine ⁽⁴⁾.

Tout récemment, MM. Carathéodory et Landau ont montré que la convergence en une infinité de points intérieurs dans leur ensemble au domaine D suffit à assurer la convergence dans ce domaine ⁽⁵⁾.

⁽¹⁾ M. OSGOOD (*Annals of Mathematics*, 2^e série, t. III, n^o 1, 1901) a montré que $f(x)$ est holomorphe en supposant que la convergence a lieu pour les points d'un ensemble partout dense dans D . Voir aussi pour la démonstration C. ARZELÀ, *Sulle serie di funzioni analitiche* (*Rendiconti dell. R. Accad. delle Scienze di Bologna*, 1902-1903), et P. MONTEL, *Sur les suites infinies de fonctions* (*Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. XXIV, 1907, p. 307).

⁽²⁾ P. MONTEL, *loc. cit.*, p. 309, et *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, p. 18.

⁽³⁾ G. VITALI, *Sopra le serie di funzioni analitiche* (*Rendiconti del R. Ist. Lombardo*, 2^e série, t. XXXVI, 1903, p. 772; *Annali di Matematica pura ed applicata*, 3^e série, t. X, 1904, p. 73). Voir aussi H. PORTER, *Concerning series of Analytic Functions* (*Annals of Mathematics*, 2^e série, t. VI, 1904-1905, p. 190).

⁽⁴⁾ M. G. VITALI (*Annali di Matematica*, *loc. cit.*) se propose seulement de montrer que $f(x)$ est holomorphe. J'ai énoncé le théorème complet en 1907 : *Sur les points irréguliers des séries convergentes de fonctions analytiques* (*Comptes rendus*, t. CXLV, 1907, p. 910). Voir aussi C. SEVERINI, *Sulle successioni infinite di funzioni analitiche* (*Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici*, t. II, 1909, p. 186).

⁽⁵⁾ C. CARATHÉODORY et E. LANDAU, *Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen*,

On ne peut pas ne pas être frappé de l'analogie complète qui existe entre les énoncés relatifs au cas où les modules des $f_n(x)$ sont bornés et ceux qui se rapportent au cas où les $f_n(x)$ ne prennent ni la valeur 0, ni la valeur 1 dans le domaine. Nous verrons, en effet, que toutes ces propositions ne sont que des formes différentes d'un même théorème fondamental, que nous allons maintenant établir.

30. *Soit une suite infinie de fonctions*

$$(8) \quad f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots,$$

holomorphes dans D et appartenant à une famille normale dans ce domaine :

1° *Si la suite converge en une infinité de points intérieurs dans leur ensemble à D, elle converge dans tout le domaine;*

2° *Si la suite converge dans D, la convergence est uniforme dans l'intérieur de D.*

Supposons que la suite (8) converge en une infinité de points $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ ayant au moins un point limite P intérieur à D , et soit D_1 un domaine intérieur à D et contenant P , je dis que la suite (8) converge en tout point de D_1 . S'il n'en était pas ainsi, il existerait un point x_0 de D_1 pour lequel la suite des nombres $f_n(x_0)$ aurait au moins deux limites distinctes α et β . On pourrait donc extraire de la suite (8) deux suites partielles convergeant en x_0 , l'une vers α , l'autre vers β . Les fonctions appartenant à une famille normale, on peut extraire de la première suite partielle une nouvelle suite S_1 convergeant uniformément dans D_1 vers une fonction limite $f_1(x)$ finie, puisqu'elle est finie aux points P_n et telle que

$$f_1(x_0) = \alpha.$$

(*Sitzungsberichte der K. Preussischen Akad. der Wissenschaften*, 1911, p. 587-613). Dans ce travail, les auteurs font très justement remarquer que la démonstration de M. Severini et la mienne laissent de côté le cas où la limite ne prendrait que les valeurs 0 ou 1. Ce cas se traite d'ailleurs immédiatement en remplaçant les fonctions $f_n(x)$ par $\log f_n(x)$ ou $\sqrt{f_n(x)}$, artifice dont je me suis servi maintes fois dans ce travail.

On pourrait de même, de la seconde suite partielle, extraire une suite S_2 convergeant uniformément vers une fonction limite finie $f_2(x)$ et telle que

$$f_2(x_0) = \beta.$$

Les deux fonctions distinctes $f_1(x)$ et $f_2(x)$, holomorphes dans D_1 , seraient égales aux points P_n , c'est-à-dire que la fonction holomorphe $f_1(x) - f_2(x)$ aurait une infinité de zéros autour de P , ce qui est en contradiction avec le fait qu'elle est régulière en P . Or D_1 est aussi voisin de D qu'on le veut : la proposition est établie.

Je dis maintenant que si une suite telle que (8) converge dans D , la convergence est uniforme dans l'intérieur de D . Soit D_1 un domaine quelconque intérieur à D . Si la convergence n'était pas uniforme dans D_1 , il existerait un nombre ε tel que, pour une infinité de fonctions de la suite (8),

$$f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \dots, f_{n_p}(x), \dots$$

la différence $f(x) - f_{n_p}(x)$, dans laquelle $f(x)$ désigne la fonction limite, aurait, en un point au moins de D_1 , un module supérieur à ε . On ne pourrait donc pas extraire de la suite $f_{n_p}(x)$ une suite nouvelle convergeant uniformément dans D_1 , ce qui contredit l'hypothèse que cette suite est formée de fonctions appartenant à une famille normale.

31. Appliquons la proposition précédente aux familles de fonctions bornées : nous en concluons qu'une suite de fonctions, bornées dans leur ensemble dans un domaine D où elles sont holomorphes, ne peut converger dans ce domaine sans converger uniformément dans l'intérieur du domaine ; que si la suite converge en une infinité de points intérieurs dans leur ensemble à D , elle converge partout dans D . C'est le théorème de M. Vitali.

Appliquons la même proposition aux familles de fonctions ne prenant dans D ni la valeur 0, ni la valeur 1 : nous en concluons qu'une suite de fonctions, ne prenant ni la valeur 0, ni la valeur 1 dans un domaine D où elles sont holomorphes, ne peut converger dans ce domaine sans converger uniformément dans l'intérieur du domaine. C'est le théorème que j'ai énoncé en 1907. On en conclut aussi que si

la suite converge en une infinité de points intérieurs dans leur ensemble à D , elle converge partout dans D . C'est le théorème récent de MM. Carathéodory et Landau.

32. Nous aurons des résultats nouveaux en appliquant notre proposition à d'autres familles de fonctions normales. Considérons les fonctions $f(x)$, holomorphes dans le domaine connexe D , où chacune d'elles ne prend pas plus de p fois les valeurs 0 ou 1. Cette famille est quasi-normale. Toute suite formée de fonctions de cette famille donne naissance à une suite convergeant vers une fonction finie dans D ou infinie dans D , sauf peut-être en un nombre limité de points de D . Si donc une suite infinie converge en une infinité de points de D , elle ne peut avoir pour limite une fonction quasi-infinie. Donc :

Si une suite infinie de fonctions holomorphes dans un domaine D , à l'intérieur duquel chacune des fonctions ne prend pas plus de p fois les valeurs 0 et 1, converge dans ce domaine, la convergence est nécessairement uniforme. Si cette suite converge en une infinité de points intérieurs à D dans leur ensemble, elle converge partout dans D .

Il n'est d'ailleurs pas possible d'aller plus loin dans cette voie, car si une suite infinie de fonctions holomorphes $f_n(x)$ converge uniformément dans l'intérieur du domaine D vers la fonction $f(x)$, les fonctions de la suite ne peuvent prendre qu'un nombre limité de fois chaque valeur a , sauf dans le cas où $f(x)$ est identique à a .

En effet, $f(x)$ ne prend que, pour un nombre limité de points, la valeur a dans un domaine D_1 intérieur à D ; soit x_0 l'un de ces points, et supposons que x_0 soit racine d'ordre p de l'équation

$$f(x) = a,$$

on sait (§ 2) que les fonctions de la suite prennent, à partir d'un certain rang, p fois la valeur a dans le voisinage de x_0 et qu'elles ne prennent pas la valeur a , à partir d'un certain rang, autour d'un point où $f(x)$ n'est pas égale à a . On en déduit aisément que, dans le domaine D_1 , les équations $f_n(x) = a$ ont, à partir d'un certain rang,

exactement le même nombre de racines que l'équation

$$f(x) = a.$$

On peut cependant énoncer des théorèmes qui permettent d'affirmer la convergence uniforme d'une suite convergente dans le cas où les fonctions $f_n(x)$ peuvent prendre un nombre quelconque de fois les valeurs 0 et 1. Désignons par F l'ensemble des points limites communs des racines des équations

$$(9) \quad f_n(x) = 0, \quad f_n(x) = 1$$

et supposons qu'on sache que cet ensemble n'est pas d'un seul tenant avec la frontière du domaine D. On a vu que si en un point intérieur à D les fonctions $f_n(x)$ sont bornées, pourvu que ce point puisse être joint à la frontière par un chemin ne rencontrant pas F, les fonctions $f_n(x)$ forment une famille normale. Il en est évidemment ainsi si la suite $f_n(x)$ converge dans D. Donc : *Si une suite infinie converge dans un domaine D et si l'on sait que l'ensemble F des points limites communs aux racines des équations (9) n'est pas d'un seul tenant avec la frontière du domaine, on peut affirmer que la convergence est uniforme et que l'ensemble F ne contient aucun point.* Par exemple, on peut supposer, dans cet énoncé, que F est discontinu dans le domaine fermé D ⁽¹⁾. On sait aussi qu'on peut remplacer l'ensemble F par l'ensemble F_1 , formé par les points de F d'ordre infini.

On aperçoit le lien qui unit les résultats précédents à ceux que j'ai obtenus dans l'étude des points irréguliers des suites convergentes. On appelle *point irrégulier* d'une suite infinie convergente, un point tel que dans tout cercle ayant ce point pour centre, la convergence n'est pas uniforme. Si la suite est formée de fonctions holomorphes, l'ensemble des points irréguliers est non dense dans D, et, des résultats établis dans les pages précédentes, on déduit aussitôt que l'ensemble de ces points est identique à l'ensemble F_1 des points limites

(1) M. C. Severini a étudié le cas où l'ensemble E formé par la réunion des points limites des racines des équations (9) est dénombrable [*Sulle successioni infinite di funzioni analitiche (Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici, t. II, 1908, p. 189)*].

d'ordre infini relatifs à l'ensemble des fonctions $f_n(x)$. Cet ensemble F , est évidemment d'un seul tenant avec la frontière, et l'on voit aisément qu'il ne contient aucune portion discontinue, ni aucune portion séparée de la frontière (1).

(1) P. MONTEL, *Sur les suites infinies de fonctions* (*Annales de l'École Normale*, 3^e série, Vol. XXIV, 1907, p. 323); *Sur les points irréguliers des séries convergentes de fonctions analytiques* (*Comptes rendus*, t. CXLV, 1907, p. 910); *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, p. 117-122.