ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉTIENNE DELASSUS

Sur les liaisons et les mouvements des systèmes matériels

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 29 (1912), p. 305-369
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1912_3_29__305_0>

SUR LES LIAISONS

ET LES

MOUVEMENTS DES SYSTÈMES MATÉRIELS,

PAR M. ÉT. DELASSUS,

Professeur à l'Université de Bordeaux.

Introduction.

1. Le principe des travaux virtuels s'applique à toutes les liaisons s'exprimant par des relations finies entre les paramètres ou par des relations contenant linéairement leurs dérivées. On peut concevoir ces liaisons comme étant des conditions analytiques imposées au système, mais si l'on veut revenir à la conception réelle du mouvement, il faut concevoir la réalisation matérielle de ces liaisons.

Cette réalisation peut être *directe*, c'est-à-dire sans introduction de corps auxiliaires, ou être *indirecte*, et alors le système étudié n'est qu'un fragment d'un système plus compliqué qui, lui, ne sera soumis qu'à des liaisons directes.

Par exemple, pour un point (x, y, z) soumis à la liaison

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

on aura une réalisation directe en mettant le point matériel à l'intérieur de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

réalisée matériellement comme surface, et une réalisation indirecte en attachant le point à l'origine fixe par une tige de longueur constante.

Pour écrire les équations du mouvement, on admet implicitement que, *quelle que soit la réalisation matérielle de la liaison, les déplacements* *virtuels du système sont toujours les mêmes*. La force vive se compose de la force vive du système donné, ne dépendant que des paramètres de ce système et de la force vive du système auxiliaire servant à réaliser la liaison.

Puisqu'il n'y a aucune force agissant sur le système auxiliaire et que, dans le système total, les déplacements virtuels du système proposé sont ceux fournis par les équations de liaison de ce système, le travail des forces se réduit à celui des forces agissant sur le système donné, calculé au moyen des équations données de liaison.

A cause de la force vive du système auxiliaire, on a des équations variables; on suppose alors que ce système auxiliaire est *sans masse* et l'on arrive finalement à des équations où n'intervient plus le système auxiliaire qui a servi à réaliser la liaison.

Mais le point de départ est inexact, ou plutôt est vrai ou faux, suivant la définition qu'on adopte, pour ce que nous appelons une réalisation matérielle des liaisons.

Il est exact, si l'on dit que les liaisons sont réalisées matériellement quand les déplacements virtuels du système considéré comme portion d'un système plus étendu sont les mêmes que ceux définis par ses équations de liaisons.

Il est inexact, comme axiome général, si l'on dit que *les liaisons sont réalisées par l'adjonction d'un système* S_1 *quand, des relations entre les paramètres de* S *et* S_1 *qui expriment les liaisons du système total, ne résultent entre les paramètres de* S *que les relations qui expriment les liaisons de ce système*. La seconde définition est la définition naturelle n'introduisant aucun élément étranger à la notion immédiate de liaison et elle a l'avantage de se traduire sous forme analytique générale. Nous l'adopterons.

Étudions alors l'exemple très simple d'un point matériel de masse unité, qui n'est soumis à aucune force et est assujetti à la liaison

$$z = 0.$$

La réalisation directe obtenue en posant le point sur le plan matériel xoy permet des déplacements virtuels δx, δy arbitraires, et l'application du principe des travaux virtuels donne les mouvements qui sont rectilignes et uniformes.

Imaginons maintenant une réalisation indirecte de la façon suivante :

Un monocycle sans guidon et de masse nulle roule sans glisser sur un plan horizontal; à sa fourche sont fixées trois tiges de longueur convenable dont les extrémités glissent sans frottement sur ce plan horizontal, de façon que la tige de la fourche reste toujours verticale. Enfin, le point matériel est attaché à l'extrémité supérieure de la tige de fourche.

Ce système est complètement défini par les coordonnées x, y du point matériel, qui sont en même temps celles du centre du disque roulant, et par les angles θ, φ de roulement et d'orientation du disque. Si l'on choisit convenablement l'altitude du plan hozizontal de roulement, le point matériel vérifiera toujours la condition

$$z = 0. \tag{1}$$

Enfin, les équations du roulement du disque donnent

$$\left\{\begin{aligned} x' &= R\,\theta' \cos\varphi, \\ y' &= R\,\theta' \sin\varphi, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

et de ces relations, qui expriment les liaisons du système total, nous ne pouvons tirer, par élimination de θ et φ, aucune relation entre x, y, z et leurs dérivées autre que (1), c'est-à-dire que l'équation de liaison du point. Nous avons donc bien une réalisation de la liaison au sens adopté et, de plus, notre système total est soumis à des liaisons finies ou linéaires réalisées d'une façon directe. Cette réalisation de la liaison (1) ne satisfait pas à la première définition, car les déplacements virtuels du système total sont définis par

$$\begin{aligned} \delta z &= 0, \\ \delta x &= R\,\delta\theta \cos\varphi, \\ \delta y &= R\,\delta\theta \sin\varphi, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} \delta z &= 0, \\ \sin\varphi\,\delta x - \cos\varphi\,\delta y &= 0. \end{aligned}$$

de sorte que, pour une position déterminée x, y, z, θ, φ du système total, les déplacements virtuels du point matériel, considéré comme système partiel, ne sont pas arbitraires dans le plan des xy, puisqu'il y a une relation entre δx et δy.

Étudions alors le mouvement du point matériel et, pour ne pas compliquer inutilement les calculs, supposons que :

1° Le disque roulant est constitué par une matière homogène de densité ρ infiniment petite, son épaisseur est variable d'un point à un autre, de façon que son ellipsoïde central d'inertie soit quelconque, mais que le centre de gravité soit néanmoins au centre du disque ;

2° La fourche est composée d'une matière homogène de densité σ infiniment petite et son centre de gravité est sur la verticale x, y qui constitue la tige supérieure. La force vive du système total est

$$2\mathrm{T} = x'^2 + y'^2 + 2\rho\mathrm{T}_d + 2\sigma\mathrm{T}_t$$

avec

$$2\mathrm{T}_d = \mathrm{A}(x'^2 + y'^2) + \varphi'^2\mathrm{P}_2(\theta) + 2\varphi'\theta'\mathrm{P}_1(\theta) + \theta'^2\mathrm{P}_0,$$
$$2\mathrm{T}_t = \mathrm{B}(x'^2 + y'^2) + \mathrm{C}\varphi'^2,$$

A, B, C, P_0 étant des constantes, P_2 et P_1 des polynomes du second et du premier degré en $\sin\theta$ et $\cos\theta$. Nous aurons immédiatement, au moyen des multiplicateurs de Lagrange, les équations du mouvement

$$(1 + \rho\mathrm{A} + \sigma\mathrm{B})x'' = \lambda,$$
$$(1 + \rho\mathrm{A} + \sigma\mathrm{B})y'' = \mu,$$
$$\rho\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathrm{T}_d}{\partial\theta'}\right) - \frac{\partial\mathrm{T}_d}{\partial\theta}\right] = -\mathrm{R}(\lambda\cos\varphi + \mu\sin\varphi),$$
$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathrm{T}_d}{\partial\theta'}\right) + \sigma\mathrm{C}\varphi'' = 0.$$

Supposons que ρ et σ tendent simultanément vers zéro, par exemple que leur rapport ait la valeur constante k; la dernière équation peut s'écrire

$$\rho\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathrm{T}_d}{\partial\varphi'}\right) + k\mathrm{C}\varphi''\right] = 0,$$

si petit que soit ρ et, par conséquent, à la limite elle donnera toujours

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathrm{T}_d}{\partial\varphi'}\right) + k\mathrm{C}\varphi'' = 0.$$

Si nous tirons λ et μ des deux premières équations pour porter dans la troisième, celle-ci, quand ρ et σ deviennent infiniment petits, se réduit à

$$x'' \cos\varphi + y'' \sin\varphi = 0,$$

qui, en vertu des équations (2) différentiées, peut s'écrire

$$\theta'' = 0;$$

finalement, nous obtenons les équations suivantes pour le mouvement du point matériel, avec la réalisation de la liaison au moyen du monocycle sans masse,

$$\begin{gathered}
x' = R\,\theta' \cos\varphi, \\
y' = R\,\theta' \sin\varphi, \\
\theta'' = 0, \\
(P_2 + KC)\varphi'' + P_2'(\theta)\varphi'\theta' + P_1'(\theta)\theta'^2 = 0,
\end{gathered}$$

et ces mouvements ne sont pas, en général, rectilignes et uniformes, car, θ' étant constant, si x' et y' étaient constants, il en serait de même de φ; φ' et φ'' seraient nuls et la dernière équation donnerait

$$P_1'(\theta) = 0,$$

et, comme θ est variable, ceci exigerait que P_1 fut indépendant de θ, ce qui n'a pas lieu si l'ellipsoïde central d'inertie est quelconque. On obtient donc des mouvements qui n'ont rien de commun avec ceux que donne la réalisation directe de la liaison imposée au point matériel ; de plus, ces mouvements dépendent du rapport k.

Si le disque a une épaisseur constante, l'ellipsoïde central est de révolution autour de l'axe du disque, P_2 est une constante et P_1 est nul, de sorte que la dernière équation se réduit à

$$\varphi'' = 0,$$

ainsi θ' est une constante arbitraire et φ une fonction linéaire arbitraire de t. Si l'on prend φ constant, x' et y' sont des constantes et l'on retrouve les mouvements rectilignes et uniformes, mais on trouve aussi d'autres mouvements. En effet, si l'on a

$$\theta' = a, \qquad \varphi = \alpha t + \beta, \qquad \alpha \neq 0,$$

on en déduit

$$\begin{gathered}
x' = R\,a \cos(\alpha t + \beta), \\
y' = R\,a \sin(\alpha t + \beta),
\end{gathered}$$

d'où, par intégration,

$$x + \text{const.} = \frac{Ra}{\alpha}\sin(\alpha t + \beta),$$

$$y + \text{const.} = -\frac{Ra}{\alpha}\cos(\alpha t + \beta),$$

c'est-à-dire tous les mouvements circulaires uniformes.

Cet exemple très simple suffit pour nous montrer que *la réalisation des liaisons au moyen de corps sans masse ne fournit pas la réalisation des mouvements obtenus au moyen du principe des travaux virtuels et de la liaison considérée sous sa forme analytique. Ces mouvements sont ceux qu'on obtient quand la réalisation, définie comme précédemment, satisfait, en outre, à la première définition.*

2. Dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (¹), M. Appell a considéré des liaisons exprimées par des relations non linéaires entre les dérivées des paramètres, liaisons auxquelles ne s'applique plus le principe des travaux virtuels, et a montré que ce principe transformé en principe de minimum d'une certaine fonction du second degré des dérivées secondes pouvait, sous cette nouvelle forme, être érigé en principe général et fournir les équations générales du mouvement des systèmes soumis à des liaisons non linéaires.

Dans un article (²) des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, M. Appell a donné l'application de sa méthode générale au mouvement d'un point matériel soumis à la liaison

$$x'^2 + y'^2 = z'^2,$$

et a indiqué une réalisation matérielle de cette liaison.

On peut, sur l'exemple de M. Appell, faire des remarques analogues à celles du paragraphe précédent.

Supposons, pour simplifier, que la masse du point soit l'unité et

(¹) Appell, *Sur les liaisons exprimées par des relations non linéaires entre les vitesses* (*Comptes rendus*, 8 mai 1911).

(²) Appell, *Exemple de mouvement d'un point assujetti à une liaison exprimée par une relation non linéaire entre les composantes de sa vitesse* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 14 mai 1911).

qu'il ne soit soumis à aucune force. Les équations de M. Appell peuvent alors s'écrire

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{-z'};$$

elles donnent les deux intégrales premières

$$x'z' = \text{const.},$$
$$y'z' = \text{const.},$$

qui, avec l'équation de liaison, montrent que x', y', z' sont les constantes, de sorte que les mouvements de M. Appell sont rectilignes et uniformes.

Adoptons alors la réalisation matérielle suivante, qui est à peu près celle de M. Appell. Reprenons le monocycle du paragraphe précédent, mais dont la tige verticale sera prismatique et creuse. Dans ce prisme creux glissera un solide en forme de rectangle évidé, dont un côté intérieur sera taillé en crémaillère, engrenant avec un pignon fixé sur l'axe du disque roulant. Enfin, le point matériel sera fixé à l'extrémité d'une tige verticale attachée à la crémaillère. Pour ne pas compliquer les calculs, nous ferons les mêmes hypothèses que dans le paragraphe précédent, en supposant en outre que le centre de gravité de la crémaillère se trouve aussi sur la même verticale, ainsi que le point matériel.

Nous aurons alors cinq paramètres x, y, z, θ, φ liés par les trois relations

$$x' = R\theta' \cos\varphi,$$
$$y' = R\theta' \sin\varphi,$$
$$z = \alpha\theta + \beta,$$

et l'élimination de θ et φ fournit l'unique relation

$$x'^2 + y'^2 = \frac{R^2}{\alpha^2} z'^2,$$

de sorte que, si l'on suppose

$$\alpha = R,$$

on a bien une réalisation de la liaison non linéaire considérée. Pour former les équations du mouvement, il faudra, à la force vive

$$x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

du point, ajouter les forces vives du disque et de la fourche, lesquelles ont les mêmes expressions que précédemment, puis celle de la crémaillère qui est de la forme

$$2\tau T_c = \tau[D(x'^2 + y'^2 + z'^2) + E\varphi'^2],$$

τ étant la densité de la matière qui la constitue.

Nous pouvons alors, au moyen des multiplicateurs de Lagrange, former les équations du mouvement du système total qui n'est soumis qu'à des liaisons linéaires directes, puis, supposant que ρ, σ et τ tendent simultanément vers zéro, de telle façon que les rapports $\frac{\rho}{\sigma}$ et $\frac{\tau}{\rho}$ conservent les valeurs constantes K et H, arriver aux équations

$$\begin{aligned}
x' &= R\theta' \cos\varphi,\\
y' &= R\theta' \sin\varphi,\\
z &= R\theta + \beta,\\
\theta'' &= 0,\\
(P_2 + KC + HE)\varphi'' &+ P'_2(\theta)\varphi'\theta' + P'_1(\theta)\theta'^2 = 0
\end{aligned}$$

du mouvement pour la liaison réalisée de façon indiquée au moyen de corps sans masse et, là encore, nous remarquerons que les mouvements rectilignes et uniformes ne sont pas obtenus et que, s'ils le sont, ils ne sont pas les seuls.

Dans le cas des liaisons non linéaires, la première définition d'une réalisation n'ayant plus de sens, et les réalisations satisfaisant à la seconde définition, ne donnant pas ou donnant, mélangés avec d'autres, les mouvements déduits par M. Appell de la définition abstraite de la liaison, il est nécessaire d'étudier tous ces mouvements pour voir si les mouvements de M. Appell sont des mouvements réalisables effectivement et chercher leur signification au point de vue mécanique.

PREMIÈRE PARTIE.

RÉALISATIONS CINÉMATIQUES DES LIAISONS DU PREMIER ORDRE.

3. Une liaison du premier ordre est définie par des relations entre les paramètres q et leurs dérivées q'.

Ce système peut contenir des équations finies, c'est-à-dire où ne figurent pas les q', et des équations différentielles; il se peut qu'on puisse, entre ces dernières, éliminer tous les q', ce qui donne de nouvelles relations finies. En procédant ainsi, on pourra toujours mettre la liaison sous la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} \theta_1(q, t) = 0, & \theta_2(q, t) = 0, & \ldots, \\ \Theta_1(q, q' t) = 0, & \Theta_2(q, q' t) = 0, & \ldots, \end{cases}$$

les fonctions Θ étant distinctes par rapport aux q'. On ne gardera, parmi les équations θ, que celles qui sont distinctes par rapport aux q. En prenant les dérivées, on obtiendra des équations distinctes par rapport aux q' qu'on résoudra pour porter les valeurs des q' dans les équations Θ; si celles-ci ne sont pas distinctes par rapport aux q' restants, elles donneront des relations finies qui seront des conséquences des équations θ ou de nouvelles équations finies qui viendront s'ajouter à ces équations θ. En procédant ainsi, on arrivera forcément à mettre la liaison sous la *forme canonique caractérisée par le fait que les équations*

$$\theta_1 = 0, \qquad \theta_2 = 0, \qquad \ldots$$

sont distinctes par rapport aux q, *et que les équations*

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \frac{d\theta_2}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \Theta_2 = 0, \qquad \ldots$$

sont distinctes par rapport aux q'.

4. Comme il a été dit dans l'Introduction, nous adoptons la définition suivante :

Les liaisons d'un système S *sont dites réalisées indirectement au moyen d'un système auxiliaire* S_1, *si le système total* $S + S_1$ *n'est soumis qu'à des liaisons directes, desquelles ne résultent entre les paramètres de* S *et leurs dérivées premières que les relations qui expriment les liaisons de ce système*, et, de plus, nous admettrons la propriété suivante :

Toute liaison finie ou linéaire du premier ordre peut être réalisée, soit directement, soit indirectement, au moyen de liaisons directes, mais de telle façon que les déplacements virtuels donnés par la liaison réalisée soient les mêmes que ceux définis par la liaison non réalisée.

5. Considérons une liaison réalisée directement, elle se traduit directement par des relations entre les paramètres du système sans intervention de paramètres auxiliaires, c'est-à-dire par les relations même qui définissent la liaison analytique. Il en résulte que les relations entre les variations des paramètres, entre les dérivées secondes, etc., seront les mêmes pour la liaison analytique et pour la liaison réalisée.

Considérons une liaison finie réalisée indirectement au moyen de liaisons finies.

La liaison réalisée sera exprimée par des équations

$$\varphi_1(q, p, t) = 0, \qquad \varphi_2(q, p, t) = 0, \qquad \ldots,$$

qui, par élimination des p, donneront les équations

$$\theta_1(q, t) = 0, \qquad \theta_2(q, t) = 0, \qquad \ldots$$

de la liaison analytique.

En résolvant les équations φ par rapport au plus grand nombre de paramètres p pour porter dans les autres équations φ, les équations de la liaison réalisée pourront s'écrire

$$\begin{array}{lll} p_1 = \Psi_1(q, p, t), & p_2 = \Psi_2(q, p, t), & \ldots, \\ \theta_1(q, t) = 0, & \theta_2(q, t) = 0, & \ldots. \end{array}$$

Les équations des déplacements virtuels pour la liaison réalisée sont alors

$$\begin{array}{c} \delta p_1 = \sum \frac{\partial \Psi_1}{\partial q} \delta q + \sum \frac{\partial \Psi_1}{\partial p} \delta p, \qquad \ldots, \\ d\theta_1 = 0, \qquad \delta\theta_2 = 0, \qquad \ldots. \end{array}$$

Celles de la première ligne sont résolues par rapport à des δp, on ne peut donc, entre elles, éliminer des δp et les seules relations entre les δq, fournies par la liaison réalisée, sont les équations

$$\delta\theta_1 = 0, \qquad \delta\theta_2 = 0,$$

c'est-à-dire précisément celles qui sont données par la liaison analytique, de sorte que la réalisation satisfait à ce que, dans l'Introduction, nous avons appelé la *première définition*. Si, au lieu de prendre les équations des déplacements virtuels, nous avions pris les équations dérivées, de façon à avoir les relations entre les dérivées secondes, nous aurions pu refaire le même raisonnement, montrant que les seules relations entre les dérivées secondes, ne contenant pas les p'' obtenues au moyen de la liaison réalisée, sont précisément celles qui sont fournies par la liaison analytique et il en serait de même jusqu'à un ordre quelconque.

6. Prenons maintenant une liaison finie ou linéaire,

$$(4) \qquad \theta_1(q, t) = 0, \qquad \ldots,$$

$$(5) \qquad \frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \Theta_1(q, q', t) = 0, \qquad \ldots$$

réalisée au moyen d'une liaison linéaire introduisant les paramètres auxiliaires p.

Les équations (4), relations finies entre les q, peuvent être considérées comme des relations finies particulières entre les paramètres q, p du système total, donc doivent faire partie des équations finies de la liaison réalisée, lesquelles peuvent alors se mettre sous la forme

$$\theta_1(q, t) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_1(q, p, t) = 0, \qquad \ldots.$$

les φ étant distinctes par rapport aux p, sans quoi l'élimination des p donnerait des équations finies entre les q qui ne seraient pas des conséquences des équations θ, et alors la liaison proposée ne serait pas réalisée; ou qui seraient des conséquences des équations θ, et alors, en vertu de ces équations, les équations φ se réduiraient à un nombre moindre d'équations distinctes.

Les équations (5) peuvent, par le même raisonnement, être considérées comme des relations du premier ordre particulières entre les q, q', p, p', donc doivent faire partie des équations du premier ordre de la liaison réalisée, lesquelles peuvent alors s'écrire

$$(6) \quad \frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_1(q, q', p, p', t) = 0, \qquad \ldots.$$

D'ailleurs, les dérivées des équations finies devant se retrouver dans les équations du premier ordre, celles-ci doivent contenir les équations

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \qquad \ldots$$

qui, contenant effectivement les p', ne peuvent être que ces combinaisons des équations Φ, de sorte que les équations de la liaison réalisée peuvent, en définitive, se mettre sous la forme

$$\begin{gathered}
\theta_1(q, t) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_1(q_1, p, t) = 0, \qquad \ldots, \\
\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \ldots, \\
\frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \Psi_1(q, q', p, p', t) = 0, \qquad \ldots.
\end{gathered}$$

Pour ce que nous avons en vue, reprenons la forme (6). Les fonctions Φ sont distinctes par rapport à l'ensemble des variables p, p', sans quoi leur élimination donnerait des relations entre les q, q' qui ne seraient pas des conséquences des équations (4), (5) de la liaison analytique, et alors celle-ci ne serait pas réalisée; ou bien qui en seraient des conséquences, et alors, au moyen de ces équations (4), (5) qui figurent déjà dans les équations de la liaison réalisée, les équations Φ se réduiraient à un nombre moindre d'équations distinctes par rapport aux p, p'.

Ou bien les équations Φ sont alors distinctes par rapport aux p', ou elles ne le sont pas ; dans ce dernier cas, éliminons les p' entre ces équations, de façon à les séparer en deux groupes,

$$\begin{gathered}
\Pi_1(q, q', p, p', t) = 0, \qquad \ldots, \\
\pi_1(q, q', p, t) = 0, \qquad \ldots,
\end{gathered}$$

les équations Π étant distinctes par rapport aux p' et les équations φ, Π étant distinctes par rapport aux p, sans quoi on pourrait, entre elles, éliminer les p, ce qui, en réalité, constituerait une élimination des p et des p' entre les équations Φ et φ.

Les équations de la liaison réalisée peuvent donc se mettre sous la forme

$$\begin{gathered}
\theta_1(q, t) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_1(q, p, t) = 0, \qquad \ldots, \\
\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \ldots, \\
\pi_1(q, q', p, t) = 0, \qquad \ldots, \qquad \Pi_1(q, q', p, p', t) = 0, \qquad \ldots.
\end{gathered}$$

Considérons les équations des déplacements virtuels dans la liaison réalisée; on prend pour cela toutes les équations du premier ordre $\frac{d\theta}{dt}$, Θ, π et Π; elles sont linéaires par rapport aux q', p', on y supprime le terme indépendant et l'on y remplace les q', p' par les δq, δp. Les équations des trois premiers groupes donnent des relations entre les δq, ne contenant pas les δp; celles du dernier groupe étant linéaires et distinctes par rapport aux p' donneront des relations distinctes par rapport aux δp, donc ne pourront fournir aucune relation indépendante des δp. Les seules relations indépendantes des δp sont donc fournies par les trois premiers groupes et elles sont distinctes; pour le voir, il suffit de remarquer que si les équations des trois premiers groupes, qui sont linéaires, étant rendues homogènes par suppression du terme indépendant, n'étaient pas distinctes, on pourrait, entre ces équations complètes, éliminer les q' et obtenir ainsi des équations finies provenant de l'élimination des p', q' entre les équations canoniques du premier ordre de la liaison réalisée, ce qui est impossible.

Les équations $\frac{d\theta}{dt}$ et Θ donnant précisément les équations des déplacements virtuels de la liaison analytique, nous voyons que la liaison réalisée fournit toutes les équations des déplacements virtuels de la liaison analytique avec, en plus, autant d'équations supplémentaires distinctes qu'il y a d'équations π, de sorte que *la réalisation satisfait à la première définition si les équations π n'existent pas et n'y satisfait pas si les équations π existent.*

Si, au lieu de considérer les équations aux δq, nous considérons les équations aux q'' fournies par la liaison réalisée, nous trouvons exactement le même résultat, parce que les coefficients des q'', p'' sont précisément les mêmes que ceux des δq, δp.

Les relations du second ordre, indépendantes des p'', déduites de la liaison réalisée sont, ou non, les mêmes que pour la liaison analytique, suivant que les équations π n'existent pas ou existent.

Et nous remarquerons que le résultat continue à exister pour les dérivées troisièmes, quatrièmes, etc., puisque ce sont toujours les mêmes coefficients qui entrent en jeu.

Si l'on se reporte à la définition des équations π, on voit que :

La liaison réalisée sera équivalente à la liaison analytique au point de *vue des déplacements virtuels, au point de vue des relations du second ordre, etc., ou ne lui sera équivalente à aucun de ces points de vue, suivant que les équations* Φ *seront ou non distinctes par rapport aux* p'.

7. Reprenons l'exemple du monocycle de l'Introduction. Les paramètres q sont ici les trois coordonnées x, y, z du point matériel et la liaison analytique est la liaison finie exprimée par les relations

$$z = 0,$$
$$z' = 0.$$

Dans la liaison réalisée, nous avons : 1° le point matériel (x, y, z); 2° la fourche, corps solide, dont les six coordonnées, prises comme à l'ordinaire avec le centre de gravité, sont

$$x_1, \quad y_1, \quad z_1; \qquad \theta_1, \quad \varphi_1, \quad \psi_1;$$

3° le disque, dont les six coordonnées (relatives au centre de figure) sont

$$x_2, \quad y_2, \quad z_2; \qquad \theta_2, \quad \varphi_2, \quad \psi_2,$$

θ, φ, ψ désignant les angles d'Euler ordinaires.

La liaison du point et de la fourche donne

$$x = x_1, \qquad y = y_1, \qquad z = z_1 + a.$$

Les liaisons de la fourche avec le plan horizontal et le disque donnent

$$x_1 = x_2, \qquad y_1 = y_2, \qquad z_1 = z_2 + b,$$
$$\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \psi_1 = \psi_2;$$

enfin la liaison du disque avec le plan horizontal donne

$$\theta_2 = \frac{\pi}{2}, \qquad x'_2 = R\varphi'_2 \cos\psi_2, \qquad y'_2 = R\varphi'_2 \sin\psi_2, \qquad z_2 = c,$$

a, b, c étant trois constantes dont la somme est nulle.

Nous avons dix équations finies. On voit immédiatement que les neuf premières sont résolubles par rapport aux neuf paramètres $x, y, z, x_2, y_2, z_2, \theta_1, \psi_1, \theta_2$ et, en portant dans la deuxième, on a l'équation

Les équations finies de la liaison réalisée sont

$$z=0,\qquad \begin{cases} x_1=x,\\ y_1=y,\\ z_1=-a,\end{cases}\qquad \begin{cases} x_2=x,\\ y_2=y,\\ z_2=-a-b,\end{cases}\qquad \begin{cases} \theta_1=\dfrac{\pi}{2},\\ \theta_2=\dfrac{\pi}{2},\\ \psi_1=\psi_2.\end{cases}$$

Les équations du premier ordre de cette liaison s'obtiendront en prenant les dérivées des équations finies précédentes et en y ajoutant les deux équations supplémentaires

$$x'_2=R\varphi'_2\cos\psi_2,\qquad y'_2=R\varphi'_2\sin\psi_2.$$

Les équations Φ seront donc ici

$$\begin{cases} x'_1=x',\\ y'_1=y',\\ z'_1=0,\end{cases}\qquad \begin{cases} x'_2=x',\\ y'_2=y',\\ z'_2=0,\end{cases}\qquad \begin{cases} \theta'_1=0,\\ \theta'_2=0,\\ \psi'_1=\psi'_2,\end{cases}\qquad \begin{cases} x'=R\varphi'_2\cos\psi_2,\\ y'=R\varphi'_2\sin\psi_2,\end{cases}$$

Elles ne sont pas distinctes par rapport aux p' qui sont x'_1, y'_1, z'_1, x'_2, y'_2, z'_2, θ'_1, φ'_1, ψ'_1, θ'_2, φ'_2, ψ'_2, puisque les deux dernières ne contiennent que la seule quantité φ'_2 de cette nature.

Nous avons donc, pour la liaison finie considérée, une réalisation linéaire du premier ordre ne satisfaisant pas à la première définition.

Modifions l'exemple en remplaçant le disque par un anneau circulaire, dont l'axe de rotation sera un diamètre, et dans cet anneau attachons une sphère par un axe diamètre de la sphère et diamètre de l'anneau perpendiculaire au précédent, de façon à réaliser un joint de Cardan. En outre, la sphère ne peut que rouler et pivoter sur le plan horizontal. Nous aurons un solide de plus que dans le cas précédent, c'est l'anneau, et les liaisons successives s'exprimeront par

$$x=x_1,\qquad y=y_1,\qquad z=z_1+a,$$
$$x_1=x_2,\qquad y_1=y_2,\qquad z_1=z_2+b,$$
$$\theta_1=\theta_2=\frac{\pi}{2},\qquad \psi_1=\psi_2,$$
$$x_2=x_3,\qquad y_2=y_3,\qquad z_2=z_3,$$
$$\psi_2=\psi_3-\frac{\pi}{2},$$
$$z_3=-c,$$
$$x'_3-R(-\varphi'_3\cos\psi_3\sin\theta_3+\theta'_3\sin\varphi_3),$$
$$y'_3+R(-\varphi'_3\sin\psi_3\sin\theta_3+\theta'_3\cos\psi_3).$$

a, b, c étant trois constantes dont la somme est nulle. On a quatorze équations finies; des treize équations obtenues, en supprimant la douzième, on peut tirer les treize quantités $x_0, y_0, z_0, x_2, y_2, z_2, \theta_1, \psi_1, \theta_2, \psi_2, x_3, y_3, z_3$ et, portant dans la douzième, on a l'équation

$$z = 0.$$

Les équations finies de la liaison sont

$$z = 0, \qquad \begin{cases} x_1 = x, \\ y_1 = y, \\ z_1 = -a, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = x, \\ y_2 = y, \\ z_2 = -a-b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_1 = \dfrac{\pi}{2}, \\ \psi_1 = \psi_3 - \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_2 = \dfrac{\pi}{2}, \\ \psi_2 = \psi_3 - \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = x, \\ y_3 = y, \\ z_3 = -c, \end{cases}$$

et l'on obtiendra les équations Φ en ajoutant, aux dérivées des treize dernières, les équations complémentaires

$$x' - \mathrm{R}(-\varphi'_3 \cos\psi_3 \sin\theta_3 + \theta'_3 \sin\varphi_3) = 0,$$
$$y' + \mathrm{R}(\quad \varphi'_3 \sin\psi_3 \sin\theta_3 + \theta'_3 \cos\varphi_3) = 0.$$

Comme elles ne contiennent, comme quantités p', que φ'_3 et θ'_3, par rapport auxquelles ne sont pas résolues les treize premières équations Φ, et qu'elles sont indépendantes par rapport à ces deux p', il en résulte que les équations Φ sont distinctes par rapport aux p', de sorte que nous avons un exemple de liaison finie réalisée par une liaison linéaire du premier ordre, cette réalisation satisfaisant à la première définition.

8. Considérons, enfin, une liaison *non linéaire* du premier ordre, elle est caractérisée par des équations

$$\theta_1(q, t) = 0, \quad \ldots; \quad \frac{d\theta_1}{dt} = 0, \quad \ldots, \quad \Theta_1(q, q', t) = 0, \quad \ldots,$$

les équations Θ n'étant pas toutes linéaires, et l'on doit supposer qu'elles ne forment pas, avec les équations $\dfrac{d\theta}{dt}$, qui sont déjà linéaires, un système qui, résolu par rapport au nombre maximum de paramètres q', donnerait des fonctions linéaires des autres q', car la liaison serait alors linéaire.

Supposons qu'on ait fait une réalisation linéaire de cette liaison analytique; tous les raisonnements faits précédemment à propos des liaisons linéaires subsistent sans modification, quant à la forme des équations de la liaison réalisée; celle-ci peut toujours s'écrire

$$\begin{gathered} \theta_1 = 0, \qquad \ldots; \qquad \varphi_1(q, p, t) = 0, \qquad \ldots, \\ \frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \ldots; \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \ldots; \qquad \pi_1(q, q', p, t) = 0, \qquad \ldots \\ \Pi_1(q, q', p, p', t) = 0, \qquad \ldots, \end{gathered}$$

les équations Π étant distinctes par rapport aux p', les équations π distinctes par rapport au p, et l'ensemble des équations $\frac{d\theta}{dt}$, Θ, π distinctes par rapport aux q'.

On obtient les équations du second ordre de la liaison réalisée, en dérivant les équations du premier ordre. Les équations Π, distinctes par rapport aux p', donneront des équations du second ordre distinctes par rapport aux p''; donc aucune équation du second ordre indépendante des p''. Celles-ci ne pourront être obtenues qu'en dérivant les équations des trois premiers groupes et, comme elles sont distinctes par rapport aux q', elles donneront les équations distinctes par rapport aux q''. Ces équations dérivées à leur tour donneront des équations distinctes par rapport aux q''', etc.

Si donc les équations π existent, les équations distinctes du second ordre indépendantes des p'' comprendront celles qui proviennent des deux premiers groupes, c'est-à-dire de la liaison analytique, mais seront effectivement en nombre plus considérable et il en sera de même pour le troisième ordre, etc. Si, au contraire, les équations π n'existent pas, les équations distinctes d'ordre s et indépendantes des dérivées $p^{(s)}$ fournies par la liaison réalisée coïncideront, quel que soit l'ordre s, avec les équations d'ordre s fournies par la liaison analytique.

9. Convenons de dire qu'*une liaison analytique est réalisée jusqu'à l'ordre* n, *si les équations distinctes d'ordre* s *et indépendantes des dérivées* $p^{(s)}$ *fournies par la liaison réalisée sont, pour toutes les valeurs de* s, *inférieures ou égales à* n, *les mêmes que dans la liaison analytique.*

Les résultats des paragraphes précédents nous montrent qu'une liaison du premier ordre ne peut admettre que deux sortes de réalisations. Par définition même de la réalisation, la liaison est toujours réalisée au premier ordre mais, si elle est réalisée pour le second ordre, elle est réalisée pour tous les ordres ; donc :

Une réalisation n'a lieu que jusqu'au premier ordre ou bien a lieu pour tous les ordres, et nous dirons alors que c'est une réalisation parfaite.

Les remarques faites antérieurement peuvent alors s'énoncer :

Toute réalisation directe est une réalisation parfaite ;

Toute réalisation d'une liaison finie au moyen de liaisons finies est une réalisation parfaite ;

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une réalisation d'une liaison finie ou linéaire du premier ordre fournisse la réalisation des déplacements virtuels est que cette réalisation soit parfaite ;

Et l'axiome posé plus haut (§ 4) peut prendre la forme :

Toute liaison finie ou linéaire du premier ordre possède au moins une réalisation linéaire parfaite.

10. Considérons une liaison réalisée linéairement. Les équations du premier ordre sont linéaires par rapport aux q', p', donc l'élimination des p' fournira des équations linéaires par rapport aux q', de sorte que les équations des trois premiers groupes

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \ldots; \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \ldots; \qquad \pi_1 = 0, \qquad \ldots$$

forment un système linéaire par rapport aux q'. Si les équations π n'existent pas, c'est-à-dire si la réalisation est parfaite, le système

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \ldots; \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \ldots$$

doit être linéaire, et comme il est formé uniquement par les équations du premier ordre de la liaison analytique, celle-ci est alors une liaison linéaire.

Nous obtenons ainsi cette propriété fondamentale :

Une liaison qui est véritablement non linéaire ne possède aucune réalisation parfaite.

Ce théorème, avec une démonstration un peu différente de la précédente, était une conséquence naturelle des remarques sur les réalisations matérielles des liaisons que j'avais présentées dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1). Pendant que j'y parvenais, M. Lévi-Civita y était aussi conduit par la lecture de ma Note, mais émettait quelques doutes sur la légitimité de cette conclusion, le point de vue auquel je me plaçais n'étant pas suffisamment précisé dans ma Note extrêmement condensée et, par conséquent, un peu obscure.

Cette propriété a une grande importance dans l'étude des liaisons non linéaires, puisqu'elle met en évidence une impossibilité : *une liaison non linéaire ne peut jamais être réalisée d'une façon parfaite au moyen de systèmes, si compliqués soient-ils, à liaisons linéaires.*

Une liaison non linéaire peut-elle être réalisée parfaitement? Ce qui précède montre qu'une telle réalisation ne peut être que directe ou indirecte, mais non linéaire, c'est-à-dire au moyen de corps intermédiaires soumis à des liaisons directes parmi lesquelles il devra forcément y en avoir qui seront non linéaires. *La réalisation parfaite des liaisons non linéaires ne peut donc être obtenue, si elle est possible, qu'au moyen de liaisons non linéaires directes.*

Nous connaissons des phénomènes physiques nous donnant des exemples de réalisations directes de liaisons linéaires, ce sont les phénomènes de roulement sans glissement. Par les combinaisons variées à l'infini, de telles liaisons directes, nous obtenons des réalisations parfaites de liaisons linéaires de plus en plus compliquées, ce qui rend très vraisemblable l'axiome de la fin du paragraphe précédent.

Par contre, nous ne connaissons, dans l'état actuel de la Science, aucun phénomène physique donnant un exemple de réalisation directe d'une liaison non linéaire, d'où cette conclusion :

---

(1) Delassus, *Sur la réalisation matérielle des liaisons* (*Comptes rendus*, 19 juin 1911).

Les phénomènes physiques actuellement connus ne permettent la réalisation parfaite d'aucune liaison non linéaire.

Tant que l'on n'aura pas découvert un exemple physique, cette réalisation devra être considérée comme impossible, de sorte qu'actuellement, non seulement nous ne savons pas la faire, mais nous ne savons même pas si elle est possible puisque, si elle l'est, c'est grâce à des phénomènes que nous ne connaissons pas et qui, eux-mêmes, peuvent ne pas exister.

11. Une liaison non linéaire ne peut posséder que des réalisations linéaires non parfaites, c'est-à-dire des réalisations linéaires telles que le système

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \quad \Theta_1 = 0, \quad \ldots; \quad \pi_1 = 0, \quad \ldots$$

soit linéaire, bien que le système formé par les équations des deux premiers groupes ne le soit pas. Sous cette forme analytique, on voit bien qu'il n'y a aucune impossibilité, mais on ne voit pas l'existence effective de ces réalisations.

On y arrive facilement par le procédé suivant qui est très général :

Prenons arbitrairement un certain nombre de fonctions

$$\varphi_1(q, p, t), \quad \ldots,$$

des n paramètres q et de α paramètres p, distinctes par rapport aux p, formant avec les θ un système de fonctions distinctes par rapport aux q, p et telles que les équations

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \quad \Theta_1 = 0, \quad \ldots; \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \quad \ldots$$

soient distinctes par rapport aux q', p'.

Choisissons ensuite arbitrairement un certain nombre de fonctions

$$\Psi_1(q, q', p, p', t), \quad \ldots;$$

telles que les équations

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \quad \Theta_1 = 0, \quad \ldots; \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \quad \Psi_1 = 0, \quad \ldots$$

soient distinctes par rapport aux q', p' et que les équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \ldots; \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \quad \Psi_1 = 0, \quad \ldots$$

soient distinctes par rapport aux p, p', de façon qu'on ne puisse, par leur élimination, trouver des relations entre les q, q'. Le système

$$\begin{gathered} \theta_1 = 0, \quad \ldots; \quad \varphi_1 = 0, \quad \ldots; \\ \frac{d\theta_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \quad \Theta_1 = 0, \quad \ldots; \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \quad \Psi_1 = 0, \quad \ldots \end{gathered}$$

n'entraîne alors entre les q, q' que les relations de la liaison analytique considérée ; les équations du premier ordre ne sont pas toutes linéaires, mais elles permettent d'exprimer tous les q', p' en fonction d'un certain nombre de nouveaux paramètres $p_{\alpha+1}$, $p_{\alpha+2}$, $\ldots$, $p_{\alpha+\beta}$, ces expressions contenant les q, les paramètres p jusqu'à p_α et t. Nous obtenons ainsi le système

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = 0, \quad \ldots; \quad \varphi_1 = 0, \quad \ldots; \\ q'_1 = \sigma_1(q, p, t), \quad \ldots, \quad q'_n = \sigma_n(q, p, t); \\ p'_1 = \tau_1(q, p, t), \quad \ldots, \quad p'_\alpha = \tau_\alpha(q, p, t); \end{array} \right.$$

qui est rigoureusement équivalent au précédent, c'est-à-dire ne fournit, par l'élimination de tous les p et de tous les p', que les relations de la liaison analytique. Imaginons alors, ce qui est possible d'une infinité de façons, un système holonome S_1 dépendant de $\alpha + \beta$ paramètres, que nous désignerons par p_1, $\ldots$, $p_{\alpha+\beta}$, et considérons le système $S + S_1$ défini par les paramètres q_1, $\ldots$, q_n, p_1, $\ldots$, $p_{\alpha+\beta}$ soumis à la liaison exprimée par les équations (7). Puisque cette liaison est linéaire, on peut lui appliquer l'axiome, ou bien elle sera réalisable directement et la liaison proposée sera réalisée linéairement par l'adjonction de S_1 et la liaison linéaire (7), ou bien elle possédera une réalisation linéaire parfaite par l'adjonction, au système $S + S_1$, d'un nouveau système auxiliaire S_2, le système $S + S_1 + S_2$ n'étant soumis qu'à des liaisons linéaires directes et c'est alors $S_1 + S_2$ qui joue le rôle de S_1 du cas précédent. Ainsi :

Une liaison non linéaire du premier ordre possède une infinité de réalisations linéaires.

12. Dans le paragraphe précédent nous avons montré l'existence des réalisations linéaires effectives, c'est-à-dire au moyen de liaisons linéaires directes. Nous élargirons un peu cette notion de la façon suivante :

Si le système $S + S_1$ *est soumis à une liaison lineaire* $\mathfrak{L}$ *telle qu'il n'en résulte entre les paramètres de* S *et leurs dérivées premières que les relations qui expriment la liaison analytique* L *du système* S, *nous dirons qu'on a réalisé la liaison* L *au moyen de la liaison linéaire* $\mathfrak{L}$.

La liaison réalisante $\mathfrak{L}$ n'est plus ici forcément une liaison directe, mais les notions de réalisation et de réalisation parfaite sont toujours vraies ainsi que les conséquences qui en résultent.

Un procédé général pour faire une réalisation linéaire est fournie par les équations (7) où $p_1, \ldots, p_{\alpha+\beta}$ sont les coordonnées d'un système holonome S_1.

Soient i et j les nombres d'équations 0 et Θ, λ et μ ceux des équations φ et Ψ; les quantités $q'_1, \ldots, q'_n, p'_1, \ldots, p'_\alpha$ sont liées par

$$i + j + \lambda + \mu$$

relations distinctes qui permettent de les exprimer en fonction de

$$n + \alpha - i - j - \lambda - \mu$$

paramètres, de sorte qu'on a

$$\beta = n + \alpha - i - j - \lambda - \mu.$$

Le système $S + S_1$ est à $n + \alpha + \beta$ paramètres, et ses liaisons s'expriment par $n + \alpha$ relations distinctes, de sorte que β est le nombre de ses degrés de liberté ; i et j sont des entiers positifs donnés, vérifiant l'inégalité

$$i + j < n.$$

Quant à α, λ, μ, ce sont des entiers positifs arbitraires, assujettis aux inégalités

$$\lambda < \alpha,$$
$$\lambda + \mu \leqq 2\alpha,$$
$$i + j + \lambda + \mu < n + \alpha$$

Donnons-nous arbitrairement α supérieur à $n-i-j$, la plus petite des deux quantités 2α et $n+\alpha-i-j$ est la seconde, de sorte que les inégalités se réduisent à

$$\lambda < \alpha,$$
$$\lambda + \mu < (n-i-j) + \alpha.$$

de sorte que $\lambda + \mu$ pourra prendre toutes les valeurs $1, 2, \ldots, (n-i-j)+\alpha-1$, et β toutes les valeurs

$$(n-i-j)+\alpha-1, \quad \ldots, \quad 1.$$

En prenant α suffisamment grand, β pourra ainsi prendre n'importe quelle valeur entière positive, de sorte que :

Une liaison non linéaire est toujours susceptible d'une réalisation linéaire ayant un nombre de degrés de liberté choisi arbitrairement.

Parmi toutes ces réalisations, il y a une classe particulièrement intéressante. C'est la classe

$$\alpha = 0;$$

d'après les inégalités écrites plus haut, cette conditition entraîne

$$\lambda = \mu = 0,$$

de sorte qu'on les obtient simplement en exprimant en fonction de $n-i-j$ paramètres $p_1, \ldots, p_{n-i-j}$ les n quantités q', liées par les $i+j$ relations

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \ldots; \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \ldots$$

de la liaison analytique. La liaison réalisée est alors de la forme

$$\theta_1 = 0, \qquad \ldots;$$
$$q'_1 = f_1(q, p, t), \qquad \ldots; \qquad q'_n = f_n(q, p, t),$$

les équations $\frac{d\theta_1}{dt}$ et Θ étant des conséquences des équations de la seconde ligne.

13. Parmi les liaisons, il y a lieu de considérer d'une façon spéciale celles qui sont indépendantes du temps, c'est-à-dire dans les équa-

tions desquelles ne figurent ni t ni dt. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que t ne figure ni dans les équations θ ni dans les équations Θ et que ces dernières soient homogènes par rapport aux q'; comme les équations $\frac{d\theta}{dt}$ le sont aussi forcément, la liaison peut se mettre sous la forme

$$\theta_1(q) = 0, \qquad \ldots,$$
$$\zeta_1\left(\frac{q'}{q'_n}, q\right) = 0, \qquad \ldots.$$

Les équations ζ, considérées comme aux inconnues $\frac{q'}{q'_n}$, permettent d'exprimer les $\frac{q'}{q'_n}$ en fonction des q et d'un certain nombre de paramètres p, que l'on considérera comme paramètres d'un système auxiliaire S, défini par des liaisons directes indépendantes du temps. On aura alors une réalisation linéaire

$$\theta_1(q) = 0, \qquad \ldots,$$
$$q'_1 = q'_n f_1(q, p), \qquad \ldots, \qquad q'_{n-1} = q'_n f_{n-1}(q, p)$$

dont les équations ne contiendront pas t et dont les relations du premier ordre seront linéaires et homogènes; la liaison réalisante est donc indépendante du temps. Ainsi :

Une liaison indépendante du temps possède toujours des réalisations linéaires indépendantes du temps.

14. Reprenons la liaison de M. Appell, c'est-à-dire le point (x, y, z) dont les coordonnées sont assujetties à la condition

$$x'^2 + y'^2 = z'^2;$$

c'est l'unique équation de la liaison et, comme elle est homogène, nous l'écrirons

$$\left(\frac{x'}{z'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{z'}\right)^2 = 1.$$

Cette relation entre les deux quantités $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$ permet de les exprimer en fonction d'un paramètre, et l'on a ainsi une liaison réalisée

$$x' = z' \cos p,$$
$$y' = z' \sin p,$$

dans laquelle on pourra considérer p comme l'abscisse d'un point mobile sur une droite, comme l'angle de rotation d'un solide mobile autour d'un axe fixe, etc. Nous avons ainsi des réalisations indépendantes du temps et qui sont de la classe $\alpha = 0$.

Introduisons un paramètre θ au moyen d'une équation auxiliaire

$$\theta = z,$$

nous aurons deux équations du premier ordre

$$x'^2 + y'^2 = z'^2,$$
$$\theta' = z',$$

qui, étant homogènes, peuvent s'écrire

$$\left(\frac{x'}{\theta'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\theta'}\right)^2 = 1,$$
$$\frac{z'}{\theta'} = 1,$$

et permettent d'exprimer $\frac{x'}{\theta'}, \frac{y'}{\theta'}, \frac{z'}{\theta'}$ en fonction d'un paramètre φ, ce qui donne les équations de la liaison réalisée

$$z = \theta;$$
$$z' = \theta', \qquad x' = \theta' \cos\varphi, \qquad y' = \theta' \sin\varphi,$$

et l'on pourra interpréter θ et φ comme coordonnées d'un système à deux paramètres. Par exemple, θ et φ pourront être l'angle de rotation et l'angle d'orientation d'un disque circulaire maintenu vertical et ne pouvant que rouler sur le plan horizontal. Nous retrouvons la réalisation indiquée par M. Appell; c'est une réalisation au moyen d'une liaison linéaire non directe qu'il faudra, si l'on veut revenir à la notion primitive de réalisation, réaliser au moyen de liaisons linéaires directes, en introduisant un nouveau système auxiliaire constitué, par exemple, par une fourche dans laquelle glisse un cadre à crémaillère.

15. Dans les fonctions φ et Φ, au moyen desquelles nous définissons une réalisation linéaire, introduisons un système (a) de constantes

arbitraires. Nous aurons alors une réalisation linéaire $\mathcal{R}_{(a)}$ dépendant de ces constantes arbitraires.

Le fait d'avoir une réalisation linéaire impose aux fonctions φ et Ψ certaines conditions, qu'on suppose remplies si les (a) ne sont assujettis à aucune condition, mais il peut exister des systèmes singuliers (a) pour lesquels ces conditions ne sont plus toutes réalisées. Si (a) tend vers un système (a^0) non singulier sans traverser aucun système singulier, la réalisation $\mathcal{R}_{(a)}$ tend, par continuité, vers une réalisation linéaire limite $\mathcal{R}_{(a^0)}$.

L'étude générale de ce qui se passe, quand (a) tend vers un système singulier, n'offre aucun intérêt au point de vue qui nous occupe. Nous allons nous borner à définir une singularité qui jouera ultérieurement un rôle important.

Les équations $\frac{d\varphi}{dt}$ et Φ, qui forment avec les équations $\frac{d\theta}{dt}$ et Θ un système distinct par rapport aux p', q', ne sont pas (sauf dans le cas de réalisation parfaite) distinctes par rapport aux p'. Ce groupe pourra donc se décomposer en deux groupes

$$(\Pi)\qquad \frac{d\varphi_1}{dt}=0,\qquad \ldots,\qquad \frac{d\varphi_\alpha}{dt}=0;\qquad \Phi_1=0,\qquad \ldots,\qquad \Phi_\beta=0;$$

$$(\pi)\qquad \frac{d\varphi_{\alpha+1}}{dt}=0,\qquad \ldots;\qquad \Phi_{\beta+1}=0,\qquad \ldots,$$

le premier étant résoluble par rapport à $\alpha+\beta$ quantités p' dont les expressions, portées dans les équations du second groupe, donneront des résultats indépendants des p', c'est-à-dire les équations π déjà considérées à propos des réalisations parfaites.

Supposons que, (a) tendant vers (a^0), les équations (Π) continuent à être distinctes par rapport aux $\alpha+\beta$ quantités p' considérées, mais que les équations (π) en deviennent toutes des conséquences ; ce qui revient à dire que les équations (π) deviennent des identités. Ces équations ordonnées par rapport aux $a-a^0$, que nous représenterons par $\delta a_1, \ldots$, sont de la forme

$$P_1(\delta a)+P_2(\delta a)+\ldots=0,$$

les P étant des polynomes homogènes par rapport aux δa, de degrés indiqués par leurs indices et dont les coefficients sont des fonctions des q, q', p, t. On peut encore les écrire sous la forme

$$P_1\left(\frac{\partial a}{\partial a_1}\right) + \partial a_1 P_2\left(\frac{\partial a}{\partial a_1}\right) + \ldots = 0$$

de sorte que le système

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \ldots; \qquad \Phi_1 = 0, \qquad \ldots; \qquad \pi_1 = 0, \qquad \ldots$$

aux inconnues q' qui, pour (a^0), prend la forme indéterminée

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \ldots; \qquad \Phi_1 = 0, \qquad \ldots,$$

se réduit, par continuité, au système

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \ldots; \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \ldots; \qquad P_1'\left(\frac{\partial a}{\partial a_1}\right) = 0, \qquad \ldots,$$

la résolution ne subit donc aucune discontinuité et l'on arrive, à la limite, à une réalisation linéaire, mais qui dépend des rapports $\frac{\partial a}{\partial a_1}$, c'est-à-dire de la façon dont le système (a) tend vers (a^0). La réalisation linéaire $\mathcal{R}_{(a)}$ ne tend donc pas vers une réalisation linéaire limite.

Supposons maintenant que les équations

$$P_1'\left(\frac{\partial a}{\partial a_1}\right) = 0, \qquad \ldots$$

soient, quels que soient les $\frac{\partial a}{\partial a_1}$, des conséquences des équations $\frac{d\theta}{dt}$ et Θ, ceci revient à dire que, si l'on tient compte des équations $\frac{d\theta}{dt}$, Θ, tous les coefficients des ∂a dans toutes les fonctions P_1 sont nuls, et, en vertu de ces équations, les équations π pourront s'écrire sous la forme

$$P_2(\partial a) + \ldots = 0$$

ou

$$P_2\left(\frac{\partial a}{\partial a_1}\right) + \partial a_1 P_3\left(\frac{\partial a}{\partial a_1}\right) + \ldots = 0$$

et se réduiront, à la limite, aux équations

$$P_2\left(\frac{\delta a}{\delta a_1}\right) = 0, \qquad \ldots,$$

que nous supposerons, quand les $\frac{\delta a}{\delta a_1}$ sont pris arbitrairement, former un système distinct par rapport aux q' avec les équations $\frac{d\theta}{dt}$, Θ.

Si donc, on néglige les infiniment petits d'ordre au moins égal à deux formes avec les δa, le système

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \ldots; \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \ldots; \qquad \pi_1 = 0,$$

se réduit au système

$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \ldots; \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \ldots,$$

tandis que, si l'on ne néglige les infiniment petits qu'à partir du troisième ordre, cette réduction n'existe plus.

Si, aux infiniment petits près du second ordre, les équations π sont des conséquences des équations de la liaison proposée, nous dirons que $\mathcal{R}_{(a)}$ *est une réalisation à tendance parfaite quand* (a) *tend vers* (a^0) (¹) et nous verrons, dans la seconde Partie, l'importance capitale de cette nouvelle notion.

Nous remarquerons, pour terminer, que toute liaison linéaire ou non linéaire possède de telles réalisations. Il suffit d'introduire des paramètres p et de définir la réalisation par des fonctions π, données directement en nombre suffisant pour que le nombre des équations $\frac{d\theta}{dt}$, Θ, π soit précisément celui des q', p'. On prendra, par exemple, pour les π des fonctions du second degré des a, dont les termes indépendants et les coefficients des a seront des fonctions

(¹) La définition que j'avais donnée dans une Note (*Comptes rendus*, 16 octobre 1911) était moins restrictive, elle exigeait seulement que les équations π fussent des conséquences des équations de la liaison, en négligeant les infiniment petits à partir du premier ordre. La condition complémentaire introduite ici est nécessaire pour arriver à la démonstration rigoureuse des propriétés dynamiques de ces réalisations.

s'annulant identiquement en vertu des équations $\frac{d\theta}{dt}$, Θ. La réalisation sera forcément linéaire et sera à tendance parfaite, quand les a tendront tous vers zéro.

DEUXIÈME PARTIE.

RÉALISATIONS DYNAMIQUES DES LIAISONS. MOUVEMENTS DES SYSTÈMES.

16. Une réalisation cinématique d'une liaison d'un système S se fait au moyen d'un système S_1, qui n'est défini que géométriquement et même d'une façon incomplète.

Par exemple, pour réaliser l'invariabilité de distance de deux points matériels, nous les réunissons par une tige solide, ce qui revient à dire que nous les fixons tous deux à un même corps solide, lequel peut avoir une forme géométrique arbitraire.

De même, pour la liaison de M. Appell réalisée au moyen du monocycle, la roue peut être réalisée par un corps solide de forme quelconque possédant une arête de rebroussement circulaire.

Supposons qu'on ait définitivement fixé la réalisation cinématique en adoptant des formes déterminées pour les corps qui composent S_1; la réalisation n'est pas encore déterminée au point de vue dynamique, puisque nous pouvons former ces corps au moyen de molécules dont les masses et la répartition à l'intérieur de la forme géométrique restent absolument arbitraires.

Considérons un solide non homogène. La densité en chaque point est une fonction

$$\rho(x, y, z)$$

des coordonnées de ce point par rapport à des axes attachés au solide. La masse, la force vive et l'énergie d'accélération sont alors des intégrales triples, étendues au volume formé par le solide et ayant des éléments respectivement de la forme

$$\rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz, \qquad \rho(x, y, z) f(x, y, z; q, \ldots, q', \ldots, t),$$
$$\rho(x, y, z)\, \varphi(x, y, z; q, \ldots, q', \ldots, q'', t),$$

les q étant les paramètres de position du solide. Si l'on constitue le solide au moyen d'une matière répartie avec une loi de densité

$$\rho(x, y, z) = \varepsilon\theta(x, y, z)$$

contenant un facteur numérique ε, qu'on prendra de plus en plus petit, les trois intégrales contiendront ε en facteur et s'évanouiront avec lui. On aura

$$\mathrm{T} = \varepsilon \mathrm{T}_1, \qquad \mathrm{S} = \varepsilon \mathrm{S}_1,$$

et T_1 et S_1 seront des intégrales qui dépendront de la fonction θ, c'est-à-dire de la loi de distribution des masses évanouissantes à l'intérieur du solide.

On peut aussi supposer que l'une au moins des dimensions du solide tende vers zéro, de façon à pouvoir l'assimiler, par exemple, à une plaque d'épaisseur constante ε et de densité superficielle variable. Les trois intégrales triples deviennent alors trois intégrales doubles contenant ε en facteur et tendant vers zéro avec lui. En réalité, c'est ici le volume d'intégration qui devient nul; T et S contiennent ε en facteur, et T_1 et S_1 dépendent encore de la répartition des masses.

Nous pouvons donc concevoir qu'on ait *réalisé la liaison au moyen d'un système* S_1 *dépendant, soit comme forme, soit comme constitution moléculaire, d'un facteur* ε *et dont la masse* M_1, *la force vive* $2\mathrm{T}_1$ *et l'énergie d'accélération* S_1 *tendent vers zéro avec* ε, *les rapports*

$$\frac{2\mathrm{T}_1}{\varepsilon}, \quad \frac{\mathrm{S}_1}{\varepsilon}$$

tendant vers des fonctions dépendant de la constitution interne de S_1.

Nous dirons alors que nous avons *réalisé la liaison par un système* S_1 *de masse nulle.*

Dans ce qui précède, nous supposons implicitement que nous avons une réalisation effective, c'est-à-dire que le système $\mathrm{S} + \mathrm{S}_1$ n'est soumis qu'à des liaisons directes.

Supposons que la réalisation $\mathrm{S} + \mathrm{S}_1$ soit linéaire, mais non effective. Les liaisons linéaires de $\mathrm{S} + \mathrm{S}_1$ se réaliseront effectivement au moyen d'un système S_2, le système $\mathrm{S} + \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2$ n'ayant alors que des liaisons directes. Nous pouvons dire que la liaison est réalisée, au moyen de liaison directes, par le système auxiliaire $\mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2$, qu'on pourra supposer *sans masse* comme précédemment. Cette conception oblige à considérer, non plus la réalisation au moyen de S_1, mais celle au moyen de $S_1 + S_2$. Si l'on veut ne faire intervenir que la réalisation au moyen de S_1 de masse nulle ou, plus exactement, de masse infiniment petite, il faut réaliser la liaison de $S + S_1$ au moyen d'un système S_2 de masse infiniment petite par rapport à celles des corps qui composent $S + S_1$; comme celles de S_1 sont infiniment petites du premier ordre, il faudra supposer celles de S_2 infiniment petites du second ordre. Si l'on suppose ε en facteur dans la force vive et l'énergie d'accélération de S_1, il faudra supposer ε^2 en facteur dans les fonctions analogues relatives à S_2. Donc :

Quand on dit qu'une liaison du système S, *réalisée cinématiquement par le système* S_1, *est réalisée dynamiquement par ce système* S_1 *de masse nulle, on suppose essentiellement que la masse de* S_1 *est infiniment petite du premier ordre et que la liaison de* $S + S_1$ *est directe ou que cette liaison, n'étant pas directe, est réalisée par des liaisons directes au moyen d'un nouveau système auxiliaire de masse infiniment petite du second ordre.*

17. L'étude des liaisons et de leurs réalisations conduit à définir diverses sortes de mouvements des systèmes matériels.

M. Appell a montré que, du principe des travaux virtuels, on pouvait déduire un principe de minimum d'une forme quadratique des q'', principe qui pouvait s'appliquer directement aux liaisons non linéaires. Nous l'appellerons « principe de M. Appell ». Il conduit à des équations qui, lorsqu'on donne les q^0 et q'^0 du système, définissent complètement les q en fonction du temps, c'est-à-dire un mouvement *cinématique* du système. C'est ce mouvement que nous appellerons toujours « *le mouvement abstrait du système* », pour rappeler qu'il est obtenu par l'application d'un principe abstrait à des liaisons considérées sous la forme abstraite. La notion dynamique de mouvement, c'est-à-dire la notion physique de mouvement d'un système soumis à des forces et à des liaisons, est inséparable de l'idée de réalisation des liaisons. Quand la liaison est directe, on a la notion physique de force de liaison et de liaison sans frottement d'où l'on déduit le principe des travaux virtuels, celui de M. Appell et les équations du mouvement, lesquelles coïncident avec celles du mouvement abstrait.

Quand la liaison n'est pas réalisable directement, nous ne pouvons concevoir, au point de vue physique, que les mouvements obtenus par des réalisations linéaires au moyen de liaisons directes. Pour le système total, nous avons la notion de mouvement physique, c'est son mouvement abstrait et il donne, pour le système proposé, un mouvement que nous appellerons par opposition « *mouvement concret* ».

Si la réalisation linéaire par S_1 n'a pas lieu au moyen de liaisons directes, on fera, sur ces liaisons, l'hypothèse de la fin du paragraphe précédent et nous aurons des mouvements qui seront encore des mouvement concrets.

Il y aurait encore à définir une troisième sorte de mouvements, mais leur définition, ne pouvant que résulter de l'étude des mouvements concrets, ne sera donnée qu'ultérieurement.

18. Considérons une liaison linéaire ou non

$$(8)\qquad \begin{array}{l} \theta_1 = 0, \quad \ldots, \\ \dfrac{d\theta_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \quad \Theta_1 = 0, \quad \ldots, \end{array}$$

réalisée linéairement par

$$(9)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = 0, \quad \ldots; \quad \varphi_1(q, p, t) = 0, \quad \ldots; \\ \dfrac{d\theta_1}{ds} = 0, \quad \ldots; \quad \Theta_1 = 0, \quad \ldots; \quad \dfrac{d\varphi_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \\ \Phi_1(q, q', p, p', t) = 0, \quad \ldots. \end{array} \right.$$

Si celle-ci n'est pas une liaison directe, on la réalisera au moyen de liaisons directes par la nouvelle réalisation

$$(10)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = 0, \quad \ldots; \quad \varphi_1 = 0, \quad \ldots; \quad \psi_1(q, p, r, t) = 0, \quad \ldots; \\ \dfrac{d\theta_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \quad \Theta_1 = 0, \quad \ldots; \quad \dfrac{d\varphi_1}{dt} = 0, \quad \ldots, \quad \Phi_1 = 0, \quad \ldots; \\ \dfrac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \quad \Psi_1(q, q', p, p', r, r', t) = 0, \quad \ldots; \end{array} \right.$$

cette réalisation étant parfaite, les relations indépendantes des r' se réduiront à celles de la liaison de $S + S_1$, de sorte que les relations π, indépendantes des p', r', se réduiront aux relations π, indépendantes des p', fournies par la réalisation $S + S_1$.

Le système $S + S_1 + S_2$, soumis à des liaisons directes, prend un mouvement réel qui est son mouvement abstrait. Pour former ses équations, formons la fonction $\mathcal{R}$ de M. Appell.

Soit $R(q, q', q'', t)$ cette fonction pour le système S, calculée comme si les paramètres q étaient indépendants.

La fonction analogue de S_1 se réduit, puisqu'il n'y a pas de forces données agissant sur ce système, à l'énergie d'accélération de S_1, donc est de la forme

$$\varepsilon R_1(p, p', p'', t),$$

R_1 dépendant de la constitution interne de S_1.

De même, la fonction analogue de S_2 sera de la forme

$$\varepsilon^2 R_2(r, r', r'', t).$$

On aura donc

$$\mathcal{R} = R(q, q', q'', t) + \varepsilon R_1(p, p', p'', t) + \varepsilon^2 R_2(r, r', r'', t).$$

Résolvons les dérivées des équations (10) par rapport aux q'', p'', r''; les équations

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0, \qquad \ldots; \qquad \Psi_1 = 0, \qquad \ldots,$$

sont les seules à contenir les r' et sont distinctes par rapport à ces variables, leurs dérivées seront les seules à contenir les r'' et seront distinctes, on pourra donc en tirer un certain nombre de r'' en fonction des autres.

Les équations

$$\frac{d\varphi_1}{dt}, \qquad \ldots, \qquad \Phi_1 = 0, \qquad \ldots$$

se décomposent en deux groupes

$$\pi_1(q, q', p, t) = 0, \qquad \ldots;$$
$$\Pi_1(q, p', p, p', t) = 0, \qquad \ldots,$$

le second étant distinct par rapport aux p' donnera des équations distinctes par rapport aux p'', résolubles par rapport à un certain nombre de ces p''. Enfin le groupe

$$\frac{d\theta_1}{dt}=0, \qquad \ldots; \qquad \Theta_1=0, \qquad \ldots; \qquad \pi_1=0, \qquad \ldots$$

donnera des équations résolubles par rapport à des q''.

Finalement, les équations (10) pourront se résoudre sous la forme

$$\begin{aligned} q''_1 &= \lambda_1(q, q', q''; p, p', t), \qquad \ldots; \\ p''_1 &= \mu_1(q, q', q''; p, p', p'', t), \qquad \ldots; \\ r''_1 &= \nu_1(q, q', q''; p, p', p''; r, r', r'', t), \end{aligned}$$

les q'', p'', r'' figurant dans les seconds membres étant indépendants. En substituant ces expressions, la fonction $\mathcal{R}$ deviendra

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = {} & \mathrm{R}'(q, q', q''; p, p', t) \\ & + \varepsilon \mathrm{R}'_1(q, q', q''; p, p', p'', t) + \varepsilon^2 \mathrm{R}'_2(q, q', q''; p, p', p''; r, r', r'', t). \end{aligned}$$

Elle ne contient plus que des dérivées secondes indépendantes; on obtiendra donc son minimum en annulant ses dérivées partielles, ce qui conduit aux trois groupes d'équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{R}'}{\partial q''} + \varepsilon \frac{\partial \mathrm{R}'_1}{\partial q''} + \varepsilon^2 \frac{\partial \mathrm{R}'_2}{\partial q''} &= 0, \qquad \ldots; \\ \varepsilon \frac{\partial \mathrm{R}'_1}{\partial p''} + \varepsilon^2 \frac{\partial \mathrm{R}'_2}{\partial p''} &= 0, \qquad \ldots; \\ \varepsilon^2 \frac{\partial \mathrm{R}'_2}{\partial r''} &= 0, \qquad \ldots. \end{aligned}$$

Les deux premiers groupes peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{R}'}{\partial q''} + \varepsilon \frac{\partial \mathrm{R}'_1}{\partial q''} + \varepsilon^2 \frac{\partial \mathrm{R}'_2}{\partial q''} &= 0, \qquad \ldots; \\ \frac{\partial \mathrm{R}'_1}{\partial p''} + \varepsilon \frac{\partial \mathrm{R}'_2}{\partial p''} &= 0, \qquad \ldots; \end{aligned}$$

et, lorsque ε tend vers zéro, tendent vers les équations limites

$$\frac{\partial \mathrm{R}'}{\partial q''} = 0, \qquad \ldots; \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathrm{R}'_1}{\partial p''} = 0, \qquad \ldots; \tag{12}$$

qui ne contiennent plus les inconnues r et suffisent pour déterminer les q et p indépendants, quand on se donne les valeurs initiales des q, p, p', p' correspondants.

Les équations (11) et (12) sont donc les *équations du mouvement concret*, obtenu au moyen de la réalisation dynamique considérée.

On peut mettre ces équations sous une forme plus symétrique.

Désignons par a'' et b'' les q'' et p'' dépendants, par α'' et β'' les p'' et q'' indépendants et considérons les équations du second ordre

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2}=0, \quad \ldots; \quad \frac{d\Theta_1}{dt}=0, \quad \ldots; \quad \frac{d\pi_1}{dt}=0, \quad \ldots; \quad \frac{d\Pi_1}{dt}=0, \quad \ldots,$$

qui sont linéaires par rapport aux a'', b'', α'', β'' et résolubles par rapport aux a'', b''. Si, entre elles, nous éliminons les a'', nous obtenons les équations linéaires, d'où nous tirons les b'' en fonction des α'' et β'', expressions que nous devons porter dans R_1, dont nous devrons ensuite, pour former les équations (12), annuler les dérivées par rapport aux β''. Nous exprimons ainsi que la fonction R_1 est minima, en vertu de ces relations indépendantes des a'', lesquelles sont de la forme

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{d\Pi_1}{dt} + F_1\left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2}, \ldots; \frac{d\Theta_1}{dt}, \ldots; \frac{d\pi_1}{dt}, \ldots\right) = 0;\\
B_2 &= \frac{d\Pi_2}{dt} + F_2\left(\frac{d^2\theta_1}{dt^2}, \ldots; \frac{d\Theta_1}{dt}, \ldots; \frac{d\pi_1}{dt}, \ldots\right) = 0;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

les F étant des combinaisons linéaires des $\frac{d^2\theta}{dt}$, $\frac{d\Theta}{dt}$, $\frac{d\pi}{dt}$ à coefficients indépendants des dérivées secondes. On pourra, sans résoudre ces équations, écrire le minimum de R_1 en introduisant des multiplicateurs, ce qui donnera

$$\frac{\partial R_1}{\partial p''_1} = \Sigma\xi\frac{\partial B}{\partial p''_1}, \qquad \ldots,$$

c'est-à-dire, puisque les p'' ne figurent pas dans les F,

$$\frac{\partial R_1}{\partial p''_1} = \Sigma\xi\frac{\partial \Pi_1}{\partial p'_1}, \qquad \ldots.$$

En raisonnant d'une façon analogue, on voit que les équations (11) exprimeut que R est minima pour les q'', vérifiant les relations indépendantes des p'', c'est-à-dire les équations

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2}=0, \quad \ldots; \quad \frac{d\Theta_1}{dt}=0, \quad \ldots, \quad \frac{d\pi}{dt}=0, \quad \ldots.$$

On pourra donc, au moyen de multiplicateurs, les écrire

$$\frac{\partial R}{\partial q''_1}=\Sigma\lambda\frac{\partial\theta}{\partial q_1}+\Sigma\mu\frac{\partial\Theta}{\partial q'_1}+\Sigma\nu\frac{\partial\pi}{\partial q'_1}, \quad \ldots,$$

de sorte que les équations complètes du mouvement concret sont

$$(13)\quad \begin{cases} \theta_1=0, \quad \ldots; \quad \varphi_1=0, \quad \ldots; \\ \Theta_1=0, \quad \ldots; \quad \Phi_1=0, \quad \ldots; \\ \dfrac{\partial R}{\partial q''_1}=\Sigma\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial q_1}+\Sigma\mu\dfrac{\partial\Theta}{\partial q'_1}+\Sigma\nu\dfrac{\partial\pi}{\partial q'_1}, \quad \ldots; \\ \dfrac{\partial R_1}{\partial p''_1}=\Sigma\xi\dfrac{\partial \Pi}{\partial p_1}, \quad \ldots. \end{cases}$$

Il sera utile, dans la suite, de comparer ces équations à celles du mouvement abstrait; on obtient ces dernières en écrivant le minimum de R pour les q'' vérifiant les équations

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2}=0, \quad \ldots; \quad \frac{d\Theta_1}{dt}=0, \quad \ldots;$$

ce qui donne le système

$$(14)\quad \begin{cases} \theta_1=0, \quad \ldots; \\ \Theta_1=0, \quad \ldots; \\ \dfrac{\partial R}{dq''_1}=\Sigma\alpha\dfrac{\partial\theta}{\partial q_1}+\Sigma\beta\dfrac{\partial\Theta}{\partial q'_1}, \quad \ldots. \end{cases}$$

19. Supposons que le système S soit soumis à une liaison finie ou linéaire et que, au moyen du système S_1, on ait fait une réalisation linéaire *parfaite*.

Les équations π n'existent pas et les équations (13) peuvent se répartir en deux groupes

$$
(\mathrm{Q}) \quad \begin{cases} \theta_1 = 0, \qquad \ldots; \\ \Theta_1 = 0, \qquad \ldots; \\ \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial q''_1} = \Sigma\lambda \dfrac{\partial \theta}{\partial q_1} + \Sigma\mu \dfrac{\partial \Theta}{\partial q'_1}, \qquad \ldots; \end{cases}
$$

$$
(\mathrm{P}) \quad \begin{cases} \varphi_1 = 0, \qquad \ldots; \\ \Phi_1 = 0, \qquad \ldots; \\ \dfrac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial p''_1} = \Sigma\xi \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p'_1}, \qquad \ldots. \end{cases}
$$

Dans les équations du groupe (Q) ne figurent que les inconnues q, λ, μ, et ces équations suffisent à les déterminer. Les q étant connus, les équations du groupe (P) déterminent alors les inconnues p et ε.

Les inconnues (Q) sont donc déterminées d'une façon indépendante par des équations qui ne dépendent pas de la réalisation parfaite considérée et qui coïncident avec celles du mouvement abstrait. Nous retrouvons ainsi la propriété indiquée dans l'introduction :

Toutes les réalisations linéaires parfaites d'une même liaison linéaire donnent un seul et même mouvement concret correspondant à des valeurs initiales données des q et q'. Ce mouvement coïncide avec le mouvement abstrait.

20. Considérons maintenant une réalisation linéaire *non parfaite* d'une liaison linéaire ou non linéaire.

Les équations (13) du mouvement concret ne peuvent plus se grouper comme dans le cas précédent. Elles constituent un système aux inconnues simultanées q, p.

Pour déterminer une solution, il faudra se donner les q^0, p^0, q'^0, p'^0, satisfaisant aux équations

$$
\begin{gathered}
\theta_1 = 0, \quad \ldots; \qquad \varphi_1 = 0, \quad \ldots; \\
\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \qquad \Theta_1 = 0, \quad \ldots; \qquad \frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \qquad \Phi_1 = 0, \quad \ldots.
\end{gathered}
$$

Donnons-nous un système de valeurs des q^0, q'^0 satisfaisant aux équations

$$
\begin{gathered}
\theta_1 = 0, \quad \ldots; \\
\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \qquad \Theta_1 = 0, \quad \ldots,
\end{gathered}
$$

de la liaison proposée ; les p^0 et p'^0 devront satisfaire aux équations

$$\varphi_1 = 0, \quad \ldots;$$
$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \quad \Phi_1 = 0, \quad \ldots,$$

qui peuvent se mettre sous la forme

$$\varphi_1 = 0, \quad \ldots; \quad \pi_1 = 0, \quad \ldots;$$
$$\Pi_1 = 0, \quad \ldots,$$

où les équations de la première ligne ne contiennent pas les p' et sont distinctes par rapport aux p, tandis que celles de la seconde ligne sont distinctes par rapport aux p'. Le nombre maximum d'équations de chacun de ces groupes est donc celui des paramètres p. En général, ce maximum n'est pas atteint et, les équations considérées ne déterminant pas tous les p^0, p'^0, il en reste un certain nombre qu'on peut prendre arbitrairement, donc :

En général, une réalisation linéaire, bien déterminée cinématiquement et dynamiquement, donne une infinité de mouvements concrets correspondant aux mêmes conditions initiales propres (q^0, q'^0) *du système étudié.*

Supposons un mouvement concret déterminé par un système initial q^0, p^0, q'^0, p'^0 ; il est déterminé par les équations (13) dans la formation desquelles intervient la fonction R_1. Si l'on change la constitution interne du système auxiliaire S_1, la fonction R_1 change et, par conséquent, aussi le mouvement concret obtenu, donc :

Une réalisation linéaire qui n'est définie qu'au point de vue cinématique donne, pour un même système initial (q^0, p^0, q'^0, p'^0), *des mouvements concrets variables avec la constitution matérielle du système auxiliaire* S_1.

Nous retrouvons ainsi, sous leur forme générale, les propriétés signalées dans l'Introduction, à propos d'exemples particuliers.

21. Considérons une réalisation linéaire de la classe $\alpha = 0$ (§ 12). Elle est de la forme

$$\theta_1 = 0, \quad \ldots;$$
$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \quad \Theta_1 = 0, \quad \ldots; \quad \pi_1(q, q', p, t) = 0, \quad \ldots,$$

le nombre total des équations de la seconde ligne étant celui des q, et supposons qu'on prenne pour les p *les coordonnées d'un système holonome, en vertu de liaisons finies indépendantes du temps.*

Les équations II n'existent pas ; les équations du mouvement concret peuvent se répartir en deux groupes

$$(\mathrm{Q})\quad \left\{\begin{array}{l} \theta_1 = 0, \quad \ldots, \\ \Theta_1 = 0, \quad \ldots; \quad \pi_1 = 0, \quad \ldots, \\ \dfrac{\partial R}{\partial q_1''} = \Sigma\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial q_1} + \Sigma\mu\dfrac{\partial\Theta}{\partial q_1'} + \Sigma\nu\dfrac{\partial\pi}{\partial q_1'}, \quad \ldots; \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{P})\quad \frac{\partial R_1}{\partial p_1''} = 0, \quad \ldots.$$

Le nombre des inconnues λ, μ, ν étant précisément celui des q, et ces inconnues ne figurant que dans les équations de la dernière ligne du groupe (Q), celles-ci ne servent qu'à les déterminer. Si donc on les supprime, on obtient, pour déterminer les inconnues q, p, les deux groupes

$$(\mathrm{Q})\quad \left\{\begin{array}{l} \theta_1 = 0, \quad \ldots, \\ \Theta_1 = 0, \quad \ldots, \quad \pi_1 = 0, \quad \ldots; \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{P})\quad \frac{\partial R_1}{\partial p_1''} = 0, \quad \ldots.$$

Nous avons ainsi des mouvements concrets particuliers, que, pour rappeler leur origine ($\alpha = 0$), nous appellerons les mouvements M_0 et qui possèdent les propriétés remarquables suivantes :

Les mouvements M_0, *fournis par une même réalisation* $\mathcal{R}$ ($\alpha = 0$), *sont indépendants des forces qui agissent sur le système* S. En effet, ces forces ne figurent pas dans le système (Q), (P).

Dans un mouvement M_0, *le système auxiliaire* S_1 *se meut comme s'il était isolé.* En effet, les équations (P) ne contiennent que les inconnues p, suffisent à les déterminer par les valeurs initiales p^0, p'^0 qui restent arbitraires et sont précisément les équations du mouvement de S_1, isolé et sans forces données.

Considérons, en particulier, le mouvement M_0 correspondant aux conditions initiales

$$p_1'^0 = p_2'^0 = \ldots = 0,$$

les p^0 étant choisis arbitrairement; le système auxiliaire S_1 se meut comme s'il était isolé, n'est soumis à aucune force, et ses liaisons sont indépendantes du temps; puisqu'il est au repos initial, il reste en équilibre, de sorte que les p sont constants. Nous obtenons ainsi *des mouvements* M_0 *particuliers pour lesquels le système auxiliaire est en équilibre;* pour abréger, nous les représenterons par M_0^0.

Les équations des mouvements concrets M_0^0 sont

$$\begin{gathered}\theta_1 = 0, \qquad \ldots, \\ \Theta_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \pi_1 = 0, \qquad \ldots,\end{gathered}$$

dans lesquelles on doit considérer les p comme des constantes arbitraires.

22. Donnons-nous arbitrairement, au point de vue cinématique, un mouvement de S compatible avec ses liaisons, c'est-à-dire des fonctions

$$q_1 = f_1(t), \qquad \ldots, \qquad q_n = f_n(t), \tag{15}$$

satisfaisant aux équations

$$\begin{gathered}\theta_1 = 0, \qquad \ldots, \\ \Theta_1 = 0, \qquad \ldots,\end{gathered}$$

de la liaison de ce système.

Choisissons ensuite arbitrairement des fonctions

$$\psi_1(q, q', t), \qquad \ldots,$$

formant avec les $\frac{d\theta}{dt}$ et les Θ un système de n fonctions distinctes par rapport aux q'; si, dans ces fonctions ψ, nous substituons les expressions (15) des q, nous obtenons des fonctions de t

$$u_1(t), \qquad \ldots.$$

Posons

$$\pi_1 = \psi_1(q, q', t) - u_1(t) - p_1, \qquad \ldots$$

et considérons la réalisation $\mathcal{R}$ $(\alpha = 0)$ donnée par les équations

$$\left\{\begin{gathered}\theta_1 = 0, \qquad \ldots, \\ \Theta_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \pi_1 = 0, \qquad \ldots,\end{gathered}\right. \tag{16}$$

puis cherchons le mouvement M_0^0 qui correspond aux valeurs initiales

$$p_1^0 = p_2^0 = \ldots = 0; \qquad q_1^0 = f_1(t_0), \qquad \ldots, \qquad q_1'^0 = f_1'(t_0), \qquad \ldots.$$

Il faudra, dans les équations (16), annuler tous les p, ce qui donnera le système

$$\theta_1 = 0, \qquad \ldots,$$
$$\Theta_1 = 0, \qquad \ldots; \qquad \Psi_1 - u_1 = 0, \qquad \ldots$$

et l'intégrer avec les conditions initiales

$$q_1^0 = f_1(t_0), \qquad \ldots, \qquad q_1'^0 = f_1'(t_0), \qquad \ldots.$$

Mais les fonctions (15) satisfont à ces équations et à ces conditions initiales, de sorte que le mouvement M_0^0 cherché est précisément le mouvement (15).

Ainsi :

Le système S *étant soumis à des forces données et* M *étant un mouvement de* S *arbitrairement choisi, mais compatible avec ses liaisons, on peut toujours trouver une réalisation fournissant* M *comme mouvement concret de* S ;

et, ce qui est une autre manière d'énoncer la même propriété :

Si, pour un système soumis à des forces données, on considère tous les mouvements concrets fournis par toutes les réalisations linéaires imaginables de ses liaisons, on obtient tous les mouvements cinématiquement compatibles avec ces liaisons.

Ce qui montre que les mouvements concrets sont, en définitive, des mouvements complètement arbitraires, sauf la condition de respecter les liaisons, et cette propriété est la généralisation complète de remarques faites dans l'Introduction.

24. Tout mouvement abstrait du système S sous l'action des forces $\mathcal{F}$ est un mouvement cinématiquement compatible avec les liaisons ; on pourra donc, d'après ce que nous venons de démontrer, trouver, pour S soumis à ces forces, une réalisation donnant ce mouvement comme mouvement concret, c'est-à-dire *réalisant mecaniquement ce mouvement abstrait*.

Si, pour le même système de forces, on change les conditions initiales, la réalisation à employer pour réaliser mécaniquement le nouveau mouvement abstrait ne sera plus la même *a priori*. On peut cependant s'arranger de façon qu'il en soit ainsi.

Le système $\mathcal{F}$ des forces données étant fixé, les mouvements abstraits sont fournis par les équations

$$\begin{gathered} \theta_1 = 0, \qquad \ldots, \\ \Theta_1 = 0, \qquad \ldots, \\ \frac{\partial R}{\partial q_1''} = \Sigma\alpha\frac{\partial\theta}{\partial q_1} + \Sigma\beta\frac{\partial\Theta}{\partial q_1'}, \quad \ldots \end{gathered}$$

qui admettent des intégrales premières

$$\Psi_1(q, q', t) = \text{const.}, \qquad \ldots$$

formant avec les fonctions $\frac{d\theta}{dt}$ et Θ un système de n fonctions distinctes des n quantités q'.

Les équations générales des mouvement abstraits peuvent s'écrire

$$\begin{gathered} \theta_1 = 0, \qquad \ldots, \\ \Theta_1 = 0, \qquad \ldots; \qquad \Psi_1 = \text{const.}, \qquad \ldots \end{gathered}$$

et ce sont précisément les équations des mouvements M_0^0, donnés par la réalisation $\mathcal{R}$ $(\alpha = 0)$ ayant pour équations

$$\begin{gathered} \theta_1 = 0, \qquad \ldots, \\ \Theta_1 = 0, \qquad \ldots; \qquad \Psi_1 - p_1 = 0, \qquad \ldots, \end{gathered}$$

donc :

Pour un système soumis à des forces données, on peut toujours trouver une réalisation linéaire des liaisons réalisant mécaniquement, comme mouvements concrets particuliers, tous les mouvements abstraits de ce système.

Si l'on change le système $\mathcal{F}$ des forces, les intégrales Ψ sont changées et, pour réaliser les nouveaux mouvements abstraits, il faudra changer la réalisation linéaire.

25. Les théorèmes précédents montrent des *possibilités* et mènent tout naturellement à se poser la question suivante, qui va nous conduire à une impossibilité :

Existe-t-il une réalisation linéaire des liaisons du système S *telle que,* *quel que soit le système $\mathcal{F}$ de forces, les mouvements abstraits produits par ces forces $\mathcal{F}$ se retrouvent tous parmi les mouvements concrets produits par ces mêmes forces?*

Nous commencerons par remarquer que tout mouvement de S arbitrairement donné, au point de vue cinématique et compatible avec les liaisons, peut être obtenu comme mouvement abstrait du système S sous l'action d'un système $\mathcal{F}$ de forces convenablement choisi. Cette propriété est classique pour le cas du point matériel et elle s'étend immédiatement à un système de points matériels, en écrivant le mouvement abstrait au moyen des coordonnées rectilignes x, y, z des points. Si l'on se donne, *a priori*, le mouvement satisfaisant aux liaisons, les équations du mouvement abstrait deviennent n équations linéaires entre les $3n$ composantes des forces et les multiplicateurs, de sorte qu'on peut se donner arbitrairement un certain nombre de ces quantités et en déduire les autres en fonction du temps.

Si un mouvement abstrait est obtenu comme mouvement concret, il vérifie simultanément les deux systèmes

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{array}{l} \theta_1 = 0, \qquad \ldots, \\ \Theta_1 = 0, \qquad \ldots, \\ \dfrac{\partial R}{\partial q''_1} = \Sigma\alpha\dfrac{\partial\theta}{\partial q_1} + \Sigma\beta\dfrac{\partial\Theta}{\partial q'_1}, \qquad \ldots; \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{C})\qquad \left\{\begin{array}{l} \theta_1 = 0, \qquad \ldots; \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \ldots; \\ \Theta_1 = 0, \qquad \ldots; \qquad \Phi_1 = 0, \qquad \ldots; \\ \dfrac{\partial R}{\partial q''_1} = \Sigma\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial q_1} + \Sigma\mu\dfrac{\partial\Theta}{\partial q'_1} + \Sigma\nu\dfrac{\partial\pi}{\partial q'_1}, \qquad \ldots, \\ \dfrac{\partial R_1}{\partial p''_1} = \Sigma\xi\dfrac{\partial\pi}{\partial p'_1}, \qquad \ldots; \end{array}\right.$$

d'où, en désignant par λ' les $\lambda - \alpha$ et par μ' les $\mu - \alpha$, le système

$$(\mathrm{D})\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1 = 0, \qquad \ldots; \\ \Phi_1 = 0, \qquad \ldots; \\ \Sigma\lambda'\dfrac{\partial\theta}{\partial q_1} + \Sigma\mu'\dfrac{\partial\Theta}{\partial q'_1} + \Sigma\nu\dfrac{\partial\pi}{\partial q'_1} = 0, \qquad \ldots; \\ \dfrac{\partial R_1}{\partial p''_1} = \Sigma\xi\dfrac{\partial\pi}{\partial p'_1}, \qquad \ldots, \end{array}\right.$$

dans lequel ne figure plus la fonction R et qui, par conséquent, est indépendant du système $\mathcal{F}$ de forces qui agit sur le système S.

Si tous les mouvements abstraits produits par tous les systèmes $\mathcal{F}$ sont des mouvements concrets, ils vérifient ce système (D), de sorte que, d'après la remarque du début, le système (D) doit être vérifié quels que soient les q satisfaisant aux équations de liaison θ et Θ, en entendant par là que, quel que soit le système de fonctions q satisfaisant aux équations θ et Θ, on peut trouver un système de fonctions $p, \lambda, \mu, \nu, \xi$, tel que le système différentiel (D) soit vérifié par les $q, p, \lambda. \nu, \xi$. Le système partiel

$$(\mathrm{D}')\qquad \left\{\begin{array}{ll} \varphi_1 = 0, & \ldots; \\ \Phi_1 = 0, & \ldots; \\ \dfrac{\partial R_1}{\partial p''_1} = \Sigma\xi\dfrac{\partial \pi}{\partial p'_1}, & \ldots \end{array}\right.$$

satisfait, *a fortiori*, à cette condition et réciproquement, si, quels que soient les q satisfaisant aux liaisons, on peut trouver les p, ξ, satisfaisant aux équations (D′), il suffira de prendre les λ', μ', ν, tous nuls, pour avoir un système $p, \xi, \lambda', \mu, \nu$, vérifiant le système (D′).

Les équations

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 = 0, & \ldots; \\ \Phi_1 = 0, & \ldots \end{array}$$

du système (D′) entraînent les équations

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \qquad \ldots$$

et les équations

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = 0, \qquad \ldots; \qquad \Phi_1 = 0, \qquad \ldots$$

peuvent se mettre sous la forme

$$\pi_1 = 0, \qquad \ldots; \qquad \Pi_1 = 0, \qquad \ldots;$$

de sorte que le système (D′) peut s'écrire sous la forme

$$(\mathrm{D}')\qquad \left\{\begin{array}{ll} \varphi_1 = 0, & \ldots; \\ \pi_1 = 0, & \ldots; \\ \Pi_1 = 0, & \ldots; \\ \dfrac{\partial R_1}{\partial p''_1} = \Sigma\xi\dfrac{\partial \Pi}{\partial p'_1}, & \ldots. \end{array}\right.$$

Si, pour les q satisfaisant à la liaison θ, Θ, ce système aux p, ξ est compatible, il en sera, *a fortiori*, de même du système

$$(\mathrm{D}'')\qquad \begin{cases} \pi_1 = 0, & \ldots; \\ \Pi_1 = 0, & \ldots; \\ \dfrac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial p''_1} = \Sigma\xi\dfrac{\partial \Pi}{\partial p'_1}, & \ldots; \end{cases}$$

de sorte que, de ce système (D″), on ne pourra, par élimination des p, ξ, tirer aucune équation d'ordre quelconque qui ne soit conséquence algébrique des équations θ, Θ et de celles qu'on peut en déduire par dérivation.

D'après la définition même de la forme canonique d'une liaison θ, Θ, ses équations finies et du premier ordre peuvent se résoudre de la façon suivante :

$$\begin{gathered} q_1 = f_1(q_{i+1}, \ldots, q_n; t), \qquad \ldots, \qquad q_i = f_i(q_{i+1}, \ldots, q_n, t); \\ q'_1 = \mathrm{F}_1(q_{i+1}, \ldots, q_n; q'_{j+1}, \ldots, q'_n; t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (j \geqq i); \\ q'_j = \mathrm{F}_j(q_{i+1}, \ldots, q_n; q'_{j+1}, \ldots, q'_n; t) \end{gathered}$$

ses équations du second ordre seront les dérivées de celles du premier, donc seront résolues par rapport à $q''_1, \ldots, q''_j$; ses équations du troisième ordre seront résolues par rapport à $q'''_1, \ldots, q'''_j$, etc., et il en résulte qu'une équation de la forme

$$(\chi)\qquad \chi(q_{i+1}, \ldots, q_n; q'_{j+1}, \ldots, q'_n; q''_{j+1}, \ldots; q''_n, \ldots; q^{(\mu)}_{j+1}, \ldots, q^{(\mu)}_n; t) = 0$$

ne pourra jamais être une conséquence des équations θ, Θ.

En vertu de ces équations θ, Θ, les équations π sont de la forme

$$\pi_1(q_{i+1}, \ldots, q_n; q'_{j+1}, \ldots, q'_n; p; t) = 0, \qquad \ldots.$$

Ces équations sont distinctes par rapport aux p, sans quoi il en résulterait une relation du premier ordre de la forme (χ), non conséquence de la liaison θ, Θ, ce qui serait contraire à la définition de la réalisation. Ces équations sont d'ailleurs distinctes par rapport aux $q'_{j+1}, \ldots, q'_n$, puisqu'elles doivent former avec les équations du premier ordre $\dfrac{d\theta}{dt}$ et Θ un système distinct par rapport aux q'.

Les équations

$$
(\mathrm{D}''') \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\Pi_1 = 0, \qquad \ldots; \\
&\frac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial p''_1} = \Sigma\xi \frac{\partial \Pi}{\partial p'_1}, \qquad \ldots
\end{aligned}
\right.
$$

sont les équations du mouvement abstrait du système S_1, sans forces, et soumis à la liaison exprimée par le système

$$\Pi_1 = 0, \qquad \ldots,$$

dans lequel on considère les q comme des fonctions données.

Si, dans le second groupe, on élimine les ξ, on a des équations du second ordre qui, avec les dérivées des équations Π, distinctes par rapport aux p', donnent les expressions de tous les p'' en fonction des p et de certains p'. Comme les fonctions Π ne contiennent que des q et des q', les équations du second groupe ne pourront contenir que les q et les q', tandis que les dérivées des équations Π pourront contenir des q''. Le système (D''') se mettra donc sous forme résolue, en tenant compte des équations θ, Θ :

$$
(\mathrm{D}''') \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\left\{
\begin{aligned}
&p'_1 = \omega_1(q_{i+1}, \ldots; q'_{j+1}, \ldots; p_1, \ldots; p'_{k+1}, \ldots; t), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&p'_k = \omega_k(q_{i+1}, \ldots; q'_{j+1}, \ldots; p_1, \ldots; p'_{k+1}, \ldots; t);
\end{aligned}
\right. \\
&\left\{
\begin{aligned}
&p''_m = \Omega_m(q_{i+1}, \ldots; q'_{j+1}, \ldots; q''_{j+1}, \ldots; p_1, \ldots; p'_{k+1}, \ldots; t), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&p''_1 = \Omega_1\,(q_{i+1}, \ldots; q'_{j+1}, \ldots; q''_{j+1}, \ldots; p_1, \ldots; p'_{k+1}, \ldots; t)
\end{aligned}
\right.
\end{aligned}
\right.
$$

et, plus généralement, il donnera les expressions des dérivées d'ordre μ de tous les paramètres p en fonction de

$$q_{i+1}, \quad \ldots; \quad q'_{j+1}, \quad \ldots; \quad q^{(\mu)}_{j+1}, \quad \ldots; \quad p_1, \quad \ldots; \quad p'_{k+1}, \quad \ldots; \quad t.$$

Considérons les équations π et dérivons-les successivement jusqu'à l'ordre μ. Nous obtiendrons ainsi des groupes successifs d'équations contenant les q' et p, puis les q'' et p', puis les q''' et p'', etc., et enfin les $q^{(\mu+1)}$ et les $p^{(\mu)}$. Remplaçons les dérivées premières, secondes, etc., des p par les expressions tirées du système (D'''), nous obtiendrons ainsi des groupes successifs ayant un nombre fixe d'équations, celui des équations π, et formés de relations entre les quantités suivantes :

Pour

$G_0 \ldots\ldots$ $q_{i+1}, \ldots; q'_{j+1}, \ldots; p_1, \ldots;$

$G_1 \ldots\ldots$ $q_{i+1}, \ldots; q'_{j+1}, \ldots; q''_{j+1}, \ldots; p_1, \ldots; p'_{k+1}, \ldots;$

$G_2 \ldots\ldots$ $q_{i+1}, \ldots; q'_{j+1}, \ldots; q''_{j+1}, \ldots; q'''_{j+1}, \ldots; p_1, \ldots; p'_{k+1}, \ldots;$

$\ldots\ldots\ldots$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$

$G_\mu \ldots\ldots$ $q_{i+1}, \ldots; q'_{j+1}, \ldots; \ldots; q^{(\mu+1)}_{j+1}, \ldots; p_1, \ldots; p'_{k+1}, \ldots,$

les équations d'un quelconque de ces groupes étant distinctes par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé des q qui y figurent. Cela résulte de ce que, à partir de G_1, les équations dérivées des équations π sont linéaires par rapport aux dérivées de l'ordre le plus élevé, et les coefficients de ces inconnues sont toujours les mêmes, ce sont des dérivées partielles des fonctions π, c'est-à-dire des fonctions des q, des q' et des p; ils ne sont pas modifiés par les substitutions considérées qui ne portent que sur les p', p'', ... et, d'autre part, ces substitutions n'introduisent, dans les autres termes, que des dérivées des q, d'ordre inférieur au moins d'une unité, de sorte que, finalement, elles n'altèrent pas la possibilité de résolution.

Entre les équations G_0 on ne peut éliminer les p, d'après ce qui a déjà été dit.

Si, entre les équations G_0, G_1, on peut éliminer les $p_1, \ldots, p'_{k+1}, \ldots$ on obtient au moins une équation qui ne pourra pas être indépendante des $q''_{j+1}, \ldots$. En effet, si l'on part des équations π résolues par rapport à des q', on a des équations G_1 résolues par rapport à des q'' ; si l'on porte alors dans le groupe G_1 les valeurs des p tirées de G_0, on a à éliminer, entre des équations résolues par rapport à des q'', un certain nombre d'inconnues p, p', ce qui donne forcément des équations contenant ces q''. On obtiendra donc entre les q une relation de la forme χ, laquelle, contenant effectivement des $q''_{j+1}, \ldots$, ne pourra être une identité.

Supposons donc qu'entre G_0, G_1 on ne puisse éliminer les $p_1, \ldots,$ $p'_{k+1}, \ldots$. Prenons alors les équations G_0, G_1, G_2 qui contiennent les mêmes p et p'. Si l'on peut les éliminer, un raisonnement analogue montrera qu'on aura au moins une relation χ, contenant effectivement des quantités $q'''_{j+1}, \ldots$, donc qui n'est pas une identité.

En général, si, entre les équations G_0, G_1, ..., $G_{\mu-1}$, on ne peut éliminer les $p_1, p'_{k+1}, \ldots$, et qu'on puisse les éliminer entre les équations $G_0, G_1, \ldots, G_\mu$, on aura au moins une relation de la forme (χ) contenant effectivement des dérivées $q_{j+1}^{(\mu+1)}, \ldots$, donc ne se réduisant pas à une identité.

D'ailleurs, si s est le nombre des équations π, le nombre total des équations G_0, G_1, ..., G_μ est

$$(\mu+1)s,$$

il croît indéfiniment avec s, donc arrive à un certain moment à être supérieur au nombre des $p_1, \ldots, p'_{k+1}, \ldots$, lequel reste fixe. Il arrivera donc forcément un moment où l'élimination des $p_1, \ldots, p'_{k+1}, \ldots$ sera possible et, par conséquent, à un certain moment on sera conduit à une relation (χ) qui ne sera pas une identité. Nous avons donc démontré ainsi que le système (D″) entraîne des relations entre les q qui ne sont pas des conséquences de la liaison proposée θ, Θ.

Il est à remarquer, c'est la démonstration précédente elle-même qui le met en évidence, que ces relations (χ), dont l'existence démontre l'impossibilité en question, sont fournies par les équations π. Elles n'existent pas s'il n'y a pas d'équations π, c'est-à-dire si la relation linéaire est parfaite, et, effectivement, nous avons vu alors que les mouvements concrets n'étaient que les mouvements abstraits.

Nous pouvons donc énoncer en toute rigueur la propriété :

Les seules réalisations linéaires donnant, pour des forces quelconques, la réalisation mécanique des mouvements abstraits comme mouvements concrets particuliers sont les réalisations linéaires parfaites des liaisons linéaires et alors on n'a, comme mouvements concrets, que les mouvements abstraits d'où, en vertu de l'impossibilité des réalisations linéaires parfaites pour une liaison non linéaire, ce corollaire :

Une liaison non linéaire ne possède aucune réalisation linéaire donnant, pour des forces quelconques, la réalisation mécanique des mouvements abstraits comme mouvements concrets particuliers.

Si l'on se reporte à ce qui a été dit antérieurement (§ 10), il en résulte que *la réalisation mécanique des mouvements abstraits d'un système à liaisons non linéaires n'existe pas.*

26. Étudions maintenant les réalisations linéaires à tendance parfaite.

Les équations du mouvement concret, qu'on peut écrire :

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad \theta_1 = 0, \quad \ldots; \quad \varphi_1 = 0, \quad \ldots; \\ \dfrac{d\theta_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \quad \Theta_1 = 0, \quad \ldots; \quad \pi_1 = 0, \quad \ldots; \quad \Pi_1 = 0, \quad \ldots; \\ \qquad \dfrac{\partial R}{\partial q_1''} = \Sigma\lambda \dfrac{\partial \theta}{\partial q_1} + \Sigma\mu \dfrac{\partial \Theta}{\partial q_1'} + \Sigma\nu \dfrac{\partial \pi}{\partial q_1'}, \quad \ldots; \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial R_1}{\partial p_1''} = \Sigma\xi \dfrac{\partial \Pi}{\partial p_1'}, \quad \ldots, \end{array}\right.$$

contiennent alors les constantes arbitraires a qui entrent dans les fonctions φ, π, Π. Lorsque le système (a) tend d'une façon quelconque vers le système singulier (a^0), les équations π deviennent des identités, les fonctions $\dfrac{\partial \pi}{\partial q}$ deviennent identiquement nulles et les équations du mouvement concret se réduisent, à la limite, à

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad \theta_1 = 0, \quad \ldots; \quad \varphi_1 = 0, \quad \ldots; \\ \dfrac{d\theta_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \quad \Theta_1 = 0, \quad \ldots; \quad \Pi_1 = 0, \quad \ldots; \\ \qquad \dfrac{\partial R}{\partial q_1''} = \Sigma\lambda \dfrac{\partial \theta}{\partial q_1} + \Sigma\mu \dfrac{\partial \Theta}{\partial q_1'}, \quad \ldots; \\ \qquad\quad \dfrac{\partial R_1}{\partial p_1''} = \Sigma\xi \dfrac{\partial \Pi}{\partial p_1'}, \quad \ldots, \end{array}$$

qui peuvent se répartir en deux groupes :

$$(\mathrm{Q})\quad \left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad \theta_1 = 0, \quad \ldots; \\ \dfrac{d\theta_1}{dt} = 0, \quad \ldots; \quad \Theta_1 = 0, \quad \ldots; \\ \dfrac{\partial R}{\partial q_1''} = \Sigma\lambda \dfrac{\partial \theta}{\partial q_1} + \Sigma\mu \dfrac{\partial \Theta}{\partial q_1'}, \quad \ldots . \end{array}\right.$$

$$(\mathrm{P})\quad \left\{\begin{array}{l} \quad \varphi_1 = 0, \quad \ldots; \\ \quad \Pi_1 = 0, \quad \ldots; \\ \dfrac{\partial R_1}{\partial p_1''} = \Sigma\xi \dfrac{\partial \Pi}{\partial p_1'}, \quad \ldots . \end{array}\right.$$

Le premier groupe est bien visiblement celui des équations du mouvement abstrait, mais pour pouvoir en conclure que les mouvements concrets tendent vers les mouvements abstraits, cette remarque est insuffisante et il faut faire appel à toutes les conditions qui entrent dans la définition d'une réalisation à tendance parfaite.

Pour présenter clairement la démonstration rigoureuse, nous commencerons par établir le lemme suivant :

Si le système d'équations linéaires

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1^1 x_1 + \ldots + A_1^i x_i + B_1 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_j^1 x_1 + \ldots + A_j^i x_i + B_j = 0 \end{array}\right.$$

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} C_1^1 x_1 + \ldots + C_1^i x_i + D_1 + A_1^1 y_1 + \ldots + A_j^1 y_j = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_i^1 x_1 + \ldots + C_i^i x_i + D_i + A_1^i y_1 + \ldots + A_j^i y_j = 0 \end{array}\right. \qquad (i > j),$$

aux inconnus $x_1, \ldots, x_i, y_1, \ldots, y_j$, satisfait aux conditions suivantes :

1° *Les coefficients* A, B, C, D *sont des fonctions des variables $z_1, \ldots,$ et d'un paramètre μ et sont régulières au point $z_1^0, \ldots, \mu^0$;*

2° *Pour $\mu = \mu^0$, tous les coefficients* A et B *s'annulent identiquement;*

3° *Le déterminant Δ, formé avec les coefficients* C, *n'est pas nul au point $z_1^0, \ldots, \mu^0$;*

4° *En supprimant le facteur $\mu - \mu^0$ dans toutes les équations* (17), *le système proposé tend, pour $\mu = \mu^0$, vers un système limite*

$$(19)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_1^1 x_1 + \ldots + \alpha_1^i x_i + \beta_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_j^1 x_1 + \ldots + \alpha_j^i x_i + \beta_j = 0, \end{array}\right.$$

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} (C_1^1)^0 x_1 + \ldots + (C_1^i)^0 x_i + (D_1)^0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (C_i^1)^0 x_1 + \ldots + (C_i^i)^0 x_i + (D_i)^0 = 0, \end{array}\right.$$

qui est compatible au point $z_1^0, \ldots,$ c'est-à-dire dont, par suite de l'hypothèse sur Δ, les j premières équations sont des conséquences des i dernières.

Dans ces conditions, les inconnues x tirées du système (17), (18) *sont des fonctions de $z_1 \ldots, \mu$, régulières en $z_1^0, \ldots, \mu^0$ qui, pour $\mu = \mu^0$, se réduisent à des fonctions de $z_1, \ldots,$ régulières en $z_1^0, \ldots,$ et données par le système* (20).

Faisons le changement d'inconnues

$$
(21)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
X_1 = C_1^1 x_1 + \ldots + C_1^i x_i + D_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
X_i = C_i^1 x_1 + \ldots + C_i^i x_i + D_i.
\end{array}
\right.
$$

D'après l'hypothèse sur Δ, les x seront des fonctions linéaires des X à coefficients fonctions de $z_1, \ldots, \mu$ régulières en $z_1^0, \ldots, \mu^0$, et le système proposé deviendra

$$
(22)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
\mathcal{A}_1^1 X_1 + \ldots + \mathcal{A}_1^i X_i + \mathcal{B}_1 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\mathcal{A}_j^1 X_1 + \ldots + \mathcal{A}_j^i X_i + \mathcal{B}_j = 0;
\end{array}
\right.
$$

$$
(23)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
X_1 + A_1^1 y_1 + \ldots + A_j^1 y_j = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
X_i + A_1^i y_1 + \ldots + A_j^i y_j = 0.
\end{array}
\right.
$$

Les $\mathcal{A}$ sont des fonctions linéaires et homogènes des A à coefficients réguliers en $z_1^0, \ldots, \mu^0$, ce sont donc des fonctions régulières en $z_1^0, \ldots, \mu^0$ et s'annulant identiquement pour $\mu = \mu^0$. Il en est de même pour les coefficients $\mathcal{B}$. Si, dans les équations (22), on supprime le facteur $\mu - \mu^0$, puis qu'on y fasse $\mu = \mu^0$, on obtiendra évidemment les équations transformées des équations (19) par le changement de variables (21) où l'on fait $\mu = \mu^0$, et ces équations doivent être des conséquences des équations transformées des équations (20), c'est-à-dire des équations

$$
X_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad X_i = 0,
$$

obtenues en faisant $\mu = \mu^0$ dans les équations (23). Il en résulte que, après suppression du facteur $\mu - \mu^0$, les coefficients $\mathcal{B}$ doivent encore s'annuler identiquement pour $\mu = \mu^0$, ce qui exige, puisque les $\mathcal{B}$ sont des fonctions analytiques régulières, que les $\mathcal{B}$ contiennent $(\mu - \mu^0)^2$ en facteur.

Considérons alors les équations aux y, obtenues par l'élimination immédiate des inconnues X entre les équations (22) et (23),

$$
(24)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
(\mathcal{A}_1^1 A_1^1 + \ldots + \mathcal{A}_1^i A_1^i) y_1 + \ldots + (\mathcal{A}_1^1 A_j^1 + \ldots + \mathcal{A}_1^i A_j^i) y_j - \mathcal{B}_1 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
(\mathcal{A}_j^1 A_1^1 + \ldots + \mathcal{A}_j^i A_1^i) y_1 + \ldots + (\mathcal{A}_j^1 A_j^1 + \ldots + \mathcal{A}_j^i A_j^i) y_j - \mathcal{B}_j = 0.
\end{array}
\right.
$$

Comme tous les $\mathcal{A}$ et A contiennent $\mu - \mu^0$ en facteur, on voit que ces équations contiennent $(\mu - \mu^0)^2$ en facteur. Si nous faisons sur ces équations *l'hypothèse essentielle qu'après avoir supprimé ce facteur* $(\mu - \mu^0)^2$, *le déterminant* $\mathcal{D}$ *des inconnues* y, *dans ces équations, n'est pas nul pour* $z_1^0, \ldots, \mu^0$, nous en concluons, par l'application de la règle de Cramer, que les inconnues y sont des fonctions analytiques de $z_1, \ldots, \mu$, régulières en $z_1^0, \ldots, \mu^0$.

Il résulte alors immédiatement des équations (23) que les inconnues X sont des fonctions régulières en $z_1^0, \ldots, \mu^0$ et s'annulent identiquement pour $\mu = \mu^0$. Enfin, des formules (21) du changement d'inconnues résulte que les x sont aussi des fonctions régulières en $z_1^0, \ldots, \mu^0$, et que les fonctions $z_1, \ldots,$ régulières en $z_1^0, \ldots,$ auxquelles elles se réduisent pour $\mu = \mu^0$, satisfont aux équations (21) où l'on fait $\mu = \mu^0$, c'est-à-dire, en vertu de la propriété démontrée des X, aux équations (20) qui, d'ailleurs, les déterminent complètement.

Ayant démontré rigoureusement cette propriété préliminaire, revenons aux équations du mouvement concret.

Nous pouvons dire que nous obtenons tous les mouvements concrets par l'intégration du système

$$(\mathrm{C}')\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{d^2\theta_1}{dt^2}=0,\quad\ldots;\quad\dfrac{d\Theta_1}{dt}=0,\quad\ldots;\quad\dfrac{d\pi_1}{dt}=0,\quad\ldots;\quad\dfrac{d\Pi_1}{dt}=0,\quad\ldots;\\[2mm] \qquad\qquad\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial q_1''}=\Sigma\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial q_1}+\Sigma\mu\dfrac{\partial\Theta}{\partial q_1'}+\Sigma\nu\dfrac{\partial\pi}{\partial q_1'},\quad\ldots;\\[2mm] \qquad\qquad\qquad\dfrac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial p_1''}=\Sigma\xi\dfrac{\partial\Pi}{\partial p_1'},\quad\ldots;\end{array}\right.$$

qui ne contient que des équations linéaires par rapport aux q'', p'', λ, μ, ν, ξ en nombre égal à celui de ces quantités, en imposant aux valeurs initiales q^0, q'^0, p^0, p'^0 les conditions

$$(\mathrm{C}_0)\quad\left\{\begin{array}{l}\qquad\qquad\qquad\theta_1=0,\quad\ldots;\quad\varphi_1=0,\quad\ldots;\\ \dfrac{d\theta_1}{dt}=0,\quad\ldots;\quad\Theta_1=0,\quad\ldots;\quad\pi_1=0,\quad\ldots;\quad\Pi_1=0,\quad\ldots.\end{array}\right.$$

Le système C', considéré comme système d'équations finies et linéaires entre les q'', p'', λ, μ, ν, ξ, peut se décomposer en deux.

Le premier

$$(C'')\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\theta_1}{dt^2}=0, \quad \ldots; \quad \dfrac{d\Theta_1}{dt}=0, \quad \ldots; \quad \dfrac{d\pi_1}{dt}=0, \quad \ldots; \\ \dfrac{\partial R}{\partial q''_1}=\Sigma\lambda\dfrac{\partial\theta}{\partial q_1}+\Sigma\mu\dfrac{\partial\Theta}{\partial q'_1}+\Sigma\nu\dfrac{\partial\pi}{\partial q'_1}, \quad \ldots \end{cases}$$

ne contient que les inconnues q'', λ, μ, ν et les détermine. Les inconnues p'', ε sont ensuite fournies par le système

$$(C''')\quad \begin{cases} \dfrac{d\Pi_1}{dt}=0, \quad \ldots; \\ \dfrac{\partial R_1}{\partial p''_1}=\Sigma\xi\dfrac{\partial\Pi}{\partial p'_1}, \quad \ldots. \end{cases}$$

Supposons la réalisation à tendance parfaite pour (a^0). Toutes les équations (C'') et (C''') auront des coefficients qui seront supposés fonctions analytiques de t, des q, des q', des p, des p' et des a réguliers pour un système de valeurs t^0, q^0, q'^0, p^0, p'^0, a^0.

Faisons dépendre les a d'un paramètre μ par des formules

$$a_1=f_1(\mu), \qquad a_2=f_2(\mu), \qquad \ldots,$$

les fonctions f étant les fonctions analytiques de μ, régulières pour μ^0 et se réduisant, pour cette valeur de μ, respectivement aux a^0. Les coefficients des équations (C'') et (C''') deviendront des fonctions analytiques des t, q, q', p, p' et μ, régulières en t^0, q^0, q'^0, p^0, p'^0 et le système (C'') sera de la forme étudiée dans le lemme. En effet, les inconnues x seront ici les q'', λ, μ et les inconnues y seront les ν; Les équations (17) seront

$$\frac{d\pi_1}{dt}=0, \qquad \ldots$$

et les équations (18), toutes les autres équations du système (C''). Si l'on néglige les infiniment petits δa du premier ordre, les équations $\dfrac{d\pi}{dt}$ deviennent des identités, donc tous leurs coefficients s'annulent avec $\mu-\mu^0$. Si l'on ne néglige que les infiniment petits du second ordre, c'est-à-dire si l'on néglige $(\mu-\mu^0)^2$, elles tendent, par suppression du facteur $(\mu - \mu^0)$, vers des équations limitées, qui sont toujours des conséquences des équations $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ et $\frac{d\Theta}{dt}$, qui font partie du groupe (18) des équations (C″). Nous pouvons donc appliquer rigoureusement le lemme en remarquant que la condition complémentaire essentielle introduite ne concerne que les coefficients A et C des inconnues dans les équations, coefficients qui ne dépendent pas des forces agissant sur le système, puisque ces forces ne s'introduisent dans R que par une fonction linéaire des q''. En outre, le déterminant $\mathfrak{D}$, formé directement, sans suppression de facteurs et en laissant les paramètres a, a tous ses éléments débutant par des termes du second ordre; son développement commencera par des termes d'ordre $2j$ et l'on peut supposer la réalisation choisie de façon que l'ensemble de ces termes d'ordre $2j$ ne puisse s'annuler identiquement, comme conséquence de simples relations entre les a, et en particulier pour les a fonctions d'un paramètre μ. Le déterminant, réduit comme il a été dit, ne sera pas nul identiquement pour μ^0.

Nous pouvons donc conclure du lemme que les équations (C″) résolues donneront des expressions

$$\begin{aligned}
q''_1 &= Q_1(q, q', p, p', t, \mu), \qquad \ldots;\\
\lambda_1 &= L_1(q, q', p, p', t, \mu), \qquad \ldots;\\
\mu_1 &= M_1(q, q', p, p', t, \mu), \qquad \ldots;
\end{aligned}$$

les fonctions Q, L, M étant des fonctions analytiques des variables q, q', p, p', t, μ régulières en $q^0, q'^0, p^0, p'^0, t^0, \mu^0$, et que les fonctions analytiques des q, q', p, p', t, auxquelles elles se réduisent pour $\mu = \mu^0$, vérifient le système

$$(\mathrm{A}') \qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = 0, \qquad \ldots; \qquad \frac{d\Theta_1}{dt} = 0, \qquad \ldots;\\
&\frac{\partial R}{\partial q''_1} = \Sigma\lambda\frac{\partial\theta}{\partial q_1} + \Sigma\mu\frac{\partial\Theta}{\partial q'_1}, \qquad \ldots,
\end{aligned}\right.$$

qui suffit pour les déterminer.

Les q'' étant ainsi déterminés, les équations C″ donnent pour les p'', ξ des expressions linéaires aux q'' à coefficients réguliers en q^0, q'^0, p^0, p'^0, t_0, μ^0. En y remplaçant les q'' par les Q, on obtiendra des fonctions régulières qui, pour $\mu = \mu^0$, seront des fonctions régulières des q, q', p, p', t données par

$$(\mathrm{A}'')\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d(\Pi)^0}{\partial t} = 0, \qquad \ldots; \\ &\frac{\partial \mathrm{R}_1}{\partial p''_1} = \Sigma\xi\frac{\partial(\Pi)^0}{\partial p'_1}, \qquad \ldots, \end{aligned}\right.$$

les $(\Pi)^0$ désignant ce que deviennent les Π quand (a) tend vers (a^0).

Considérons, enfin, le système de conditions initiales (C_0).

Si l'on tient compte des équations de la liaison proposée, les équations π commenceront par des termes du second ordre, formés avec les δa. En introduisant le paramètre μ, elles contiendront $(\mu - \mu^0)^2$ en facteur. Après sa suppression, les conditions (C_0) prendront une forme ne présentant aucune singularité pour $\mu = \mu^0$. Les constantes initiales se partageront en deux groupes : les constantes indépendantes et les constantes dépendantes, donnant aux premières un système fixe de valeurs arbitrairement choisi, les secondes seront des fonctions analytiques de μ, régulières pour μ^0.

Si l'on intègre, avec ces conditions initiales, le système

$$\begin{aligned} q''_1 &= \mathrm{Q}_1(q, q', p, p', t, \mu), \qquad \ldots; \\ p''_1 &= \mathrm{P}_1(q, q', p, p', t, \mu), \qquad \ldots, \end{aligned}$$

on aura, d'après un théorème classique, des fonctions q et p de t et de μ, qui seront analytiques et régulières au voisinage de t^0, μ^0. On a ainsi un mouvement concret dépendant de μ et, quand μ tend vers μ^0, ce mouvement tend vers un mouvement limite, qui satisfait aux équations

$$\begin{aligned} q''_1 &= \mathrm{Q}_1(q, q', p, p', t, \mu^0), \qquad \ldots; \\ p''_1 &= \mathrm{P}_1(q, q', p, p', t, \mu^0), \qquad \ldots; \end{aligned}$$

c'est-à-dire au système (A') (A''). Mais, d'une part, le système (A') ne contient pas les inconnues p et, d'autre part, les valeurs initiales satisfont constamment, donc aussi pour $\mu = \mu^0$, aux équations

$$\theta_1 = 0, \qquad \ldots;$$
$$\frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \ldots; \qquad \Theta_1 = 0, \qquad \ldots,$$

qui font partie de (C_0), sont indépendantes de μ et ne contiennent que les q.

Les fonctions Θ, ayant leurs dérivées premières identiquement nulles et étant nulles à l'instant initial, sont identiquement nulles. Les fonctions Θ, ayant leurs dérivées seconde, identiquement nulles et s'annulant, ainsi que leurs dérivées premières, à l'instant initial, sont aussi identiquement nulles, de sorte que le mouvement limite satisfait aux conditions

$$\theta_1 = 0, \qquad \ldots;$$
$$\Theta_1 = 0, \qquad \ldots;$$
$$\frac{\partial R}{\partial q''_1} = \Sigma\lambda \frac{\partial \theta}{\partial q_1} + \Sigma\mu \frac{\partial \Theta}{\partial q'_1}, \qquad \ldots$$

qui caractérisent les mouvements abstraits. Donc :

Si, partant d'un système de valeurs des a et d'un système quelconque de valeurs des constantes initiales indépendantes, on laisse fixe ces valeurs initiales et qu'on fasse tendre les a suivant une certaine loi vers les a^0, le mouvement concret correspondant tend vers un mouvement abstrait. Le mouvement abstrait limite obtenu dépend de la loi suivant laquelle (a) tend vers (a^0).

Ce qu'on peut encore énoncer sous la forme :

Quand (a) tend vers (a^0), tous les mouvements concrets tendent vers des mouvements abstraits.

Étant sûr, à la limite, de n'avoir que des mouvements abstraits, il est naturel de se demander si l'on peut ainsi obtenir, comme limites de mouvements concrets, tous les mouvements abstraits.

Le mouvement abstrait obtenu est celui qui est déterminé par les valeurs initiales q^0, q'^0, faisant partie du système initial limite q^0, q'^0, p^0, p'^0, et ceux-ci sont déterminés par les équations (C_0^0) où les $\frac{\partial a}{\partial a_1}$ sont des paramètres arbitraires. Pour obtenir tous les mouvements abstraits, c'est-à-dire tous les systèmes de q_0, q'_0 satisfaisant aux équations θ, $\frac{d\theta}{dt}$ et Θ, il faut donc qu'entre les équations $(\varphi)^0$, P_2 et $(\text{II})^0$ l'on ne puisse éliminer les p, p', $\frac{\partial a_1}{\partial a}$ et obtenir des équations non conséquences de la liaison proposée. Si l'on y remplace les q, q' dépendants, tirés de la liaison, ces équations ne contiendront plus que les q, q' indépendants, et il suffira alors que l'élimination des p, $p' \frac{\partial a}{\partial a_1}$ soit impossible; celle des p' est toute faite, il suffira donc qu'on ne puisse pas éliminer les p et $\frac{\partial a}{\partial a_1}$ entre les équations $(\varphi)^0$ et P_2. Comme les $(\varphi)^0$ sont indépendants par rapport aux p, la possibilité de l'élimination exige qu'on puisse d'abord éliminer les $\frac{\partial a}{\partial a_1}$ entre les équations P_2. Comme on peut former arbitrairement ces fonctions P_2, on n'aura qu'à introduire un nombre suffisant de paramètres a pour obtenir une réalisation à tendance parfaite, fournissant tous les mouvements abstraits. Nous arrivons ainsi à la propriété complète :

Tout système, à liaisons linéaires ou non linéaires du premier ordre, possède des réalisations linéaires à tendance parfaite;

Les mouvements concrets produits par des forces $\mathfrak{F}$ et une réalisation à tendance parfaite tendent tous vers des mouvements limites;

Ces mouvements concrets limites sont tous des mouvements abstraits produits par les mêmes forces $\mathfrak{F}$, mais on n'obtient pas forcément ainsi tous les mouvements abstraits;

Tout système, à liaisons linéaires ou non linéaires du premier ordre, possède des réalisations linéaires à tendance parfaite, fournissant, quelles que soient les forces $\mathfrak{F}$ et comme mouvements concrets limites, la réalisation mécanique de tous ses mouvements abstraits.

27. Un système est en *équilibre abstrait* dans une position q_1^0, q_2^0, ..., sous l'action des forces $\mathfrak{F}$, si les équations du mouvement abstrait, intégrées avec les conditions initiales

$$q_1^0, \quad q_2^0, \quad \ldots; \\ q_1'^0 = q_2'^0 = \ldots = 0,$$

donnent, pour les q, des fonctions qui se réduisent à des constantes, c'est-à-dire si ces équations sont vérifiées en y faisant

$$(26) \qquad \begin{cases} q_1 = q_1^0, \quad q_2 = q_2^0, \quad \ldots, \\ q_1' = q_2' = \ldots = 0, \\ q_1'' = q_2'' = \ldots = 0. \end{cases}$$

Un système, dont les liaisons sont réalisées, est en *équilibre concret* sous l'action des forces $\mathcal{F}$, si les équations du mouvement concret sont vérifiées par un système de fonctions q, p, les fonctions q étant des constantes; il faut donc que ces équations, où l'on introduit les hypothèses (26), soient compatibles par rapport aux inconnues p.

Si la réalisation est parfaite, les q du mouvement concret étant donnés par les équations du mouvement abstrait, l'équilibre concret coïncide avec l'équilibre abstrait.

Si la réalisation n'est pas parfaite, la coïncidence n'existe plus et l'on peut avoir des positions d'équilibre variables avec la constitution interne du système auxiliaire de masse nulle.

Si la réalisation est à tendance parfaite pour (a^0) et si q_1^0, q_2^0, ..., est une position d'équilibre abstrait, tous les mouvements concrets, dont les valeurs initiales tendent vers un système dont les q sont les q^0 et dont les q' sont nuls, tendent eux-mêmes vers des mouvements dans lesquels les q restent constants, c'est-à-dire vers des mouvements infiniment petits autour ou infiniment lents au voisinage de la position d'équilibre parfait.

Supposons que la réalisation linéaire à tendance parfaite $\mathcal{R}_{(a)}$ donne, pour les forces $\mathcal{F}$, et quels que soient les a, une position d'équilibre concret

$$q_1 = f_1(a), \qquad q_2 = f_2(a), \qquad \dots.$$

Cet équilibre concret est un mouvement concret défini par un système de valeurs initiales des q, p, q', p', valeurs initiales fonctions des a, vérifiant toujours le système (C^0) et parmi lesquelles celles des q sont les $f(a)$ et celles des q' sont nulles.

Faisons alors tendre les a vers les a^0, en les faisant dépendre d'un paramètre. Ces valeurs initiales tendront, d'une façon continue, vers des valeur limites, donc le mouvement concret tendra vers un mouvement abstrait limite. Mais le mouvement concret étant toujours, pour les q, un mouvement nul, sera encore un mouvement nul pour les q à la limite; on arrivera donc à un mouvement abstrait nul, déterminé par les limites des f et par les q' nuls, c'est-à-dire à une position d'équilibre abstrait, définie par les limites des fonctions f. Donc :

Si, pour un système $\mathcal{F}$ de forces, une réalisation linéaire à tendance *parfaite* $\mathcal{R}_{(a)}$ *donne, quels que soient les a, une position d'équilibre concret*

$$(\mathrm{E_C}) \qquad q_1 = f_1(a), \quad q_2 = f_2(a), \quad \ldots,$$

le système possède forcément, pour les forces $\mathcal{F}$, *des positions* $(\mathrm{E_A})$ *d'équilibre abstrait. Si les positions* $(\mathrm{E_A})$ *sont isolées, les fonctions f sont continues pour* (a^0) *et la position* $(\mathrm{E_C})$ *tend, d'une façon continue, vers une position* $(\mathrm{E_A})$.

Si les positions $(\mathrm{E_A})$ *forment une suite continue* $(\mathcal{E}_\mathrm{A})$, *la position* $(\mathrm{E_C})$ *peut tendre, d'une façon continue, vers une des positions* $(\mathcal{E}_\mathrm{A})$ *ou devenir indéterminée sur* $(\mathcal{E}_\mathrm{A})$, *les fonctions f n'étant plus alors toutes continues pour* (a^0).

28. La notion de mouvement d'un système est inséparable de l'idée de réalisation directe des liaisons; c'est seulement dans ce cas que nous pouvons avoir la notion de forces de liaisons d'où l'on fait dériver celle de liaison sans frottement, puis le principe des travaux virtuels.

Si les liaisons du système ne peuvent pas être réalisées directement, nous ne pouvons plus concevoir le mouvement qu'au moyen de réalisations indirectes par des liaisons directes. La seule conception mécanique que nous ayons alors est celle des mouvements concrets et, malheureusement, comme nous l'avons démontré, ces mouvements portent à tel point l'empreinte de l'arbitraire qui figure dans les intermédiaires de réalisation, qu'ils sont, en réalité, cinématiquement arbitraires; pour une liaison analytique donnée, tous les systèmes $\mathcal{F}$ de forces donnent les mêmes mouvements concrets. Nous cessons donc d'avoir la notion de mouvement, sous l'action de forces données, d'un système soumis à la liaison considérée sous sa forme abstraite, c'est-à-dire analytique, indépendamment de toute idée de réalisation. La notion d'un tel mouvement idéal, que nous appellerons *le mouvement parfait du système*, ne pouvant plus être atteinte directement, ne peut s'acquérir que par des généralisations successives. Les recherches exposées dans ce Mémoire permettent aisément de faire ces généralisations au point de vue mécanique.

Considérons d'abord le cas d'une liaison finie ou linéaire *réalisable* *directement*. Nous avons alors la notion directe de mouvements parfaits, et ces mouvements peuvent se définir de trois façons :

1° *Comme mouvements fournis par la réalisation directe;*

2° *Comme mouvements concrets fournis par les réalisations linéaires parfaites;*

3° *Comme mouvements concrets limites fournis par les réalisations linéaires à tendance parfaite;*

l'identité des trois définitions résultant de ce que toutes trois conduisent aux mouvements abstraits qui, dans le raisonnement actuel, ne sont considérés que comme des intermédiaires analytiques et n'ayant aucune signification dynamique.

Considérons ensuite une liaison linéaire *non réalisable directement*. Cette liaison possède des réalisations parfaites et des réalisations à tendance parfaite, donnant *les mêmes propriétés dynamiques* que dans le cas précédent.

Nous avons un ensemble de propriétés dynamiques qui ne changent pas, quand on passe du premier au second cas; ces propriétés définissent les mouvements qui, dans le premier cas, coïncident avec les mouvements parfaits dont on a la notion directe; il est donc naturel de considérer, par définition, ces mouvements comme étant les mouvements parfaits dans le second cas, c'est-à-dire de poser comme définitions valables dans les deux cas :

1° *Les mouvements parfaits d'un système à liaisons linéaires sont les mouvements concrets, fournis par les réalisations linéaires parfaites;*

2° *Les mouvements parfaits d'un système à liaisons linéaires sont les mouvements concrets limites, fournis par les réalisations linéaires à tendance parfaite;*

l'identité des deux définitions, dans le cas général des liaisons linéaires, résultant de ce qu'elles conduisent toutes deux aux mouvements abstraits.

Prenons, en dernier lieu, le cas d'une liaison non linéaire; les réalisations parfaites n'existent plus, mais la liaison possède des réalisations à tendance parfaite, donnant *les mêmes propriétés dynamiques* que dans le cas des liaisons linéaires. Nous avons donc, au moyen de ces réalisations à tendance parfaite, un ensemble de propriétés dynamiques qui ne changent pas quand on passe des liaisons linéaires aux liaisons non linéaires. Pour les premières, les mouvements qu'elles donnent coïncident avec les mouvements parfaits, définis précédemment; donc il est naturel de considérer, par définition, ces mouvements comme étant les mouvements parfaits dans le cas des liaisons non linéaires, c'est-à-dire d'adopter la *définition mécanique générale :*

Par définition, les mouvements parfaits d'un système soumis à une liaison analytique finie, ou linéaire ou non linéaire du premier ordre, sont les mouvements concrets limites, fournis par les réalisations linéaires à tendance parfaite.

Nous avons trouvé les équations générales du mouvement parfait ainsi défini; ce sont celles du mouvement abstrait; ces dernières sont, d'ailleurs, comme on le voit immédiatement, les équations du minimum de R pour les q'', satisfaisant aux équations déduites de la liaison, d'où cette propriété :

Les mouvements parfaits d'un système à liaisons finies, ou linéaires ou non linéaires du premier ordre, satisfont au principe général de M. Appell (principe du minimum de la fonction R*).*

De sorte que ce principe général se trouve démontré et permet, par son application, de former rapidement, dans le cas tout à fait général, les équations du mouvement parfait, équations que le principe des travaux virtuels ne fournissait que dans le cas des liaisons linéaires.

L'idée directrice, qui conduit aux généralisations successives précédentes, à la définition mécanique générale des mouvements parfaits et justifie la marche adoptée, est la suivante :

Puisqu'il s'agit d'arriver à la notion générale de mouvement d'un système indépendamment de toute idée de réalisation de ses liaisons et que, d'autre part, nous ne possédons que la notion de mouvement concret au moyen des liaisons réalisées, nous devons chercher s'il n'existe pas, soit des mouvements concrets, soit des mouvements concrets limites ne contenant plus trace de la réalisation qui les a fournis, c'est-à-dire de la constitution cinématique et matérielle du système auxiliaire réalisant.

Si nous trouvons de tels mouvements, ils seront indépendants de toute idée de réalisation des liaisons, et ils correspondront bien à l'idée de mouvement parfait.

Nous avons trouvé un procédé général, au moyen des réalisations à tendance parfaite, pour obtenir de tels mouvements; dans des cas particuliers, nous avons trouvé, soit un autre, soit deux autres procédés, mais, quand il existe plusieurs procédés (réalisations parfaites, réalisations directes), tous ces procédés sont concordants, ils donnent les mêmes mouvements. Nous arrivons donc ainsi à une définition naturelle et n'impliquant aucune indétermination ni contradiction. Il est d'ailleurs à remarquer que la définition est complète, parce que l'idée de mouvement, indépendamment de toute idée de réalisation, implique forcément l'idée qu'il existe un, et un seul, tel mouvement correspondant à un système de valeurs initiales q^0, q'^0, satisfaisant aux équations de la liaison, et que, parmi les mouvements que nous avons définis, il y en a un, et un seul, ayant ces valeurs initiales, il ne peut donc y en avoir d'autre, de sorte que :

De quelque façon qu'on arrive à la notion dynamique de mouvement parfait, on retrouve toujours les mouvements parfaits donnés par la définition mécanique générale précédente.

Il est intéressant d'opposer, à cette notion mécanique du mouvement parfait, la notion analytique à laquelle on était arrivé antérieurement.

La notion existe d'elle-même, pour un système à liaisons réalisées directement, et l'on démontre que les mouvements parfaits satisfont au principe des travaux virtuels.

Ce principe, indépendamment de toute signification dynamique, peut *analytiquement* s'appliquer à une liaison linéaire quelconque, définie analytiquement, et donne des équations déterminant, d'une façon univoque, les q par les valeurs initiales q^0, q'^0. Ces q, fonctions de t, peuvent être considérés comme définissant, au point de vue cinématique, un mouvement du système et, comme ce mouvement, donné par la seule définition analytique de la liaison, coïncide avec le mouvement parfait, quand la liaison linéaire est réalisable directement, on le prend comme définition du mouvement parfait, quand la liaison n'est pas réalisable directement, ce qui revient à dire :

Par définition, on appelle mouvements d'un système soumis à une liaison non réalisée les mouvements obtenus par l'application du principe des travaux virtuels à la liaison définie analytiquement.

Ces mouvements satisfont donc, par définition, au principe des travaux virtuels, et l'on en déduit qu'ils satisfont au principe de M. Appell. Ce principe, à son tour et comme l'a montré M. Appell, peut analytiquement s'appliquer à une liaison non linéaire quelconque, définie analytiquement, et donne des équations faisant, à des valeurs initiales q^0, q'^0, correspondre, d'une façon univoque, des fonctions q de t définissant, au point de vue cinématique, un mouvement coïncidant, quand la liaison est linéaire, avec le mouvement parfait déjà défini dans ce cas. On le prend comme définition du mouvement parfait. Ériger en principe général le principe du minimum de la fonction R, c'est-à-dire en faire un postulat, c'est, en réalité, poser la définition suivante :

Par définition, on appelle mouvements d'un système soumis à une liaison linéaire ou non linéaire non réalisée les mouvements obtenus par l'application du principe du minimum de la fonction R *à la liaison définie analytiquement.*

Cette notion analytique a-t-elle un sens au point de vue mécanique? On part d'un principe $\mathfrak{P}$ possédant les deux propriétés fondamentales suivantes :

1° Le principe $\mathfrak{P}$ s'applique analytiquement à toute liaison du premier ordre et détermine, pour chaque système $\mathcal{F}$ de forces et chaque système de valeurs initales q^0, q'^0, un, et un seul, système de fonctions q de la variable t;

2° Le principe $\mathfrak{P}$ se réduit, dans le cas d'une liaison linéaire directe, au principe des travaux virtuels qui, dans ce cas, fournit le mouvement parfait.

Il est fort probable que le principe général de M. Appell n'est pas le seul à remplir ces deux conditions, et qu'on peut trouver d'autres principes y satisfaisant, et donnant d'autres mouvements qu'on pourrait, au même titre que ceux de M. Appell, considérer comme les mouvements parfaits du système. Ces principes ne pourraient pas donner les mêmes mouvements, sans quoi ils seraient des principes équivalents et, d'autre part, comme il a déjà été dit, puisqu'il ne peut y avoir qu'un seul mouvement parfait correspondant à un système initial donné q^0, q'^0, il ne reste que deux hypothèses : ou bien aucun de ces principes ne donne les mouvements correspondants à une notion mécanique quelconque de mouvement parfait, ou bien il n'y en a qu'un seul, en ne comptant pas comme distincts les principes équivalents.

Nous voyons donc que les principes généraux (principes des travaux virtuels, quand la liaison linéaire n'est pas réalisée directement, principe général de M. Appell) qui ne sont que des principes analytiques, n'ont, par eux-mêmes, aucune signification mécanique et ne peuvent, par leur nature même, conduire à aucune notion mécanique, et c'est pour cette raison que, dans le cours de ce Mémoire, nous avons appelé *mouvements abstraits* les mouvements qu'ils fournissent, en sous-entendant toujours qu'il s'agissait des mouvements abstraits donnés par le principe de M. Appell, puisque les mouvements abstraits, donnés par d'autres principes généraux hypothétiques et non équivalents, ne seraient pas les mêmes.

Puisque ces principes généraux ne peuvent donner la notion mécanique de mouvements parfaits, il faut essayer d'arriver directement à cette notion et, ce résultat obtenu, de trouver des ensembles caractéristiques de propriétés de ces mouvements; un tel ensemble constituera un principe général qui donnera sûrement les mouvements parfaits et rien qu'eux, mais qui ne sera plus un postulat; il constituera un théorème rigoureusement démontré.

Si l'on peut arriver à la notion mécanique *générale* de mouvement parfait, c'est-à-dire à cette notion pour toute liaison du premier ordre linéaire ou non linéaire, on pourra donc former un *principe général* applicable à toute liaison du premier ordre, de sorte que, parmi tous les principes généraux analytiques, soit existants, soit hypothétiques, il y en aura un, et un seul, qui sera exact, c'est-à-dire dont les mouvements abstraits seront les mouvements parfaits, et rien qu'eux; tandis que tous les autres seront faux, en ce sens que leurs mouvements abstraits ne coïncideront pas tous avec des mouvements parfaits.

L'étude des réalisations nous a conduit à la notion générale de mouvement parfait et nous devons, si possible, chercher le principe général vrai ou, du moins, puisque nous sommes dans l'ignorance des principes hypothétiques, si, parmi les principes existants, nous ne trouverions pas ce principe exact.

La réponse est immédiate et a déjà été donnée plus haut; nous avons montré que les mouvements parfaits satisfaisaient au principe de M. Appell, de sorte que :

Dans le cas d'une liaison finie ou linéaire, réalisée directement, on démontre le principe des travaux virtuels. Parmi tous les principes analytiques généraux, c'est-à-dire s'appliquant à toute liaison linéaire ou non linéaire, et distincts, c'est-à-dire ne donnant pas les mêmes mouvements abstraits, qu'on pourrait en déduire par des généralisations diverses, le principe vrai, c'est-à-dire dont les mouvements abstraits sont tous les mouvements parfaits du système, et rien qu'eux, est le principe général de M. Appell, principe du minimum de la fonction R.