

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

COLLET

**Du facteur intégrant pour les expressions différentielles du premier ordre renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 1<sup>re</sup> série*, tome 7 (1870), p. 59-88

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1870\\_1\\_7\\_59\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1870_1_7_59_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# DU FACTEUR INTÉGRANT

POUR LES EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE

RENFERMANT UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES INDÉPENDANTES;

PAR M. COLLET,

DOCTEUR ÈS SCIENCES.

---

Dans le Mémoire précédent, nous avons développé une méthode générale pour l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre; nous nous proposons actuellement d'appliquer cette méthode à la recherche du facteur intégrant des expressions différentielles du premier ordre et d'un nombre quelconque de variables indépendantes. Ce facteur n'existe pas en général pour des expressions quelconques : cette existence est subordonnée à certaines conditions qui doivent être satisfaites par l'expression proposée, et dont l'étude va nous occuper tout d'abord.

---

§ I. — *Des conditions nécessaires dont dépend l'existence du facteur intégrant.*

Considérons l'expression

$$(1) \quad X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_k dx_k + \dots + X_h dx_h + \dots + X_n dx_n,$$

et soit  $\mu$  la fonction par laquelle il faut la multiplier pour qu'elle devienne une différentielle exacte; les conditions nécessaires et suffisantes

pour que cela ait lieu sont que l'on ait identiquement, pour toutes les valeurs de  $h$  et de  $k$ , depuis 1 jusqu'à  $n$ ,

$$\frac{d \cdot \mu X_h}{dx_k} = \frac{d \cdot \mu X_k}{dx_h},$$

c'est-à-dire, en développant,

$$(2) \quad X_h \frac{d\mu}{dx_k} - X_k \frac{d\mu}{dx_h} + \mu \left( \frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} \right) = 0.$$

En donnant à  $h$  et  $k$  toutes les valeurs de la suite 1, 2, ...,  $n$ , la formule (2) donnera  $\frac{n(n-1)}{2}$  équations aux dérivées partielles, et qui devront être satisfaites simultanément par la fonction cherchée. Il est facile de voir que les équations qui précèdent ne peuvent exister simultanément, à moins que leurs coefficients ne satisfassent identiquement à de certaines conditions qui seront des conditions nécessaires pour l'existence du facteur.

Pour cela, posons, en général,

$$[h, k] = X_h \frac{d\mu}{dx_k} - X_k \frac{d\mu}{dx_h} + \mu \left( \frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} \right),$$

et considérons les trois équations

$$[h, k] = 0, \quad [k, m] = 0, \quad [m, h] = 0;$$

en les multipliant respectivement par  $X_m$ ,  $X_h$ ,  $X_k$  et ajoutant, on obtient, après la suppression du facteur commun  $k$ , l'égalité suivante :

$$(3) \quad X_h \left( \frac{dX_k}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_k} \right) + X_k \left( \frac{dX_m}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_m} \right) + X_m \left( \frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} \right) = 0.$$

Cette égalité, ne contenant plus la fonction cherchée, doit être une identité, sans quoi elle établirait une dépendance entre les variables, qui, par hypothèse, sont indépendantes.

Si, dans la formule (3), on donne à  $h$ ,  $k$ ,  $m$  toutes les valeurs de la suite 1, 2, ...,  $n$ , on obtiendra des conditions nécessaires pour l'existence du facteur.

Supposons ces conditions satisfaites, le nombre des équations (2) distinctes est alors diminué. En effet, ayant montré que l'équation  $[h, k] = 0$  est une conséquence des deux autres  $[m, h] = 0$ ,  $[m, k] = 0$ , on voit qu'on aura un système complet d'équations distinctes et comprenant toutes les autres, en prenant pour  $m$  une valeur quelconque de la suite  $1, 2, \dots, n$ , et donnant simplement à  $h$ , dans le symbole  $[m, h] = 0$ , toutes les autres valeurs de cette suite.

On pourrait former de bien des manières des systèmes complets et équivalents d'équations distinctes, par exemple en écrivant dans un ordre quelconque les nombres de la suite  $1, 2, \dots, n$ , et prenant pour  $m$  et  $h$ , dans  $[m, h] = 0$ , tous les systèmes de deux nombres consécutifs de cette suite; et plus généralement, en prenant un système tellement composé, qu'il y entre les dérivées de  $\mu$  par rapport à toutes les variables. Quelle que soit la marche suivie, on arrive à ce résultat, que *le nombre des équations auxquelles le facteur intégrant  $\mu$  doit satisfaire est réduit à  $n - 1$ , au moyen des conditions (3) énoncées comme nécessaires.*

Revenons à ces conditions. Si, dans la formule (3), on donne à  $m, k, h$  toutes les valeurs  $1, 2, \dots, n$ , on forme  $\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$  conditions : *nous allons démontrer que ces conditions ne sont pas toutes distinctes, et que le nombre de ces dernières est seulement égal à  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ .*

Pour cela, représentons, pour plus de simplicité, par le symbole  $[h, k, m]$  le premier membre de la formule (3), on aura évidemment

$$[h, k, m] = [k, m, h] = [m, h, k],$$

et aussi

$$[h, k, m] = -[h, m, k].$$

Nous allons démontrer, en général, que les trois conditions

$$[h, k, m] = 0, \quad [k, p, m] = 0, \quad [p, h, m] = 0,$$

comprennent la suivante :

$$[h, k, p] = 0.$$

En effet, si l'on développe les trois premières conditions, qu'on mul-

multiplie les équations obtenues respectivement par  $X_p$ ,  $X_h$ ,  $X_k$ , et qu'on ajoute, on voit facilement que les coefficients des produits  $X_h X_k$ ,  $X_k X_p$ ,  $X_p X_h$  s'annulent identiquement, et que celui de  $X_m$  est l'expression suivante :

$$X_h \left( \frac{dX_k}{dx_p} - \frac{dX_p}{dx_k} \right) + X_k \left( \frac{dX_p}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_p} \right) + X_p \left( \frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} \right),$$

qui, par conséquent, sera nulle; ce qui nous donne la condition  $[h, k, p] = 0$ , qui, ainsi que nous l'avons annoncé, n'est qu'une conséquence des précédentes.

Il résulte donc de cela que l'on aura toutes les conditions distinctes en donnant simplement à  $h$  et  $k$ , dans l'équation symbolique  $[m, h, k] = 0$ , toutes les valeurs de la suite  $1, 2, \dots, n, m$  excepté, et le système ainsi obtenu représentera toutes les conditions nécessaires à l'existence du facteur. Nous verrons dans la suite que ces mêmes conditions expriment précisément les conditions d'intégrabilité des équations aux différentielles partielles que l'on aura à intégrer simultanément pour la détermination du facteur : *les conditions qui précèdent sont donc à la fois nécessaires et suffisantes*. Le nombre de ces conditions est maintenant égal à  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ; et si  $n = 2$ , c'est-à-dire s'il n'y a que deux variables indépendantes, il n'y a plus de conditions, et alors le facteur intégrant existe toujours.

## § II. — Conditions d'intégrabilité des équations dont dépend la détermination du facteur.

Considérons maintenant les équations à intégrer, et dont (2) est la formule générale; elles renferment la fonction cherchée et ses dérivées prises par rapport aux variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . On peut faire disparaître la fonction en suivant la méthode générale qui consiste à poser  $\mu = \frac{\psi}{t}$ ,  $\psi$  étant une nouvelle fonction et  $t$  une nouvelle variable; mais il est ici plus simple de poser  $\mu = e^z$ , d'où  $\frac{d\mu}{dx_k} = e^z \frac{dz}{dx_k}$ , ce qui a l'avantage de ne pas introduire de variable nouvelle. Posant  $\frac{dz}{dx_k} = p_k$ , les

équations à intégrer prennent alors la forme suivante :

$$(4) \quad f_m = X_1 p_m - X_m p_1 + \frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} = 0,$$

où  $m$  devra prendre successivement les valeurs 2, 3, ...,  $n$ .

Nous allons démontrer que les fonctions  $f_2, f_3, \dots, f_n$  satisfont aux conditions d'intégrabilité, si les premières conditions sont elles-mêmes satisfaites.

Si nous considérons deux quelconques des équations proposées,

$$(5) \quad \begin{cases} f_m = X_1 p_m - X_m p_1 + \frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} = 0, \\ f_h = X_1 p_h - X_h p_1 + \frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} = 0, \end{cases}$$

on devra avoir

$$(f_m, f_h) = \sum_{k=1}^{k=n} \left( \frac{df_m}{dp_k} \frac{df_h}{dx_k} - \frac{df_m}{dx_k} \frac{df_h}{dp_k} \right) = 0.$$

Pour le prouver, des équations (5) nous tirons

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{df_m}{dp_1} = -X_m, & \frac{df_m}{dp_m} = X_1, & \frac{df_m}{dp_2} = \frac{df_m}{dp_3} = \dots = \frac{df_m}{dp_n} = 0; \\ \frac{df_h}{dp_1} = -X_h, & \frac{df_h}{dp_h} = X_1, & \frac{df_h}{dp_2} = \frac{df_h}{dp_3} = \dots = \frac{df_h}{dp_n} = 0; \end{cases}$$

et l'expression de  $(f_m, f_h)$  se réduit simplement aux termes suivants :

$$(7) \quad \frac{df_m}{dp_1} \frac{df_h}{dx_1} + \frac{df_m}{dp_m} \frac{df_h}{dx_m} - \frac{df_m}{dx_1} \frac{df_h}{dp_1} - \frac{df_m}{dx_m} \frac{df_h}{dp_m}.$$

On aura aussi

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{df_m}{dx_1} = p_m \frac{dX_1}{dx_1} - p_1 \frac{dX_m}{dx_1} + \frac{d}{dx_1} \left( \frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} \right), \\ \frac{df_m}{dx_h} = p_m \frac{dX_1}{dx_h} - p_1 \frac{dX_m}{dx_h} + \frac{d}{dx_h} \left( \frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} \right), \\ \frac{df_h}{dx_1} = p_h \frac{dX_1}{dx_1} - p_1 \frac{dX_h}{dx_1} + \frac{d}{dx_1} \left( \frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right), \\ \frac{df_h}{dx_m} = p_h \frac{dX_1}{dx_m} - p_1 \frac{dX_h}{dx_m} + \frac{d}{dx_m} \left( \frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right). \end{cases}$$

En portant dans l'expression (7) les valeurs (6) et (8), on aura un résultat de la forme

$$(9) \quad Pp_1 + Qp_h + Rp_m + S,$$

P, Q, R, S ayant les valeurs suivantes :

$$P = X_1 \left( \frac{dX_h}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_h} \right) + X_h \frac{dX_m}{dx_1} - X_m \frac{dX_h}{dx_1},$$

$$Q = X_m \frac{dX_1}{dx_1} - X_1 \frac{dX_1}{dx_m},$$

$$R = -X_h \frac{dX_1}{dx_1} + X_1 \frac{dX_1}{dx_h},$$

$$S = X_1 \frac{d}{dx_1} \left( \frac{dX_h}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_h} \right) + X_h \frac{d}{dx_1} \left( \frac{dX_m}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_m} \right) + X_m \frac{d}{dx_1} \left( \frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right).$$

Considérons maintenant les équations (5) et la suivante :

$$X_m p_h - X_h p_m + \frac{dX_m}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_m} = 0,$$

qui en est une conséquence, quand on suppose la condition

$$[1, h, m] = 0$$

satisfaite; multiplions ces équations respectivement par

$$\frac{dX_h}{dx_1} + \left( \frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right),$$

$$- \frac{dX_m}{dx_1} - \left( \frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} \right),$$

et

$$\frac{dX_1}{dx_1},$$

en ajoutant les résultats, on aura une identité de la forme

$$(10) \quad P'p_1 + Q'p_h + R'p_m + S' = 0.$$

Pour les quantités P', Q', R', S', on trouve facilement, en faisant usage

de la condition (9), les valeurs

$$P' = P, \quad Q' = Q, \quad R' = R,$$

$$S' = -\frac{dX_1}{dx_1} \left( \frac{dX_h}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_h} \right) - \frac{dX_h}{dx_1} \left( \frac{dX_m}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_m} \right) - \frac{dX_m}{dx_1} \left( \frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right).$$

Si enfin on dérive l'équation (9) par rapport à  $x_1$ , on trouve, par une transposition convenable des termes obtenus, que

$$S' = S,$$

d'où il suit que l'on a bien l'identité

$$P p_1 + Q p_h + R p_m + S = 0,$$

qui n'est autre que la condition d'intégrabilité

$$(f_h f_m) = 0,$$

qui est ainsi satisfaite, pour toutes les valeurs de  $h$  et de  $m$ , quand l'expression proposée satisfait d'ailleurs à toutes les conditions  $[m, h, p] = 0$ . Donc ces dernières conditions sont bien à la fois nécessaires et suffisantes.

Nous nous occuperons encore de ces conditions dans la suite; actuellement nous allons indiquer la marche à suivre pour intégrer les équations dont dépend la solution du problème en question.

### § III. — Intégration des équations du facteur.

Les équations du facteur sont aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires mais non homogènes. Pour les intégrer, on peut suivre les deux méthodes que nous avons indiquées: la méthode générale des équations quelconques, ou la méthode particulière aux équations linéaires. L'emploi de cette dernière méthode exigera l'introduction d'une nouvelle variable. Nous allons les considérer l'une et l'autre successivement.

*Première méthode.* — La méthode générale se ramène, pour le problème actuel, à chercher une relation  $f = a$  entre les quantités  $p_1, \dots,$



$p_n, x_1, \dots, x_n, a$  étant une constante, de telle sorte que l'on puisse, au moyen de cette relation et des  $(n - 1)$  équations

$$(11) \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0, \dots, \quad f_n = 0,$$

déterminer, pour  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , des valeurs en fonction de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  qui rendent l'expression

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \dots + p_n dx_n$$

une différentielle. L'intégrale de cette différentielle sera la fonction  $z$ , qui donne immédiatement la valeur complète du facteur  $\mu$ , à cause de la relation  $\mu = e^z$ .

Si des équations (11) on tire les valeurs de  $p_2, p_3, \dots, p_n$  en fonction de  $p_1, x_1, x_2, \dots, x_n$ , on pourra supposer que la relation cherchée  $f = a$  ne contienne aussi que  $p_1, x_1, \dots, x_n$ ; dans cette hypothèse, la fonction  $f$  doit être une solution commune d'un système canonique de  $n - 1$  équations linéaires, aux dérivées partielles, de la forme suivante :

$$(12) \quad 0 = \frac{df}{dx_m} + \frac{dp_m}{dx_1} \frac{df}{dp_1} - \frac{dp_m}{dp_1} \frac{df}{dx_1},$$

où  $m$  recevra successivement les valeurs 2, 3, ...,  $n$ . Des équations (11) on déduit, pour  $p_2, p_3, \dots, p_n$ , des valeurs de la forme

$$(13) \quad p_m = \frac{X_m}{X_1} p_1 + \frac{1}{X_1} \left( \frac{dX_m}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_m} \right),$$

et l'équation générale (12) devient alors

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= X_1^2 \frac{df}{dx_m} - X_1 X_m \frac{df}{dx_1} \\ &+ \left[ \left( X_1 \frac{dX_m}{dx_1} - X_m \frac{dX_1}{dx_1} \right) p_1 - X_1 \frac{d}{dx_1} \left( \frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} \right) + \frac{dX_1}{dx_1} \left( \frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} \right) \right] \frac{df}{dp_1} \end{aligned} \right.$$

Mais, sans diminuer en rien la généralité de la question, on peut supposer  $X_1 = 1$ , ce qui revient à comprendre la fonction  $X_1$  dans le facteur cherché. Cette hypothèse simplifie toutes les formules. Les conditions d'intégrabilité se réduisent à la forme suivante :

$$0 = \frac{dX_h}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_h} + X_h \frac{dX_m}{dx_1} - X_m \frac{dX_h}{dx_1};$$

et les égalités (13) et (14) deviennent respectivement

$$(15) \quad p_m = p_1 X_m + \frac{dX_m}{dx_1},$$

$$(16) \quad 0 = \frac{df}{dx_m} - X_m \frac{df}{dx_1} + \left( p_1 \frac{dX_m}{dx_1} + \frac{d^2 X_m}{dx_1^2} \right) \frac{df}{dp_1}.$$

Dans toutes ces formules,  $m$  doit prendre successivement les valeurs 2, 3, ...,  $n$ .

Nous remarquerons que les équations (15) et (16) ne contiennent chacune que l'une des fonctions  $X_2, \dots, X_n$ . Le système auxiliaire (16) s'intégrera en suivant la marche que nous avons indiquée; aussi ne nous arrêterons-nous sur cette partie de la question que pour signaler quelques particularités qui peuvent se présenter dans la recherche de la solution commune de ces équations.

Et d'abord on voit immédiatement que, s'il ne s'agissait que de trouver une solution commune, quelconque d'ailleurs, des équations du système (16), on pourrait satisfaire à ces équations par une fonction indépendante de  $p_1$  qui serait alors une solution commune des équations (16) réduites à la forme

$$0 = \frac{df}{dx_m} - X_m \frac{df}{dx_1}.$$

Pour trouver une telle solution, on considérera d'abord une solution  $f = \varphi$  de l'équation

$$0 = \frac{df}{dx_2} - X_2 \frac{df}{dx_1};$$

cette solution ne contenant pas  $p_1$ , on voit que, en effectuant les substitutions successives qui conduisent à la solution commune cherchée, la quantité  $p_1$  n'apparaîtra nulle part, et qu'on aura enfin une fonction  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  qui sera une solution commune des équations du système considéré. On doit alors se demander ce que représente cette fonction, et voir si elle peut satisfaire aux équations (15), auquel cas elle serait la solution immédiate de la question, sans qu'il soit alors nécessaire d'effectuer la quadrature qui se présente dans la méthode générale. A cela, on peut répondre que la fonction  $\varphi$ , quoique satisfaisant aux équations (16), n'en est pas pour cela une solution de la question, car

elle ne satisfait pas aux équations (15). En effet, la fonction  $\varphi$  donne en général

$$0 = \frac{d\varphi}{dx_m} - X_m \frac{d\varphi}{dx_1},$$

et, comme il faudrait que l'on eût

$$0 = \frac{d\varphi}{dx_m} - X_m \frac{d\varphi}{dx_1} - \frac{dX_m}{dx_1},$$

on voit que la fonction  $\varphi$  ne satisfera à la question qu'autant que l'on aura  $\frac{dX_m}{dx_1} = 0$ , pour toutes les valeurs de  $m$ , c'est-à-dire seulement dans le cas où la variable  $x_1$  n'entrera pas dans la composition des fonctions  $X_2, X_3, \dots, X_n$ . Mais, dans ce cas, les conditions d'intégrabilité deviennent, pour les valeurs 2, 3, ...,  $n$  de  $m$  et de  $h$ ,

$$\frac{dX_m}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_m} = 0;$$

par conséquent, la partie

$$X_2 dx_2 + \dots + X_n dx_n$$

de l'expression proposée est alors une différentielle exacte, et, comme  $X_1 = 1$ , l'expression proposée est immédiatement intégrable, et il n'y a pas lieu de chercher de facteur.

Ce cas particulier étant excepté, on aura, pour solution commune du système (16), une fonction  $f$  de  $p_1, x_1, x_2, \dots, x_n$ ; et, posant  $f = a$ ,  $a$  étant une constante, on aura, au moyen de cette équation et des formules (15), les valeurs de  $p_1, p_2, \dots, p_n$  exprimées en fonction des variables indépendantes  $x_1, \dots, x_n$ , et d'une constante arbitraire  $a$ : ces valeurs seront telles, qu'en formant l'expression

$$p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n,$$

on aura une différentielle exacte, dont l'intégrale sera précisément la fonction  $z$  que nous avons substituée au facteur  $\mu$  dans les équations du problème. De la valeur complète

$$z = F(x_1, x_2, \dots, x_n, a) + b,$$

on déduira la solution complète du facteur intégrant

$$\mu = \beta e^{F(x_1, \dots, x_n, a)},$$

$\beta$  étant, ainsi que  $b$ , une constante arbitraire. La solution générale sera définie par le système

$$\mu = \varphi(a) e^{F(x_1, \dots, x_n, a)}, \quad 0 = \varphi'(a) e^{F(x_1, \dots, x_n, a)} + \frac{dF}{da} \varphi(a) e^{F(x_1, \dots, x_n, a)};$$

et enfin les solutions singulières résulteront de l'élimination de  $a$  entre les deux équations

$$\mu = \beta e^{F(x_1, \dots, x_n, a)}, \quad \text{et} \quad \frac{dF}{da} = 0.$$

Telle est la marche à suivre dans la recherche du facteur, d'après la méthode générale d'intégration des équations quelconques. Nous allons maintenant considérer la méthode qui est spéciale aux équations linéaires.

*Deuxième méthode.* — La méthode d'intégration particulière aux équations linéaires suppose ces dernières homogènes et débarrassées de la fonction cherchée.

Si nous considérons les équations (2), nous leur donnerons la forme convenable, non plus en nous proposant la détermination de  $\mu$ , mais celle d'une fonction  $u$  de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et de  $\mu$ ; ces équations prennent alors la forme

$$(17) \quad 0 = X_1 \frac{du}{dx_m} - X_m \frac{du}{dx_1} + \mu \left( \frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} \right) \frac{d\mu}{d\mu};$$

et même, en supposant, comme précédemment, que  $X_1 = 1$ , on aura le système suivant :

$$(18) \quad 0 = \frac{du}{dx_m} - X_m \frac{du}{dx_1} - \mu \frac{dX_m}{dx_1} \frac{d\mu}{d\mu},$$

$$(m = 2, 3, \dots, n);$$

et si nous posons, en général,

$$(\Delta_m u) = \frac{du}{dx_m} - X_m \frac{du}{dx_1} - \mu \frac{dX_m}{dx_1} \frac{d\mu}{d\mu},$$

les équations du système (18) deviendront les suivantes :

$$(\Delta_2 u) = 0, \quad (\Delta_3 u) = 0, \dots, \quad (\Delta_n u) = 0.$$

Ceci posé, nous avons d'abord à chercher les solutions particulières de l'équation  $(\Delta_2 u) = 0$ . Pour cela, l'une d'elles  $u'$  étant déterminée, on pourra, pour déterminer la seconde  $u''$ , faire l'application du théorème démontré dans le § VIII (Mémoire précédent). Quoiqu'il en soit, quand on connaîtra les deux solutions particulières  $u'$  et  $u''$  de la première des équations (18) on changera de variables en exprimant  $\mu, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  en fonction de  $x_2, x_3, \dots, x_n, u', u''$ ; l'une quelconque des équations suivantes  $(\Delta_m u) = 0$  deviendra

$$0 = (\Delta_m x_3) \frac{du}{dx_3} + \dots + (\Delta_m x_n) \frac{du}{dx_n} + (\Delta_m u') \frac{du}{du'} + (\Delta_m u'') \frac{du}{du''},$$

en remarquant que  $(\Delta_m x_2) = 0$  pour les valeurs 2, 3, ..., n de m; enfin, eu égard aux conditions  $(\Delta_m x_k) = 0$ , pour  $m \leq k$  et  $(\Delta_m x_m) = 1$ , on aura, pour l'une des équations transformées,

$$(19) \quad 0 = \frac{du}{dx_m} + (\Delta_m u') \frac{du}{du'} + (\Delta_m u'') \frac{du}{du''},$$

m devant prendre successivement les valeurs 3, 4, ..., n.

Ce dernier système, qui satisfait d'ailleurs, comme le précédent, aux conditions d'intégrabilité (Mémoire précédent, § II, *Remarque II*), jouit de cette propriété, que toute solution commune des équations (18) est solution commune des équations de ce dernier système; et réciproquement, que toute solution commune des équations du système (19) satisfait aux équations (18). Ce système (19), ayant la même forme que le précédent, se traitera comme lui, et, si l'on trouve les deux solutions particulières distinctes  $u'_1, u''_1$ , pour la première des équations (19), on remplacera les variables  $x_3, x_4, \dots, x_n, u', u''$  en fonction des suivantes:  $x_3, x_4, \dots, x_n, u'_1, u''_1$ ;  $x_3$  disparaissant d'ailleurs identiquement du résultat, comme cela est arrivé pour  $x_2$  dans la première transformation. En opérant ainsi successivement, on voit que le nombre des équations de chaque système diminue d'une unité en passant d'un système au suivant, et que le nombre des variables subit la même réduction; on arrivera donc enfin à une seule équation à trois variables de la forme

$$0 = A \frac{du}{dx_n} + B \frac{du}{du'_{n-2}} + C \frac{du}{du''_{n-2}},$$

et dont on cherchera les deux solutions particulières  $u'_{n-1}$ ,  $u''_{n-1}$ . Revenant aux variables primitives, on aura, en égalant ces deux solutions à des constantes, la solution complète du problème proposé; la solution générale sera une fonction quelconque de  $u'_{n-1}$ ,  $u''_{n-1}$ , qui, égalée à zéro, donnera la valeur du facteur intégrant  $\mu$ .

Si nous comparons les deux méthodes que nous venons d'indiquer, nous voyons que la première ne nécessite la recherche que d'une solution commune des équations d'un seul système auxiliaire, tandis que la seconde exige la formation de  $n - 2$  systèmes auxiliaires successifs, et pour chacun d'eux la solution complète de l'une de ses équations. Ce qui caractérise la seconde méthode, c'est qu'elle donne le facteur sous une forme semblable à celle qui lui convient en général, d'après les théorèmes que nous allons maintenant démontrer.

#### § IV. — Propriétés générales du facteur intégrant.

LEMME. — Si  $U$  et  $u$  sont deux fonctions de  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , et telles que l'on ait, pour chacune de ces variables,

$$\frac{dU}{dx_h} = \lambda \frac{du}{dx_h},$$

$\lambda$  étant une fonction donnée de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , ou plus simplement

$$dU = \lambda du;$$

alors  $U$  est seulement une fonction de  $u$ .

Supposons, en effet, que, dans  $U = F(x_1, \dots, x_n)$ , on remplace  $x_n$  par sa valeur tirée de l'égalité  $u = f(x_1, \dots, x_n)$ , le résultat sera en général de la forme

$$U = F_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u).$$

Je dis que, dans le cas actuel, les variables  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  sont éliminées en même temps que  $x_n$ .

Différentions, en effet, la fonction  $U$  par rapport à  $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ ,

la substitution indiquée étant supposée effectuée, nous aurons

$$\frac{dU}{dx_1} = \frac{dF_1}{dx_1} + \frac{dF_1}{du} \frac{du}{dx_1},$$

.....,

$$\frac{dU}{dx_{n-1}} = \frac{dF_1}{dx_{n-1}} + \frac{dF_1}{du} \frac{du}{dx_{n-1}},$$

$$\frac{dU}{dx_n} = \frac{dF_1}{du} \frac{du}{dx_n}.$$

Mais, par hypothèse,  $\frac{dU}{dx_n} = \lambda \frac{du}{dx_n}$ ; d'où l'on aura, en comparant avec les valeurs qui précèdent,

$$\lambda = \frac{dF_1}{du}, \quad \text{puis} \quad \frac{dF_1}{dx_1} = 0, \quad \frac{dF_1}{dx_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{dF_1}{dx_{n-1}} = 0, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Ceci pouvait être établi beaucoup plus simplement, en considérant que l'égalité  $dU = \lambda du$  exprime que U reste constant quand  $x_1, x_2, \dots, x_n$  varient de façon à laisser  $u$  constant, et que U ne variera qu'autant que  $u$  variera aussi : donc U n'est qu'une fonction de  $u$ .

**THÉORÈME.** — *Il existe une infinité de valeurs pour le facteur intégrant de l'expression*

$$X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n.$$

Si  $\mu$  est une valeur du facteur, on aura

$$\mu(X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n) = du;$$

multipliant les deux membres de cette égalité par une fonction arbitraire de  $u$ ,  $\varphi(u)$ , on aura

$$\varphi(u) \mu(X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n) = \varphi(u) du,$$

qui est encore une différentielle exacte.

*Il y a donc une infinité de valeurs du facteur de la forme  $\mu \varphi(u)$ .*

**RÉCIPROQUEMENT.** — *Toutes les valeurs du facteur sont de la forme  $\mu \varphi(u)$ ,  $\mu$  étant l'une quelconque d'entre d'elles.*

Soit, en effet, une valeur  $V$  du facteur, on aura

$$V(X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n) = dU;$$

d'ailleurs, par hypothèse,

$$\mu(X_1 dx_1 + \dots + X_n dx_n) = du;$$

d'où

$$\frac{dU}{du} = \frac{V}{\mu};$$

et, par conséquent,  $\frac{V}{\mu}$  sera une fonction de  $u$  seulement. La formule générale du facteur intégrant est donc

$$\mu = \mu_1 \varphi(u),$$

$\mu_1$  étant une valeur particulière de ce facteur, et  $u$  la fonction dont l'expression proposée devient la différentielle, quand on la multiplie par  $\mu_1$ .

COROLLAIRE. — Si l'on peut obtenir deux valeurs du facteur, leur rapport sera l'intégrale cherchée, ou plutôt une valeur de cette intégrale.

§ V. — *Remarques relatives aux théories précédentes. — Cas particulier où le facteur est décomposable en un produit de fonctions.*

La marche que nous avons suivie pour arriver à la détermination du facteur peut facilement être modifiée; elle est seulement la plus simple en général. On pourrait, en effet, remplacer le système d'équations dont nous sommes partis par  $(n-1)$  équations fournies par le symbole  $[h, k] = 0$ ,  $h$  et  $k$  prenant des valeurs de la suite  $1, 2, \dots, n$ , et de telle sorte que chaque nombre de cette suite soit pris au moins une fois; car alors le système des  $(n-1)$  équations obtenues renfermera les dérivées de  $\mu$  par rapport à toutes les variables. Mais on voit immédiatement que la détermination de  $(n-1)$  des quantités  $p_1, \dots, p_n$  en fonction de la dernière et des variables indépendantes exigera des



substitutions qui compliqueront les résultats obtenus, et par suite les calculs ultérieurs. Ce n'est que dans des cas très-particuliers, par exemple dans celui où l'on a, entre quelques-unes des fonctions  $X_1, \dots, X_n$ , des relations telles que la suivante :

$$\frac{dX_m}{dx_h} = \frac{dX_h}{dx_m},$$

qu'il pourra y avoir intérêt à modifier dans le sens que nous venons d'indiquer la marche générale des opérations; et l'on voit facilement comment il faudra choisir les valeurs de  $h$  et  $k$  dans le symbole  $[h, k] = 0$ , pour apporter aux calculs la plus grande simplification possible; aussi ne nous arrêtons-nous pas plus longtemps sur ce sujet.

Nous nous proposons actuellement d'étudier le cas remarquable où le facteur intégrant est décomposable en un produit de fonctions ne contenant chacune qu'une seule variable, c'est-à-dire le cas où l'on a

$$\mu = z_1 z_2 \dots z_n,$$

$z_1$  étant une fonction de  $x_1$  seulement,  $z_2$ , de  $x_2, \dots$ . En nous reportant au changement de variable que nous avons opéré pour appliquer la théorie générale de l'intégration aux cas des équations du facteur, on trouvera, dans l'hypothèse actuelle,

$$p_1 = \frac{1}{z_1} \frac{dz_1}{dx_1}, \quad p_2 = \frac{1}{z_2} \frac{dz_2}{dx_2}, \dots, \quad p_m = \frac{1}{z_m} \frac{dz_m}{dx_m}, \dots, \quad p_n = \frac{1}{z_n} \frac{dz_n}{dx_n}.$$

Les  $p_1, p_2, \dots, p_m, \dots, p_n$  devant d'ailleurs satisfaire aux équations de la forme

$$X_1 p_m - X_m p_1 + \frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1} = 0,$$

il faudra que l'on puisse avoir

$$X_1 \left( \frac{1}{z_m} \frac{dz_m}{dx_m} \right) - X_m \left( \frac{1}{z_1} \frac{dz_1}{dx_1} \right) = \frac{dX_m}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_m};$$

mais le premier membre de cette équation peut se représenter par

$$(20) \quad X_1 \varphi_m(x_m) - X_m \varphi_1(x_1);$$

donc on ne pourra obtenir pour  $\mu$  une fonction décomposable en facteurs de la forme supposée qu'autant que  $\frac{dX_m}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_m}$  pourra aussi se mettre sous cette forme (20); et il faudra non-seulement que cette décomposition soit possible pour toutes les valeurs de l'indice  $m$ , mais encore que les valeurs fournies par les différentes décompositions, pour  $\varphi_1(x_1)$ , soient identiques.

Telles sont les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent être remplies par les fonctions  $X_1, X_2, \dots, X_n$  pour que le facteur intégrant soit de la forme supposée.

Plus généralement, si l'on partait des équations fournies par le symbole  $[h, k] = 0$ , où  $h$  et  $k$  prennent des valeurs quelconques de la suite  $1, 2, \dots, n$ , l'une quelconque d'entre elles,

$$X_h p_k - X_k p_h + \frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} = 0,$$

conduirait à la condition

$$(21) \quad \frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_k} = X_h \left( \frac{1}{z_k} \frac{dz_k}{dx_h} \right) - X_k \left( \frac{1}{z_h} \frac{dz_h}{dx_k} \right),$$

c'est-à-dire qu'il faudrait que la quantité

$$\frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_k},$$

pût se mettre sous la forme

$$X_h \varphi_k(x_k) - X_k \varphi_h(x_h),$$

et, en outre, que toutes les valeurs de  $\varphi_k(x_k)$ , par exemple, fussent identiquement les mêmes pour toutes les décompositions analogues à la précédente. Si toutes ces conditions sont remplies, il existera un facteur intégrant de la forme

$$\mu = z_1 z_2 \dots z_m \dots z_n,$$

où  $z_m$  est seulement fonction de  $x_m$ , et les calculs qui précèdent auront déterminé en même temps les valeurs des fonctions

$$\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_m(x_m), \dots, \varphi_n(x_n).$$

Si nous considérons les dernières conditions répondant aux équations  $[h, k] = 0$ , elles sont évidemment plus nombreuses que celles fournies par les équations désignées par le symbole  $[1, k] = 0$ ; mais cette plus grande multiplicité n'est qu'apparente, et, si les conditions répondant aux équations  $[1, k] = 0$  sont satisfaites, celles qui sont relatives aux équations  $[h, k] = 0$ , pour toutes les valeurs de  $h$  et de  $k$ , le seront en même temps. Ce fait, qui pourrait être établi directement, résulte d'ailleurs immédiatement de cette considération, que les équations fournies par le symbole  $[1, k] = 0$ , où  $k$  prend les valeurs 2, 3, ...,  $n$ , comprennent toutes les autres. Mais, sans nous étendre davantage sur ce point, revenons à la détermination des fonctions  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Les décompositions précédentes nous ayant donné les valeurs de  $\varphi_1(x_1), \dots, \varphi_m(x_m), \dots, \varphi_n(x_n)$ , nous aurons, en général, pour la détermination de  $z_m$ ,

$$\frac{1}{z_m} \frac{dz_m}{dx_m} = \varphi_m(x_m),$$

d'où

$$z_m = c e^{\int \varphi_m(x_m) dx_m},$$

$c$  étant une constante; et, par suite, pour le facteur intégrant, on aura immédiatement

$$\mu = A e^{\sum_{m=1}^{m=n} \int \varphi_m(x_m) dx_m},$$

en représentant par  $A$  une constante quelconque.

Nous remarquons immédiatement que, si toutes les conditions de décomposition en facteurs sont satisfaites, il pourra manquer certaines variables dans le facteur intégrant, dans le cas où quelques-unes des fonctions  $X_1, \dots, X_n$  satisfont aux conditions

$$(22) \quad \frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} = 0.$$

Supposons en particulier qu'il n'y ait que cette condition de satisfaite; en considérant l'équation

$$X_h p_k - X_k p_h + \frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} = 0,$$

dans l'hypothèse actuelle, elle conduira à cette condition

$$\frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_k} = X_k \varphi_h(x_h) - X_h \varphi_k(x_k) = 0,$$

qui pourra être satisfaite en posant

$$\varphi_h(x_h) = 0, \quad \varphi_k(x_k) = 0;$$

si les autres décompositions donnent les mêmes résultats pour  $\varphi_h$  et  $\varphi_k$ , les variables  $x_h$  et  $x_k$  feront défaut dans la valeur de  $\mu$ .

Mais il peut manquer certaines variables dans  $\mu$ , sans pour cela que les fonctions  $X_1, \dots, X_n$  satisfassent à aucune des conditions (22). Supposons, par exemple, que  $\varphi_1(x_1) = 0$ ; on devra alors avoir, pour les valeurs 2, 3, ...,  $n$  de l'indice  $m$ ,

$$(23) \quad \frac{\frac{dX_1}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_1}}{X_1} = \varphi_m(x_m),$$

c'est-à-dire que la fonction représentée par le premier membre de cette équation doit se réduire à une fonction de  $x_m$ . Telles sont les  $n - 1$  conditions qui doivent être satisfaites pour que la variable  $x_1$  n'entre pas dans la fonction  $\mu$ , supposée d'ailleurs décomposable en facteurs.

Si nous cherchons ce que deviennent les conditions d'intégrabilité quand on suppose satisfaites les conditions de la décomposition en facteurs, on voit que ces dernières comprennent les premières, c'est-à-dire que, si pour deux quelconques des fonctions données on a

$$(24) \quad \frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} = X_k \varphi_h(x_h) - X_h \varphi_k(x_k),$$

les fonctions  $\varphi_h(x_h)$ ,  $\varphi_k(x_k)$ , ... restant identiques à elles-mêmes dans les différentes décompositions, et cela pour toutes les valeurs des indices  $h$  et  $k$ , on aura aussi, identiquement,

$$X_h \left( \frac{dX_k}{dx_m} - \frac{dX_m}{dx_h} \right) + X_k \left( \frac{dX_m}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_m} \right) + X_m \left( \frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} \right) = 0,$$

ce que l'on vérifie facilement.

La considération des seules conditions (21) permettra donc d'affirmer que la fonction proposée peut être intégrée par la méthode du facteur, et que ce facteur peut se décomposer en un produit de fonctions de la forme considérée. Les conditions (23) permettront même de déterminer *à priori* les variables qui n'entrent pas dans l'expression du facteur intégrant.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les fonctions dont le produit composait le facteur intégrant ne renfermaient chacune qu'une seule variable; mais on peut se proposer de rechercher en général les conditions qui doivent être satisfaites pour que  $\mu$  soit égal à un produit de fonctions ne contenant chacune qu'une seule variable, et d'une autre fonction des variables non comprises dans les premières, c'est-à-dire que la forme supposée de  $\mu$  est la suivante :

$$\mu = z_1 z_2 \dots z_m f(x_{m+1}, \dots, x_n).$$

On trouverait, en procédant comme précédemment, une série de conditions de la forme (24), et qui s'en déduiraient en faisant  $h = 1$ , et donnant à  $k$  les valeurs 2, 3, ...,  $m$ . Quant aux équations répondant aux valeurs  $m + 1, m + 2, \dots, n$ , de  $k$ ,  $h$  restant toujours égal à l'unité, elles donnent

$$X_1 \frac{1}{f} \frac{df}{dx_k} = X_k \frac{1}{z_1} \frac{dz_1}{dx_1} + \frac{dX_k}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_k},$$

en remarquant que

$$p_1 = \frac{1}{z_1} \frac{dz_1}{dx_1} \quad \text{et} \quad p_k = \frac{1}{f} \frac{df}{dx_k}.$$

Mais le premier membre de l'égalité obtenue est de la forme

$$X_1 F_k(x_{m+1}, \dots, x_k, \dots, x_n);$$

donc il faudra que le second membre puisse se mettre sous la même forme, et cela pour toutes les valeurs de  $k$ , depuis  $m + 1$  jusqu'à  $n$ . Si ces conditions sont satisfaites, on aura, pour déterminer la fonction  $f$ , l'équation

$$\frac{1}{f} \frac{df}{dx_k} = F_k,$$

et, par conséquent, on connaîtra les dérivées de la fonction  $\log f$  par rapport à ses variables : la fonction  $f$  sera donc donnée par une simple quadrature, et l'on aura

$$F = \log f = \int \left( \sum_{i=1}^n F_i dx_i \right) + \text{const.},$$

et, par suite,

$$\mu = A e^{F + \int \left( \sum_{i=1}^m \varphi_i(x_i) dx_i \right)},$$

les fonctions  $\varphi$  étant analogues à celles qui se présentent dans le cas examiné précédemment.

Dans le cas où quelques-unes des fonctions  $X$  satisferaient aux conditions (22), on pourrait, en suivant la marche déjà suivie, chercher ce qu'il en résulterait pour la composition du facteur; mais ce qui précède suffit pour le faire prévoir : aussi nous nous contenterons d'indiquer cette analogie, croyant inutile d'entrer dans de plus grands développements à ce sujet, non plus que sur la marche à suivre pour déterminer *a priori* la forme du facteur intégrant. Nous terminerons ces recherches par des considérations qui se rattachent immédiatement aux conditions d'intégrabilité des expressions différentielles par la méthode du facteur.

## § VI. — *Sur l'intégration d'une classe d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre.*

Si nous considérons les conditions d'intégrabilité représentées en général par l'équation symbolique  $[m, h, k] = 0$ , nous voyons que ces conditions expriment, soit entre les fonctions  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , soit entre les variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , des relations dont la considération peut intervenir dans diverses questions se rattachant plus ou moins étroitement à la théorie de l'intégration des expressions différentielles. Ainsi, par exemple, les conditions non satisfaites expriment précisément les relations qu'il faudrait établir entre les variables, jusqu'alors supposées indépendantes, pour que l'expression proposée devint intégrable. On peut aussi considérer ces relations comme définissant certaines des

fonctions  $X$  en fonction des autres, et c'est à ce point de vue que nous allons nous arrêter, parce qu'il nous conduira à un résultat général pour l'intégration des équations simultanées linéaires d'une certaine forme.

Le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant :

*Étant données  $m$  fonctions  $X_1, X_2, \dots, X_m$  de  $n$  variables indépendantes,  $n > m$ , on propose de trouver  $n - m$  nouvelles fonctions  $X_{m+1}, \dots, X_n$  des mêmes variables, et telles que l'expression*

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_m dx_m + \dots + X_n dx_n$$

*soit intégrable par le facteur, les fonctions données satisfaisant d'ailleurs aux conditions  $[h, k, l] = 0$ , où  $h, k$  et  $l$  prennent successivement toutes les valeurs  $1, 2, \dots, m$ .*

Proposons-nous d'abord la détermination de  $X_{m+1}$ , et cherchons pour cela le nombre et la forme des équations auxquelles cette fonction doit satisfaire. Toutes les relations entre les fonctions  $X_1, \dots, X_m, \dots, X_n$  s'obtiennent de la formule  $[1, h, k] = 0$ , où  $h$  et  $k$  prennent toutes les valeurs de la suite  $1, 2, \dots, n$ ; on aura donc toutes les relations qui contiennent  $X_{m+1}$ , en supposant, dans la formule considérée,  $k = m + 1$ , et donnant à  $h$  les valeurs  $2, 3, \dots, m$ . On voit donc que la fonction  $X_{m+1}$  aura à satisfaire à  $m - 1$  équations de la forme

$$f_h = X_1 \left( \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - \frac{dX_{m+1}}{dx_h} \right) + X_h \left( \frac{dX_{m+1}}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_{m+1}} \right) + X_{m+1} \left( \frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right) = 0;$$

les seules variables considérées comme telles, dans la recherche de  $X_{m+1}$ , sont  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , les dérivées de la fonction cherchée qui entrent dans ces équations n'étant relatives qu'à ces variables.

La question est donc ramenée à la forme générale suivante que nous avons en vue :

*Intégrer un système de  $m - 1$  équations linéaires, à  $m$  variables, de la forme*

$$f_h = X_1 \frac{dv}{dx_h} - X_h \frac{dv}{dx_1} + v \left( \frac{dX_h}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_h} \right) - X_1 \frac{dX_h}{dx_{m+1}} + X_h \frac{dX_1}{dx_{m+1}} = 0,$$

où  $h$  doit prendre les valeurs  $2, 3, \dots, m$ , les fonctions  $X_1, X_2, \dots, X_m$  satisfaisant d'ailleurs identiquement à des conditions de la forme

$$X_h \left( \frac{dX_k}{dx_l} - \frac{dX_l}{dx_h} \right) + X_k \left( \frac{dX_l}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_l} \right) + X_l \left( \frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} \right) = 0,$$

où  $h, k, l$  prennent toutes les valeurs  $1, 2, \dots, m$ .

Nous allons démontrer que les équations précédentes satisfont aux conditions d'intégrabilité, c'est-à-dire que, pour deux quelconques d'entre elles,

$$f_h = 0, \quad f_k = 0,$$

on a

$$(25) \quad (f_h f_k) = \sum_{i=1}^{i=m} \left( \frac{df_h}{dp_i} \frac{df_k}{dq_i} - \frac{df_h}{dq_i} \frac{df_k}{dp_i} \right) = 0.$$

Tel est le résultat général que nous nous proposons d'établir, après quoi le problème qui précède se résoudra en suivant les méthodes qui ont été développées à cet effet.

On remarquera d'abord que les équations considérées contiennent la fonction dans les coefficients. Pour la faire disparaître, on posera  $tv = u$ ,  $t$  étant une variable nouvelle et  $u$  la nouvelle fonction cherchée; on aura alors

$$\frac{dv}{dx_i} = \frac{1}{t} \frac{du}{dx_i}, \quad \text{et} \quad v = \frac{du}{dt};$$

en posant  $\frac{du}{dx_i} = p_i$ ,  $\frac{du}{dt} = p$ , les équations  $f_h = 0$  et  $f_k = 0$  deviendront

$$(26) \quad f_h = \frac{X_l}{t} p_h - \frac{X_h}{t} p_l - \left( \frac{dX_l}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_l} \right) p - X_l \frac{dX_h}{dx_{m+1}} + X_h \frac{dX_l}{dx_{m+1}} = 0,$$

$$(27) \quad f_k = \frac{X_l}{t} p_k - \frac{X_k}{t} p_l - \left( \frac{dX_l}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_l} \right) p - X_l \frac{dX_k}{dx_{m+1}} + X_k \frac{dX_l}{dx_{m+1}} = 0.$$

En tenant compte de la relation identique

$$(28) \quad X_l \left( \frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} \right) + X_k \left( \frac{dX_k}{dx_l} - \frac{dX_l}{dx_k} \right) + X_h \left( \frac{dX_l}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_l} \right) = 0,$$



on déduit de (26) et (27) l'équation (29), qui est une conséquence des précédentes,

$$(29) \quad f_{h,k} = \frac{X_h}{t} p_k - \frac{X_k}{t} p_h - \left( \frac{dX_h}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_h} \right) p - X_h \frac{dX_k}{dx_{m+1}} + X_k \frac{dX_h}{dx_{m+1}} = 0.$$

Des valeurs de  $f_h$  et  $f_k$ , on déduit

$$(30) \quad \begin{cases} \frac{df_h}{dp} = -\frac{dX_1}{dx_h} + \frac{dX_h}{dx_1}, & \frac{df_h}{dp_1} = -\frac{X_h}{t}, & \frac{df_h}{dp_h} = \frac{X_1}{t}, & \frac{df_h}{dp_i} = 0, & i \geq h, & i > 1; \\ \frac{df_k}{dp} = -\frac{dX_1}{dx_k} + \frac{dX_k}{dx_1}, & \frac{df_k}{dp_1} = -\frac{X_k}{t}, & \frac{df_k}{dp_k} = \frac{X_1}{t}, & \frac{df_k}{dp_i} = 0, & i \geq k, & i > 1. \end{cases}$$

D'après ces valeurs, on voit déjà que l'expression (25) se réduira aux termes suivants :

$$(31) \quad (f_h, f_k) = \frac{df_h}{dp} \frac{df_k}{dt} + \frac{df_h}{dp_1} \frac{df_k}{dx_1} + \frac{df_h}{dp_h} \frac{df_k}{dx_h} - \frac{df_h}{dt} \frac{df_k}{dp} - \frac{df_h}{dx_1} \frac{df_k}{dp_1} - \frac{df_h}{dx_h} \frac{df_k}{dp_h},$$

et nous avons maintenant à calculer les valeurs de

$$\frac{df_k}{dt}, \quad \frac{df_h}{dt}, \quad \frac{df_k}{dx_1}, \quad \frac{df_h}{dx_1}, \quad \frac{df_k}{dx_h}, \quad \frac{df_h}{dx_h}.$$

On a immédiatement

$$(32) \quad \begin{cases} \frac{df_k}{dt} = -\frac{X_1}{t^2} p_k + \frac{X_k}{t^2} p_1, \\ \frac{df_h}{dt} = -\frac{X_1}{t^2} p_h + \frac{X_h}{t^2} p_1, \\ \frac{df_k}{dx_1} = \frac{dX_1}{dx_1} \frac{p_k}{t} - \frac{dX_k}{dx_1} \frac{p_1}{t} - p \frac{d}{dx_1} \left( \frac{dX_1}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_1} \right) - \frac{d}{dx_1} \left( X_1 \frac{dX_k}{dx_{m+1}} - X_k \frac{dX_1}{dx_{m+1}} \right), \\ \frac{df_h}{dx_1} = \frac{dX_1}{dx_1} \frac{p_h}{t} - \frac{dX_h}{dx_1} \frac{p_1}{t} - p \frac{d}{dx_1} \left( \frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right) - \frac{d}{dx_1} \left( X_1 \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_1}{dx_{m+1}} \right), \\ \frac{df_k}{dx_h} = \frac{dX_1}{dx_h} \frac{p_k}{t} - \frac{dX_k}{dx_h} \frac{p_1}{t} - p \frac{d}{dx_h} \left( \frac{dX_1}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_1} \right) - \frac{d}{dx_h} \left( X_1 \frac{dX_k}{dx_{m+1}} - X_k \frac{dX_1}{dx_{m+1}} \right), \\ \frac{df_h}{dx_h} = \frac{dX_1}{dx_h} \frac{p_h}{t} - \frac{dX_h}{dx_h} \frac{p_1}{t} - p \frac{d}{dx_h} \left( \frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right) - \frac{d}{dx_h} \left( X_1 \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_1}{dx_{m+1}} \right). \end{cases}$$

Si nous substituons maintenant les valeurs (30) et (32) dans l'ex-

pression (31), nous obtenons un résultat de la forme

$$(33) \quad (f_h f_k) = Pp + Qp_1 + Rp_h + Sp_{k+1} + T,$$

et nous allons nous proposer de calculer les valeurs des coefficients P, Q, R, S, T, ce qui se fera en supposant les substitutions effectuées, et cherchant séparément les termes contenant  $p_1, p_h, p_{h+1}, p$ , ou ceux qui sont indépendants de ces quantités. En opérant ainsi, nous trouverons d'abord

$$P = \frac{1}{l} \left[ X_1 \frac{d}{dx_1} \left( \frac{dX_h}{dx_h} - \frac{dX_k}{dx_k} \right) + X_h \frac{d}{dx_1} \left( \frac{dX_h}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_h} \right) + X_k \frac{d}{dx_1} \left( \frac{dX_1}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_1} \right) \right];$$

et, si l'on tient compte de la relation obtenue en dérivant par rapport à  $x_1$  l'équation

$$(34) \quad [1, h, h] = 0,$$

la valeur précédente deviendra

$$(35) \quad P = \frac{1}{l} \left( \frac{dX_1}{dx_1} \frac{dX_h}{dx_h} - \frac{dX_1}{dx_1} \frac{dX_k}{dx_k} + \frac{dX_1}{dx_h} \frac{dX_h}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_k} \frac{dX_k}{dx_1} \right).$$

On trouvera ensuite

$$(36) \quad Q = \frac{1}{l^2} \left[ X_h \frac{dX_h}{dx_1} - X_h \frac{dX_h}{dx_1} + 2X_1 \left( \frac{dX_h}{dx_h} - \frac{dX_k}{dx_k} \right) \right],$$

$$(37) \quad R = \frac{1}{l^2} \left[ X_k \frac{dX_1}{dx_1} - X_1 \frac{dX_1}{dx_k} + X_1 \left( \frac{dX_k}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_k} \right) \right],$$

$$(38) \quad S = \frac{1}{l^2} \left[ -X_h \frac{dX_1}{dx_1} + X_1 \frac{dX_1}{dx_h} - X_1 \left( \frac{dX_h}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_h} \right) \right].$$

Enfin, pour T, on aura

$$T = \frac{1}{l} \left[ X_k \frac{d}{dx_1} \left( X_1 \frac{dX_k}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_1}{dx_{m+1}} \right) - X_1 \frac{d}{dx_h} \left( X_1 \frac{dX_k}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_1}{dx_{m+1}} \right) \right. \\ \left. - X_h \frac{d}{dx_1} \left( X_1 \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - X_k \frac{dX_1}{dx_{m+1}} \right) + X_1 \frac{d}{dx_k} \left( X_1 \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_1}{dx_{m+1}} \right) \right];$$

en effectuant les différentiations indiquées, et groupant convenable-

ment les termes obtenus, on aura

$$\begin{aligned} {}^tT = & -X_1 \left[ X_1 \frac{d}{dx_{m+1}} \left( \frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_k} \right) + X_k \frac{d}{dx_{m+1}} \left( \frac{dX_h}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_h} \right) \right. \\ & \left. + X_k \frac{d}{dx_{m+1}} \left( \frac{dX_1}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_1} \right) \right] \\ & - \frac{dX_1}{dx_1} \left( X_k \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_k}{dx_{m+1}} \right) + X_1 \left( \frac{dX_1}{dx_k} \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - \frac{dX_1}{dx_h} \frac{dX_k}{dx_{m+1}} \right) \\ & + \frac{dX_1}{dx_{m+1}} \left[ X_k \frac{dX_h}{dx_1} - X_h \frac{dX_k}{dx_1} + X_1 \left( \frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_k} \right) \right]. \end{aligned}$$

Mais la première partie de cette expression n'est autre que la suivante :

$$X_1 \left[ \frac{dX_1}{dx_{m+1}} \left( \frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_k} \right) + \frac{dX_k}{dx_{m+1}} \left( \frac{dX_h}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_h} \right) + \frac{dX_h}{dx_{m+1}} \left( \frac{dX_1}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_1} \right) \right];$$

d'où, par un arrangement convenable des termes, on aura

$$\begin{aligned} {}^tT = & -\frac{dX_1}{dx_1} \left( X_k \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_k}{dx_{m+1}} \right) + X_1 \left( \frac{dX_1}{dx_k} \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - \frac{dX_1}{dx_h} \frac{dX_k}{dx_{m+1}} \right) \\ & + X_1 \frac{dX_h}{dx_{m+1}} \left( \frac{dX_1}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_1} \right) + X_1 \frac{dX_k}{dx_{m+1}} \left( \frac{dX_h}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_h} \right) \\ & + \frac{dX_1}{dx_{m+1}} \left[ X_k \frac{dX_h}{dx_1} - X_h \frac{dX_k}{dx_1} + 2X_1 \left( \frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_k} \right) \right]. \end{aligned}$$

Mais on a, d'après l'équation (34),

$$\begin{aligned} & X_k \frac{dX_h}{dx_1} - X_h \frac{dX_k}{dx_1} + 2X_1 \left( \frac{dX_k}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_k} \right) \\ & = \left( X_k \frac{dX_1}{dx_h} - X_h \frac{dX_1}{dx_k} \right) - X_k \left( \frac{dX_h}{dx_1} - \frac{dX_1}{dx_h} \right) - X_h \left( \frac{dX_1}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_1} \right), \end{aligned}$$

ce qui nous donne enfin, pour T, la valeur suivante :

$$(39) \left\{ \begin{aligned} T = & \frac{1}{t} \left[ -\frac{dX_1}{dx_1} \left( X_k \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_k}{dx_{m+1}} \right) + X_1 \left( \frac{dX_1}{dx_k} \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - \frac{dX_1}{dx_h} \frac{dX_k}{dx_{m+1}} \right) \right. \\ & + \frac{dX_1}{dx_{m+1}} \left( X_k \frac{dX_1}{dx_h} - X_h \frac{dX_1}{dx_k} \right) + \left( X_1 \frac{dX_h}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_1}{dx_{m+1}} \right) \left( \frac{dX_1}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_1} \right) \\ & \left. + \left( X_1 \frac{dX_k}{dx_{m+1}} - X_h \frac{dX_1}{dx_{m+1}} \right) \left( \frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Cette expression pourrait se mettre sous une forme plus symétrique; mais, pour l'objet que nous avons en vue, il est préférable de la conserver sous cette forme.

Si maintenant nous multiplions les équations (26), (27), (29) respectivement par

$$\begin{aligned} & -\frac{dX_1}{dx_k} - \left( \frac{dX_1}{dx_k} - \frac{dX_k}{dx_1} \right), \\ & +\frac{dX_1}{dx_h} + \left( \frac{dX_1}{dx_h} - \frac{dX_h}{dx_1} \right), \\ & -\frac{dX_1}{dx_1}, \end{aligned}$$

et que nous ajoutons les produits obtenus, nous aurons un résultat de la forme

$$P'p + Q'p_1 + R'p_2 + S'p_3 + T' = 0,$$

et si nous cherchons les valeurs des coefficients  $P'$ ,  $Q'$ ,  $R'$ ,  $S'$ ,  $T'$ , nous trouvons qu'elles sont les suivantes :

$$P' = tP, \quad Q' = tQ, \quad R' = tR, \quad S' = tS, \quad T' = tT;$$

d'où il suit que l'on a bien, (33),

$$(f_k, f_k) = 0,$$

ce qui démontre que les équations du système considéré satisfont à toutes les conditions d'intégrabilité, comme nous nous proposons de l'établir.

Pour terminer cette étude, nous donnerons quelques exemples de détermination du facteur intégrant.

## § VII. — Applications.

PREMIER EXEMPLE. — Soit proposé de déterminer le facteur intégrant de l'expression

$$(1) \quad x_1(x_2 - 1)(x_3 - 1)dx_1 + x_2(x_3 - 1)(x_1 - 1)dx_2 + x_3(x_1 - 1)(x_2 - 1)dx_3.$$

Divisant par  $x_1(x_2 - 1)(x_3 - 1)$ , on aura

$$(2) \quad dx_1 + \frac{x_2(x_1 - 1)}{x_1(x_2 - 1)} dx_2 + \frac{x_3(x_1 - 1)}{x_1(x_3 - 1)} dx_3;$$

posant

$$X_1 = 1, \quad X_2 = \frac{x_2(x_1 - 1)}{x_1(x_2 - 1)}, \quad X_3 = \frac{x_3(x_1 - 1)}{x_1(x_3 - 1)},$$

on vérifie immédiatement que la condition d'intégrabilité représentée par le symbole  $[1, 2, 3] = 0$  est identiquement satisfaite. D'après ce que nous avons vu, nous aurons à intégrer les équations simultanées suivantes :

$$(3) \quad p_2 = \frac{x_2(x_1 - 1)}{x_1(x_2 - 1)} p_1 + \frac{x_2}{x_1^2(x_2 - 1)}, \quad p_3 = \frac{x_3(x_1 - 1)}{x_1(x_3 - 1)} p_1 + \frac{x_3}{x_1^2(x_3 - 1)};$$

et, pour effectuer cette intégration, nous suivrons la méthode générale. Le système auxiliaire dont il faut chercher une solution commune est alors le suivant :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{df}{dx_2} - \frac{x_2(x_1 - 1)}{x_1(x_2 - 1)} \frac{df}{dx_1} + \left( \frac{p_1 x_2}{x_1^2(x_2 - 1)} - \frac{2x_2}{x_1^2(x_2 - 1)} \right) \frac{df}{dp_1}, \\ 0 &= \frac{df}{dx_3} - \frac{x_3(x_1 - 1)}{x_1(x_3 - 1)} \frac{df}{dx_1} + \left( \frac{p_1 x_3}{x_1^2(x_3 - 1)} - \frac{2x_3}{x_1^2(x_3 - 1)} \right) \frac{df}{dp_1}, \end{aligned}$$

et l'on trouve que ces deux équations sont satisfaites par la solution

$$(4) \quad f = \frac{p_1(x_1 - 1)}{x_1} + \frac{1}{x_1^2}.$$

Égalant cette fonction à une constante  $a$ , on en déduira, ainsi que des équations (3), les valeurs

$$p_1 = \frac{ax_1}{x_1 - 1} - \frac{1}{x_1(x_1 - 1)}, \quad p_2 = \frac{ax_2}{x_2 - 1}, \quad p_3 = \frac{ax_3}{x_3 - 1};$$

conséquemment, en appelant  $\mu$  le facteur cherché, on aura

$$\log \mu = f(p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + p_3 dx_3) + b,$$

$b$  étant une constante; d'où

$$\mu = bx_1(x_1 - 1)^{a-1}(x_2 - 1)^a(x_3 - 1)^a e^{a(x_1 + x_2 + x_3)}.$$

La fonction intégrale, considérée dans toute sa généralité, s'obtiendra au moyen d'une série à termes entiers, et dont le nombre limité dépend de  $\alpha$ . Dans le cas simple où l'on attribue à la constante arbitraire  $\alpha$  l'unité pour valeur, on a

$$u = b(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1)e^{(x_1 + x_2 + x_3)},$$

pour l'expression correspondante de la fonction cherchée.

Nous présenterons encore quelques applications très-simples, en nous bornant à quelques indications sommaires.

Nous désignerons toujours par  $\mu$  le facteur intégrant, par  $u$  la fonction cherchée, par  $a$  et  $b$  deux constantes arbitraires, et enfin par  $e$  la base des logarithmes népériens.

DEUXIÈME EXEMPLE. — Soit l'expression

$$dx_1 + \frac{x_1}{x_2} dx_2 - \frac{x_1}{2x_3} dx_3.$$

En appliquant la méthode générale, on trouve

$$\mu = \frac{b}{x_1} \left( \frac{x_1^2 x_2}{x_3} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}}, \quad \text{et} \quad u = \frac{b}{\alpha+1} \left( \frac{x_1^2 x_2}{x_3} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}}.$$

L'expression proposée est immédiatement intégrable en la multipliant par  $\frac{2}{x_1}$ , et l'intégrale est alors

$$u = \log \frac{x_1^2 x_2}{x_3}.$$

Cette valeur particulière du facteur rentre dans la solution générale, en attribuant aux constantes les valeurs suivantes :

$$\alpha + 1 = 2 \left( \log \frac{x_1^2 x_2}{x_3} \right)^{-1}, \quad b = \left( \frac{x_1^2 x_2}{x_3} \right)^{\frac{-1}{\log \frac{x_1^2 x_2}{x_3}}},$$

l'une de ces valeurs étant fonction de l'autre.

TROISIÈME EXEMPLE. — Soit l'expression

$$dx_1 + \frac{x_1}{2x_2} dx_2 - \frac{x_3 x_4}{x_1 x_2} dx_3 - \frac{x_3^2}{2x_1 x_2} dx_4,$$

On trouve

$$\mu = b x_1 x_2 e^{\frac{a}{2}(x_1^2 x_2 - x_3^2 x_4)},$$

et

$$u = \frac{b}{a} e^{\frac{a}{2}(x_1^2 x_2 - x_3^2 x_4)}.$$

Ce résultat est obtenu en suivant la méthode générale d'intégration; si l'on avait employé la méthode particulière aux équations linéaires, on aurait trouvé

$$\mu = x_1 x_2 \varphi(x_1^2 x_2 - x_3^2 x_4),$$

résultat qui concorde avec le précédent,  $\varphi$  étant une fonction arbitraire.

On reconnaît d'ailleurs immédiatement que l'expression proposée devient une différentielle exacte quand on la multiplie par  $2x_1 x_2$ , valeur particulière du facteur qui rentre dans la formule générale que nous venons de donner.

QUATRIÈME EXEMPLE. -- Soit l'expression

$$dx_1 + \frac{x_1}{x_2 \log x_2 x_3} dx_2 + \frac{x_1}{x_3 \log x_2 x_3} dx_3 + \frac{x_1}{x_5} \cotang \frac{x_4}{x_5} dx_4 - \frac{x_1 x_4}{x_5^2} \cotang \frac{x_4}{x_5} dx_5.$$

On trouve, en suivant la méthode générale d'intégration,

$$\mu = \frac{b}{x_1} \left( x_1 \cdot \log x_2 x_3 \cdot \sin \frac{x_4}{x_5} \right)^{a+1} \quad \text{et} \quad u = \frac{b}{a+1} \left( x_1 \cdot \log x_2 x_3 \cdot \sin \frac{x_4}{x_5} \right)^{a+1};$$

en appliquant la méthode relative aux équations linéaires, on trouve

$$\mu = \frac{1}{x_1} \varphi \left( x_1 \cdot \log x_2 x_3 \cdot \sin \frac{x_4}{x_5} \right).$$

Enfin, en multipliant l'expression proposée par  $\frac{1}{x_1}$ , on reconnaît qu'elle devient la différentielle exacte de la fonction

$$\log \left( x_1 \cdot \log x_2 x_3 \cdot \sin \frac{x_4}{x_5} \right),$$

qui est comprise, ainsi que la valeur particulière  $\frac{1}{x_1}$  du facteur intégrant, dans les formules générales qui précèdent.