ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

R. GARNIER

Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 29 (1912), p. 1-126
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1912_3_29__1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

SUR DES
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TROISIÈME ORDRE
DONT
L'INTÉGRALE GÉNÉRALE EST UNIFORME
ET SUR UNE
CLASSE D'ÉQUATIONS NOUVELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR
DONT
L'INTÉGRALE GÉNÉRALE A SES POINTS CRITIQUES FIXES.

PAR M. R. GARNIER.

INTRODUCTION.

1. L'intégration des équations différentielles à une ou plusieurs variables est le problème principal de l'Analyse; sa solution doit donc être regardée comme la voie la plus naturelle pour la définition des fonctions. A ce point de vue, les équations différentielles ordinaires qu'il faut d'abord étudier sont celles dont l'intégrale générale est uniforme, ou a ses points critiques indépendants des constantes d'intégration; en d'autres termes, ce sont les équations telles que le domaine d'uniformité de leurs intégrales peut être fixé *a priori:* aussi bien, les progrès effectués dans la représentation des fonctions uniformes permettent de considérer ces équations comme intégrées au sens moderne du mot.

Dans la recherche des équations différentielles à points critiques fixes le cas le plus simple est celui des équations algébriques du premier ordre; il résulte de travaux de M. Poincaré que si une telle équation a ses points critiques fixes, son intégrale est réductible aux transcendantes classiques.

Lorsqu'on passe aux équations algébriques du second ordre, on voit surgir de profondes difficultés qui ont arrêté longtemps les géomètres et ont été surmontées pour la première fois par M. Painlevé. Sa méthode, dont les calculs ont été complètement explicités par M. Gambier, aboutit à cette conclusion :

Lorsque l'intégrale générale d'une équation

$$y'' = \mathrm{R}(y', y, x) \tag{1}$$

(où R est rationnel en y', algébrique en y, analytique en x) a ses points critiques fixes, ou bien elle se réduit à une combinaison de fonctions classiques (définies par des quadratures ou des équations linéaires), ou bien elle se ramène algébriquement à l'une des suivantes :

$$\text{I} \quad y'' = 6y^2 + x,$$

$$\text{II} \quad y'' = 2y^3 + xy + \alpha,$$

$$\text{III} \quad y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{\alpha y^2 + \beta}{x} + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y},$$

$$\text{IV} \quad y'' = \frac{y'^2}{2y} + \frac{3}{2} y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha) y + \frac{\beta}{y},$$

$$\text{V} \quad y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right) y'^2 - \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \frac{\gamma y}{x} + \delta \frac{y(y+1)}{y-1},$$

$$\text{VI} \quad y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right) y'^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-y}\right) y' + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[\alpha + \frac{\beta x}{y^2} + \frac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2} + \delta \frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right]$$

(où α, β, γ, δ désignent des constantes).

Toutes les équations rencontrées depuis les origines du Calcul intégral pouvaient être réduites à des combinaisons d'équations linéaires ou de quadratures, et c'est cette réduction même qui permettait d'étudier les propriétés des intégrales. Or, pour les équations I, ..., VI une telle réduction est impossible, au moins pour des valeurs arbitraires de α, β, γ, δ : M. Painlevé a établi qu'elles sont irréductibles au sens le plus rigoureux du mot, celui de M. Drach. Néanmoins, en s'appuyant sur les théorèmes généraux de la théorie des fonctions, M. Painlevé est parvenu à montrer que l'intégrale $y(x)$ de chacune de ces équations est méromorphe en tout point x (sauf $x=\infty$ pour I, II, IV; $x=0$ et ∞, pour III et V, et $x=0, 1$ et ∞ pour VI).

Les résultats obtenus par M. Painlevé dans le cas du second ordre ouvraient ainsi un domaine entièrement nouveau à la recherche : ils permettaient d'aborder l'étude des équations du troisième ordre et d'ordre supérieur dont les intégrales ont leurs points critiques fixes. C'est cette étude que je me suis proposée en me plaçant successivement à deux points de vue bien différents, comme je vais l'exposer.

2. Une première voie s'ouvrait immédiatement : il s'agissait d'étendre aux équations du troisième ordre

$$y''' = R(y'', y', y, x) \tag{2}$$

(où R est rationnel en y'', y', algébrique en y, analytique en x) la méthode même suivie par M. Painlevé dans le cas du second ordre. Appliquée aux équations (2), cette méthode nécessite la détermination préalable de tous les cas où l'équation

$$y''' = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{y''^2}{y'} + b(y,z)y''y' + c(y,z)y'^3 \tag{3}$$

a son intégrale générale uniforme en x. [Dans l'équation précédente, n désigne un entier, fini ou non, mais différent de 0 et -1; $b(y,z)$ et $c(y,z)$ sont des fonctions rationnelles de deux variables liées par une relation algébrique $f(y,z)=0$ de genre ϖ; enfin $z(x)$ doit avoir aussi ses points critiques fixes.] M. Painlevé ([1]) s'était borné à indiquer le résultat : lorsque l'intégrale générale d'une équation (3) est uniforme, ou c'est une fonction automorphe, et alors ϖ peut être quelconque, ou c'est une combinaison de dégénérescences de telles fonctions, et alors ϖ ne peut dépasser l'unité. Lorsque les coefficients $b(y)$ et $c(y)$ sont rationnels, l'énumération explicite des

([1]) *Bull. Soc. math.*, t. XXVIII, 1900, p. 257.

équations (3) dont l'intégrale générale est uniforme avait été effectuée par M. Chazy[1] et par nous[2], mais il restait à traiter le cas où ϖ est quelconque.

Dans la première Partie de ce travail je donne une méthode très simple pour résoudre la question quelle que soit la valeur de ϖ, y compris $\varpi = 0$ [3]; elle n'emprunte à la théorie des fonctions algébriques d'une variable que ses propositions les plus élémentaires et limite aisément le genre dans le cas général ($\neq -2$) [4]. Ce point est essentiel dans la théorie des équations (2), car on en déduit immédiatement cette proposition énoncée également par M. Painlevé : lorsque l'intégrale générale d'une équation (2) à coefficients algébriques en y a ses points critiques fixes, le genre de la relation algébrique est nécessairement 0 ou 1, à moins que l'intégrale ne possède des ensembles parfaits de points singuliers. Cette proposition montre que si l'on cherche à exprimer les coordonnées y, z d'un point d'une courbe algébrique de genre supérieur à 1 par des fonctions de x satisfaisant à une équation (2) à points critiques fixes, les plus simples qu'on puisse employer à cet effet sont les fonctions automorphes; c'est là une conséquence analogue à celle d'un théorème célèbre de M. Picard [5].

Le genre ϖ ayant été limité (pour $n \neq -2$), il devient facile d'énumérer tous les cas où l'équation (3) a son intégrale uniforme et de condenser cette énumération dans un énoncé précis.

La discussion des équations (3) une fois terminée, on peut aborder l'étude des équations (2); c'est ainsi que M. Chazy [6] a fait connaître des cas très étendus où les équations (2) ont leurs points critiques fixes.

Dans la suite de ce Mémoire j'ai abandonné cette voie, et m'appuyant

(1) *Comptes rendus*, t. 145, 1907, p. 305.

(2) *Ibid.*, p. 308.

(3) *Comptes rendus*, t. 147, 1908, p. 915.

(4) Il est à remarquer que les circonstances où l'emploi de la méthode de M. Painlevé est nécessaire ne se présentent que rarement (1re Partie, nos 3, 5, 10).

(5) *Acta math.*, t. XI, 1888; il serait intéressant de retrouver la proposition du texte comme application du théorème de M. Picard : il suffirait pour cela, d'établir que l'intégrale de (2) possède au moins une singularité essentielle isolée, pour $n \neq -2$.

(6) Thèse, Upsala, 1910.

sur une propriété bien remarquable de l'équation VI, je me suis proposé de former des équations plus générales que VI, et dont les intégrales aient leurs points critiques fixes.

3. Au moment où les calculs de M. Gambier conduisaient à l'équation VI, M. Richard Fuchs[1] la rencontrait dans des recherches complètement différentes, provoquées par les travaux de M. Schlesinger sur les groupes des équations linéaires (*voir* n° 7). Considérons une équation linéaire (E_1), à coefficients rationnels, réguliers, possédant quatre points essentiellement singuliers, 0, 1, t, ∞ et un point apparemment singulier λ, soit

$$(E_1) \qquad \frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{3}{4(x-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-1} + \frac{\gamma}{x-t} + \frac{\delta}{x-\lambda};$$

proposons-nous de choisir pour λ une fonction de t telle que le groupe de (E_1) soit indépendant de t : on est amené à se poser une telle question lorsqu'on cherche à résoudre le problème de Riemann relatif à (E_1), c'est-à-dire à choisir a, b, c, α, β, γ, δ, λ de telle sorte que (E_1) admette un groupe donné (indépendamment des points essentiellement singuliers). M. Richard Fuchs arrive ainsi à ce résultat remarquable : α, β, γ, δ s'expriment rationnellement en fonction de λ et $\frac{d\lambda}{dt}$, λ vérifiant une équation identique à VI.

Il était naturel de rechercher si cette propriété ne s'étendait pas aux équations linéaires du second ordre (E_n), plus générales que (E_1), possédant $n+3$ points essentiellement singuliers et n points apparemment singuliers. Toutefois, la formation du système différentiel vérifié par les points apparemment singuliers, déjà longue dans le cas étudié par M. Richard Fuchs ($n=1$), paraissait très laborieuse dans le cas général. Aussi j'ai cherché tout d'abord à étudier des *dégénérescences* du problème précédent. Précisons ce qu'il faut entendre par là.

Les travaux de L. Fuchs ont montré que pour que le groupe d'une

---

[1] *Comptes rendus*, t. 141, 1905, p. 555; *Math. Ann.*, t. LXIII, 1906, p. 301.

équation linéaire (E) du second ordre, à coefficients rationnels en x, soit indépendant des paramètres $t_1, \ldots, t_n$ contenus dans (E), il faut et il suffit qu'on puisse adjoindre à (E) un système de n équations

$$\frac{\partial y}{\partial t_i} = \mathrm{A}_i y + \mathrm{B}_i \frac{\partial y}{\partial x} \tag{4}$$

(A_i et B_i rationnels en x), formant avec (E) un système complètement intégrable. D'autre part, M. Painlevé([1]) a montré que l'équation VI reproduit par dégénérescence chacune des équations V, ..., I. Le rapprochement de ces résultats permettait de conclure à l'existence d'une équation linéaire (E′), à coefficients rationnels en x (mais non plus nécessairement réguliers), analytiques en t, pourvue d'un point apparemment singulier λ, et telle que la condition d'intégrabilité du système formé par (E′) et une équation (4) (à coefficients rationnels en x) se traduisît précisément par une équation I : $\lambda'' = 6\lambda^2 + t$. Effectivement, une telle équation (E′) est facile à former, et j'ai été ainsi conduit à me proposer dans la seconde Partie de ce Mémoire le problème suivant([2]) : Soit

$$\frac{1}{y}\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{h=0}^{m} a_h x^h + \sum_{j=1}^{\nu} \left[\frac{3}{4(x-\lambda_j)^2} + \frac{\rho_j}{x-\lambda_j} \right] \tag{5}$$

une équation linéaire possédant ν points apparemment singuliers $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$; choisir pour $a_0, \ldots, a_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ des fonctions de n paramètres $t_1, \ldots, t_n$ telles qu'il existe des équations (4) (à coefficients rationnels en x), formant avec (5) un système complètement intégrable.

Je démontre d'abord que si le nombre des points essentiellement singuliers est supérieur au nombre ν des points apparemment singuliers, on peut toujours trouver $\mathrm{N} \leq \nu$ fonctions $\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_\mathrm{N}$ des paramètres $t_1, \ldots, t_n$, telles que les coefficients de (5) dépendent seulement de $\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_\mathrm{N}$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ vérifient par rapport à l'un des paramètres, soit

---

([1]) *Comptes rendus*, t. 143, 1906, p. 1114-1116.
([2]) *Comptes rendus*, t. 148, 1909, p. 1308.

T_1, des équations différentielles ordinaires; considérées comme fonctions de T_1 les combinaisons symétriques de $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ ne sauraient avoir leurs points critiques fixes que si le degré m du polynome $\sum a_h x^h$ est au plus égal à 4. Je montrerai ultérieurement l'importance de ce résultat.

Dans le cas $n=1$, $m \leqq 4$, les équations différentielles précédentes se réduisent à I ou II et l'équation (5) n'est autre que l'équation (E′) dont il a été question plus haut.

Pour $n=2$ et $m \leqq 4$ (¹) on voit s'introduire le système aux dérivées partielles suivant :

$$(\Sigma) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{2}{x} + \frac{P}{z}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= z, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial x}, \end{aligned} \right. \qquad \frac{\partial x}{\partial u} : \frac{\partial y}{\partial u} : \frac{\partial z}{\partial u} = z : \frac{P}{z} : \frac{\partial P}{\partial y},$$

avec

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} P = c_4 xy(x^2+y^2-4t) + c_3 x(x^2+3y^2-4t) + c_2 xy + c_1 x, \\ \qquad x = \lambda_1 - \lambda_2, \qquad y = \lambda_1 + \lambda_2, \qquad z = \rho_1 + \rho_2, \\ t = t_1, \qquad u = t_2, \qquad c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4, \text{ constantes arbitraires.} \end{array} \right.$$

Pour $m \leqq 2$, l'intégration de (Σ) est immédiate; pour $m=3$ $(c_3 \neq 0)$ et $m=4$ $(c_4 \neq 0)$, elle est beaucoup plus cachée. Je montre que les fonctions x^2, y, z de t s'expriment pour $m=3$ (et 4) à l'aide des transcendantes I (et II) et sont méromorphes en t. Pour $m=4$, on a ainsi

$$y = \frac{2V}{V^2-2}\sqrt{T},$$

T désignant une fonction méromorphe irréductible et V une fonction donnée par l'intégration d'une équation de Riccati à coefficients rationnels en $\sqrt{T}$. L'étude de $V(t)$ dans le voisinage d'un de ses points singuliers, suivant les méthodes classiques, montre seulement que V (et

(¹) Cf. *Comptes rendus*, t. 149, 1909, p. 23.

par suite y) a au plus deux branches ; pour déceler l'uniformité de y il faut faire appel à une relation $V_1 V_2 = 2$ vérifiée par les deux branches V_1 et V_2 de V et établie à l'aide de l'*intégration d'une équation différentielle*. J'ignore si un tel procédé a déjà été employé dans ce but.

Il est bien remarquable qu'*en partant uniquement des équations* (Σ) [sans connaître l'expression (6) de P], *on soit conduit à retrouver les équations* I *et* II découvertes par M. Painlevé : d'une façon précise, cherchons à choisir pour P une fonction de x, y, t, u telle que (Σ) soit complètement intégrable; je démontre que P a nécessairement la forme (6) et l'intégration du système (Σ) ainsi défini nous ramène, comme nous venons de le voir, aux équations I et II.

Le système (Σ) possède enfin des dégénérescences dont les intégrales s'expriment par les fonctions elliptiques et satisfont à des relations élégantes ; les surfaces intégrales correspondantes sont elliptiques et de genre 1 ; leur étude termine la seconde Partie.

4. Dans la troisième Partie de ce travail j'ai abordé enfin l'étude des équations linéaires

$$(\mathrm{E}_n)\qquad \frac{1}{y}\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{c_{n+1}}{x^2} + \frac{c_{n+2}}{(x-1)^2} + \frac{c_{n+3}}{x(x-1)} + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{c_i}{(x-t_i)^2} + \frac{\alpha_i}{x(x-1)(x-t_i)}\right] + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{3}{4(x-\lambda_j)^2} + \frac{\beta_j}{x(x-1)(x-\lambda_j)}\right],$$

qui généralisent (E_1) (n° 3), et dans lesquelles $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont n points apparemment singuliers. A l'aide de propriétés élémentaires des fonctions rationnelles de x j'ai établi [1] que, pour que le groupe de (E_n) soit indépendant de $t_1, \ldots, t_n$, les coefficients $\alpha_1, \ldots, \beta_n$ doivent s'exprimer rationnellement en fonction de $t_1, \ldots, t_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et des dérivées premières des λ_j par rapport à l'un des t_i, les λ_j vérifiant le

(1) *Comptes rendus*, t. 151, 1910, p. 206.

système suivant [1] (qui comprend pour $n = 1$ l'équation VI) :

$$(f_n) \qquad \frac{\varphi'(t_i)(t_i-\lambda_j)}{\psi(t_i)}\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_i} - \frac{\varphi'(t_k)(t_k-\lambda_j)}{\psi(t_k)}\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_k} = \frac{t_i-t_k}{(\lambda_j-t_i)(\lambda_j-t_k)}\frac{\varphi(\lambda_j)}{\psi'(\lambda_j)},$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{F}_n) \qquad \frac{\partial^2\lambda_j}{\partial t_i^2} = {} & \frac{1}{2}\left[\frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)} - \frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)}\right]\left(\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_i}\right)^2 - \left[\frac{\varphi''(t_i)}{2\varphi'(t_i)} - \frac{\psi'(t_i)}{\psi(t_i)}\right]\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_i} \\ & + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}{}^{j}\,\frac{\varphi(\lambda_j)\psi'(\lambda_l)(\lambda_l-t_i)^2}{\varphi(\lambda_j)\psi'(\lambda_j)(\lambda_j-t_l)^2(\lambda_j-\lambda_l)}\left(\frac{\partial\lambda_l}{\partial t_i}\right)^2 \\ & - \sum_{l=1}^{n}{}^{j}\,\frac{\lambda_j-t_i}{(\lambda_l-t_i)(\lambda_l-\lambda_j)}\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_i}\frac{\partial\lambda_l}{\partial t_i} + 2\frac{\psi^2(t_i)}{\varphi'^2(t_i)(\lambda_j-t_i)^2}\frac{\varphi(\lambda_j)}{\psi'(\lambda_j)} \\ & \times\left[\sum_{k=1}^{n+3}\left(c_k+\frac{3}{4}\right) - 2 + \sum_{k=1}^{n+2}{}^{i}\,\frac{\varphi'(t_k)}{\psi(t_k)}\frac{c_k+\frac{1}{4}}{\lambda_j-t_k} + \frac{\varphi'(t_i)}{\psi(t_i)}\frac{c_i}{\lambda_j-t_i}\right]\end{aligned}$$

$$[\varphi(x) = x(x-1(x-t_1)\ldots(x-t_n); \qquad \psi(x) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n)].$$

J'ai démontré que ce système est complètement intégrable et reproduit par dégénérescence un système hyperelliptique jacobien de genre n. Les combinaisons symétriques élémentaires $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, considérées comme fonctions de t_1 par exemple, ont LEURS POINTS CRITIQUES FIXES ($t_1 = t_2, \ldots, t_n$, 0, 1, ∞) ; elles sont MÉROMORPHES en tout point t_1, les points précédents exceptés. C'est en m'inspirant de la méthode suivie [2] par M. Painlevé pour démontrer l'uniformité de l'intégrale de I, que j'ai obtenu ce résultat.

Dès qu'on passe de l'équation (F_1) ou VI aux équations (F_2) on rencontre de sérieuses difficultés dans l'extension de cette méthode ; une fois la démonstration obtenue pour $n = 2$, elle s'étend sans peine dans le cas général [3].

J'ai démontré, en outre, que lorsque les constantes $c_1, \ldots, c_{n+3}$ sont choisies au hasard, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont des FONCTIONS ESSENTIELLEMENT TRANSCENDANTES DES $2n$ CONSTANTES D'INTÉGRATION. Le système (f_n, F_n) constitue

---

(1) L'indice placé à la droite du signe Σ signifiera que la lettre de sommation peut prendre toutes les valeurs comprises entre les limites données, *sauf celle de l'indice*.

(2) *Bull. Soc. math.*, t. XXVIII, 1900, p. 227-238.

(3) Il est à remarquer que dans la généralisation de tout résultat acquis pour l'équation E_1 (ou F_1), l'étape la plus difficile à franchir est la première ; une fois la généralisation obtenue pour $n = 2$, elle s'étend sans peine au cas général.

ainsi le premier exemple explicitement connu d'un système différentiel d'ordre arbitrairement élevé dont l'intégrale a ses points critiques fixes et contient sous forme transcendante toutes les constantes d'intégration, de quelque manière qu'on les choisisse (¹).

5. La proposition précédente peut être en défaut pour des valeurs exceptionnelles de $c_1, \ldots, c_{n+3}$. Effectivement, je montre (²) que lorsqu'il existe entre ces constantes une relation telle que (E_n) (³) admette une intégrale dont la dérivée logarithmique est rationnelle, le système (f_n, F_n) admet toutes les solutions d'un système (g_n) d'ordre n. Prenons pour fonctions inconnues $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$; le système (Σ_n) ainsi formé généralise l'équation de Riccati qu'il reproduit pour $n = 1$ (⁴); on l'intègre en posant $\sigma_\nu = \theta_\nu \theta_0^{-1}$. Les θ_ν satisfont à un système linéaire d'ordre $n+1$; le système (S_{n+1}) vérifié par θ_0 coïncide pour $n = 2$ avec un système rencontré par M. Appell et M. Picard et intégré par la fonction hypergéométrique de deux variables, $\mathrm{F}_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y)$. En général, θ_0 considéré comme fonction de t_1 est une fonction hypergéométrique d'ordre supérieur, suivant la locution de Pochhammer.

J'ai retrouvé ces résultats par une méthode fondée *uniquement sur la notion de groupe* et ne faisant pas intervenir les systèmes différentiels complètement intégrables. Cette seconde méthode présente l'intérêt d'exprimer les coefficients de (E'_n) en fonction des coefficients de substitutions du groupe de (E'_n); au point de vue adopté tout à l'heure, elle exprime les constantes d'intégration de l'équation linéaire hypergéométrique à l'aide des coefficients des substitutions et donne ainsi la solution du problème de Riemann relatif à (E'_n). C'est encore par cette voie que j'ai pu démontrer le théorème suivant qui termine ce travail :

(¹) A vrai dire, on pourrait former, en généralisant, par exemple, une équation étudiée par M. Picard (*Journ. de Liouville*, 4ᵉ série, t. V, 1889, p. 298-300), des équations d'ordre n dont les intégrales générales contiendraient sous forme essentiellement transcendante les n constantes d'intégration. Mais ces équations seraient réductibles au sens de M. Drach, tandis que le système (f_n, F_n) est irréductible (au sens de M. Drach), ainsi que je le montrerai prochainement.

(²) *Comptes rendus*, t. 152, 1911, p. 755.

(³) J'appellerai (E'_n) une telle équation.

(⁴) Dans ce cas, le problème actuel avait été traité par M. Richard Fuchs (*Math. Ann.*, t. LXIII, p. 317-320).

Pour que le rapport des valeurs de l'intégrale

$$\int x^{-2r_{n+1}}(x-1)^{-2r_{n+2}}(x-t_1)^{-2r_1}\ldots(x-t_n)^{-2r_n}(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n)\,dx,$$

prise le long de deux de ses cycles soit indépendant de $t_1, \ldots, t_n$, *il faut et il suffit que* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *vérifient un système* (g_n).

Cet énoncé complète (et généralise) un résultat antérieur de M. R. Fuchs.

6. L'étude approfondie du système (f_n, F_n) appelle de nouvelles recherches; de nombreux problèmes se présentent. On peut se proposer ainsi la représentation [1] de $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ par des quotients de fonctions partout holomorphes par rapport à t_1, par exemple, sauf en $t_1 = t_2, \ldots, t_n$, 0, 1, ∞, représentation qui généraliserait celle des dégénérescences hyperelliptiques par les fonctions Θ et celle des fonctions $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ du numéro 5 par les fonctions hypergéométriques; on peut étudier cette représentation dans le domaine des points singuliers, rechercher la distribution des points critiques qui permutent $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, énumérer les dégénérescences de (f_n, F_n) jouant par rapport à ce système le même rôle que les équations V, ..., I par rapport à VI, ou que l'équation de Bessel par rapport à l'équation hypergéométrique de Gauss. On peut aussi chercher à rattacher le système (f_n, F_n) aux équations (σ) formées par M. Schlesinger. Rappelons que M. Schlesinger [2] est parti de systèmes linéaires dont les coefficients sont rationnels et possèdent des pôles du premier ordre; le groupe du système une fois fixé, les résidus correspondant à ces pôles considérés comme fonctions des pôles satisfont à des relations différentielles très élégantes qui sont (dans le cas où le système linéaire est du second ordre et avec nos notations) d'ordre $4(n+2)$, mais admettent des intégrales premières algébriques.

7. On aura pu déjà pressentir la connexité des recherches relatives au système (f_n, F_n) avec celles qui ont pour but la solution du problème de Riemann pour les équations linéaires d'ordre 2. Résolu par Riemann pour l'équation de Gauss, par M. Poincaré dans le cas des

---

[1] Les équations (σ) de M. Schlesinger (*voir* plus loin) joueront un rôle important dans cette question, que je traiterai dans un Mémoire ultérieur.

[2] *Atti del IV Congr. intern. dei Matem.*, t. II, p. 64. Roma, 1909. — *Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen*, p. 305-308. Leipzig et Berlin, 1908.

groupes fuchsiens et kleinéens, par M. Hilbert et M. Plemelj dans le cas des équations d'ordre 2 et n, à l'aide de la théorie des équations fonctionnelles, le problème de l'existence d'une équation linéaire répondant à un groupe donné a été abordé par M. Schlesinger à l'aide de la théorie des fonctions analytiques. En admettant que le problème possède toujours une solution, on pourrait démontrer que l'intégrale du système (f_n, F_n) a ses points critiques fixes : ainsi procède M. Schlesinger pour les équations (σ) (nº 7). Mais la solution qu'il a donnée du problème de Riemann comprend deux parties, dont la seconde n'est pas à l'abri de sérieuses objections concernant l'inversion des fonctions entières; M. Schlesinger n'en a pas moins le mérite d'avoir, dans le cas général, posé le premier cette question difficile sur son véritable terrain.

Peut-être, d'ailleurs, une théorie fondée sur la seule notion de groupe suffira-t-elle à triompher de ces difficultés : j'ai indiqué tout à l'heure qu'il existe déjà une solution de cette nature dans le cas où l'équation (E_n) possède une intégrale dont la dérivée logarithmique est rationnelle. Pourtant, il paraît plus probable qu'inversement, la solution du problème de Riemann résultera de l'étude directe des équations différentielles telles que (f_n, F_n) attachées aux systèmes linéaires. A ce point de vue, il n'est pas douteux que les équations (σ) de M. Schlesinger ne doivent jouer un rôle important.

Je ne veux pas terminer sans exprimer toute ma reconnaissance à M. Appell et à M. Painlevé pour leurs conseils et leur bienveillant accueil; qu'il me soit permis également de remercier M. Picard pour l'intérêt constant qu'il a bien voulu témoigner à mes recherches.

PREMIÈRE PARTIE.

---

1. La recherche des équations différentielles du troisième ordre

$$y''' = R(y'', y', y, x)$$

(R rationnel en y'', y', algébrique en y, analytique en x), et dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, exige, comme l'a montré M. Painlevé [1], la détermination préalable de tous les cas où l'équation

$$y''' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y''^2}{y'} + b_1(y)y''y' + c_1(y)y'^3 \tag{1}$$

a son intégrale générale uniforme. Dans cette équation (qu'on déduit de la première en posant $x = x_0 + \alpha X$ et faisant tendre α vers o), n représente un entier positif, négatif ou infini, mais différent de o et -1; $b_1(y)$ et $c_1(y)$ sont des fonctions algébriques de y. Je me propose, dans cette première Partie, de former explicitement toutes les équations (1) dont l'intégrale générale est uniforme, et de donner dans chaque cas cette intégrale; conformément à un résultat énoncé sans démonstration par M. Painlevé [2] nous ne rencontrerons comme intégrales que des fonctions automorphes ou des combinaisons de leurs dégénérescences.

2. Tout d'abord, on peut exprimer $b_1(y)$ et $c_1(y)$ par des fonctions rationnelles de y et d'une irrationnelle $z(y)$ *de telle sorte que z soit, comme y, uniforme en x*. Il suffit, en effet, de poser $y''' = z$; z, évidemment uniforme en x, vérifie une relation algébrique (1) où y'' et y' jouent le rôle de paramètres; sauf peut-être pour des valeurs exceptionnelles de ces paramètres (valeurs qu'il nous est loisible d'exclure), $b_1(y)$ et $c_1(y)$ s'expriment rationnellement en fonction de y et z, et notre problème s'énonce ainsi maintenant : déterminer tous les cas où l'équation

$$y''' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{y''^2}{y'} + b(y, z)y''y' + c(y, z)y'^3, \tag{2}$$

dans laquelle b et c sont des fonctions rationnelles des variables y et z liées par une relation algébrique

$$f(y, z) = 0, \tag{3}$$

donne pour y et z des fonctions uniformes de x.

Effectuons alors sur la relation (3) une transformation birationnelle qui substitue à y et z de nouvelles variables Y et Z liées par $F(Y, Z) = 0$; Y et Z sont uniformes en x et l'on vérifie sans peine que la transformation remplace l'équation (2) par une autre, de même

---

[1] *Bull. Soc. math.*, t. XXVIII, 1900, p. 256. M. Painlevé appelle l'équation (1) la *simplifiée* de la première $y''' = R(y'', y', y, x)$.

[2] *Ibid.*, p. 257; *Acta math.*, t. XXV, 1902.

forme où l'entier n a conservé la même valeur, et dont les coefficients sont rationnels en Y, Z. On peut donc remplacer la relation (3) par *une autre quelconque de la même classe* et supposer, par exemple, que les points critiques γ_k de la fonction $z(y)$ sont à distance finie et simples.

3. Remarquons alors que l'équation (2) s'écrit sous la forme différentielle

$$d^3y = \left(1 - \frac{1}{n}\right)(d^2y)^2(dy)^{-1} + b(y, z)\,d^2y\,dy + c(y, z)\,dy^3,$$

qui ne renferme ni x ni dx; son intégration équivaut donc à celle d'une équation du premier ordre suivie de deux quadratures. Effectivement [1], l'expression

$$u = \frac{d^2x}{dy^2}\left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

vérifie une équation de Riccati, et, en posant

$$u = -\frac{n}{n+1}\frac{1}{v}\frac{dv}{dy},$$

v satisfait à une équation linéaire du second ordre en y; en définitive l'équation (2) est remplacée par le système

$$(e) \qquad \frac{dy}{dx} = v^{\frac{n}{n+1}},$$

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{d^2v}{dy^2} - b(y, z)\frac{dv}{dy} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)c(y, z)v = 0.$$

C'est sous cette forme que nous étudierons le plus souvent l'équation (2).

4. Établissons maintenant une proposition fondamentale : *Au voisinage de tout point singulier l'équation* (E) *est régulière* (au sens de L. Fuchs).

Supposons, en effet, que dans le domaine de $y = 0$ les coefficients $b(y, z)$ et $c(y, z)$ admettent les développements suivants :

$$b(y, z) = \frac{1}{y^{1+r}}(B_0 + B_1 y^{r_1} + \ldots + B_n y^{r_n} + \ldots) \qquad (B_0 \neq 0),$$

$$c(y, z) = \frac{1}{y^{2+s}}(C_0 + C_1 y^{s_1} + \ldots + C_n y^{s_n} + \ldots) \qquad (C_0 \neq 0),$$

[1] *Cf.* PAINLEVÉ, *Bull. Soc. math.*, t. XXVIII, 1900, p. 256.

où r et s sont des nombres (rationnels) dont l'un au moins est essentiellement positif, et où les r_i et les s_i sont des nombres (rationnels) positifs, croissant avec i. En remplaçant r par le plus grand des nombres r et $\frac{s}{2}$ on peut supposer $s = 2r$, quitte à attribuer à l'un (mais à l'un seulement) des coefficients B_0 et C_0 la valeur o. Montrons que si $r > 0$ l'intégrale de (2) n'est pas uniforme. Pour cela, nous substituerons au système (e, E) le système suivant :

$$\frac{dy}{dx} = u, \qquad \frac{d^2u}{dx^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\left(\frac{du}{dx}\right)^2}{u} + b(y, z)\frac{du}{dx}u + c(y, z)u^3. \tag{4}$$

Effectuons alors la transformation

$$x = \alpha X, \qquad y = \alpha Y, \qquad u = \alpha^r U,$$

et le système (4) prendra la forme

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{dY}{dX} = \alpha^r U, \\ &\frac{d^2U}{dX^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\left(\frac{dU}{dX}\right)^2}{U} + \frac{1}{Y^{1+r}}(B_0 + \alpha^{r_1}B_1 Y^{r_1} + \ldots)U\frac{dU}{dX} \\ &\qquad + \frac{1}{Y^{2+2r}}(C_0 + \alpha^{s_1}C_1 Y^{s_1} + \ldots)U^3. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Appliquons maintenant le lemme fondamental dont se sert M. Painlevé pour rechercher les conditions nécessaires de la fixité des points critiques d'une équation différentielle : les coefficients du développement de (5) suivant les puissances de α doivent être uniformes en X; or, ce développement donne

$$Y = Y_0 + \alpha^r \int U_0\, dX + \ldots \qquad \text{avec} \qquad Y_0 \neq 0,$$

$$\frac{d^2U_0}{dX^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{U_0}\left(\frac{dU_0}{dX}\right)^2 + \frac{B_0}{y_0^{1+r}}U_0\frac{dU_0}{dX} + \frac{C_0}{y_0^{2+2r}}U_0^3. \tag{6}$$

Mais il existe une intégrale de (6) de la forme $U_0 = \frac{k}{X}$, la constante k étant racine de l'équation

$$\frac{C_0}{Y_0^{2+2r}}k^2 - \frac{B_0}{Y_0^{1+r}}k - 1 - \frac{1}{n} = 0.$$

Comme B_0 et C_0 ne sont pas simultanément nuls et que n est différent de -1, cette équation fournit au moins une valeur pour k finie et non nulle. Le coefficient de α^r dans le développement de Y est alors $k \log X$, et notre proposition est établie.

5. Soit alors $y = 0$ l'un des points singuliers de (E); remplaçons x par αx, y par αy et faisons tendre α vers 0 [1]. Puisque $y = 0$ est régulier, le système (e, E) devient, à la limite

$$\frac{dy}{dx} = v^{\frac{n}{n+1}}, \tag{7}$$

$$\frac{d^2 v}{dy^2} - \frac{B_0}{y}\frac{dv}{dy} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{C_0}{y^2} v = 0, \tag{8}$$

et doit avoir son intégrale générale uniforme. Or, remplaçons successivement dans (7) v par l'une des deux intégrales $v_1 = y^r$ et $v_2 = y^s$ de (8) (en supposant $s \neq r$); l'uniformité de $y(x)$ entraîne les conditions

$$\left\{\begin{aligned} r &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{m}\right), \\ s &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right), \end{aligned}\right. \tag{9}$$

où m et p sont deux entiers positifs, négatifs ou infinis.

6. Démontrons maintenant la proposition suivante :

Si une équation fondamentale déterminante de (E) *admet deux racines r et s dont la différence $s - r$ est un entier $q\ (\geqq 0)$ il ne peut exister de terme logarithmique dans le développement de $v(y)$, sauf si la plus petite r des deux racines est égale à $1 + \frac{1}{n}$* (et alors on a $q = 0$, ou $q = 1$ avec $n = 1, \infty$, ou $q = 2$, $n = 1$) [2].

En effet, l'équation (E) admet une intégrale de la forme

$$v = y^r\left[1 + h_1 y + \ldots + h_{q-1} y^{q-1} + h_q y^q + \ldots + k(1 + h'_1 y + \ldots) y^q \log \frac{y}{\alpha}\right],$$

(1) Ici, on pourrait se dispenser de recourir à la méthode de M. Painlevé.

(2) Il résultera de la suite de cette analyse que les cas $q = 1$ et $q = 2$ ne peuvent se présenter.

en supposant, pour fixer les idées, que $y=0$ ne soit pas un point critique pour $z(y)$, et en désignant par α une constante arbitraire. Changeons y en αy, et x en $\alpha^{1-\frac{rn}{n+1}}x$; y sera donnée par l'équation

$$\frac{dy}{dx}=y^{\frac{rn}{n+1}}[1+\alpha h_1 y+\ldots+\alpha^q(h_q+k\log y)+\ldots]^{\frac{n}{n+1}}.$$

D'après (9), on a

$$\frac{rn}{n+1}=1-\frac{1}{m};$$

posons alors

$$y=Y^m$$

(ce qui exige que m soit fini) et développons Y suivant les puissances de α. Pour $q>0$, on a

$$Y_0=\frac{x}{m},$$

$Y_1, \ldots, Y_{q-1}$ seront des polynomes en x, mais Y_q renfermera un terme en $\log x$ et ne saurait être uniforme. Pour $q=0$, on aura

$$\frac{dY_0}{dx}=(1+k\log Y_0)^{\frac{n}{n+1}};$$

changeons alors x en $\alpha^{\frac{n}{n+1}}e^{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}x$ et Y_0 en $e^{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}Y_0$; l'équation précédente devient

$$\frac{dY_0}{dx}=(1+\alpha k\log Y_0)^{\frac{n}{n+1}},$$

dont l'intégrale développée suivant les puissances de α est visiblement multiforme.

Le raisonnement précédent est en défaut pour $m=\infty$ ou $r=1+\frac{1}{n}$; mais, d'après (9), ce cas ne peut se présenter que si l'équation

$$q=-\frac{1}{p}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

est vérifiée par trois entiers n, p, q, dont l'un n est différent de -1. Or il en est ainsi pour $p=\infty$, $q=0$ (quel que soit n); ce cas exclu, le produit des entiers p et q, finis et non nuls, doit être au plus égal à 2, ce qui fournit les trois autres solutions annoncées.

7. Plaçons-nous maintenant dans le cas général, $m \neq p$; l'intégrale du système (7), (8) est donnée par la formule

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B} = \int \frac{dy}{y^{1-\frac{1}{m}}\left[1 + \mathrm{C}y^{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\right)}\right]^{\frac{n}{n+1}}}. \tag{10}$$

Développons y suivant les puissances de C et exprimons que le coefficient de C dans ce développement est uniforme en x. Il vient

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{m}{p}\right) = \mathrm{M},$$

et par symétrie

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{p}{m}\right) = \mathrm{P},$$

M et P étant deux nouveaux entiers, finis ou non, mais différents de o, d'après ce qui précède (et de -1, comme on le verrait aisément).

On déduit des relations précédentes

$$\frac{m}{p} = 1 - \frac{n}{n+1}\mathrm{M}, \qquad \frac{p}{m} = 1 - \frac{n}{n+1}\mathrm{P}, \tag{11}$$

d'où, en éliminant $\frac{m}{p}$,

$$\left(1-\frac{1}{\mathrm{M}}\right) + \left(1-\frac{1}{\mathrm{P}}\right) + \left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 2. \tag{12}$$

Il est bien connu que cette équation n'admet pour l'ensemble $\mathrm{M}, \mathrm{P}, n+1$ que cinq solutions distinctes; en permutant les rôles de M, P et n dans ces solutions, on obtient le Tableau suivant :

(T)

n.	M.	P.
1	4	4
	3	6
	2	∞
2	3	3
	2	6
3	2	4
5	2	3
∞	2	2
n	1	$-n-1$

Les équations (11) exigent d'ailleurs que pour $n = 5$, m soit pair.

Ces conditions sont suffisantes pour l'uniformité de la solution $y(x)$ de (7), (8), car si elles sont remplies, y est définie (pour $m \neq \infty$) par les relations

$$(13) \qquad y = \mathrm{Y}^m, \qquad \mathrm{A}x + \mathrm{B} = \int \frac{d\mathrm{Y}}{(1 + \mathrm{C}\mathrm{Y}^{\mathrm{M}})^{\frac{n}{n+1}}},$$

et, d'après les résultats classiques de Briot et Bouquet, Y est une fonction uniforme (elliptique, exponentielle ou rationnelle) de x, ou, dans le cas de $n = 5$, la racine carrée d'une fonction uniforme de x; mais alors la parité de m entraîne l'uniformité de y. Enfin, pour $m = \infty$, y est définie par l'inversion de l'intégrale

$$(14) \qquad \mathrm{A}x + \mathrm{B} = \int \frac{dy}{y(1 + \mathrm{C}\log y)^{\frac{n}{n+1}}},$$

qui donne pour y une fonction uniforme de x.

Les résultats précédents vont nous permettre de démontrer que *le genre ϖ de la relation* (3) *ne peut* (sauf pour $n = -2$) *dépasser l'unité*.

8. A cet effet, considérons la fonction rationnelle $b(y, z)$ et exprimons que la somme de résidus dans tout le plan analytique (y, z) est nulle; nous distinguerons trois cas, suivant que le pôle considéré est un point ordinaire α_i, ou un point à l'infini β_j, ou un point critique γ_k.

Dans le premier cas, le résidu est $r_i + s_i - 1$; or, d'après (9) et (11), on a

$$s_i = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{m_i} + \frac{n}{n+1}\frac{\mathrm{M}_i}{m_i}\right);$$

posons (pour $n \neq -2$)

$$(15) \qquad \frac{2n + 2 - n\mathrm{M}_i}{n+2} = \frac{2}{\mu_i};$$

μ_i est égal, d'après (T), à 2, 3, 4, 5, 6, 7 ou ∞, et l'on a, pour le résidu considéré, l'expression

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{\mu_i m_i}\right)$$

qui doit être prise égale à 0 pour $n = -2$.

Avant d'étudier les autres cas, établissons une formule dont nous ferons un fréquent usage. Transformons le système (e, E) par la substitution

$$(\mathrm{S}) \qquad y = \varphi(\mathrm{Y}).$$

Pour que l'équation (e) conserve la même forme, il faudra faire en même temps

$$v = [\varphi'(\mathrm{Y})]^{1+\frac{1}{n}}\mathrm{V},$$

et, après ce changement de variables, le système (e, E) s'écrit

$$(e_{\mathrm{S}}) \qquad \frac{d\mathrm{Y}}{dx} = \mathrm{V}^{\frac{n}{n+1}},$$

$$(\mathrm{E_S}) \qquad \frac{d^2\mathrm{V}}{d\mathrm{Y}^n} - \left[\mathrm{B}(\mathrm{Y})\varphi' - \frac{n+2}{n}\frac{\varphi''}{\varphi'}\right]\frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{Y}} + \frac{n+1}{n}\left[\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{\varphi''^2}{\varphi'^2} - \mathrm{B}(\mathrm{Y})\varphi'' - \mathrm{C}(\mathrm{Y})\varphi'^2\right]\mathrm{V} = 0,$$

en désignant par $\mathrm{B}(y)$ et $\mathrm{C}(y)$ les transformés de $b(y, z)$ et $c(y, z)$ par la substitution S.

Cela étant, la fonction $b(y, z)$ admet, dans le domaine d'un des σ points à l'infini β_j (supposés distincts, d'après la remarque du n° 2), un développement de la forme

$$b(y, z) = \frac{\mathrm{A}_1^{(j)}}{y} + \frac{\mathrm{A}_2^{(j)}}{y^2} + \dots.$$

Faisons la transformation $y = \mathrm{Y}^{-1}$ qui change β_j en un point régulier à distance finie. Le résidu du coefficient de $\frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{Y}}$ dans $(\mathrm{E_s})$ sera $-\mathrm{A}_1^{(j)} + \frac{2(n+2)}{n}$; d'après le premier cas, il doit être de la forme

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{\mu_j m_j}\right);$$

par suite, le résidu $-\mathrm{A}_1^{(j)}$, relatif à β_j, a pour expression

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(-1 - \frac{2}{\mu_j m_j}\right).$$

Reste le cas d'un point critique γ_k (que nous supposerons à l'origine). Nous exprimerons ici que *non seulement* y, *mais* z est une fonction uniforme de x. Le point critique $\gamma_k = 0$ pouvant être supposé simple (n° 2), on peut développer, dans son domaine, Y et Z de la façon suivante :

$$
(16) \qquad \begin{cases} y = a_2 Y^2 + a_3 Y^3 + \ldots, \\ z = Y. \end{cases}
$$

D'ailleurs $b(y, z)$ est de la forme

$$
b(y, z) = \frac{B_{-2}^{(k)}}{y} + \frac{B_{-1}^{(k)}}{z} + B_0^{(k)} + \ldots.
$$

La transformation (16) remplace γ_k par un point non critique $Y = 0$ et, comme Y doit être uniforme, nous sommes encore ramenés au premier cas. Le résidu du coefficient de $-\frac{dV}{dY}$ dans la nouvelle équation étant

$$
2B_{-2}^{(k)} - \frac{n+2}{n},
$$

on doit avoir [1]

$$
2B_{-2}^{(k)} = \left(1 + \frac{2}{n}\right)\left(2 - \frac{2}{\mu_k m_k}\right).
$$

Exprimons, maintenant que la somme des résidus est nulle; il vient

$$
\left(1 + \frac{2}{n}\right)\left[\sum_{(i)}\left(1 - \frac{2}{\mu_i m_i}\right) + \sum_{(j)}\left(-1 - \frac{2}{\mu_j m_j}\right) + \sum_{(k)}\left(2 - \frac{2}{\mu_k m_k}\right)\right] = 0,
$$

où la première somme est étendue aux ν points α_i, la seconde aux σ points β_j, la troisième au δ points γ_k. Or, l'équation précédente peut encore s'écrire

$$
(17) \quad \left(1 + \frac{2}{n}\right)\left[\sum_{i=1}^{\nu}\left(1 - \frac{2}{\mu_i m_i}\right) + \sum_{j=1}^{\sigma}\left(1 - \frac{2}{\mu_j m_j}\right) + \sum_{k=1}^{\delta}\left(1 - \frac{2}{\mu_k m_k}\right) + \delta - 2\sigma\right] = 0
$$

---

[1] Cette formule montre que tout point critique de $z(y)$ est nécessairement point singulier de (E).

et, d'après une formule de Riemann, $\delta - 2\sigma$ est égal à $2\varpi - 2$, ϖ désignant le genre de la relation (3). D'ailleurs, les entiers μ étant au moins égaux à 2, chacune des sommes de (17) est positive ou nulle; cette relation exige donc soit $n = -2$, soit $2\varpi - 2 \leq 0$, et il en résulte bien que, sauf dans le cas $n = -2$, le genre de (3) ne peut dépasser l'unité.

9. D'après le mode de démonstration employé, la proposition précédente subsiste même s'il existe des fonctions rationnelles $\rho(y, z)$ et $\sigma(y, z)$ satisfaisant à une relation de genre inférieur à ϖ et à l'aide desquelles b et c s'expriment rationnellement.

Donnons une application importante de cette même proposition. Considérons l'équation du troisième ordre

$$y''' = R(y'', y', y, z, x), \tag{18}$$

où R est rationnel en y'', y', y, z (analytique en x), y et z satisfaisant à une relation algébrique

$$f(y, z; x) = 0, \tag{19}$$

analytique en x, et de genre ϖ pour x arbitraire. Supposons que l'intégrale (y, z) de (18) ait ses points critiques fixes; posons alors $x = x_0 + \alpha X$ et développons y et z suivant les puissances de α; pour $\alpha = 0$, y et z se réduisent à deux fonctions uniformes de x, y_0 et z_0, vérifiant des équations (2) et uniformisant la courbe $f(y_0, z_0; x_0) = 0$. Or, on vient de voir que le genre de la relation précédente ne peut en général dépasser l'unité, et que cette conclusion reste exacte même si les équations (2) en y_0 (et z_0) pouvaient être rationalisées à l'aide d'une relation de genre inférieur à ϖ (par exemple, si l'équation en y_0 avait ses coefficients rationnels en y). D'autre part, on verra que pour $n = -2$ l'équation (2) en y_0 possède des ensembles parfaits de points singuliers qui n'existent pas pour $n \neq -2$. Donc, dans le premier cas, l'équation (18) possède *a fortiori* des ensembles parfaits de points singuliers, et l'on peut énoncer le théorème suivant [1] :

---

[1] Ce théorème a été publié sans démonstration par M. Painlevé (*Acta mathem.*, t. XXV, 1902, p. 71).

Lorsque l'intégrale générale de l'équation (18) *a ses points critiques fixes, le genre de la relation* (19) *est nécessairement* 0 *ou* 1, *à moins que l'intégrale ne possède des ensembles parfaits de points singuliers.*

Cela étant, nous allons étudier successivement les trois cas suivants : $n = -2$, $\varpi = 1$ et $\varpi = 0$.

Premier cas, $n = -2$.

10. On voit immédiatement que $b(y, z)\, dy$ est une différentielle de première espèce attachée à la relation (3), ce qui suffit à prouver que b est identiquement nul si ϖ est nul. Établissons que ce fait est général. Supposons, à cet effet, que l'origine soit un point régulier des fonctions rationnelles b et c, et soit b_0 la valeur que prend b en ce point. L'équation (E) admet une intégrale telle que

$$v = y + \frac{b_0}{2} y^2 + \ldots,$$

d'où, pour y, l'équation

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + b_0 y^3 + \ldots,$$

où le second membre représente une fonction holomorphe pour $y = 0$. On s'assure immédiatement, en remplaçant x et y par $\alpha^{-1}x$ et αy respectivement, que y admet le développement

$$y = -\frac{1}{x + A} - 2 b_0 \frac{\log(x + A)}{(x + A)^2} + \ldots.$$

L'uniformité de y exige donc que b_0 soit nul, et, par conséquent, la fonction rationnelle $b(y, z)$, nulle en tout point du plan, *est identiquement nulle*. Le système (e, E) s'écrit alors

$$\frac{dy}{dx} = v^2, \tag{20}$$

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = \frac{1}{2} c(y, z) v. \tag{21}$$

Il s'agit de déterminer $c(y, z)$ de façon que y et z soient des fonctions uniformes du rapport x des intégrales de (21). Les conditions auxquelles doit satisfaire $c(y, z)$ ont été données par M. Poincaré; lorsqu'elles sont remplies, on sait que y (et z) définit *une fonction automorphe (fuchsienne ou kleinéenne) de x.*

Deuxième cas, $\varpi = 1$.

11. La relation (17) exige alors que chacun des termes $1 - \frac{2}{\mu m}$ figurant sous les signes Σ soit nul, ce qui nécessite $\mu = 2$, $m = 1$, et, en vertu de (15), les entiers M sont tous égaux à 1 : autrement dit, le seul cas du Tableau (T) admissible pour $\varpi = 1$ est le dernier. Cela étant, la fonction rationnelle $-\frac{n}{n+2} b(y, z)$ est régulière dans le domaine de tout point du plan, sauf les points à l'infini et les points critiques γ_k, où son développement commence par des termes égaux respectivement à

$$-\frac{2}{y} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2(y-\gamma_k)}.$$

Soit alors

$$u = \int r(y, z)\, dy \tag{22}$$

l'intégrale de première espèce attachée à (3) et r' la dérivée de r par rapport à y [prise en tenant compte de (3)]. D'après ce qui précède, l'expression

$$-\frac{n}{n+2} b(y, z) - \frac{r'}{r}$$

admet un point à l'infini comme zéro d'ordre 2 au moins, et dans le domaine d'un point critique γ_k, le premier terme de son développement est $K(y-\gamma_k)^{-\frac{1}{2}}$; partout ailleurs l'expression est régulière. Elle est donc égale à kr, k désignant une constante qui peut être nulle, et le coefficient $b(y, z)$ est *complètement déterminé :*

$$b(y, z) = -\frac{n+2}{n}\left(\frac{r'}{r} + kr\right). \tag{23}$$

12. Cherchons maintenant la forme de $c(y, z)$. A cet effet, nous l'étudierons, comme $b(y, z)$, dans le voisinage des points α_i, β_j, γ_k

définis plus haut, en appliquant la proposition suivante, corollaire évident d'un théorème précédent (n° 6) : si les racines de l'équation fondamentale déterminante relative à un point singulier de E, non critique pour $z(y)$, sont o et 1, le coefficient $c(y, z)$ est holomorphe dans le voisinage de ce point.

Il en résulte immédiatement que $c(y, z)$ est holomorphe en tout point α_i. Pour l'étudier dans le domaine d'un point à l'infini β_j où l'on a

$$(24)\qquad b(y, z) = 2\frac{n+2}{n}\frac{1}{y} + \frac{A_2^{(j)}}{y^2} + \ldots, \qquad c(y, z) = \frac{C_2^{(j)}}{y^2} + \frac{C_3^{(j)}}{y^3} + \ldots,$$

nous appliquerons les formules (e_S, E_S) relatives à la transformation (S) : $y = Y^{-1}$, et nous exprimerons que le coefficient de Y ne contient pas de termes en Y^{-2} et Y^{-1} ; il vient immédiatement

$$(25)\qquad C_2^{(j)} = -2\left(1 + \frac{2}{n}\right), \qquad C_3^j = -2A_2^{(j)}.$$

Supposons enfin qu'on ait dans le domaine de $\gamma_k = 0$

$$(26)\qquad b(y, z) = \frac{n+2}{2n}\frac{1}{y} + \frac{B_{-1}^{(k)}}{z} + \ldots; \qquad c(y, z) = \frac{D_{-4}^{(k)}}{y^2} + \frac{D_{-3}^{(k)}}{z^3} + \ldots;$$

faisons la transformation (16) et appliquons encore une fois notre proposition ; nous aurons

$$(27)\qquad D_{-4}^{(k)} = -\frac{2n+1}{4n}, \qquad D_{-3}^{(k)} = -\frac{B_{-2}^{(k)}}{2a_2}.$$

Les relations précédentes *déterminent complètement* $c(y, z)$. Il suffit, en effet, de former l'expression

$$(28)\qquad \frac{b'}{n+2} - \frac{b^2}{(n+2)^2} - \frac{c}{n},$$

où b' désigne la dérivée de b par rapport à y, prise en tenant compte de (3). Substituant à b et c leurs développements (24) et (26), on voit, grâce à (25) et (27), que l'expression (28), régulière dans le domaine de tout point α_i, admet dans le domaine de β_j et γ_k des développements commençant par des termes en y^{-1} et $(y-\gamma_k)^{-1}$. Le produit par r^{-2} de l'expression (28) est donc régulier en tout point du plan (y, z) et, par suite, se réduit à une constante $K(n+1)^{-1}$. On a ainsi

$$c = \frac{n}{n+2}b' - \frac{n}{(n+2)^2}b^2 - \mathrm{K}\frac{n}{n+1}r^2. \tag{29}$$

13. Les relations (23) et (29) vont nous permettre de *substituer un système* (7), (8) *au système* (e, E). Posons, en effet,

$$\alpha \log \mathrm{Y} = \int r(y, z)\, dy,$$

ou

$$y = \psi(\alpha \log \mathrm{Y}), \tag{30}$$

en appelant $\psi(u)$ la fonction elliptique de u obtenue par l'inversion de (22), et en désignant par α une constante (non nulle) que nous fixerons tout à l'heure. En appliquant les formules (e_8, E_8) et en tenant compte de (23) et de (29), on trouve sans peine que y vérifie le système

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dx} = \mathrm{V}^{\frac{n+1}{n}}, \tag{31}$$

$$\frac{d^2\mathrm{V}}{d\mathrm{Y}^2} - \frac{n+2}{n}\,\frac{1-k\alpha}{\mathrm{Y}}\,\frac{d\mathrm{V}}{d\mathrm{Y}} + \left[\left(\mathrm{K} + k^2\frac{n+1}{n^2}\right)\alpha^2 - k\frac{(n+1)(n+2)}{n^2}\alpha + \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\right]\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Y}^2} = 0. \tag{32}$$

14. Tout revient donc à déterminer dans quels cas la fonction $y(x)$ définie par (30), (31) et (32) est uniforme. Soient V_1, V_2 deux intégrales distinctes de (32); la fonction y satisfaisant à la relation

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dx} = (\mathrm{V}_1 + \mathrm{C}\mathrm{V}_2)^{\frac{n}{n+1}}$$

admet le développement suivant les puissances de C

$$\mathrm{Y} = \mathrm{Y}_0(1 + \mathrm{C}\mathrm{Y}_1 + \ldots);$$

par suite,

$$\psi(\alpha \log \mathrm{Y}_0) \quad \text{et} \quad \mathrm{Y}_1\psi'(\alpha \log \mathrm{Y}_0)$$

sont uniformes. Or l'équation (32) admet toujours une intégrale $\mathrm{V}_1 = \mathrm{Y}^r$; écrivons r sous la forme (9) (où m n'est plus nécessairement entier); nous aurons (à une constante près) $\mathrm{Y}_0 = x^m$ ou e^x suivant que

m est fini ou non. Il résulte alors des conditions précédentes que *$2\pi i m\alpha$ doit être une période ω de ψ* et que y_1 *est uniforme*.

Mais cette dernière condition exige comme plus haut (n° 6) que si les racines de l'équation fondamentale déterminante de (32) sont égales leur valeur commune soit $1+\frac{1}{n}\cdot$ Sinon, écrivons-les sous la forme (9) (où m et p sont quelconques); l'uniformité de Y_1 entraîne les relations (11).

Dans le premier cas, il résulte de (14) qu'on a

$$\log Y = (A'x+B')^{n+1}+C' \qquad \text{ou} \qquad \log Y = e^{A'x+B'}+C',$$

suivant que n est fini ou non, et l'on a, par suite,

$$(33) \qquad y=\psi[(Ax+B)^{n+1}+C] \qquad \text{ou} \qquad y=\psi[e^{Ax+B}+C].$$

Dans le second cas, la formule (30) donne

$$(34) \qquad y=\psi\left(m\alpha \log Y^{\frac{1}{m}}\right)=\psi\left(\frac{\omega}{2\pi i}\log t\right),$$

en posant $t=Y^{\frac{1}{m}}$; t est défini par les relations (13) (où Y a été remplacé par t) et, par suite, est uniforme en x (ou pour $n=5$, $M=2$, t est la racine carrée d'une fonction uniforme de x); y est donc uniforme en x (à condition que ω soit le double d'une période dans le cas $n=5$, $M=2$). Les relations (33) sont d'ailleurs des dégénérescences évidentes des relations (34); il suffit de prendre $t=(Ax+B)^{n+1}+C$ ou (pour $n=\infty$) $t=De^{Ax+B}+C$, $\omega=\mu.\Omega$ (Ω, période déterminée de ψ; μ, entier) et de faire tendre convenablement A et B (ou D) vers 0, C vers 1, μ vers l'infini.

En exprimant que les racines r et s de l'équation déterminante de (32) sont données par (9), on calcule aisément k et K et, par suite, $b(y,z)$ et $c(y,z)$. On trouve ainsi que y vérifie l'équation

$$(35) \quad y'''=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{y''^2}{y'}+\left[\frac{n+2}{n}\frac{r'}{r}-\frac{2\pi i}{\omega}\left(M-\frac{2n+2}{n}\right)r\right]y''y'$$
$$+\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{r'^2}{r^2}-\frac{r''}{r}+\frac{2\pi i}{\omega}\left(M-\frac{2n+2}{n}\right)r'+\left(M-\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2\pi i r}{\omega}\right)^2\right]y'^3$$

[où r'' désigne la dérivée seconde de $r(y, z)$ par rapport à y, prise en tenant compte de (3)]; pour $\omega = \infty$, l'intégrale de (35) est donnée par l'une des formules (28). Rien n'empêche d'ailleurs de supposer que la relation (3) est maintenant une relation algébrique *quelconque* de genre 1.

D'après sa forme même, l'équation (35) est invariante par toutes les transformations birationnelles qui font revenir la courbe (3) sur elle-même; inversement, si l'on se propose de trouver toutes les transformations $y = \varphi(Y)$ qui conservent (35), on est conduit à l'intégration de l'équation d'Euler, d'où l'on conclut qu'il n'existe pas d'autres transformations jouissant de la propriété précédente. On voit ainsi que l'intégrale de l'équation (35) contient algébriquement l'une des constantes arbitraires [ce qui était évident, d'après (33), (34) et (13)]; observant en outre qu'elle ne change pas si l'on remplace x par $Ax + B$, on en déduit sans peine l'intégration directe de (35). On peut dire encore que l'*équation* (35) *est automorphe* : autrement dit, l'une quelconque de ses intégrales étant connue, on en déduit toutes les autres; ce point résultait aussi de la forme même de l'intégrale générale.

15. Posons-nous maintenant le problème suivant dont la solution nous sera bientôt utile : Comment faut-il choisir la relation (3) pour que les *coefficients de* (35) *soient rationnels en* y?

Tout d'abord, l'expression

$$\frac{n+2}{n}\frac{r'}{r} - \frac{2\pi i}{\omega}\left(M - \frac{2n+2}{n}\right) r = U,$$

rationnelle en y par hypothèse, n'aura que des pôles simples à résidus rationnels. Par suite la fonction $e^{\int U dx}$ est algébrique en y; il en est de même de

$$e^{\frac{2\pi i}{\omega}\left(M - \frac{2n+2}{n}\right)\int r dy},$$

ce qui exige $\omega = \infty$ ou $M = \frac{2n+2}{n}$. Dans le premier cas, pour que $b(y, z)$ et $c(y, z)$ soient rationnels en y, il faut et il suffit qu'il en soit de même de $\frac{r'}{r}$, et par suite r *est la racine* $m^{\text{ième}}$ *d'une fonction ration-*

nelle $R(y)$. La relation (3) est donc l'une des suivantes :

$$(36)\quad \begin{cases} z^2 = (y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4), \\ z^3 = (y-a_1)^2(y-a_2)^2(y-a_3)^2, \\ z^4 = (y-a_1)^3(y-a_2)^3(y-a_3)^2, \\ z^6 = (y-a_1)^3(y-a_2)^4(y-a_3)^5. \end{cases}$$

Le second cas exige que $\frac{2}{n}$ soit entier, et, par conséquent, que n soit égal à $1, 2, -2$ ou ∞. On a alors $M = 4, 3, 1$ ou 2, toutes valeurs admissibles, puisqu'elles figurent dans (T). De plus, pour que $b(y, z)$ et $c(y, z)$ soient rationnels en y, il faut encore, et il suffit, que r soit la racine carrée d'une fonction rationnelle de y; on a donc

$$r(y, z) = z,$$

avec

$$z^2 = (y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4).$$

Troisième cas, $\varpi = 0$.

16. On peut alors (n° 2) supposer y et z exprimés rationnellement en fonction d'une seule variable Y, de telle sorte que Y soit rationnelle en y et z, et, par suite, uniforme en x. Il est donc loisible de supposer que b et c sont rationnels en y seule, ce qui va nous permettre de *ramener le cas* $\varpi = 0$ *au précédent*, $\varpi = 1$, *dans l'hypothèse* $n \neq 1, 2, 3, 5$ *et* ∞.

Revenons en effet à l'équation (17); nous aurons, par hypothèse, $\sigma = 1, \delta = 0$, et tous les μ_i sont égaux à 2; en remplaçant au besoin y par $(y-h)^{-1}$, on peut toujours prendre pour l'entier m correspondant au point à l'infini la valeur -1; par suite les entiers m_i correspondant aux points singuliers α_i à distance finie vérifient l'équation

$$\sum_{i=1}^{\nu}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right) = 2.$$

Nous retrouvons ainsi l'équation qui joue le rôle fondamental dans le travail de Briot et Bouquet sur les équations différentielles

$$\frac{dy}{dX} = z,$$

$$(37) \qquad z^m = R(y)$$

(R rationnel en y), dont l'intégrale générale est uniforme. A toute fonction $R(y)$ correspond pour $b(y)$ l'expression

$$b(y) = \frac{n+2}{n} \frac{R'}{mR}.$$

D'ailleurs, toute relation (37) est une des équations (36) ou s'en déduit par une dégénérescence résultant de la coïncidence de plusieurs des α_i (¹).

Démontrons maintenant que la *fonction* $z[y(x)]$ *définie par* (37), *doit être, comme* y, *uniforme en* x. En effet, les seuls points x en lesquels l'uniformité de y n'entraîne pas nécessairement celle de z, sont les points $x=\xi$ pour lesquels on a $y=\alpha_i$. Or, dans le domaine de ξ, l'inversion de l'intégrale

$$x-\xi = \int_{\alpha_i}^{y} \frac{dy}{(y-\alpha_i)^{1-\frac{1}{m_i}} \left[\mathfrak{P}(y-\alpha_i) + (y-\alpha_i)^{\frac{1}{m_i}} \mathfrak{Q}(y-\alpha_i) \right]^{\frac{n}{n+1}}}$$

(où $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ désignent deux fonctions holomorphes et non nulles pour $y=\alpha_i$) donne manifestement pour $(y-\alpha_i)^{\frac{1}{m_i}}$, et par suite, pour z, une fonction de x uniforme dans le domaine de ξ.

On peut donc dans le cas actuel considérer l'équation (2) comme *attachée à une relation* (3) *de genre* 1 (dégénérée ou non), *telle que la variable de rationalité* z *ne figure pas dans* (2) (*cf.* le début du nº 9). Par suite l'équation (2) est une de celles qui ont été formées au nº 15, ou s'en déduit par une dégénérescence résultant de la coïncidence de plusieurs des $a_i=\alpha_i$. Dans ce dernier cas, l'intégrale est définie par l'une des relations :

1° $\qquad y = \psi[(Ax+B)^{n+1}+C] \qquad$ ou $\qquad y=\psi[e^{Ax+B}+C]$,

(¹) *Voir* pour l'intégration des équations $y'=z$, où z est donnée par une des relations (36), J. Dolbnia, *Ann. Éc. Norm.*, 3ᵉ série, t. XV, 1898, p. 393-430.

où ψ désigne maintenant une fonction du type exponentiel ou rationnel, vérifiant une équation de Briot et Bouquet;

2°
$$y = \psi\left(\frac{\omega}{2\pi i}\log t\right) = \mathrm{R}(t),$$

avec

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B} = \int \frac{dt}{(1 + \mathrm{C}t^{\mathrm{M}})^{\frac{n}{n+1}}}, \qquad \begin{cases} n = 4, 2, \infty, -2, \\ \mathrm{M} = 4, 3, 2, 1, \end{cases}$$

la fonction ψ devant avoir au moins une période ω (et une seulement), y est algébrique et, par suite, rationnelle en t et *d'ordre arbitraire*.

17. Il nous reste à étudier les cas $n = 1, 2, 3, 5, \infty$, les seuls qui puissent fournir des équations nouvelles. Moyennant une transformation homographique effectuée sur y on peut toujours supposer qu'au point $y = \infty$, on a $\mu = 2$, $m = 1$ (nous dirons que $y = \infty$ est un point *ordinaire*); l'équation (17) s'écrit alors

$$\sum_{i=1}^{\nu}\left(1 - \frac{2}{q_i}\right) = 2, \tag{38}$$

en posant $q_i = \mu_i m_i$; ainsi q_i est infini ou divisible par 2, 3, 4, 5, 6, 7; q_i *ne pouvant être égal à* 1, l'équation (38) n'admet qu'un nombre limité de solutions. Le maximum de ν est 6, puisque le minimum de $1 - \frac{2}{q_i}$ est $\frac{1}{3}$; on peut donc prendre $\nu = 6, 5, 4, 3, 2$, ce qui fournit pour les q_i le Tableau suivant:

3	3	3	3	3	3		3	7	42
3	3	3	3	6			3	8	24
3	3	3	4	4			3	9	18
3	3	3	∞				3	10	15
3	3	4	12				3	12	12
3	3	6	6				4	4	∞
3	4	4	6				4	5	20
4	4	4	4				4	6	12
3	3	-6					4	8	8
3	4	-12					5	5	10
3	5	-30					6	6	6
3	6	∞					q	$-q$	

Ce Tableau donne immédiatement les racines r_i et s_i de l'équation fondamentale déterminante relative à α_i, et par cela même détermine

$b(y)$; quant à $c(y)$, il est entièrement défini par la connaissance de r_i et s_i, ainsi que par la proposition du numéro 6. Donnons un exemple du genre des calculs auxquels conduit la détermination de $b(y)$ et $c(y)$.

18. Soit $n = 1$, avec $\nu = 3$, $q_1 = 3$, $q_2 = 6$, $q_3 = \infty$; $q_1 = 3$ exige $\mu_1 = 3$, $m_1 = 1$, d'où $r_1 = 0_1$, $s_1 = 2$; $q_2 = 6$ donne soit $\mu_2 = 3$, $m_2 = 2$, $r_2 = 1$, $s_2 = 2$, soit $\mu_2 = 6$, $m_2 = 1$, $r_2 = 0$, $s_2 = 3$, soit $\mu_2 = 2$, $m_2 = 3$, $r_3 = \frac{4}{3}$, $r_2 = \frac{5}{3}$. Enfin, pour $q_3 = \infty$, on doit prendre $\mu_3 = \infty$, d'où

$$r_3 = 2\left(1 - \frac{1}{m}\right), \qquad s_3 = 2\left(1 + \frac{1}{m}\right).$$

En exprimant que l'équation (E) possède une intégrale holomorphe et appartenant à l'exposant 0 dans le domaine de $y = \alpha_1$, on trouve aisément la condition

$$\rho_2 + \rho_3 = 4$$

(où ρ_2 et ρ_3 désignent respectivement r_2 ou s_2 et r_3 ou s_3), qui donne

$$m = \pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 6 \quad \text{et} \quad \infty;$$

la dernière solution est inacceptable, car elle donnerait un point logarithmique en α_2 avec $r_2 = 1$, $s_2 = 2$. On obtient ainsi :

$$b(y) = \frac{1}{y - \alpha_1} + \frac{2}{y - \alpha_2} + \frac{3}{y - \alpha_3},$$

$$c(y) = \frac{h}{(y - \alpha_2)^2} + \frac{k}{(y - \alpha_3)^2} + \frac{(12 - h - k)y + l}{(y - \alpha_1)(y - \alpha_2)(y - \alpha_3)},$$

le point $y = \infty$ étant ordinaire (n° 17), on a

$$l = (h - k - 8)\alpha_1 + (k - h - 4)\alpha_2 + (h - k)\alpha_3,$$

avec

$$\begin{array}{llllll} h = 2 & 0 & 0 & \frac{20}{9} & \frac{20}{9}, \\ k = 3 & 0 & 3 & \frac{35}{9} & \frac{32}{9}. \end{array}$$

19. Indiquons sur l'exemple précédent comment s'effectue l'intégration des équations ainsi formées. D'après les valeurs de h et k, il y a cinq cas possibles; dans les trois premiers, l'intégrale $\varphi(y)$ de (E) est un polynome du troisième et du quatrième degré en y, et par suite,

y, définie par la relation $\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = v$, est une fonction elliptique de x. Pour intégrer dans le quatrième cas, faisons une transformation (S) avec

$$\frac{y-\alpha_3}{y-\alpha_2} = Y^3.$$

L'équation (E_s) n'aura pas de points singuliers logarithmiques; aux trois points $Y = \left(\frac{\alpha_1-\alpha_3}{\alpha_1-\alpha_2}\right)^{\frac{1}{3}}$ les racines des équations déterminantes seront o et 2; pour le point $Y = 0$, ce seront 1 et 3; enfin le point $Y = \infty$ sera ordinaire. L'intégrale de (E_s) sera donc un polynome du quatrième degré en Y, et par suite, y s'exprimera comme fonction rationnelle, à coefficients numériques, d'une fonction elliptique du second ordre de x. La même conclusion s'applique au cinquième cas.

20. En procédant ainsi, on obtient des équations qui rentrent dans la forme (35) ou sont d'un type nouveau. Pour énumérer ces dernières je me bornerai à donner dans chaque cas le Tableau

$$\begin{cases} r_1 & r_2 & \ldots & r_\nu \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_\nu \end{cases}$$

des racines des équations fondamentales déterminantes r_i, s_i, relatives à chaque point singulier α_i; le point $y = \infty$ sera toujours un point ordinaire; autrement dit, on aura pour (r_∞, s_∞) les valeurs $\left(-\frac{8}{3}, -\frac{5}{3}\right)$ si $n = 3$, $(-3, -2)$ si $n = 2$, $(-4, -3)$ si $n = 1$, et il n'y aura pas de logarithme dans le développement de l'intégrale générale. Il faudra ajouter à ces équations toutes celles qui s'en déduisent par une transformation (S) : $(y - \alpha_i)^{-1} = Y$.

20. Les cas $n = \infty$ et $n = 5$ n'introduisent aucune équation nouvelle; on doit prendre, en effet, $M = 2$ et l'on retrouve ainsi des dégénérescences de l'équation (35) obtenues en faisant pour $n = \infty$:

$$r(y, z) = \frac{1}{(y-\alpha_1)^{\frac{1}{2}}(y-\alpha_2)^{\frac{1}{2}}(y-\alpha_3)} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)},$$

$$\omega = \frac{2m\pi i}{(\alpha_1-\alpha_3)^{\frac{1}{2}}(\alpha_2-\alpha_3)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{ou} \quad \frac{2m\pi i}{\alpha_1-\alpha_2},$$

et pour $n=5$: $r(y, z)=(y-\alpha_1)^{-1}(y-\alpha_2)^{-1}$, avec $\omega = 4m\pi i(\alpha_1-\alpha_2)^{-1}$; dans ces formules comme dans les suivantes m représente un entier arbitraire.

21. Le cas $n=3$ introduit encore une dégénérescence de (35) :

$$r(y, z)=\frac{1}{(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)}, \qquad \omega=\frac{2m\pi i}{\alpha_1-\alpha_2} \qquad (m \text{ entier arbitraire}),$$

et donne deux équations nouvelles :

$$[1]\left\{\begin{array}{ccc} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & 2 & 2 \end{array}\right. \qquad [2]\left\{\begin{array}{ccc} \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{7}{6} & \frac{3}{2} & 2 \end{array}\right.$$

Intégration : $Y=(y-\alpha_2)^{\frac{1}{2}}(y-\alpha_1)^{-\frac{1}{2}}$ ramène [2] à [1] dont l'intégrale est donnée par

$$y'^4=(y-\alpha_1)^2[A(y-\alpha_2)^2+B(y-\alpha_3)^2]^3.$$

22. *Tableaux des équations nouvelles pour* $n=2$:

$$[1]\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right. \qquad [2]\left\{\begin{array}{cccc} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & 2 & 2 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c}[3] \\ (^1)\end{array}\left\{\begin{array}{cccc} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & 2 \end{array}\right.$$

$$[4]\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right. \qquad [5]\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{array}\right. \qquad [6]\left\{\begin{array}{ccc} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{9}{4} & 2 \end{array}\right. \qquad [7]\left\{\begin{array}{ccc} \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ \frac{5}{4} & \frac{7}{4} & 2 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c}[8] \\ (^2)\end{array}\left\{\begin{array}{ccc} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right) \\ \frac{5}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right) \end{array}\right. \qquad [9]\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 2 \end{array}\right. \qquad [10]\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} \end{array}\right.$$

Intégration : [1], [4], [5] : $y'^3=(AP_3+BP_2)^2$ (P_3 et P_2, polynomes en y de degrés 3 et 2).

---

(1) Cette équation a été étudiée sous une autre forme par Halphen (*Acta math.*, t. III, 1883-1884, p. 347 et p. 379).

(2) Lorsque m est multiple de 3, cette équation est identique à celle du dièdre.

La transformation $Y = (y - \alpha_2)^{\frac{1}{2}}(y - \alpha_1)^{-\frac{1}{2}}$ ramène [2] à [1], [3] à [2], [6] à [4], [7] à [5], et enfin [8] à l'équation

$$\left\{\begin{array}{cc} \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) & \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right) \\ \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\right) & \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\right) \end{array}\right.$$

du type (35) dégénéré. La transformation $Y = (y - \alpha_2)^{\frac{1}{3}}(y - \alpha_2)^{-\frac{1}{3}}$ ramène [9] à [1] et [10] à [3].

23. *Tableaux pour $n = 1$.*

$$[1]\left\{\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right. \qquad [2]\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right. \qquad [3]\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right.$$

$$[4]\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & 2 & 2 \end{array}\right. \qquad [5]\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right. \qquad [6]\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right.$$

$$[7]\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 2 & 2 \end{array}\right. \qquad [8]\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & 2 \end{array}\right. \qquad [9]\left\{\begin{array}{cccc} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 2 & 2 \end{array}\right.$$

$$[10]\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right. \qquad [11]\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right. \qquad [12]\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right.$$

$$[13]\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{3} \end{array}\right. \qquad [14]\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & 3 \end{array}\right. \qquad [15]\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & 2 \end{array}\right.$$

$$[16]\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right. \qquad [17]\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right. \qquad [18]\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{array}\right. \qquad [19]\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{array}\right.$$

$$[20]\left\{\begin{array}{ccc} \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & 2 \end{array}\right. \qquad [21]\left\{\begin{array}{ccc} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{5}{3} & \frac{8}{3} & 2 \end{array}\right. \qquad [22]\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{array}\right. \qquad [23]\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right.$$

$$[24]\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{array}\right. \qquad [25]\left\{\begin{array}{ccc} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{7}{4} & \frac{9}{4} & 2 \end{array}\right. \qquad [26]\left\{\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 0 \\ \frac{5}{3} & \frac{4}{3} & 2 \end{array}\right. \qquad [27]\left\{\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{array}\right.$$

$$[28]\left\{\begin{matrix} 2 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{matrix}\right. \qquad [29]\,(1)\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 2\left(1-\frac{1}{m}\right) \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2\left(1+\frac{1}{m}\right) \end{matrix}\right. \qquad [30]\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} \end{matrix}\right.$$

$$[31]\,(1)\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & \frac{4}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} \end{matrix}\right. \qquad [32]\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 3 \end{matrix}\right. \qquad [33]\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3 \end{matrix}\right. \qquad [34]\,(1)\left\{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{matrix}\right.$$

$$[35]\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 2 \end{matrix}\right. \qquad [36]\left\{\begin{matrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 3 \end{matrix}\right. \qquad [37]\left\{\begin{matrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 2 \end{matrix}\right. \qquad [38]\left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{matrix}\right.$$

$$[39]\left\{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{matrix}\right. \qquad [40]\left\{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{matrix}\right. \qquad [41]\left\{\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{matrix}\right.$$

Intégration. — [1], [2], [3], [5], [6], [10], [11], [12], [16], [17], [22], [23], [24], [38], [39], [40], [41] :

$$y'^2 = AP_4 + BP_3$$

(P_4 et P_3 polynomes en y de degrés 4 et 3).

La transformation $Y^{-1} = h + (y-\alpha_2)^{\frac{1}{2}}(y-\alpha_1)^{-\frac{1}{2}}$ (h arbitraire) ramène [4] à [1], [7] à [2], [8] à [3], [13] à [9], [14] à [12], [15] à [10], [18] à [16], [19] à [17], [30] à [36], [31] à [37], [32] à [38], [33] à [39], [34] à [40], [35] à [41] et [29] à

$$\left\{\begin{matrix} 2\left(1-\frac{1}{m}\right) & 2\left(1-\frac{1}{m}\right) \\ 2\left(1+\frac{1}{m}\right) & 2\left(1+\frac{1}{m}\right) \end{matrix}\right.$$

du type (35) (n° 14).

La transformation $Y^{-1} = h + (y-\alpha_2)^{\frac{1}{3}}(y-\alpha_1)^{-\frac{1}{3}}$ ramène [9] à [1], [20] à [6], [21] à [5], [26] à [3], [36] à [38] et [37] à [40].

Enfin la transformation $Y = (y-\alpha_2)^{\frac{1}{4}}(y-\alpha_1)^{-\frac{1}{4}}$ ramène [25] à [2].

24. Les Tableaux précédents, joints à l'équation (35), fournissent

(1) Cette équation est identique à l'équation du dièdre (dans le cas de l'équation [29], m doit être multiple de 4).

la détermination explicite de toutes les équations (1) à coefficients rationnels en y; en se plaçant au point de vue du numéro 2, on peut condenser tous les résultats de cette analyse dans l'énoncé suivant :

Lorsque l'intégrale d'une équation (2) est uniforme,

Ou bien $n=-2$; alors le genre ϖ de la relation (3) peut être quelconque et l'intégrale est une fonction fuchsienne (ou kleinéenne).

Dans ce cas, l'équation (2) est de la forme $y'''=\frac{3}{2}\frac{y''^2}{y'}+c(y,z)y'^3$, le coefficient $c(y,z)$ satisfaisant aux conditions formées par M. Poincaré [par suite, *il est impossible de ramener pour* $n=-2$ *les équations* (2) *à un type unique*].

Ou bien $n\neq-2$; alors ϖ ne peut dépasser l'unité.

Pour $\varpi=1$, on a $y=\varphi\left(\frac{\omega}{2\pi i}\log t\right)$, φ étant une fonction elliptique, ω une de ses périodes, t une fonction définie par l'inversion de l'intégrale

$$Ax+B=\int\frac{dt}{(1+Ct^M)^{\frac{n}{n+1}}}$$

($n=1$, $M=1, 2, 3, 4$; $n=2$, $M=1, 2, 3$; $n=3, 5, \infty$, $M=1, 2$; n quelconque, $M=1$; pour $n=5$, $M=2$, $\frac{\omega}{2}$ est une période); ou y est dégénérescence d'une telle fonction.

Dans ce cas *l'équation* (2) *est de la forme* (35).

Pour $\varpi=0$, l'intégrale a l'une des formes précédentes (dégénérées ou non), ou elle s'exprime par l'une des formules suivantes (après une transformation birationnelle préalable) :

$$y'^4=(y-\alpha_1)^2[A(y-\alpha_2)^2+B(y-\alpha_3)^2]^3, \tag{39}$$

$$y'^3=(AP_3+BP_2)^2, \tag{40}$$

$$y'^2=(AP_4+BP_3) \tag{41}$$

(P_i, polynome en y de degré i).

Dans ce dernier cas *il existe*, pour chaque valeur de n, *une équation* (2) *qui reproduit par dégénérescence toutes les autres* équations de ce dernier type correspondant à cette valeur de n.

Pour justifier les dernières lignes de l'énoncé précédent, dans le cas de $n=1$, par exemple, il faut ramener à un type unique les équations [1], [2], [3], [5], ..., [40], [41], en apparence très différentes, rencontrées au numéro 23. Mais la réponse est immédiate : Formons l'équation (E) la plus générale dont l'intégrale est un polynome du quatrième degré en y; elle s'écrit

$$\frac{d^2v}{dy^2} - \frac{1}{P}\frac{dP}{dy}\frac{dv}{dy} + \frac{Q}{P}v = 0, \tag{42}$$

où

$$\begin{aligned} P = y^6 + 2my^5 + (3n-h)y^4 + 2(2p-k)y^3 \\ + (hn - km - 3l)y^2 + 2(hp - ml)y + kp - ln \end{aligned}$$

et

$$Q = 12y^4 + 16my^3 + 6(2n-h)y^2 - 6ky + 2(hn-km),$$

et admet les deux intégrales

$$v_1 = y^4 + hy^2 + ky + l \qquad \text{et} \qquad v_2 = y^3 + my^2 + ny + p.$$

Lorsque h, k, l, m, n, p sont arbitraires, on obtient ainsi l'équation (E) du type [1] du n° 23, avec six points apparemment singuliers simples. Il *suffit de donner à ces constantes des valeurs telles que l'équation* $P = 0$ *admette des racines égales pour retrouver toutes les équations* [2], ..., [40] *énumérées plus haut.* Exprimons par exemple que $y = 0$ est racine de $P = 0$; nous aurons les deux conditions $hp - ml = 0 = kp - nl$ qui entraînent soit $hn - km = 0$, soit $p = 0 = l$; on retrouve ainsi [2] et [3].

Une conclusion analogue s'applique pour $n = 2$; toutes les équations (1) à coefficients rationnels ne rentrant pas pour $n = 2$ dans le type (35), équivalent a un système (e, E), où (E) a la forme (42) avec

$$\begin{aligned} P &= y^4 + 2my^3 + (3n-h)y^2 - 2ky + hn - km, \\ Q &= 6y^2 + 6my - 2h. \end{aligned}$$

A ce point de vue, on doit considérer les équations $y''' = \frac{y''y'}{y}$ ou $y''' = 0$ comme des dégénérescences de [1], ce qui de prime abord pouvait sembler paradoxal. *Mais c'est l'équation* [1] *qui jouera le rôle essentiel dans l'application des équations* (1) *à la détermination des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale a ses points critiques fixes* (1).

(1) *Comptes rendus*, t. 147, 1908, p. 917. C'est en partant de l'équation [1] que M. Chazy a formé une équation différentielle du troisième ordre, dont l'intégrale a ses points critiques fixes et qui reproduit les équations VI, V, ..., par dégénérescence (*Thèse* citée plus haut, p. 51-61).

23. *Il existe d'ailleurs des transformations qui ramènent les équations nouvelles introduites pour $n = 3$ et 2, à celle qui correspond à $n = 1$.* Prenons, par exemple, l'équation (40) ($n = 2$); il y a une transformation

$$y = f(A, B; Y) \tag{43}$$

(f, algébrique en A, B, Y) telle que Y vérifie une équation $Y'^2 = A_1 Y^3 + B_1 Y$, de la forme (41); les quantités A_1, B_1, algébriques en A, B, s'expriment rationnellement en Y, Y′, Y″. Il suffit alors d'éliminer A et B entre (43) et les deux équations donnant A_1 et B_1 pour former une relation algébrique

$$F(y, Y, Y', Y'') = 0 \tag{44}$$

entre les intégrales y et Y de deux relations (1) pour lesquelles on a respectivement $n = 2$ et 1. D'ailleurs, la transformation précédente contient nécessairement l'une au moins des quantités Y′, Y″, sinon elle se réduirait à une transformation (S) qui laisse n invariant.

En général, la relation (43) n'est pas rationnelle en y et sa formation exige de laborieux calculs. Je me bornerai donc à un exemple. La transformation

$$y = Y'$$

change l'équation

$$Y''' = \frac{2Y''Y'}{Y} \qquad (n = 1)$$

en la suivante :

$$y''' = \frac{y''^2}{2y'} + \frac{y''y'}{y} \qquad (n = 2);$$

la transformation $Y = \frac{2yy'}{y''}$ change la seconde de ces équations en la première.

DEUXIÈME PARTIE.

1. Considérons une équation linéaire irréductible du second ordre :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = p(x)y, \tag{1}$$

où p est une fonction *rationnelle de x possédant un seul point essentiellement singulier*, soit $x = \infty$ (irrégulier au sens de L. Fuchs); on a ainsi

$$p = \sum_{h=0}^{m} a_h x^h + \sum_{j=0}^{\nu} \left[\frac{\frac{3}{4}}{(x-\lambda_j)^2} + \frac{\rho_j}{x-\lambda_j} \right],$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ étant des points apparemment singuliers, et m, ν deux entiers donnés une fois pour toutes. Nous nous proposerons dans cette seconde Partie de choisir pour a_i, λ_j, ρ_j des fonctions analytiques de n paramètres $t_1, \ldots, t_n$ (les plus générales possibles), de telle sorte qu'on puisse adjoindre à (1) n équations

$$(2) \qquad \frac{\partial y}{\partial t_i} = A_i y + B_i \frac{\partial y}{\partial x} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

à coefficients *rationnels* en x, analytiques en $t_1, \ldots, t_n$ et formant avec (1) un système complètement intégrable.

Nous ne limiterons pas le nombre n; nous montrerons, en effet, qu'on peut toujours choisir N ($\leqq \nu$) fonctions $T_1, \ldots, T_N$ de $t_1, \ldots, t_n$, distinctes et telles que les coefficients de (1) dépendent seulement de $T_1, \ldots, T_N$ et qu'en outre le système (2) se réduise à N équations en $\frac{\partial y}{\partial T_1}, \cdots, \frac{\partial y}{\partial T_N}$ dont les coefficients dépendent seulement de $T_1, \ldots, T_N$.

2. Pour tout choix des fonctions p, A_i, B_i répondant aux conditions précédentes, l'intégrale générale $y(x)$ du système (1), (2) sera une fonction linéaire et homogène de deux constantes arbitraires. Soient, en effet, y_1 et y_2 deux intégrales particulières dont le rapport dépend effectivement de x. On aura

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

C_1 et C_2 pouvant dépendre de $t_1, \ldots, t_n$. Mais puisque y, y_1, y_2 vérifient le système (1), (2), on a

$$\frac{\partial C_1}{\partial t_i} y_1 + \frac{\partial C_2}{\partial t_i} y_2 = 0;$$

et il résulte de notre hypothèse sur y_1 et y_2 que C_1 et C_2 sont deux constantes absolues; on peut en disposer pour que y et $\frac{\partial y}{\partial x}$ prennent des valeurs initiales arbitraires pour $x = x_0$, $t_1 = t_1^0, \ldots, t_n = t_n^0$.

3. Écrivons maintenant les conditions d'intégrabilité du système (1), (2). Exprimons d'abord que $\frac{\partial^2 y}{\partial t_i \partial t_k} = \frac{\partial^2 y}{\partial t_k \partial t_i}$; il viendra en vertu de l'irréductibilité de (1) :

$$(3)\qquad \frac{\partial A_i}{\partial t_k} + B_i \frac{\partial A_k}{\partial x} = \frac{\partial A_k}{\partial t_i} + B_k \frac{\partial A_i}{\partial x}$$

$$(4)\qquad \frac{\partial B_i}{\partial t_k} + B_i \frac{\partial B_k}{\partial x} = \frac{\partial B_k}{\partial t_i} + B_k \frac{\partial B_i}{\partial x} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Écrivons maintenant que $\frac{\partial^3 y}{\partial t_i \partial x^2} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t_i}$; nous aurons

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} + 2p \frac{\partial B_i}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} B_i = \frac{\partial p}{\partial t_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(6)\qquad \frac{\partial^2 B_i}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial A_i}{\partial x} = 0$$

Réciproquement, si les conditions (3), (4), (5), (6) sont remplies, le système (1), (2) est complètement intégrable; en effet, on voit aisément que le résultat obtenu par différentiations successives pour une dérivée d'ordre quelconque de $y(x, t_1, \ldots, t_n)$ est indépendant de l'ordre adopté dans les différentiations, à condition qu'on ait :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t_i \partial t_k} = \frac{\partial^2 y}{\partial t_k \partial t_i}, \qquad \frac{\partial^3 y}{\partial t_i \partial x^2} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial t_i}, \qquad \frac{\partial^3 y}{\partial t_i \partial t_k \partial x} = \frac{\partial^3 y}{\partial t_k \partial t_i \partial x}.$$

Les deux premières conditions sont vérifiées par hypothèse et la seconde résulte de (3), (4), (5) comme on le vérifie facilement.

L'élimination de A_i entre (5) et (6) montre alors que B_i doit être une solution de l'équation

$$(7)\qquad \frac{\partial^3 B_i}{\partial x^3} - 4p \frac{\partial B_i}{\partial x} - 2 \frac{\partial p}{\partial x} B_i + 2 \frac{\partial p}{\partial t_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Une fois connue une solution $B_1, \ldots, B_n$ du système (4), (7) [1], on

[1] On verrait aisément que de toute solution $B_1^0, \ldots, B_n^0$, du système (4), (7) on peut

aura, d'après (6),

$$A_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial B_i}{\partial x} + A_i^0,$$

les fonctions A_i^0 ne dépendant que de $t_1, \ldots, t_n$. Mais d'après (3) on a

$$\frac{\partial A_i^0}{\partial t_k} = \frac{\partial A_k^0}{\partial t_i};$$

on peut donc écrire

$$A_i^0 = \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t_i},$$

en désignant par A une fonction des paramètres $t_1, \ldots, t_n$ qu'il est toujours loisible de supposer égale à 1; il suffit, pour cela, de faire la substitution $y | Ay$; la nouvelle fonction y vérifie encore (1) et satisfait aux équations

$$\frac{\partial y}{\partial t_i} = \left(A_i - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial t_i}\right)y + B_i\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Nous pourrons donc prendre

$$A_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial B_i}{\partial x}.$$

4. Cherchons maintenant la forme de la fonction rationnelle $B_i(x)$. Étudions-la d'abord dans le voisinage de $x = \infty$. Soit

$$B_i = h_i x^{r_i} + h_i' x^{r_i - 1} + \ldots \quad (r_i > 0);$$

les termes de degré le plus élevé dans (7) seront

$$-(4r_i + 2m)h_i x^{r_i + m - 1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial a_m}{\partial t_i}x^m,$$

ce qui exige en général $r_i = 1$, et l'on a par suite

$$B_i = h_i x + h^i + C_i,$$

où $C_i(x)$ est une fonction rationnelle nulle pour $x = \infty$.

---

déduire une infinité d'autres par les formules

$$B_1 = B_1^0, \qquad \ldots, \qquad B_{n-1} = B_{n-1}^0, \qquad B_n = B_n^0 + \alpha y_1^2 + 2\beta y_1 y_2 + \gamma y_2^2,$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions du système (1) et (2) répondant à $B_1^0, \ldots, B_n^0$, et où α, β, γ sont des fonctions arbitraires de t_n.

Montrons *qu'on peut supposer* $h_i = 0 = h'_i$, et par suite $B_i = C_i$, moyennant une transformation linéaire effectuée sur $x, \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$. Tout d'abord, on a d'après (4) :

$$\frac{\partial h_i}{\partial t_k} = \frac{\partial h_k}{\partial t_i},$$

$$\frac{\partial h'_i}{\partial t_k} + h'_i h_k = \frac{\partial h'_k}{\partial t_i} + h'_k h_i.$$

Nous pouvons donc poser :

$$h_i = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t_i} \qquad \text{et} \qquad h'_i = \frac{1}{f} \frac{\partial g}{\partial t_i},$$

f et g étant deux fonctions des paramètres $t_1, \ldots, t_n$. Faisons alors la substitution

(8) $$x \left| \frac{x - g}{f} \right. \quad \text{et} \quad \lambda_i \left| \frac{\lambda_i - g}{f} \right. \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

l'équation (1) admettra toujours $x = \lambda_i$ comme point apparemment singulier et les équations (2) s'écriront

$$\frac{\partial y}{\partial t_i} = A_i y + f \left[x \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{1}{f} \right) - \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\frac{g}{f} \right) + B_i \right] \frac{\partial y}{\partial x};$$

or, d'après les valeurs de h_i et h'_i en fonction de f et g, le coefficient de $\frac{\partial y}{\partial x}$ dans cette dernière relation est nul pour $x = \infty$.

Cela étant, la fonction $B_i(x)$ ne saurait admettre, d'après (7), d'autres pôles que les points $x = \lambda_j$. Soit alors dans le domaine de λ_j

$$B_i = \frac{\alpha_{ij}}{(x - \lambda_j)} l_i^{(j)} + \ldots \qquad (l_i^{(j)} > 0),$$

le terme d'ordre le plus élevé dans (7) sera

$$- \frac{(l_i^{(j)} - 1)(l_i^{(j)} + 1)(l_i^{(j)} + 3)}{(x - \lambda_j)^{l_i^{(j)} + 3}} \alpha_{ij}.$$

On a donc $l_i^{(j)} = 1$, et par suite

(9) $$B_i = \sum_{1}^{\nu} \frac{\alpha_{ij}}{x - \lambda_j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

5. La solution de notre problème s'en déduit immédiatement pour $\nu = 0$: d'après (9), on aura $B_i = 0$, et d'après (7), $\frac{\partial p}{\partial t_i} = 0$; les coefficients $a_m, \ldots, a_0$ de $p(x)$ sont donc *indépendants des paramètres* $t_1, \ldots, t_n$ (¹).

6. Ce cas banal écarté, substituons les expressions (9) dans les équations (4); il viendra (²)

$$(10)\qquad \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial t_k} - \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial t_i} = 2\sum_{l=1}^{\nu}{}^{j} \frac{\alpha_{ij}\alpha_{kl} - \alpha_{kj}\alpha_{il}}{(\lambda_j - \lambda_l)^2} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, \nu),$$

$$(11)\qquad \alpha_{ij}\left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_k} + \sum_{l=1}^{\nu}{}^{j} \frac{\alpha_{kl}}{\lambda_j - \lambda_l}\right) = \alpha_{kj}\left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} + \sum_{l=1}^{\nu}{}^{j} \frac{\alpha_{il}}{\lambda_j - \lambda_l}\right).$$

En substituant les mêmes expressions dans (7) et en annulant le coefficient de $(x - \lambda_j)^{-3}$, on obtient

$$(12)\qquad \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} + 2\rho_j\alpha_{ij} + \sum_{l=1}^{\nu}{}^{j} \frac{\alpha_{il}}{\lambda_j - \lambda_l} = 0.$$

Ces relations entraînent (11) comme conséquence.

En tenant compte de (12) et des relations

$$(13)\qquad \rho_j^2 = \sum_{h=0}^{m} a_h \lambda_j^h + \sum_{l=1}^{\nu}{}^{j}\left[\frac{3}{4(\lambda_j - \lambda_l)^2} + \frac{\rho_l}{\lambda_j - \lambda_l}\right]$$

qui expriment que le point $x = \lambda_j$ est apparemment singulier pour (1), on vérifie immédiatement que le coefficient de $(x - \lambda_j)^{-2}$ est nul. Il vient d'ailleurs en annulant le résidu en λ_j :

$$(14)\qquad \frac{\partial \rho_j}{\partial t_i} + \sum_{l=1}^{\nu} \alpha_{il} \frac{\partial(\rho_l^2)}{\partial \lambda_j} = 0,$$

(¹) C'est un cas particulier de la proposition qui sera démontrée au nº 7.

(²) *Voir*, relativement à la notation adoptée, la note (²) de la page 8.

où $\frac{\partial(\rho_l^2)}{\partial\lambda_j}$ désigne la dérivée partielle, par rapport à λ_j, du second membre de (13) [j ayant été remplacé par l dans (13)].

Enfin, en exprimant que le premier membre de (7) est nul pour $x=\infty$, on obtient par un calcul facile (¹) :

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a_m}{\partial t_i} = 0 = \dfrac{\partial a_{m-1}}{\partial t_i} & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \dfrac{\partial a_h}{\partial t_i} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-h-2}\sum_{j=1}^{\nu}(h-k)\,a_{h+k+2}\,\alpha_{ij}\lambda_j^k & (h = 0, 1, \ldots, m-2). \end{cases}$$

7. Nous pouvons établir maintenant, comme nous l'avions annoncé précédemment (nº 1), que les coefficients de $p(x)$ dépendent seulement (pour $n>\nu$) de ν fonctions (au plus) de $t_1, \ldots, t_n$ et que les équations (2) se réduisent à ν (au plus). Les équations (12) et (14) montrent, en effet, que pour $n>\nu$ le déterminant fonctionnel de $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, \rho_j$ par rapport à $\nu+1$ quelconques des paramètres, soient $t_1, \ldots, t_{\nu+1}$, a pour valeur

$$\frac{D(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \rho_j)}{D(t_1, t_2, \ldots, t_\nu, t_{\nu+1})} = (-1)^{\nu+1}\begin{vmatrix} 2\rho_1 & \dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_2} & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_1-\lambda_\nu} & 0 \\ \dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1} & 2\rho_2 & \cdots & \dfrac{1}{\lambda_2-\lambda_\nu} & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdot \\ \dfrac{1}{\lambda_\nu-\lambda_1} & \dfrac{1}{\lambda_\nu-\lambda_2} & \cdots & 2\rho_\nu & 0 \\ \dfrac{\partial(\rho_1^2)}{\partial\lambda_j} & \dfrac{\partial(\rho_2^2)}{\partial\lambda_j} & \cdots & \dfrac{\partial(\rho_\nu^2)}{\partial\lambda_j} & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} & 0 \\ \alpha_{\nu+1,1} & \alpha_{\nu+1,2} & \cdots & \alpha_{\nu+1,\nu} & 0 \end{vmatrix};$$

il est donc identiquement nul. D'après (12) et (15), il en est de même

(¹) Les équations (10), (12), (13), (14), (15) forment un système complètement intégrable ; de plus, il est facile de vérifier que les équations (14) se déduisent de (13) des déterminants fonctionnels de $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, \alpha_j$ par rapport à $\nu+1$ quelconques des paramètres. Supposons alors qu'on sache trouver $N(\leqq \nu)$ fonctions $T_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_n)$ $(i = 1, \ldots, N)$ *indépendantes*, et telles que λ_j, ρ_j et α_h s'expriment à l'aide de $T_1, \ldots, T_N$ seulement. Le déterminant fonctionnel des λ_j par rapport à ν quelconques, $t_1, \ldots, t_\nu$ des paramètres possède au moins un mineur d'ordre $N(\leqq \nu)$ différent du zéro, tandis que tous les mineurs d'ordres supérieurs (pour $N < \nu$) sont identiquement nuls.

Mais ce déterminant est égal au produit

$$\begin{vmatrix} 2\rho_1 & \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_1-\lambda_\nu} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{1}{\lambda_\nu-\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} & \cdots & 2\rho_\nu \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{vmatrix}.$$

Le premier de ces facteurs est différent de zéro en général [1]. On démontre alors aisément que l'hypothèse précédente exige (*si* $N < \nu$) que *tous les mineurs d'ordre* $N+1$ *du second déterminant soient identiquement nuls*.

Cela étant, soient $t_1, \ldots, t_N$ N des paramètres donnés par rapport auxquels les équations $T_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_n)$ soient résolubles, et soit T_{N+1} un autre quelconque de ces paramètres. On aura d'après (12)

---

par différentiation, à l'aide de (12) et (15), dans l'hypothèse où le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2\rho_1 & \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_1-\lambda_\nu} \\ \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} & 2\rho_2 & \cdots & \frac{1}{\lambda_2-\lambda_\nu} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{1}{\lambda_\nu-\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_\nu-\lambda_2} & \cdots & 2\rho_\nu \end{vmatrix}$$

est différent de zéro. Cette circonstance est complètement analogue à celle qui se présente en dynamique lorsqu'on cherche à déduire de l'intégrale des forces vives l'équation différentielle $x'' = f(x)$ du mouvement rectiligne d'un point.

[1] S'il n'en était pas ainsi, on remplacerait le déterminant fonctionnel de $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ par celui de $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-1}, \rho_j$, par exemple.

et (9) :

$$\frac{D(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)}{D(T_1, \ldots, T_N)} \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi_N}{\partial t_1} & B_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{N+1}} & \cdots & \frac{\partial\varphi_N}{\partial t_{N+1}} & B_{N+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\lambda_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial\lambda_N}{\partial t_1} & B_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\lambda_1}{\partial t_{N+1}} & \cdots & \frac{\partial\lambda_N}{\partial t_{N+1}} & B_{N+1} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{Vmatrix} 2\rho_1 & \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_1-\lambda_\nu} \\ \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} & 2\rho_2 & \cdots & \frac{1}{\lambda_2-\lambda_\nu} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{1}{\lambda_N-\lambda_1} & \frac{1}{\lambda_N-\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{\lambda_N-\lambda_\nu} \\ \frac{1}{x-\lambda_1} & \frac{1}{x-\lambda_2} & \cdots & \frac{1}{x-\lambda_\nu} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{N+1,1} & \alpha_{N+1,2} & \cdots & \alpha_{N+1,\nu} \end{Vmatrix}$$

(où, dans le premier des Tableaux rectangulaires précédents, $\frac{1}{\lambda_N-\lambda_\nu}$ doit être remplacé par $2\rho_\nu$ pour $N=\nu$). Or le produit des Tableaux est nul : c'est évident pour $N=\nu$ et pour $N<\nu$, c'est une conséquence de ce qui précède; d'autre part, on a $\frac{D(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)}{D(T_1, \ldots, T_N)} \neq 0$: s'il n'en était pas ainsi, on remplacerait $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ par N des quantités $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$, $\rho_1, \ldots, \rho_\nu$, $a_m, \ldots, a_0$ convenablement choisies et la conclusion subsisterait. Nous pouvons donc poser

$$B_i = \sum_{k=1}^{N} D_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial t_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

et, d'après notre hypothèse sur $t_1, \ldots, t_N$, les équations (2) entraînent les suivantes :

$$\frac{\partial y}{\partial T_i} = C_i y + D_i \frac{\partial y}{\partial x}, \qquad C_i = -\frac{1}{2}\frac{\partial D_i}{\partial x} \qquad \Big(i=1, 2, \ldots, N\Big).$$

Tout revient donc à démontrer que les D_i ne dépendent que de $T_1, \ldots, T_N$. Or nous pouvons mettre les D_i sous la forme

$$D_i = \psi_i(T_1, \ldots, T_N, t_{N+1}, \ldots, t_n),$$

la fonction ψ_i vérifiant l'égalité

$$\frac{\partial^3\psi_i}{\partial x^3} - 4p\frac{\partial\psi_i}{\partial x} - 2\frac{\partial p}{\partial x}\psi_i + 2\frac{\partial p}{\partial T_i} = 0;$$

la fonction rationnelle $\psi_{ij}(x) = \frac{\partial\psi_i(x)}{\partial t_j}$ $(N<j\leqq\mu)$ intègre alors

l'équation

$$\frac{\partial^3 \psi_{ij}}{\partial x^3} - 4p\frac{\partial \psi_{ij}}{\partial x} - 2\frac{\partial p}{\partial x}\psi_{ij} = 0;$$

en vertu de l'irréductibilité de (1), elle est donc identiquement nulle et la proposition énoncée au n° 1 est complètement établie.

8. Il s'agit maintenant d'étudier le système des équations du n° 6. Plaçons-nous dans le cas $n = \nu$ et effectuons sur $t_1, \ldots, t_n$ une transformation préalable de façon que $\alpha_{n}, \ldots, \alpha_{1\nu}$ deviennent égaux à ν fonctions arbitrairement choisies des t_i. Les λ_j satisfont alors (par rapport à t) à un système différentiel ordinaire [1]. Établissons une propriété fondamentale de ce système : *Si l'entier m est supérieur à 4, les fonctions symétriques élémentaires de $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$ (considérées comme dépendant de t) ne peuvent avoir leurs points critiques fixes.*

En effet, remplaçons t_i par εt_i, ρ_j par $\frac{\rho_j}{\varepsilon}$ et a_i par $\frac{a_i}{\varepsilon^2}$. Lorsque ε tend vers o, notre système tend vers le suivant :

$$\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial t_k} - \frac{\partial \alpha_{kj}}{\partial t_i} = 0, \qquad \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} + 2\rho_j\alpha_{ij} = 0,$$

$$\rho_j^2 = \sum_{h=0}^{m} a_h \lambda_j^h, \qquad \frac{\partial a_h}{\partial t_i} = 0.$$

On en déduit $\alpha_{ij} = \frac{\partial f_j}{\partial t_i}$ et $a_h = \text{const.}$; enfin λ_j est donné par les équations

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} = -2\frac{\partial f_j}{\partial t_i}\sqrt{a_m\lambda_j^m + \ldots + a_0};$$

prenons $f_1 = t_1, f_j = 0$ $(j \neq 1)$ et le résultat annoncé deviendra évident.

Inversement, nous verrons que, dans le cas $\nu = 1$ et $\nu = 2$ auxquels nous nous limiterons désormais, les fonctions de t : λ_1 (pour $n = 1$), $\lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_1\lambda_2$ pour $n = 2$, ont pour $m \leq 4$ leurs points critiques fixes.

Premier cas, $\nu = 1$.

9. Il est alors loisible de supposer $n = 1$, et par suite nous suppri-

(1) Ce système est d'ordre $m + \nu + 1$; les trois premières équations (15) en fournissent d'ailleurs trois intégrales premières pour $m \leq 3$; pour $m = 4$, la quatrième équation (15) donne une quatrième intégrale première; l'ordre de ce système s'abaisse donc à $\nu + 1$ pour $m \leqq 4$ et à $\nu + m - 2$ pour $m > 4$.

merons les indices qui affectent les lettres λ, ρ, α. Faisons le changement de variables

$$2\alpha\, dt_1 = dt, \tag{16}$$

et les équations du n° 6 prendront la forme suivante (où les accents désignent des dérivées par rapport à t) :

$$(\mathrm{S}_m)\left\{\begin{array}{ll}
(12') & \lambda' = -\rho, \\
(14') & \rho' = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{h=1}^{m} h a_h \lambda^{h-1}, \\
(15') & \left\{\begin{array}{l} a'_m = 0 = a'_{m-1}, \\ a'_h = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-h-2} (h-k) a_{h+k+2}\lambda^k \qquad (h = m-2, m-3, \ldots, 1), \end{array}\right. \\
(13') & a_0 = \rho^2 - \displaystyle\sum_{h=1}^{m} a_h \lambda^h.
\end{array}\right.$$

On vérifie une remarque antérieure (¹) : pour $m \leqq 4$, l'ordre de (S_m) se réduit à 2 ; pour $m > 4$, il est égal à $m - 1$. Supposons $m \leqq 4$, ce qui est d'ailleurs (n° 8) le seul cas où $\lambda(t)$ puisse avoir les points critiques fixes ; nous aurons

$$a_4 = c_4, \qquad a_3 = 4c_3, \qquad a_2 = c_4 t + c_2, \qquad a_1 = 2(c_3 t + c_1),$$

où les c_i sont des constantes qui peuvent être nulles, et λ vérifie l'équation

$$\lambda'' = c_4(2\lambda^3 + \lambda t) + c_3(6\lambda^2 + t) + c_2\lambda + c_1 ;$$

on a enfin

$$a_0 = \lambda'^2 - c_4(\lambda^4 + \lambda^2 t) - 2c_3(2\lambda^3 + \lambda t) - c_2\lambda^2 - 2c_1\lambda,$$

d'où

$$p(x) = c_4[x^4 - \lambda^4 + t(x^2 - \lambda^2)] + 2c_3[2(x^3 - \lambda^3) + t(x - \lambda)]$$
$$+ c_2(x^2 - \lambda^2) + 2c_1(x - \lambda) + \frac{\frac{3}{4}}{(x-\lambda)^2} - \frac{\lambda'}{x - \lambda} + \lambda'^2$$

et

$$\mathrm{B}(x) = \frac{\frac{1}{2}}{x - \lambda}.$$

(¹) *Voir* la note précédente.

10. Moyennant une transformation à coefficients constants $t|ht$ et $\lambda|k\lambda+l$, il est loisible d'attribuer aux constantes c_i l'un des systèmes de valeurs suivants :

$$
(17)\qquad \left\{\begin{array}{cccc}
c_4 & c_3 & c_2 & c_1, \\
1 & 0 & 0 & \alpha, \\
0 & 1 & 0 & 0, \\
0 & 0 & 1 & 0, \\
0 & 0 & 0 & \eta
\end{array}\right. \quad (\eta = 0 \text{ ou } 1).
$$

Les deux dernières équations obtenues sont banales; mais il est bien remarquable que les deux autres coïncident avec les équations irréductibles I et II découvertes par M. Painlevé.

D'ailleurs, il suffit d'effectuer les transformations inverses de (8) et (16) pour voir que la fonction λ, envisagée au début de cette analyse comme dépendant des paramètres $t_1, \ldots, t_n$, satisfait par rapport à $T_1 = \varphi_1(t_1, \ldots, t_n)$ à une équation du second ordre (à points critiques fixes), et aussi générale, suivant la remarque de M. Painlevé, que l'équation linéaire non homogène du second ordre.

Les équations $\lambda'' = 6\lambda^2 + t$ et $\lambda'' = 2\lambda^3 + \lambda t + \alpha$ ne sont du reste pas les seules des six équations irréductibles du second ordre (et du premier degré en λ''), qu'on rencontre dans la recherche des conditions d'intégrabilité des systèmes linéaires. D'une façon précise, nous allons montrer, avant de poursuivre l'étude de notre problème, qu'*à chacune de ces six équations* VI, ..., I, soit

$$
(18)\qquad \lambda'' = \mathrm{R}(\lambda', \lambda, t),
$$

on peut associer un système linéaire

$$
(s)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
(1') & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = p y, \\[2ex]
(2') & \dfrac{\partial y}{\partial t} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} y + \mathrm{B}\dfrac{\partial y}{\partial x}
\end{array}\right.
$$

(p, A, B rationnels en x, analytiques en t) *tel que λ, point apparemment singulier* (unique) *de* (1′) *doive satisfaire à* (18) *pour que le système* (s) *soit complètement intégrable.* Il serait aisé de former directement ces systèmes; mais on les retrouve immédiatement par le procédé suivant qui s'appuie sur des résultats de M. Painlevé et de M. R. Fuchs.

11. En cherchant à résoudre le problème énoncé à l'Introduction (n° 3), M. R. Fuchs est conduit à former la condition d'intégrabilité d'un système (s) pour lequel [1]

$$(\mathrm{E})\qquad p = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-t)^2} + \frac{d}{x(x-1)} + \frac{3}{4(x-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\beta}{x(x-1)(x-\lambda)}$$

(a, b, c, d désignent des constantes dans la suite de ce numéro). Il trouve que λ doit vérifier l'équation

$$(\mathrm{VI})\qquad \lambda'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right)\lambda'^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-\lambda}\right)\lambda' + 2\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}{t^2(t-1)^2}\left[a+b+c+d+1 - \frac{a+\frac{1}{4}}{\lambda^2}t + \frac{b+\frac{1}{4}}{(\lambda-1)^2}(t-1) - 2c\frac{t(t-1)}{(\lambda-t)^2}\right];$$

et les coefficients α, β sont donnés par les formules

$$\alpha = \frac{t^2(t-1)^2}{4\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}\lambda'^2 - \lambda(\lambda-1)(\lambda-t)\left[\frac{a+\frac{1}{4}}{\lambda^2} + \frac{b+\frac{1}{4}}{(\lambda-1)^2} + \frac{c}{(\lambda-t)^2} + \frac{d+\frac{1}{2}}{\lambda(\lambda-1)}\right],$$

$$\beta = -\frac{t(t-1)}{2(\lambda-t)}\lambda' - \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1}\right);$$

on a, enfin,

$$\mathrm{B} = -\frac{t-\lambda}{t(t-1)}\,\frac{x(x-1)}{x-\lambda}, \qquad \mathrm{A} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}.$$

D'autre part, M. Painlevé a montré que l'équation (VI) reproduit par dégénérescence les cinq équations V, ..., I.

Il est alors bien facile de former les systèmes (s) : en effet, à chaque dégénérescence de VI reproduisant une équation (18), on peut associer une dégénérescence analogue du système (s) relatif à VI [2]. On

---

[1] Nous avons modifié légèrement la forme de M. R. Fuchs, afin d'abréger les formules ultérieures.

[2] Toutefois, il importe d'observer que ce fait n'est nullement évident; il existe en effet des dégénérescences du système (1) relatif à VI auxquelles ne correspond, à la limite, aucune expression finie de $p(x)$ contenant x effectivement.

trouvera ci-dessous le Tableau des systèmes (s) relatifs à V, IV, III; dans le cas des équations II et I, le résultat est donné par le n° 9.

$$p(x) = \frac{a}{x^2} + \frac{ct^2}{(x-1)^4} - \frac{bt}{(x-1)^3} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{3}{4(x-\lambda)^2} + \frac{\alpha}{x(x-1)^2} + \frac{\beta}{x(x-1)(x-\lambda)},$$

V

$$\lambda'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda-1}\right)\lambda'^2 - \frac{\lambda'}{t} + 2\frac{(a+d+1)\lambda(\lambda-1)^2}{t^2} - 2\frac{\left(a+\frac{1}{4}\right)(\lambda-1)^2}{\lambda t^2} + \frac{2b\lambda}{t} - \frac{2c\lambda(\lambda+1)}{\lambda-1},$$

$$\alpha = \frac{t^2\lambda'^2}{4\lambda(\lambda-1)^2} - \lambda(\lambda-1)^2\left[\frac{ct^2}{(\lambda-1)^4} - \frac{bt}{(\lambda-1)^3} + \frac{d+\frac{1}{4}}{(\lambda-1)^2} + \frac{a+\frac{1}{4}}{\lambda^2} + \frac{\frac{1}{2}}{\lambda(\lambda-1)}\right],$$

$$\beta = -\frac{t\lambda'}{2(\lambda-1)} - \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1}\right), \qquad \mathrm{B} = \frac{\lambda-1}{t}\,\frac{x(x-1)}{x-\lambda}.$$

$$p(x) = \frac{a}{x^2} = \frac{\alpha}{x} + b + \left(\frac{x+2t}{4}\right)^2 + \frac{3}{4(x-\lambda)^2} - \frac{\beta}{x(x-\lambda)},$$

IV

$$\lambda'' = \frac{\lambda'^2}{2\lambda} + \frac{3}{2}\lambda^3 + 4\lambda^2 t + 2(t^2+4b)\lambda - 8\frac{a+\frac{1}{4}}{\lambda},$$

$$\alpha = \frac{\lambda'^2}{16\lambda} - \lambda\left[\frac{a+\frac{1}{4}}{\lambda^2} + \left(\frac{\lambda+2t}{4}\right)^2 + b\right],$$

$$\beta = \frac{\lambda'+2}{4}, \qquad \mathrm{B} = \frac{2x}{x-\lambda}.$$

$$p(x) = \frac{ct^2}{x^4} - \frac{bt}{x^3} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{d}{x} + a + \frac{3}{4(x-\lambda)^2} + \frac{\beta}{x(x-\lambda)},$$

III′

$$\lambda'' = \frac{\lambda'^2}{\lambda} - \frac{\lambda'}{t} + \frac{2\lambda^2}{t^2}(d+2a\lambda) + \frac{2b}{t} - \frac{4c}{\lambda},$$

$$\alpha = \frac{t^2\lambda'^2 - \lambda^2}{4\lambda^2} - \lambda^2\left(\frac{ct^2}{\lambda^4} - \frac{bt}{\lambda^3} + \frac{d}{\lambda} + a\right),$$

$$\beta = -\frac{\lambda + t\lambda'}{2\lambda}, \qquad \mathrm{B} = \frac{\lambda x}{t(x-\lambda)} \quad (^1).$$

(1) L'équation III′ donne l'équation III à l'aide de la transformation $t = \tau^2$, $\lambda = \tau\mu$ (PAINLEVÉ, *Comptes rendus*, t. CXLIII, 1906, p. 1115).

12. Revenons maintenant au système (S_m). Pour $m > 4$, λ satisfait à une équation d'ordre $m-1$, mais n'a plus ses points critiques fixes. On peut simplifier notablement la forme de (S_m) en introduisant de nouvelles fonctions b_j, liées aux a_h par l'identité en x.

$$\sum_{h=0}^{m} \alpha_h x^h = \sum_{j=0}^{m} b_j (x-\lambda)^j;$$

en tenant compte de la relation

$$\sum_{i=j}^{k=2} (2i-k+2) C_i^j = j C_k^{j+2},$$

on obtient sans peine le système suivant :

$$(S'_m) \quad \begin{cases} b'_m = 0, \\ b'_{m-1} = m b_m \lambda', \\ b'_{m-1} = (i+1) b_i \lambda' + \dfrac{i}{2} b_{i+2}, \qquad (i = m-2, m-3, \ldots, 1), \\ 2\lambda'' = b_1, \\ (b_0 = \lambda'^2, \ \rho = -\lambda'). \end{cases}$$

Le système (S'_m) *admet toutes les solutions de* (S'_{m-1}); en particulier, il possède des intégrales uniformes. Il serait intéressant d'en étudier les intégrales voisines, et de rechercher si l'intégrale générale admet des points critiques non algébriques.

Deuxième cas, $\nu = 2$.

13. Nous allons aborder maintenant l'étude du système formé au n° 6 dans le cas $\nu = 2$, et en supposant $m \leqq 4$, ce qui est nécessaire (n° 8), si l'on veut obtenir des systèmes dont les intégrales ont leurs points critiques fixes. Nous avons le droit de supposer $n \leqq 2$ (n° 7); prenons $n = 2$, nous verrons (n° 24) que la solution du problème pour $n = 1$ en résulte immédiatement.

Moyennant une transformation préalable $t_1 = \varphi_1(t, u)$, $t_2 = \varphi_2(t, u)$, on peut prendre

$$\alpha_{11} = -\frac{1}{2} = \alpha_{12} \qquad \text{et} \qquad -\alpha_{21} = \frac{\alpha}{2} = \alpha_{22}.$$

Effectivement, il suffit de choisir φ_1 et φ_2 de façon à vérifier les équations

$$(19)\quad \begin{cases} \alpha_{11}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\alpha_{21}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t}=-\dfrac{1}{2}, \\ \alpha_{12}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\alpha_{22}\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t}=-\dfrac{1}{2}, \\ (\alpha_{11}+\alpha_{12})\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u}+(\alpha_{21}+\alpha_{22})\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial u}=0. \end{cases}$$

La résolution des deux premières équations est toujours possible, car, si les coefficients de $p(x)$ dépendent effectivement de deux paramètres, le déterminant $\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}$ est différent de 0 (n° 7). D'ailleurs, on a d'après (10), en désignant par ψ une fonction de t_1 et t_2 :

$$\alpha_{11}+\alpha_{22}=\frac{\partial\psi}{\partial t_1},\qquad \alpha_{21}+\alpha_{22}=\frac{\partial\psi}{\partial t_2},$$

et la dernière des équations (19) exprime que t est une fonction de $\psi(t_1, t_2)$; les deux premières donnent alors $\psi(\varphi_1, \varphi_2)=-t$. En définitive, les fonctions φ_1 et φ_2 sont déterminées à une fonction arbitraire (de u) près. Posons maintenant :

$$(20)\qquad \lambda_1-\lambda_2=x,\qquad \lambda_1+\lambda_2=y,\qquad \rho_1+\rho_2=z.$$

Les équations (10) se réduisent à une seule :

$$(21)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial t}=-\frac{2\alpha}{x^2};$$

les équations (12) et (14) donnent :

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t}=\dfrac{1}{x}+\rho_1-\rho_2, & \dfrac{\partial x}{\partial u}=\alpha z, \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}=z, & \dfrac{\partial y}{\partial u}=\alpha\left(\rho_1-\rho_2-\dfrac{1}{x}\right), \\ \dfrac{\partial z}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial y}(\rho_1^2+\rho_2^2), & \dfrac{\partial z}{\partial u}=\alpha\dfrac{\partial}{\partial y}(\rho_1^2-\rho_2^2), \end{cases}$$

$\dfrac{\partial\rho_1^2}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial\rho_2^2}{\partial y}$ désignant les dérivées par rapport à y des seconds membres de (13) où l'on a exprimé λ_1 et λ_2 en x et y. D'ailleurs, les quatre premières équations (15) s'intègrent de la façon suivante :

$$a_4 = 2c_4, \qquad a_3 = 4c_3, \qquad a_2 = -4c_4 t + c_2, \qquad a_1 = -4c_3 t + c_1,$$

les c_i désignant des constantes (absolues) qui peuvent être nulles. Les équations (13) donnent alors

$$\rho_1 - \rho_2 = \frac{1}{x} + \frac{P}{x}, \tag{23}$$

où l'on a posé

$$P(x, y, t) = c_4 xy(x^2 + y^2 - 4t) + c_3 x(x^2 + 3y^2 - 4t) + c_1 xy + c_5 x; \tag{24}$$

on a d'ailleurs

$$\frac{\partial(\rho_1^2 + \rho_2^2)}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

et le système (22) s'écrit, en définitive,

$$(\Sigma) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial x}{\partial t} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{P}{z}, & \dfrac{\partial x}{\partial u} = \alpha z, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, & \dfrac{\partial y}{\partial u} = \alpha \dfrac{P}{z}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial P}{\partial x}, & \dfrac{\partial z}{\partial u} = \alpha \dfrac{\partial P}{\partial y}. \end{array} \right.$$

Les fonctions x, y, z et α étant choisies de façon à vérifier ce système, ρ_1 et ρ_2 sont donnés par (20), (23) et a_0 par l'une des relations (13); les coefficients de $p(x)$ sont alors parfaitement déterminés. Tout revient donc à intégrer le système (Σ).

14. Établissons tout d'abord des propriétés de ce système. Pour que le système (Σ) où P a la forme (24) (*voir* n° 19) soit complètement intégrable, il faut et il suffit que la relation (21) soit vérifiée; il devient alors manifeste que l'*intégrale générale de* (Σ) *est de la forme*

$$\left\{ \begin{array}{l} x = f(t; A, B, U), \\ y = g(t; A, B, U), \\ z = h(t; A, B, U), \\ \alpha = U' k(t; A, B, U), \end{array} \right. \tag{25}$$

où U désigne une fonction arbitraire de u, A et B, deux constantes arbitraires; on peut disposer de A, B, U de façon que x, y, z et $\frac{\partial^i \alpha}{\partial u^i}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ prennent pour $t = t_0$, $u = u_0$ des valeurs données à l'avance.

Lorsque t et u varient indépendamment, le point dont les coordonnées x, y, z sont représentées par (25) décrit une surface intégrale (σ) de (Σ). Je vais établir que *pour que les constantes* A, B *figurent d'une façon distincte dans l'équation de* (σ), *il faut et il suffit que l'un au moins des coefficients* c_3, c_4 *de* (24) *soit différent de zéro.*

On rend ce résultat intuitif de la façon suivante : considérons le plan tangent à une surface (σ) passant par un point arbitraire x_0, y_0, z_0, et faisons varier la valeur initiale t_0 adoptée pour t. D'après les équations (Σ), ce plan enveloppe un cône (du second ordre) pour c_3 ou $c_4 \neq 0$; lorsque A et B varient, (σ) engendre donc un réseau. Au contraire, pour $c_3 = 0 = c_4$, ce plan est fixe; mais les équations (25) se laissent alors préciser de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
x &= f_1(t - t_0; \mathrm{A}, \mathrm{U}),\\
y &= g_1(t - t_0; \mathrm{A}, \mathrm{U}),\\
z &= h_1(t - t_0; \mathrm{A}, \mathrm{U}),\\
\alpha &= \mathrm{U}' k_1(t - t_0; \mathrm{A}, \mathrm{U}),
\end{aligned}$$

et lorsque les constantes d'intégration varient, (σ) décrit cette fois un faisceau.

15. Abordons maintenant l'intégration de (Σ). En remplaçant x, y, z et t par hx, $hy + k$, $\frac{z}{h}$ et $h^2 t + l$, où h, k, l sont des constantes convenablement choisies, on peut donner aux constantes c_i l'un des systèmes de valeurs ci-dessous :

	c_4	c_3	c_2	c_1	
(Σ_4)	1	0	0	a	
(Σ_3)	0	1	0	0	
(Σ_2)	0	0	1	0	
(Σ_1)	0	0	0	η	$(\eta = 0$ ou $1)$,

(Σ_i) désignant le système (Σ) correspondant au choix des constantes.

L'intégration de (Σ_2) et (Σ_1) est immédiate; x^2, y, z sont des fonctions rationnelles de e^t, pour (Σ_2) et de t pour (Σ_1) [1]; dans le premier cas, on a :

$$\begin{aligned} x^2 &= (U^2 + A)[e^{t-t_0} - e^{-(t-t_0)}]^2 - e^{2(t-t_0)} + e^{-2(t-t_0)}, \\ y &= U[e^{t-t_0} + e^{-(t-t_0)}], \\ z &= U[e^{t-t_0} - e^{-(t-t_0)}], \end{aligned}$$

et dans le second :

$$\begin{aligned} x^2 &= (2U + A)(t - t_0)^2 - 4(t - t_0), \\ y &= \frac{(t - t_0)^2}{2} + U, \\ z &= (t - t_0) \qquad\qquad (\text{pour } \eta = 1), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x^2 &= 4(t - t_0) + U, \\ y &= A(t - t_0), \\ z &= A \qquad\qquad (\text{pour } \eta = 0). \end{aligned}$$

16. L'intégration de (Σ_4) et de (Σ_3) est beaucoup plus cachée; effectuons d'abord l'intégration de (Σ_4); nous en déduirons ensuite celle de (Σ_3). Il s'agit donc d'étudier le système

$$(\Sigma'_4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{2}{x} + \frac{xy(x^2 + y^2 - 4t) + ax}{z}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= z, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= y(3x^2 + y^2 - 4t) + a; \end{aligned} \right.$$

$$(\Sigma''_4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \alpha z, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \alpha \frac{xy(x^2 + y^2 - 4t) + ax}{z}, \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= \alpha z(x^2 + 3y^2 - 4t). \end{aligned} \right.$$

Posons, à cet effet,

$$x^2 + y^2 - 4t + \frac{a}{y} = v z; \tag{26}$$

(1) On voit ainsi que $x(t)$ n'est pas uniforme; le même fait se produit pour (Σ_4) et (Σ_3); il était d'ailleurs évident d'après la forme de (Σ). Ainsi, après tout circuit effectué par t dans son plan, λ_1 et λ_2 reviennent à leurs valeurs initiales ou se permutent.

le système (Σ''_4) donne :

$$\frac{\partial v}{\partial u} = \alpha x(2 - v^2),$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \alpha x y v,$$

d'où l'on déduit

$$(27) \qquad \frac{v \dfrac{\partial v}{\partial u}}{2 - v^2} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial u}}{y},$$

et, par suite,

$$(28) \qquad y = \sqrt{\frac{T}{v^2 - 2}},$$

en désignant par T une fonction de la seule variable t; cette fonction *ne peut d'ailleurs vérifier par rapport à t qu'une équation du second ordre au plus :* sinon x, y, z s'exprimeraient algébriquement en fonction de T, T′, T″, et, par conséquent, seraient indépendants de u. Formons cette équation. Les équations (Σ'_4) donnent

$$(29) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = -a\frac{v^2 - 2}{T} - \sqrt{(v^2 - 2)T};$$

différentions (28) par rapport à t; nous aurons

$$(30) \qquad z = \frac{v}{v^2 - 2}T^2 + \frac{T' + 2av}{2\sqrt{(v^2 - 2T}};$$

enfin, différentions (30) par rapport à t, tenons compte de la dernière équation (Σ'_4), exprimons x^2, y, z, $\dfrac{\partial v}{\partial T}$ en fonction de v, T, T′ et nous obtiendrons une équation du second ordre vérifiée par T, et où, effectivement, v ne figure plus :

$$(31) \qquad T'' = \frac{T'^2}{2T} + 4T^2 + 16tT - \frac{4a^2}{T}.$$

C'est une des équations découvertes par M. Gambier; son intégrale générale est méromorphe et s'exprime [1] à l'aide de la transcen-

[1] B. GAMBIER, *Thèse*, Upsal, 1909, p. 31.

dante II, de la façon suivante :

$$\tau'' = 2\tau^3 - 16t\tau + \varepsilon(8 + 4a\sqrt{2}) \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$
$$\mathrm{T} = \frac{\varepsilon}{2}\tau' + \frac{\tau^2}{2} - 4t,$$

et inversement,

$$\tau = \varepsilon\,\frac{\mathrm{T}' - 2a\sqrt{2}}{2\mathrm{T}}.$$

La fonction $\mathrm{T}_1 = \sqrt{\mathrm{T}}$ satisfait à l'équation

$$\mathrm{T}_1'' = 2\mathrm{T}_1^3 + 8t\mathrm{T}_1 - \frac{2a^2}{\mathrm{T}_1^3}; \tag{32}$$

pour $a = 0$ (et dans ce cas seulement), T_1 est méromorphe; c'est alors une transcendante II.

17. Je vais démontrer maintenant que $x^2(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sont *méromorphes*. Posons

$$v = \frac{\mathrm{V}^2 + 2}{2\mathrm{V}}; \tag{33}$$

V satisfait à l'équation de Riccati

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = -a\,\frac{\mathrm{V}^2 - 2}{2\mathrm{T}} - \mathrm{V}\sqrt{\mathrm{T}}, \tag{34}$$

et l'on a

$$y = \frac{2\mathrm{V}}{\mathrm{V}^2 - 2}\sqrt{\mathrm{T}}. \tag{35}$$

Notre proposition est alors immédiate pour $a = 0$; en effet, d'après (32), $\mathrm{T}_1 = \sqrt{\mathrm{T}}$ est alors une fonction méromorphe de t, ne présentant que des pôles simples, de résidus égaux à ± 1; d'après (34), V est alors méromorphe en t et, d'après (35), il en est de même de y.

Considérons donc le cas général $a \neq 0$; posons encore

$$\mathrm{V} = \frac{2\mathrm{T}}{aw}\frac{\partial w}{\partial t}, \tag{36}$$

w satisfait à l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\frac{\mathrm{T}'}{\mathrm{T}} + \sqrt{\mathrm{T}}\right)\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{a^2}{2\mathrm{T}^2}w = 0. \tag{37}$$

Les seuls points où il ne soit pas évident que y soit méromorphe sont *les pôles et les zéros* de T. Or, dans le domaine d'un pôle, $t=t_0$, les coefficients de (37) sont uniformes; les racines de l'équation fondamentale déterminante de (37) relative à t_0 sont 0 et 2 ou 0 et 4; mais t_0 est pour le coefficient de w dans (37) un zéro d'ordre 4. Il en résulte facilement que *t_0 est un point apparemment singulier*, et, d'après (36), V (ainsi que y) est méromorphe pour $t=t_0$.

Supposons maintenant que t_0 soit un zéro de T. Dans le domaine de t_0 les coefficients de (37) sont uniformes en $(t-t_0)^{\frac{1}{2}}$; les développements des intégrales de (37) procèdent donc suivant les puissances de $(t-t_0)^{\frac{1}{2}}$; comme d'ailleurs, en vertu de (31), le développement de T commence par le terme $2a\sqrt{2}(t-t_0)$, les racines de l'équation fondamentale déterminante sont $\pm\frac{1}{4}$, et, par suite, on a

$$w=(t-t_0)^{-\frac{1}{4}}\mathfrak{P}\left[(t-t_0)^{\frac{1}{2}}\right], \tag{38}$$

où $\mathfrak{P}$ désigne une série procédant suivant les puissances positives croissantes de $(t-t_0)^{\frac{1}{2}}$ et commençant par une constante (qui peut être nulle). D'après (36) V (et, par suite, y) est une fonction de *t à deux branches au plus*. Il s'agit de montrer que y est effectivement uniforme. C'est ce qui résultera de la relation

$$V_1V_2=2, \tag{39}$$

vérifiée par les deux branches de V qui se permutent en t_0 et que j'établirai tout d'abord [1].

Je considère, à cet effet, l'expression

$$W=\frac{2T^2}{a^2}\frac{\partial w_1}{\partial t}\frac{\partial w_2}{\partial t}-w_1w_2,$$

où w_2 et w_1 désignent les deux déterminations de w se permutant autour de t_0. *En vertu de l'hypothèse $a\neq 0$*, si w_1 intègre l'équation (37)

[1] On voit aisément que dans le domaine de t_0, V est donné par une série procédant suivant les puissances positives croissantes de $(t-t_0)^{\frac{1}{2}}$ et commençant par le terme constant $+\sqrt{2}$; mais, en se bornant à la considération de ce développement, on ne peut décider *au bout d'un nombre fini d'opérations* si la relation (39) est vérifiée.

où $\sqrt{T}$ est pris avec une détermination donnée, w_2 intègre la même équation où $\sqrt{T}$ a la détermination opposée. On déduit alors sans peine de ces deux équations :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0;$$

W *se réduit donc à une constante* qu'on vérifie être nulle en remplaçant w_1 par son développement (38) et w_2 par le développement conjugué. Or, d'après (36), la relation $W = 0$ entraîne (39).

Cela étant, appelons y_1 et y_2 les deux branches de y correspondant à V_1 et V_2; d'après (35), on a

$$y_1 - y_2 = (V_1 + V_2)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{V_1 V_2}\right)\sqrt{T};$$

il résulte donc de (39) que y est uniforme, comme nous l'avions annoncé.

Ainsi donc y, algébroïde en t_0, est méromorphe en t_0 ; et par conséquent y, z, x^2 sont méromorphes en tout point t situé à distance finie. En définitive les relations (28), (30) auxquelles on peut joindre la suivante

$$x^2 = \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 - 2}T + \frac{2a(\rho^2 - 1)}{\sqrt{(\rho^2 - 2)T}} + \frac{\rho}{2\sqrt{(\rho^2 - 2)T}}T' + 4t$$

font connaître l'intégrale générale de (Σ'_4); quant à (Σ''_4), il se réduit à l'une quelconque de ses trois équations qui exprime α en fonction de x^2, y, z. Par suite x^2, y, z sont des fonctions essentiellement transcendantes de deux constantes arbitraires et dépendent en outre rationnellement d'une fonction arbitraire de u introduite par l'intégration de (29).

18. L'intégration de (Σ_3) est maintenant immédiate, car (Σ_3) est une dégénérescence de (Σ_4); pour le voir, il suffit de faire la substitution :

$$x \mid \varepsilon^{\frac{1}{6}} x, \quad y \mid \varepsilon^{-\frac{5}{6}}(1 + \varepsilon y), \quad z \mid \varepsilon^{-\frac{1}{6}} z, \quad t \quad \varepsilon^{-\frac{5}{3}}\left(\frac{3}{4} + \varepsilon^2 t\right), \quad a \mid 2\varepsilon^{-\frac{5}{2}}, \quad \alpha \mid \varepsilon^{\frac{1}{3}} \alpha;$$

lorsque ε tend vers zéro, (Σ_4) tend vers (Σ_3). Effectuons alors sur T et ρ les substitutions correspondantes

$$T \mid \varepsilon^{-\frac{5}{3}}(-2 + \varepsilon T), \quad \rho \mid \varepsilon^{\frac{1}{2}} \rho,$$

et les équations (28), (30), (29) donneront à la limite :

$$y = \frac{v^2 - T}{4}, \tag{28'}$$

$$T'' = 6T^2 - 32t, \tag{30'}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v^2 - 3T}{2}; \tag{31'}$$

ces équations jointes aux suivantes

$$z = \frac{v^3 - 3vT - T'}{4}, \qquad x^2 = \frac{v^4 - 6v^2T - 3T^2}{16} - \frac{v}{4}T' + 4t,$$

représentent l'intégrale générale de (Σ_3). L'équation qui joue le rôle de résolvante (Σ_3) est donc ici l'équation I.

19. Il est bien remarquable qu'on soit amené *à rencontrer les équations* I *et* II *en partant uniquement de* (Σ), *sans s'être donné au préalable l'expression* (24) *de* P. D'une façon précise, proposons-nous de choisir la fonction $P(x, y, t, u)$ de façon que (Σ) soit complètement intégrable : nous allons voir que P est nécessairement de la forme (24), et l'intégration de (Σ) se ramènera comme nous l'avons vu à celle de II, I (ou à une de leurs dégénérescences).

Écrivons, en effet, les conditions d'intégrabilité de (Σ) :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{2\alpha}{x^2} = \frac{1}{z^2}\frac{\partial P}{\partial u}, \tag{40}$$

$$P\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha\left(\frac{2}{x}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial t}\right) = 0, \tag{41}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \alpha\left[\frac{2}{x}\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 P}{\partial t\,\partial y} - z\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)\right] = \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial u}. \tag{42}$$

Ces équations devant être compatibles en α et $\frac{\partial \alpha}{\partial t}$, on a :

$$\begin{vmatrix} 1 & P & \dfrac{\partial P}{\partial y} \\ \dfrac{2}{x^2} & \dfrac{2}{x}\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial P}{\partial t} & \dfrac{2}{x}\dfrac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 P}{\partial t\,\partial y} - z\left(\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right) \\ \dfrac{\partial P}{\partial u} & 0 & z^2\dfrac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial u} \end{vmatrix} = 0.$$

Il vient, en annulant les coefficients des diverses puissances de z dans ce déterminant,

$$\frac{\partial P}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\right)=0, \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial u}\left(\frac{2}{x}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{2P}{x^2}\right)=0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial u}\left[P\left(\frac{2}{x}\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 P}{\partial t\,\partial y}\right)-\frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{2}{x}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial t}\right)\right]=0.$$

Nous supposerons d'abord

$$\frac{\partial P}{\partial u}\left(\frac{2}{x}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{2P}{x^2}\right)\neq 0,$$

et alors les équations (40), (41), (42) sont sûrement compatibles. Il viendra dans cette hypothèse

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0, \tag{43}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial u}=0, \tag{44}$$

$$P\left(\frac{2}{x}\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 P}{\partial t\,\partial y}\right)-\frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{2}{x}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial t}\right)=0.$$

L'intégration de cette dernière équation aux dérivées partielles donne

$$P=\varphi(X, y, u)\,\psi(X, t, u),$$

φ et ψ désignant deux fonctions arbitraires et X étant égal à x^2-4t. L'équation (42) se réduit alors à (41) qui, combinée avec (40), donne

$$\alpha\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{2}{x^2}\right)=-\frac{1}{z^2}\frac{\partial P}{\partial u},$$

et, en vertu de notre restriction, cette formule fournit pour α une solution, finie, non nulle et bien déterminée. Posons alors

$$\theta_1(x, y, t, u)\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{2}{x^2}\right)=-\frac{\partial P}{\partial u} \tag{45}$$

et

$$\theta_1(x, y, t, u)=\theta(X, y, t, u);$$

nous aurons $\alpha=\frac{\theta_1}{z^2}$, et l'équation (40) donnera

$$\frac{1}{z^2}\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\left(\frac{2}{x}+\frac{P}{z}\right)+\frac{1}{z}\frac{\partial\theta_1}{\partial y}+\frac{1}{z^2}\frac{\partial\theta_1}{\partial t}-\frac{2}{z^3}\,\theta_1\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{2\theta_1}{x^2z^2}=\frac{1}{z^2}\frac{\partial P}{\partial u}.$$

Cette relation devant être vérifiée quel que soit z, on a :

$$P\frac{\partial\theta_1}{\partial x} = 2\theta_1\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{46}$$

$$\frac{2}{x}\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \frac{\partial\theta_1}{\partial t} + \frac{2\theta_1}{x^2} = \frac{\partial P}{\partial u}, \tag{47}$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial y} = 0. \tag{48}$$

L'équation (47) s'écrit, en vertu de (45),

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}\theta = 0,$$

d'où

$$\theta = \frac{\sigma(X, y, u)}{\psi(X, t, u)};$$

mais, d'après (48),

$$\frac{\partial\sigma}{\partial y} = 0,$$

d'où

$$\theta(X, y, t, u) = \frac{\sigma(X, u)}{\psi(X, t, u)}.$$

Or l'équation (46) entraîne $\theta_1 = \rho(y, t, u)P^2$, et par conséquent l'expression

$$\frac{\sigma(X, u)}{\psi^3(X, t, u)\varphi^2(X, y, u)}$$

est indépendante de X. Posons alors

$$\log\frac{\sigma(X, u)}{\psi^3(X, t, u)} = f_1(X, t, u)$$

et

$$\log\frac{1}{\varphi^2(X, y, u)} = f_2(X, y, u);$$

il vient

$$\frac{\partial f_1}{\partial X} + \frac{\partial f_2}{\partial X} = 0,$$

d'où

$$f_1 = f(X, u) + f_3(t, u) \qquad \text{et} \qquad f_2 = -f(X, u) + f_4(y, u),$$

et par suite

$$\frac{\sigma(X, u)}{\psi^3(X, t, u)} = \psi_1(X, u)\psi_2(t, u) \qquad \text{et} \qquad \varphi^2(X, y, u) = \psi_1(X, u)\psi_3(y, u).$$

On aura donc

$$P = \Phi(X, u)\,\Psi(y, u)\,\omega(t, u).$$

Cherchons à déterminer Φ, Ψ et ω de façon à vérifier (43), (44) et

$$(49)\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial y} = 0,$$

conséquence de (45) et (48). Si $\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} \neq 0$, on aura, d'après (49),

$$\frac{\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y\,\partial u}}{\dfrac{\partial\Psi}{\partial y}} = -\frac{\dfrac{\partial}{\partial u}(\Phi\omega)}{\Phi\omega} = \frac{g'(u)}{g(u)},$$

d'où

$$\Psi = g(u)[g_1(y) + g_2(u)], \qquad \Phi\omega = \frac{\Phi_1(X)\,\omega_1(t)}{g(u)},$$

et enfin

$$(50)\qquad P = \Phi_1(X)\,\omega_1(t)[g_1(y) + g_2(u)];$$

et d'ailleurs, si $\dfrac{\partial\Psi}{\partial y} = 0$,

$$(51)\qquad P = \Phi(X, u)\,\omega(t, u).$$

Exprimons maintenant que les expressions (50) et (51) vérifient (44); nous obtiendrons successivement les quatre formes suivantes possibles pour P :

$$\begin{aligned}
P &= \omega(t)\ [\psi(y) + \varphi(u)],\\
P &= \omega(t)\Phi(X)\psi(y),\\
P &= \omega(t)\ [\Phi(X) + \varphi(u)],\\
P &= \omega(t, u).
\end{aligned}$$

Mais la considération de (43) montre que des formes précédentes, seules sont admissibles les deux que voici :

$$(52)\qquad P = \omega(t)[y + \varphi(u)],$$

$$(53)\qquad P = \omega(t, u).$$

Substituons (53), par exemple dans (Σ); nous aurons, en supposant $\omega \neq 0$:

$$z = C, \qquad y = Ct + U, \qquad \alpha = \frac{U'}{\omega}, \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial t} = 0\right)$$

et la condition d'intégrabilité pour x s'écrit

$$-\frac{2}{x^2}\frac{CU'}{\omega}+\frac{1}{C}\frac{\partial\omega}{\partial u}=-\frac{CU'}{\omega^2}\frac{\partial\omega}{\partial t};$$

elle ne peut être vérifiée identiquement (c'est-à-dire indépendamment de x) que pour $\frac{\partial\omega}{\partial u}=0=U'$; mais alors (Σ) se réduit à un système différentiel ordinaire, ce qui fournit une solution banale, et notre restriction initiale cesse d'ailleurs d'être remplie. La même conclusion s'applique d'autre part à (52) : notre restriction initiale est donc inadmissible, et l'on doit supposer

$$\frac{\partial P}{\partial u}\left(\frac{2}{x}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{2P}{x^2}\right)=0.$$

Supposons d'abord $\frac{\partial P}{\partial u}\neq 0$; on aura, d'après (40) et (41),

$$-\frac{P}{z^2}\frac{\partial P}{\partial u}=\alpha\left(\frac{2}{x}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{2P}{x^2}\right)=0,$$

et, par suite, on est obligé de prendre $\frac{\partial P}{\partial u}=0$. Les équations (40), (41), (42) se réduisent alors aux suivantes :

(40′) $$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{2\alpha}{x^2}=0,$$

(41′) $$\frac{2}{x}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{2P}{x^2}=0,$$

(42′) $$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0.$$

L'équation linéaire du premier ordre (41′) a pour intégrale

$$P(x,y,t)=x\,Q(y,x^2-4t)=x\,Q(y,X),$$

Q désignant une fonction arbitraire. Mais l'équation (42′) devient alors

(54) $$\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}-6\frac{\partial Q}{\partial X}=4x^2\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2}=4(X+4t)\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2};$$

or Q ne dépend que de y et X; on a donc $\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2}=0$ ou $Q=AX+B$, en désignant par A et B deux fonctions de y. Mais le premier membre de (54) est nul ; on a donc

$$X\frac{d^2A}{dy^2}+\frac{d^2B}{dy^2}-6A=0,$$

d'où

$$\frac{d^2A}{dy^2}=0 \qquad \text{et} \qquad A=c_4y+c_3;$$

et enfin

$$B=c_4y^3+3c_3y^2+c_2y+c_1.$$

On retrouve ainsi pour P l'expression (24), comme nous l'avions annoncé.

20. Revenons aux systèmes (Σ_3) et (Σ_4) ; $y(t)$ satisfait à une équation différentielle du troisième ordre et du premier degré en y''' ; elle s'écrit, pour (Σ_4),

$$(55) \qquad y'''=\frac{2}{3y'}(y''-y^3+4ty-a)\left(y''+\frac{3y'^2}{2y}+2y^3-8ty+2a\right)+3y^2y'-4ty'+8y,$$

et pour (Σ_3),

$$(56) \qquad y'''=\frac{2}{3y'}(y''-3y^2+4t)(y''+6y^2-8t)+6yy'+8.$$

Les simplifiées [1] correspondant à ces équations sont

$$y'''=\frac{2y''^2}{3y'}+\frac{y'y''}{y} \qquad \text{et} \qquad y'''=\frac{2y''^2}{3y'},$$

et ont été rencontrées dans la première Partie [2] [éq. (35) avec $n=3$, $\omega=2\pi i$, $r=\frac{1}{y}$, $M=2$ et 1].

Il existe d'ailleurs des transformations qui permettent de déduire

(1) *Voir* note 1, p. 13.

(2) Si l'on effectue dans (56) la transformation $u=(y''+6y^2-8t)(3y')^{-1}$, on en déduit l'équation $u'''=uu''-(3u'-u^2)(u'-u^2)+48t$, dont la simplifiée est $u'''=0$. L'équation en u a été rencontrée par M. Chazy dans sa Thèse (n° 11, p. 28; l'entier k est égal à 2). Parmi les dégénérescences de (Σ_3) qui transforment (56) en sa simplifiée, il en est une qui, appliquée à l'équation en u, coïncide avec la dégénérescence par laquelle M. Chazy déduit de l'équation en u l'équation *réduite* $u'''=uu''-(3u'-u^2)(u'-u^2)$ (*loc. cit.*, p. 18).

(Σ_2) et (Σ_1) par dégénérescence de (Σ_3) comme nous avons déduit (Σ_3) de (Σ_4). Ainsi la substitution

$$(57)\qquad \begin{cases} x \mid 6^{-\frac{1}{4}}\varepsilon^{\frac{1}{5}}x, \quad y \mid \varepsilon^{-\frac{4}{5}}\left(1+6^{-\frac{1}{4}}\varepsilon y\right), \quad z \mid 6^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{-\frac{1}{5}}z, \\ t \mid \varepsilon^{-\frac{8}{5}}\left(\dfrac{3}{4}+6^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^2 t\right), \quad \alpha \mid 6^{-\frac{1}{2}}\varepsilon^{\frac{2}{5}}\alpha, \end{cases}$$

appliquée à (Σ_3), donne (Σ_2) lorsque ε tend vers zéro, et la substitution

$$(58)\qquad x \mid \varepsilon^{\frac{1}{4}}x, \quad y \mid \varepsilon^{-\frac{3}{4}}(n+\varepsilon y), \quad z \mid \varepsilon^{-\frac{1}{4}}z, \quad t \mid \varepsilon^{\frac{1}{2}}t, \quad \alpha \mid \varepsilon^{\frac{1}{2}}\alpha$$

appliquée à (Σ_2) reproduit à la limite (Σ_1).

Or la substitution (57) appliquée à (56) donne à la limite l'équation

$$(59)\qquad y''' = \frac{2}{3y'}(y''-y)(y''+2y)+y',$$

dont l'intégrale générale est

$$y = A^2e^{2t} + ACe^t + 6AB + BCe^{-t} + B^2e^{-2t},$$

et d'où l'on déduit, à l'aide de (58) (pour ε tendant vers zéro),

$$(60)\qquad y''' = \frac{2}{3y'}(y''-1)(y''+2).$$

L'intégrale générale de cette équation est un polynome du quatrième degré en x.

Or les équations (59) et (60) sont bien vérifiées par toutes les solutions des systèmes (Σ_2) et (Σ_1); mais en outre des solutions précédentes (solutions définies respectivement par les équations du second ordre $y''=y$ et $y''=1$), elles en admettent une infinité d'autres n'appartenant ni à (Σ_2), ni à (Σ_1); en d'autres termes, les équations (59) et (60) *ne sont plus équivalentes* à (Σ_2) et (Σ_1). Les difficultés résultant du passage à la limite se résolvent d'ailleurs immédiatement, et l'on aurait pu déduire l'intégration de (Σ_2) et (Σ_1) de celle de (Σ_3); mais en raison de la simplicité de (Σ_2) et (Σ_1), ce dernier point n'offrait qu'un intérêt minime.

21. Pour terminer l'étude du système (Σ) nous nous occuperons des surfaces intégrales (σ) (n° 14). Pour (Σ_1), l'équation des surfaces (σ)

s'écrit

$$x^2 = (2y - z^2 + A)z^2 - 4z \qquad \text{ou} \qquad z = A,$$

suivant que $\eta = 1$ ou 0 ; à (Σ_2) correspondent les surfaces (σ) définies par l'équation

$$(x^2 - z^2)(y^2 - z^2) + 4yz = 4Az^2.$$

Toutes ces surfaces sont rationnelles, d'après leur mode même de représentation ; elles peuvent d'ailleurs (sauf $z = A$) dégénérer en des transformées birationnelles de la surface réglée de genre 1 : il suffit, par exemple, de remplacer dans la dernière équation y par εy, z par εz et de faire tendre ε vers zéro.

Les surfaces (σ) correspondant à (Σ_3) et (Σ_4) sont transcendantes, elles possèdent un faisceau de courbes algébriques ($t =$ const.) ; les courbes correspondantes de la surface (R) décrite par le point (x^2, y, z) sont rationnelles. Le réseau (nº 14) dont font partie les surfaces (σ) est essentiellement transcendant. Ces surfaces possèdent, comme nous allons le voir, des dégénérescences algébriques remarquables.

22. Faisons dans (Σ_1), par exemple, la substitution

$$x \left| \frac{x}{\varepsilon}, \quad y \right| \frac{y}{\varepsilon}, \quad z \left| \frac{z}{\varepsilon^2}, \quad t \right| \frac{t_0}{\varepsilon^2} + \varepsilon t, \quad \alpha \left| \frac{\alpha}{\varepsilon^3} \right. ;$$

et faisons tendre ε vers zéro ; à la limite, nous aurons le système

$$(61) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{P}{z}, & \frac{\partial x}{\partial u} &= \alpha z, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= z, & \frac{\partial y}{\partial u} &= \alpha \frac{P}{z}, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial P}{\partial x}, & \frac{\partial z}{\partial u} &= \alpha \frac{\partial P}{\partial y}, \end{aligned} \right.$$

avec

$$P = xy(x^2 + y^2 - 4t_0) + \alpha x.$$

La condition d'intégrabilité de ce système étant donnée par $\frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0$, on peut supposer $\alpha = 1$, moyennant une transformation effectuée sur u. Posons alors

$$x + y = X, \qquad x - y = Y, \qquad t + u = T, \qquad t - u = U;$$

il viendra

$$\frac{\partial X}{\partial T} = \frac{Q}{z} + z, \qquad \frac{\partial X}{\partial U} = 0,$$
$$\frac{\partial Y}{\partial T} = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial U} = \frac{Q}{z} - z,$$
$$\frac{\partial z}{\partial T} = \frac{\partial Q}{\partial X}, \qquad \frac{\partial z}{\partial U} = \frac{\partial Q}{\partial Y},$$

où

$$Q = \frac{X^4 - Y^4}{8} - t_0(X^2 - Y^2) + a\frac{X - Y}{2}.$$

Par différentiation, on obtient

$$z\frac{d^2X}{dT^2} = 2z\frac{\partial Q}{\partial X};$$

d'où

$$\left(\frac{dX}{dT}\right)^2 = \frac{X^4}{2} - 4t_0X^2 + 2aX + h,$$

et, de même,

$$\left(\frac{dY}{dU}\right)^2 = \frac{Y^4}{2} - 4t_0Y^2 + 2aY + k;$$

mais on a

$$\left(\frac{dX}{dT}\right)^2 - \left(\frac{dY}{dU}\right)^2 = 4Q,$$

d'où

$$h = k,$$

et enfin

$$z = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{dX}{dT} - \frac{dY}{dU}\right).$$

En résumé, appelons $\varphi(\tau)$ une intégrale déterminée de l'équation

$$(62) \qquad \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{1}{2}\varphi^4 - 4t_0\varphi^2 + 2a\varphi + h,$$

où h est une constante arbitraire; l'intégrale générale du système (61) (où $\alpha = 1$) sera donnée par les formules :

$$x = \frac{1}{2}[\varphi(t + u + A) - \varphi(t - u + B)],$$
$$y = \frac{1}{2}[\varphi(t + u + A) + \varphi(t - u + B)],$$
$$z = \frac{1}{2}[\varphi'(t + u + A) + \varphi'(t - u + B)],$$

A et B étant deux autres constantes arbitraires.

Dans la dégénérescence, x est donc devenu, comme y et z, une fonction uniforme de t et u; les coordonnées d'un point de la surface intégrale de (61) [dégénérescence de la surface (σ) attachée à (Σ_4)] sont des fonctions elliptiques de deux paramètres t et u, telles qu'inversement, à tout point de cette surface corresponde un seul couple (t, u), à des multiples près des périodes. C'est donc une de ces surfaces remarquables, découvertes par M. Picard ([1]) et dont l'étude a été approfondie par M. Painlevé ([2]) : elle possède un groupe continu fini de transformations birationnelles en elle-même ; son genre (géométrique) est égal à 1, et l'intégrale double de première espèce attachée à cette surface et évidemment

$$\int\int du\, dv,$$

ou, à une constante près,

$$\int\int\left(\frac{1}{P-z^2}-\frac{1}{P+z^2}\right)dx\, dy.$$

Pour $t_0 = 0 = a$, la surface possède des faisceaux de courbes harmoniques. Enfin, la surface (x^2, y, z) étant une dégénérescence de la surface (R) (n° 21) possède un faisceau de courbes rationnelles : c'est donc une surface elliptique de genre zéro. Effectivement, à tout point x^2, y, z correspondent, à des multiples près des périodes, une seule valeur de t, et deux valeurs de u dont la somme est $B - A$. La surface est donc une transformée birationnelle du cylindre (62).

Le système (Σ_3) admet une dégénérescence analogue qui s'intègre par les mêmes formules, à condition de substituer à (62) l'équation

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = 2\varphi^3 - 8t_0\varphi + h.$$

Pour $t_0 = 0$, on obtient des surfaces possédant des faisceaux de courbes équianharmoniques.

23. Les deux systèmes précédents offrent un certain intérêt au

---

([1]) *Journal de Liouville*, 4^e série, t. V, 1889, p. 205-212.

([2]) *Leçons... professées à Stockholm*, Paris, 1897, p. 282-286. On sait que ces surfaces ont reçu le nom de *surfaces elliptiques* (*voir* notamment F. Enriques, *Rendic. del. Circ. Mat. di Palermo*, t. XX, 1905, p. 1-33).

point de vue de la théorie des fonctions elliptiques. Il existe en effet plusieurs procédés pour en effectuer l'intégration ; outre la méthode précédente, la plus simple de toutes, on peut encore suivre par dégénérescence celle qui nous a servi pour (Σ_4) et (Σ_3). On peut encore appliquer à (Σ_4), par exemple, les formules suivantes :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2v}} \frac{dv}{dt},$$

$$y = C\frac{v^2+1}{2v},$$

$$z = C\frac{v^2-1}{2v^2}\frac{dv}{dt};$$

v étant donné par l'équation

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{C^2}{2}v^4 + \left(K - \frac{a}{C}\right)v^3 + (8t_0 - 3C^2)v^2 - \left(K + \frac{a}{C}\right)v + \frac{C^2}{2},$$

et les fonctions $C(u)$ et $K(u)$ vérifiant les relations

$$K = \sqrt{2}\frac{dC}{du} = 2\sqrt{-C^4 + 4t_0C^2 + k + \frac{a^2}{4C^2}} \qquad (k, \text{ constante arbitraire}),$$

et il existe pour (Σ_3) des formules analogues.

Le rapprochement des diverses intégrales premières qu'on obtient ainsi permet d'établir des formules élégantes ; en partant de (Σ_3), on retrouve le théorème d'addition de la fonction pu de Weierstrass ; l'étude de (Σ_4) conduit, dans le cas $a = 0$, au théorème analogue pour les fonctions sn$u$, cn$u$ et dn$u$ de Jacobi ; enfin le système (Σ_4) (où $a \neq 0$) fait intervenir les fonctions elliptiques du second ordre satisfaisant à l'équation *non réduite* (62).

24. Il nous reste à traiter notre problème primitif dans l'hypothèse $\nu = 2$, $n = 1$. L'artifice suivant dispense de tout calcul ultérieur.

On peut toujours supposer, moyennant une transformation effectuée sur t, que $\alpha_{11} + \alpha_{12} = 1$; posons donc $\alpha_{11} = \frac{1-\alpha}{2}$, $\alpha_{11} = \frac{1+\alpha}{2}$. Or, dans le cas de deux paramètres t et u, la transformation $t = T$, $u = T + U$ donne précisément les valeurs précédentes à α_{11} et α_{12} (n° 13), et dans ce cas les fonctions $\lambda_1 - \lambda_2 = x$, $\lambda_1 + \lambda_2 = y$,

$\rho_1 + \rho_2 = z$ satisfont au système

$$\frac{\partial x}{\partial \mathrm{T}} = \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \ldots.$$

Il en résulte évidemment qu'ici les mêmes fonctions de la variable t satisfont au système

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{2}{x} + \frac{\mathrm{P}}{z} + \alpha z, \\ \frac{dy}{dt} &= z + \alpha \frac{\mathrm{P}}{z}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}, \end{aligned}$$

où P a toujours la forme (24); et, d'après la façon même dont ce système a été formé, son intégrale s'obtient en remplaçant dans les formules (25) la fonction U par une fonction arbitraire de t.

TROISIÈME PARTIE.

I. — Formation du système (f_n, F_n).

1. Considérons une équation différentielle linéaire du second ordre (E_n), à coefficients *rationnels et réguliers* (au sens de L. Fuchs), et possédant $n+3$ points essentiellement singuliers ($n \geqq 1$); le groupe (G) de cette équation dérive donc de $n+2$ substitutions fondamentales. Je me propose, dans cette troisième Partie, de *déterminer les coefficients de l'équation* (E_n), *de façon que le groupe* (G) *soit indépendant des valeurs adoptées pour les points singuliers de l'équation.* On est amené à se poser le problème précédent lorsqu'on cherche à déterminer les coefficients de l'équation linéaire, de telle sorte qu'elle admette un groupe *donné* (indépendamment des points singuliers).

Moyennant une transformation simple, on peut supposer l'équation (E_n) privée de son second terme : soit

$$(E_n) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = p(x)y,$$

cette équation. Une transformation homographique effectuée sur x permet de faire coïncider trois de ses points essentiellement singuliers avec $0, 1, \infty$ (¹); soient $t_1, \ldots, t_n$ les valeurs prises par les n points restants (²). Si (E_n) ne possède pas de points apparemment singuliers (c'est-à-dire tels que les quotients des intégrales restent uniformes dans le voisinage de chacun d'eux), $p(x)$ est de la forme

$$\frac{c_{n+1}}{x^2} + \frac{c_{n+2}}{(x-1)^2} + \frac{c_{n+3}}{x(x-1)} + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{c_i}{(x-t_i)^2} + \frac{\alpha_i}{x(x-1)(x-t_i)}\right],$$

et, par suite, nous disposons de $2n+3$ coefficients $c_1, \ldots, c_{n+3}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$; mais le groupe (G) dépend de $3n+3$ paramètres. Il faut donc, pour que le problème soit possible, que l'équation possède en outre n points apparemment singuliers (simples) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (³). L'équation (E_n) s'écrira donc

$$(E_n) \qquad \begin{aligned}\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = {} & \frac{c_{n+1}}{x^2} + \frac{c_{n+2}}{(x-1)^2} + \frac{c_{n+3}}{x(x-1)} \\ & + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{c_i}{(x-t_i)^2} + \frac{\alpha_i}{x(x-1)(x-t_i)}\right] \\ & + \sum_{j=1}^{n}\left[\frac{3}{4(x-\lambda_j)^2} + \frac{\beta_j}{x(x-1)(x-\lambda_j)}\right],\end{aligned}$$

où les β_j satisfont à des conditions connues [éq. (17) du n° 6]. Les quantités $c_1, \ldots, c_{n+3}$ ont d'ailleurs des valeurs parfaitement déterminées (indépendantes de $t_1, \ldots, t_n$) résultant des coefficients des substitutions de (G). Il s'agit donc de choisir pour λ_j et α_i (et par

(¹) On voit ainsi que notre problème cesse d'avoir un sens pour un groupe (G) dérivé de 1 ou 2 substitutions fondamentales, ce qui justifie la restriction $n \geq 1$ du début.

(²) Pour abréger l'écriture nous poserons souvent $t_{n+1} = 0$, $t_{n+2} = 1$, $t_{n+3} = \infty$.

(³) Ce résultat s'obtient immédiatement lorsqu'on passe par l'intermédiaire des systèmes « absolument canoniques » (schlechthin kanonische system) de M. Schlesinger (*Vorles. über lin. Differentialgl.* Leipzig et Berlin, 1908, p. 225 et suiv.).

suite, pour β_j) des fonctions des n paramètres $t_1, \ldots, t_n$, telles que les coefficients des substitutions du groupe (G) de (E_n) soient indépendants de $t_1, \ldots, t_n$. C'est là un problème connu; rappelons brièvement la solution qui en a été donnée par L. Fuchs [1].

2. Soit (y_1, y_2) un système fondamental d'intégrales de (E_n) et (Sy_1, Sy_2) le même système transformé par une des substitutions S de (G) correspondant à un lacet effectué autour d'un point singulier t de (E_n). Nous aurons

$$Sy_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \tag{1}$$

$$Sy_2 = \gamma y_1 + \delta y_2, \tag{2}$$

où α, β, γ, δ ne dépendent pas de $t_1, \ldots, t_n$, si (y_1, y_2) a été convenablement choisi. Après une variation suffisamment petite des paramètres $t_1, \ldots, t_n$, le même lacet entoure toujours le point t et ce point seulement; nous pourrons écrire, en conséquence,

$$\frac{\partial(Sy_1)}{\partial t_i} = S\frac{\partial y_1}{\partial t_i} = \alpha\frac{\partial y_1}{\partial t_i} + \beta\frac{\partial y_2}{\partial t_i} \tag{3}$$

$$\frac{\partial(Sy_2)}{\partial t_i} = S\frac{\partial y_2}{\partial t_i} = \gamma\frac{\partial y_1}{\partial t_i} + \delta\frac{\partial y_2}{\partial t_i} \tag{4}$$

$$(i = 1, \ldots, n).$$

Réciproquement, si les équations (3) et (4) sont vérifiées, on déduit de (1) et (2)

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t_i} y_1 + \frac{\partial\beta}{\partial t_i} y_2 = 0,$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t_i} y_1 + \frac{\partial\delta}{\partial t_i} y_2 = 0,$$

et puisque y_1 et y_2 forment un système fondamental, α, β, γ et δ sont bien indépendants de t_i. Adjoignons alors aux équations (1) et (2) leurs dérivées par rapport à x

$$S\frac{\partial y_1}{\partial x} = \alpha\frac{\partial y_1}{\partial x} + \beta\frac{\partial y_2}{\partial x}, \tag{5}$$

$$S\frac{\partial y_2}{\partial x} = \gamma\frac{\partial y_1}{\partial x} + \delta\frac{\partial y_2}{\partial x}. \tag{6}$$

---

[1] *Voir* la bibliographie des travaux de M. L. Fuchs sur cette question, dans le Mémoire de M. R. Fuchs (*loc. cit.*, p. 301).

Les équations (1), (3) et (5) devant être compatibles en α et β, il existe deux fonctions A_i et B_i de x, $t_1, \ldots, t_n$, satisfaisant aux relations

$$\frac{\partial y_1}{\partial t_i} = A_i y_1 + B_i \frac{\partial y_1}{\partial x}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial t_i} = A_i y_2 + B_i \frac{\partial y_2}{\partial x}, \tag{8}$$

$$S \frac{\partial y_1}{\partial t_i} = A_i S y_1 + B_i S \frac{\partial y_1}{\partial x}, \tag{9}$$

auxquelles on doit ajouter la suivante

$$S\left(\frac{\partial y_2}{\partial t_i}\right) = A_i S y_2 + B_i S \frac{\partial y_2}{\partial x}, \tag{10}$$

qui résulte de (2), (4), (6), (7) et (8).

Or, d'après (7) et (8), $A_i(x)$ et $B_i(x)$ ne peuvent avoir d'autres points critiques que $0, 1, t_1, \ldots, t_n$ et ∞. Effectuons alors la substitution S sur (7) et (8), et tenons compte de (9) et (10); il viendra

$$y_1 SA_i + \frac{\partial y_1}{\partial x} SB_i = 0,$$

$$y_2 SA_i + \frac{\partial y_2}{\partial x} SB_i = 0;$$

mais y_1 et y_2 forment un système fondamental, donc

$$SA_i = 0 = SB_i.$$

Les fonctions $A_i(x)$ et $B_i(x)$ sont donc *uniformes*, et réciproquement, s'il en est ainsi, les équations (3) et (4) sont conséquences de (1), (2), (7) et (8). Mais les points $0, 1, t_1, \ldots, t_n, \infty$ sont réguliers : A_i et B_i sont donc [d'après (7) et (8)] *rationnels* en x.

Remarquons enfin que les équations (E_n) et les suivantes

$$\frac{\partial y}{\partial t_i} = A_i y + B_i \frac{\partial y}{\partial x} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{e_n}$$

sont alors vérifiées par les fonctions $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ (où C_1 et C_2 sont indépendants de x, $t_1, \ldots, t_n$); en d'autres termes, le système (e_n, E_n) est *complètement intégrable* et, réciproquement, cette condition entraîne les précédentes. Nous sommes ainsi conduits à la conclusion suivante :

Pour que le groupe de l'équation (E_n) soit indépendant des paramètres $t_1, \ldots, t_n$, il faut et il suffit qu'on puisse adjoindre à (E_n) n équations (e_n), où A_i et B_i sont rationnels en x (analytiques en $t_1, \ldots, t_n$), et formant avec (E_n) un système complètement intégrable.

Le groupe (G) de (E_n) dépendant de $3n+3$ paramètres et l'équation (E_n) ne renfermant que $n+3$ constantes $c_1, \ldots, c_{n+3}$, il est clair que la solution du système différentiel introduit par les conditions d'intégrabilité de (e_n, E_n) doit dépendre de $2n$ constantes arbitraires, de façon qu'on puisse attribuer aux $2n$ paramètres restants de (G) des valeurs arbitrairement choisies : c'est bien ce que nous vérifierons plus loin (n° 10).

3. En définitive, nous sommes ramenés au problème énoncé au début de la deuxième Partie [avec, toutefois, une expression différente pour $p(x)$]. D'après les résultats obtenus (2e Partie, n° 3), il faut et il suffit, pour que le système (e_n, E_n) soit complètement intégrable, qu'on puisse trouver des fonctions rationnelles $B_i(x)$ satisfaisant aux équations

$$\frac{\partial B_i}{\partial t_k} + B_i \frac{\partial B_k}{\partial x} = \frac{\partial B_k}{\partial t_i} + B_k \frac{\partial B_i}{\partial x} \qquad (i, k = 1, \ldots, n), \tag{11}$$

$$\frac{\partial^3 B_i}{\partial x^3} - 4p \frac{\partial B_i}{\partial x} - 2 \frac{\partial p}{\partial x} B_i + 2 \frac{\partial p}{\partial t_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{12}$$

et, moyennant une transformation effectuée sur y, on peut toujours prendre

$$A_i = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_i}{\partial x}.$$

4. Cherchons la forme des fonctions rationnelles $B_i(x)$. Tout d'abord, d'après (7) et (8), $B_i(x)$ est holomorphe en tout point x distinct de $0, 1, t_1, \ldots, t_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et ∞. Étudions alors B_i dans le voisinage de $t_k (k \neq i)$ et supposons que t_i soit un zéro d'ordre $r > 2$ ou un pôle d'ordre $-r > 0$. Soit

$$B_i = \frac{b_{ik}}{(x - t_k)^{-r}} [1 + \ldots]$$

(la quantité entre crochets désignant une fonction holomorphe et se réduisant à 1 pour $x = t_k$). Il en résultera que, dans le premier membre de (12), les deux termes

$$b_{ik}(r-1)[r(r-2)-4c_k](x-t_k)^{r-3} \quad \text{et} \quad \frac{2}{t_k(t_k-1)(x-t_k)}\frac{\partial \chi_k}{\partial t_i}$$

ne pourront se réduire en général; pour $r = 1$ ou 2, et, dans ce cas seulement, une telle réduction sera possible : $x = t_k$ est donc un zéro d'ordre $1+\varepsilon_k$ ($\varepsilon_k = 0$ ou 1), et la même conclusion s'applique à $x = 0$ et $x = 1$. On voit, de même, que $x = t_i$ doit être un zéro d'ordre ε_i ($\varepsilon_i = 0$, 1 ou 2) et que $x = \infty$ est un pôle d'ordre $1+\varepsilon$ ($\varepsilon = 0$ ou 1). Comme dans la deuxième Partie (n° 4) on démontre que $x = \lambda_j$ est pour B_i un pôle d'ordre 1 au plus, soit $1-\varepsilon'$ ($\varepsilon' \geq 0$). Enfin, la fonction $B_i(x)$ peut posséder ν autres zéros, dont nous désignerons les ordres de multiplicité par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu$ ($\eta_l > 0$).

Écrivons alors que le nombre des zéros de B_i est égal à celui de ses pôles :

$$n+1+\sum_{k=1}^{n+2}\varepsilon_k+\sum \eta_l = n-\sum_{j=1}^{n}\varepsilon'+1-\varepsilon,$$

ou

$$\sum_{k=1}^{n+2}\varepsilon_k+\sum_{l=1}^{\nu}\eta_l+\sum_{j=1}^{n}\varepsilon'+\varepsilon = 0;$$

or, aucun des ε ou des η n'est négatif; ils *doivent donc tous être nuls* (ce qui exige $\nu = 0$), et l'on a, en posant

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{n+2}(x-t_i) = x(x-1)(x-t_1)\ldots(x-t_n),$$

$$\psi(x) = \prod_{j=1}^{n}(x-\lambda_j) = (x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n),$$

et, en désignant par b_i une quantité indépendante de x,

$$B_i = b_i\frac{\varphi(x)}{(x-t_i)\psi(x)}.$$

Pour déterminer b_i, nous étudierons (12) dans le voisinage de

$x = t_i$; il vient immédiatement $B_i(t_i) + 1 = 0$, d'où

$$(13) \qquad B_i = -\frac{\psi(t_i)}{\varphi'(t_i)} \frac{\varphi(x)}{(x - t_i)\psi(x)}.$$

5. Cela étant, écrivons les équations (11) sous la forme

$$(14) \qquad \frac{1}{B_i B_k}\left(\frac{\partial B_i}{\partial t_k} - \frac{\partial B_k}{\partial t_i}\right) - \frac{1}{B_i}\frac{\partial B_i}{\partial x} + \frac{1}{B_k}\frac{\partial B_k}{\partial x} = 0,$$

et substituons les expressions (13) dans ces équations. Le premier membre de (14) devient ainsi une fonction rationnelle de x ayant pour pôles (du premier ordre) $x = t_g$ ($g = 1, \ldots, n+1, n+2$ avec $g \neq i$ et $g \neq k$); elle est donc d'ordre n et s'annule d'ailleurs pour $x = \infty$. Par suite, pour exprimer qu'elle est identiquement nulle, il suffit d'écrire qu'elle s'annule pour $x = \lambda_j$ ($j = 1, \ldots, n$); il vient ainsi [1]

$$(f_n) \qquad \frac{\varphi'(t_i)(t_i - \lambda_j)}{\psi(t_i)} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} - \frac{\varphi'(t_k)(t_k - \lambda_j)}{\psi(t_k)} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_k} = \frac{t_i - t_k}{(\lambda_j - t_i)(\lambda_j - t_k)} \frac{\varphi(\lambda_j)}{\psi'(\lambda_j)}.$$

6. Exprimons maintenant que la relation (12) est une identité en x. A cet effet, écrivons-la sous la forme

$$(15) \qquad \frac{1}{2} B_i \frac{\partial^3 B_i}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x}(p B_i^2) + B_i \frac{\partial p}{\partial t_i} = 0.$$

Le premier membre de (15) est une fonction rationnelle de x, admettant $x = \lambda_j$ ($j = 1, \ldots, n$) comme pôle d'ordre 4, $x = t_i$ comme pôle d'ordre 1 et $x = \infty$ comme zéro d'ordre 2. Écrivons que le coefficient de $(x - \lambda_j)^{-4}$ est nul; nous aurons l'équation

$$(16) \qquad \frac{\varphi'(t_i)}{\psi(t_i)} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} = \frac{\varphi(\lambda_j)}{(\lambda_j - t_i)\psi'(\lambda_j)} \left[\frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)} - \frac{1}{\lambda_j - t_i} - \frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)} + \frac{2\beta_j}{\lambda_j(\lambda_{j-1})} \right],$$

d'où résultent, comme conséquences, les équations (f_n).

---

(1) Ces équations sont au nombre de $\frac{n^2(n-1)}{2}$; quand il y aura lieu de distinguer l'une d'elles, où figurent les dérivées de λ_j par rapport à t_i et t_k, j'emploierai la notation (f_{ik}^j).

Les équations (16), jointes aux suivantes [1] :

$$(17)\quad \frac{\beta_j^2}{\lambda_j^2(\lambda_j-1)^2} = \frac{c_{n+1}}{\lambda_j^2} + \frac{c_{n+2}}{(\lambda_j-1)^2} + \frac{c_{n+3}}{\lambda_j(\lambda_j-1)}$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{c_k}{(\lambda_j-t_k)^2} + \frac{\alpha_k}{\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-t_k)}\right]$$
$$+{\sum_{l=1}^{n}}'\left[\frac{3}{4(\lambda_j-\lambda_l)^2} + \frac{\beta_l}{\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-\lambda_l)}\right] + \frac{\beta_j(1-2\lambda_j)}{\lambda_j^2(\lambda_j-1)^2},$$

qui expriment que les points $x=\lambda_j$ sont apparemment singuliers, entraînent, comme conséquence, que les coefficients de $(x-\lambda_j)^{-3}$ sont nuls.

D'ailleurs l'expression

$$\frac{1}{2}\mathrm{B}_l\frac{\partial^3\mathrm{B}_l}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x}(p\mathrm{B}_l^2),$$

étant une dérivée exacte par rapport à x, son résidu en $x=\lambda_j$ est nul ; écrivons alors que le résidu de $\mathrm{B}_l\dfrac{\partial p}{\partial t_l}$ est nul pour $x=\lambda_j$:

$$(18)\quad \frac{\varphi(\lambda_j)}{(\lambda_j-t_l)\psi'(\lambda_j)}$$
$$\times\left\{\frac{2c_l}{(\lambda_j-t_l)^3} + \frac{3}{2}\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{(\lambda_j-\lambda_l)^3}\frac{\partial\lambda_l}{\partial t_l}\right.$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-t_k)}\frac{\partial\alpha_k}{\partial t_l} + {\sum_{l=1}^{n}}'\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-\lambda_l)}\frac{\partial\beta_l}{\partial t_l}$$
$$+\frac{\alpha_l}{\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-t_l)^2} + {\sum_{l=1}^{n}}'\frac{\beta_l}{\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-\lambda_l)}\frac{\partial\lambda_l}{\partial t_l}$$
$$\left.+\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j-1)}\left[\frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)} - \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_j-1} - \frac{1}{\lambda_j-t_l} - \frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)}\right]\frac{\partial\beta_j}{\partial t_l}\right\}$$
$$-{\sum_{l=1}^{n}}'\frac{\varphi(\lambda_l)}{(\lambda_l-t_l)\psi_l(\lambda_l)}\left[\frac{3}{2(\lambda_l-\lambda_j)^3} + \frac{\beta_j}{\lambda_l(\lambda_l-1)(\lambda_j-\lambda_l)^2}\right]\frac{\partial\lambda_l}{\partial t_l} = 0.$$

---

[1] Pour la notation, *voir* la note 1 de la page 9.

Si nous démontrons que le coefficient de $(x-\lambda_j)^{-2}$ dans (15) est identiquement nul, le premier membre de (15) sera de la forme $A(x-t_i)^{-1}$, et, par suite, identiquement nul, puisque $x=\infty$ est un zéro d'ordre 2; les relations (16), (17), (18) suffiront donc pour exprimer que l'équation (12) est identiquement satisfaite.

7. A cet effet, différentions la relation (17) par rapport à t_i, tenons compte de (18) et observons que

$$\frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)}-\frac{1}{\lambda_j-t_i}-\frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)}+\frac{2\beta_j}{\lambda_j(\lambda_j-1)}$$

ne peut être nul [1] [sinon, d'après (16), $\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_i}$ serait nul, ce qui est incompatible avec (f_n)]; nous obtiendrons aisément la relation

$$(19)\qquad \frac{\varphi'(t_i)}{\psi(t_i)}\frac{\partial\beta_j}{\partial t_i}=\frac{\varphi(\lambda_j)}{\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-t_i)\psi(\lambda_j)}\frac{\partial\beta_j^2}{\partial\lambda_j}-\lambda_j(\lambda_j-1)\left(A\beta_j+\frac{3}{2}B\right),$$

où $\frac{\partial\beta_j^2}{\partial\lambda_j}$ désigne la dérivée, par rapport à λ_j, du second membre de (17) multiplié par $\lambda_j^2(\lambda_j-1)^2$ et où A et B représentent les résidus en $x=\lambda_j$ des fonctions

$$\frac{\varphi(x)}{x(x-1)(x-t_i)(x-\lambda_j)^2\psi(x)}\quad\text{et}\quad\frac{\varphi(x)}{(x-t_i)(x-\lambda_j)^3\psi(x)}.$$

D'autre part, annulons le coefficient de $(x-\lambda_j)^2$ dans (15); la relation à vérifier s'écrit, en vertu de (16) et (19),

$$\begin{aligned}
&-\frac{3\varphi(\lambda_j)}{(\lambda_j-t_i)\psi'(\lambda_j)}B+\frac{3C}{4}+\frac{\beta_j}{\lambda_j(\lambda_j-1)}D\\
&+\frac{\varphi^2(\lambda_j)}{\lambda_j^2(\lambda_j-1)^2(\lambda_j-t_i)^2\psi'^2(\lambda_j)}\left[1-\frac{(2\lambda_j-1)^2}{\lambda_j(\lambda_j-1)}\right]\beta_j\\
&+\frac{\varphi(\lambda_j)}{(\lambda_j-t_i)\psi'(\lambda_j)}\left(A\beta_j+\frac{3}{2}B\right)-\frac{3\varphi(\lambda_j)}{\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-t_i)\psi'(\lambda_j)}\beta_jE\\
&-\frac{3}{2}(E+F\beta_j)\left[\frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)}-\frac{1}{\lambda_j-t_i}-\frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)}\right]\frac{\varphi'(\lambda_j)}{(\lambda_j-t_i)\psi'(\lambda_j)}=0,
\end{aligned}$$

(1) *Cf.* deuxième Partie, note 1, p. 45.

où C, D, E, F désignent les résidus respectifs en $x = \lambda_j$ des fonctions

$$\frac{\varphi^2(x)}{(x-t_i)^2(x-\lambda_j)^2\psi^2(x)}, \qquad \frac{\varphi^2(x)}{(x-t_i)^2(x-\lambda_j)\psi^2(x)},$$
$$\frac{\varphi(x)}{(x-t_i)(x-\lambda_j)^2\psi(x)}, \qquad \frac{\varphi(x)}{x(x-1)(x-t_i)(x-\lambda_j)\psi(x)}.$$

Ces résidus se calculent aisément : il suffit de poser

$$\frac{\varphi(x)}{(x-t_i)\psi(x)} = \frac{a}{x-\lambda_j} + b + c(x-\lambda_j) + d(x-\lambda_j)^2 + \ldots;$$

il vient alors

$$A = -\frac{a}{\lambda_j^2(\lambda_j-1)^2}\left[1 - \frac{(2\lambda_j-1)^2}{\lambda_j(\lambda_j-1)}\right] - b\frac{2\lambda_j-1}{\lambda_j^2(\lambda_j-1)^2} + \frac{c}{\lambda_j(\lambda_j-1)},$$
$$B = d, \qquad C = 2(ad+bc), \qquad D = 2ac + b^2, \qquad E = c,$$
$$F = -a\frac{2\lambda_j-1}{\lambda_j^2(\lambda_j-1)^2} + \frac{b}{\lambda_j(\lambda_j-1)};$$

d'ailleurs

$$a = \frac{\varphi(\lambda_j)}{(\lambda_j-t_i)\psi'(\lambda_j)} \quad \text{et} \quad b = \frac{\varphi(\lambda_j)}{(\lambda_j-t_i)\psi'(\lambda_j)}\left[\frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)} - \frac{1}{\lambda_j-t_i} - \frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)}\right],$$

et la formule à vérifier résulte immédiatement des relations précédentes.

8. Nous allons maintenant éliminer les $2n$ coefficients α_k et β_j entre les $3n$ équations (16), (17) et (18) (où l'indice i a reçu une valeur déterminée) de façon à obtenir n équations différentielles, par rapport à la variable t_i, vérifiées par les fonctions $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; les λ une fois connus, les α et les β s'exprimeront à l'aide des λ et de leurs dérivées.

Je poserai

$$\frac{\varphi'(t_i)}{\psi(t_i)}\frac{(\lambda_j-t_i)\psi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)}\frac{\partial\lambda_j}{dt_i} - \frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)} + \frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\lambda_j-1} + \frac{1}{\lambda_j-t_i} + \frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)} = L_j$$

et

$$\frac{c_{n+1}+\frac{1}{4}}{\lambda_j^2} + \frac{c_{n+2}+\frac{1}{4}}{(\lambda_j-1)^2} + \frac{c_{n+3}+\frac{1}{2}}{\lambda_j(\lambda_j-1)} + \sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{(\lambda_j-t_k)^2} + \sum_{l=1}^{n}{}' \frac{3}{4(\lambda_j-\lambda_l)^2} = q_j;$$

les équations (16) et (17) s'écriront alors

$$\frac{2\beta_j+2\lambda_j-1}{\lambda_j(\lambda_j-1)} = L_j \tag{20}$$

et

$$(21)\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-t_k)} + \sum_{l=1}^{n}{}' \frac{\beta_l}{\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-\lambda_l)} = \frac{L_j^2}{4} - q_j.$$

Différentions (21) par rapport à t_i et tenons compte de (18); nous obtiendrons la relation

$$(22)\qquad \begin{aligned} &\frac{L_j}{2}\frac{\partial L_j}{\partial t_i} - \frac{\partial q_j}{\partial \lambda_j}\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} \\ &= -\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j-1)}\left[\frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)} - \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_j-1} - \frac{1}{\lambda_j-t_i} - \frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)}\right]\frac{\partial \beta_j}{\partial t_i} \\ &\quad -\left(\frac{L_j^2}{4} - q_j\right)\left(\frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\lambda_j-1}\right)\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} + \frac{(\lambda_j-t_i)\psi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)} \\ &\quad \times \sum_{l=1}^{n}{}' \frac{\varphi(\lambda_l)}{(\lambda_l-t_i)\psi'(\lambda_l)}\left[\frac{3}{2(\lambda_l-\lambda_j)^3} + \frac{\beta_j}{\lambda_l(\lambda_l-1)(\lambda_l-\lambda_j)^2}\right]\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-t_k)^2}\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} - \sum_{l=1}^{n}{}' \frac{\beta_l}{\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-\lambda_l)^2}\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i}. \end{aligned}$$

Cette relation se simplifie, si l'on observe que

$$\frac{2}{\lambda_j(\lambda_j-1)}\frac{\partial \beta_j}{\partial t_i} = \frac{\partial L_j}{\partial t_i} + \left[\left(\frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\lambda_j-1}\right)L_j - \frac{2}{\lambda_j(\lambda_j-1)}\right]\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i};$$

on voit alors $\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i}$ s'introduire en facteur dans (22); on peut le supprimer (*cf.* n° 7), et l'on obtient ainsi l'équation

$$(23)\qquad \begin{aligned} &\frac{\varphi'(t_i)}{2\psi(t_i)}\,\frac{(\lambda_j-t_i)\psi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)}\,\frac{\partial L_j}{\partial t_i} \\ &= \frac{\partial q_j}{\partial \lambda_j} - \left[\frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)} - \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_j-1} - \frac{1}{\lambda_j-t_i} - \frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)}\right] \\ &\quad \times \left[\left(\frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\lambda_j-1}\right)\frac{L_j}{2} - \frac{1}{\lambda_j(\lambda_j-1)}\right] + \frac{(\lambda_j-t_i)\psi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)} \\ &\quad \times \sum_{l=1}^{n}{}' \frac{\varphi(\lambda_l)}{(\lambda_l-t_i)\psi'(\lambda_l)}\left[\frac{3}{2(\lambda_l-\lambda_j)^3} + \frac{\lambda_j(\lambda_j-1)L_j-(2\lambda_j-1)}{2\lambda_l(\lambda_l-1)(\lambda_l-\lambda_j)^2}\right] \\ &\quad - \left(\frac{L_j^2}{4} - q_j\right)\left(\frac{1}{\lambda_j} + \frac{1}{\lambda_j-1}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-t_k)^2} \\ &\quad - \sum_{l=1}^{n}{}' \frac{1}{2\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-\lambda_l)^2}\left[\lambda_l(\lambda_l-1)L_l - (2\lambda_l-1)\right]. \end{aligned}$$

Or, en posant

$$(24)\qquad \lambda_j(\lambda_j-1)\left(\frac{L_j^2}{4}-q_j\right)-\sum_{l=1}^{n}{}' \frac{\lambda_l(\lambda_l-1)L_l-(2\lambda_l-1)}{2(\lambda_j-\lambda_l)}=M_j,$$

on a, d'après (20) et (21),

$$(25)\qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{\lambda_j-t_k}=M_j.$$

Tout revient donc à éliminer les α_k entre (23) et (25).

9. Remarquons pour cela que les équations (25) entraînent l'identité en x :

$$(26)\qquad \frac{\sigma(x)}{\psi(x)}\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{x-t_k}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma(\lambda_j)}{\psi'(\lambda_j)}\,\frac{M_j}{x-\lambda_j},$$

où $\sigma(x)$ désigne le polynome

$$\prod_{k=1}^{n}(x-t_k)=\frac{\varphi(x)}{x(x-1)}.$$

Dérivons (26) par rapport à x, il vient

$$\frac{\sigma(x)}{\psi(x)}\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{(x-t_k)^2}=\left[\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}-\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right]\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma(\lambda_j)}{\psi'(\lambda_j)}\,\frac{M_j}{x-\lambda_j}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\sigma(\lambda_j)}{\psi'(\lambda_j)}\,\frac{M_j}{(x-\lambda_j)^2};$$

égalons les résidus des deux membres en $x=\lambda_j$; nous en déduirons l'équation

$$(27)\qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{(\lambda_j-t_k)^2}=\sum_{l=1}^{n}{}' \frac{\sigma(\lambda_l)\psi'(\lambda_j)}{\sigma(\lambda_j)\psi'(\lambda_l)}\,\frac{M_l}{\lambda_l-\lambda_j}+\left[\frac{\sigma'(\lambda_j)}{\sigma(\lambda_j)}-\frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)}\right]M_j,$$

et par suite l'élimination cherchée. En définitive, l'équation (23) s'écrira en vertu de (24) et (27)

$$\begin{aligned}
&\frac{\varphi'(t_i)}{2\psi(t_i)}\frac{(\lambda_j-t_i)\psi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)}\frac{\partial \mathrm{L}_j}{\partial t_i}\\
&\quad=\frac{\partial q_j}{\partial \lambda_j}-\left[\frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)}-\frac{1}{\lambda_j}-\frac{1}{\lambda_j-1}-\frac{1}{\lambda_j-t_i}-\frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)}\right]\\
&\qquad\times\left[\left(\frac{1}{\lambda_j}+\frac{1}{\lambda_j-1}\right)\frac{\mathrm{L}_j}{2}-\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j-1)}\right]+\frac{(\lambda_j-t_i)\psi'(\lambda_j)}{\varphi(k_j)}\\
&\qquad\times\sum_{l=1}^{n}{}^{j}\frac{\psi(\lambda_l)}{(\lambda_l-t_i)\psi'(\lambda_l)}\left[\frac{3}{2(\lambda_l-\lambda_j)^3}+\frac{\lambda_j(\lambda_j-1)\mathrm{L}_j-(2\lambda_j-1)}{2\lambda_l(\lambda_l-1)(\lambda_l-\lambda_j)^2}\right]\\
&\quad-\left(\frac{\mathrm{L}_j^2}{4}-q_j\right)\left[\frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)}-\frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)}\right]\\
&\quad-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}{}^{j}\frac{1}{\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-\lambda_l)^2}[\lambda_l(\lambda_l-1)\mathrm{L}_l-(2\lambda_l-1)]\\
&\quad+\left[\frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)}-\frac{1}{\lambda_j}-\frac{1}{\lambda_j-1}-\frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)}\right]\sum_{l=1}^{n}{}^{j}\frac{\lambda_l(\lambda_l-1)}{2\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-\lambda_l)}\left(\mathrm{L}_l-\frac{1}{\lambda_l}-\frac{1}{\lambda_l-1}\right)\\
&\quad-\sum_{l=1}^{n}{}^{j}\frac{\varphi(\lambda_l)\psi'(\lambda_j)}{\psi'(\lambda_l)\varphi(\lambda_j)(\lambda_l-\lambda_j)}\left(\frac{\mathrm{L}_l^2}{4}-q_l\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}{}^{j}\frac{\varphi(\lambda_l)\psi'(\lambda_j)}{\lambda_l(\lambda_l-1)(\lambda_l-\lambda_j)\varphi(\lambda_j)\psi'(\lambda_l)}\sum_{g=1}^{n}{}^{l}\frac{\lambda_g(\lambda_g-1)}{\lambda_l-\lambda_g}\left(\mathrm{L}_g-\frac{1}{\lambda_g}-\frac{1}{\lambda_g-1}\right).
\end{aligned}$$

En développant l'équation précédente par des calculs analogues à ceux que nous avons indiqués antérieurement (n° 7) et où, notamment, le calcul des résidus des fonctions rationnelles d'une variable auxiliaire x joue un rôle essentiel, on trouve l'équation suivante (¹) :

$$(\mathrm{F}_n)\quad\begin{aligned}
\frac{\partial^2\lambda_j}{\partial t_i^2}&=\frac{1}{2}\left[\frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)}-\frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)}\right]\left(\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_i}\right)^2-\left[\frac{\varphi''(t_i)}{2\varphi'(t_i)}-\frac{\psi'(t_i)}{\psi(t_i)}\right]\frac{\partial\lambda_j}{\partial\lambda_i}\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}{}^{j}\frac{\varphi(\lambda_j)\psi'(\lambda_l)(\lambda_l-t_i)^2}{\varphi(\lambda_l)\psi'(\lambda_j)(\lambda_j-t_i)^2(\lambda_j-\lambda_l)}\left(\frac{\partial\lambda_l}{\partial t_i}\right)^2\\
&\quad-\sum_{l=1}^{n}{}^{j}\frac{\lambda_j-t_i}{(\lambda_l-t_i)(\lambda_l-\lambda_j)}\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_i}\frac{\partial\lambda_l}{\partial t_i}+2\frac{\psi^2(t_i)}{\varphi'^2(t_i)(\lambda_j-t_i)^2}\frac{\varphi(\lambda_j)}{\psi'(\lambda_j)}\\
&\quad\times\left[\sum_{k=1}^{n+3}\left(c_k+\frac{3}{4}\right)-2+\sum_{k=1}^{n+2}{}^{i}\frac{\varphi'(t_k)}{\psi(t_k)}\frac{c_k+\frac{1}{4}}{\lambda_j-t_k}+\frac{\varphi'(t_i)}{\psi(t_i)}\frac{c_i}{\lambda_j-t_i}\right].
\end{aligned}$$

(¹) Les équations (F_n) sont au nombre de n^2 ; quand il y aura lieu de distinguer l'une d'elles où figure $\frac{\partial^2\lambda_j}{\partial t_i^2}$, j'emploierai la notation (F_i^j).

Pour $n=1$ on retrouve, comme on devait s'y attendre, l'équation VI découverte par M. Gambier et M. Richard Fuchs; j'écrirai encore l'équation (F_1^1) (pour $n=2$), en posant $t_1=t$, $t_2=u$, $\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=\mu$, $c_3=a$, $c_4=b$, $c_1=c$, $c_2=d$, $c_5=k$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}=&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-t}+\frac{1}{\lambda-u}-\frac{1}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right)^2\\
&-\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t-u}-\frac{1}{t-\lambda}-\frac{1}{t-\mu}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial t}\\
&+\frac{1}{2}\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-u)(\mu-t)}{\mu(\mu-1)(\mu-u)(\lambda-t)(\mu-\lambda)}\left(\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)^2-\frac{\lambda-t}{(\mu-t)(\mu-\lambda)}\frac{\partial\lambda}{\partial t}\frac{\partial\mu}{\partial t}\\
&+\frac{2\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)(\lambda-u)(\mu-t)^2}{t^2(t-1)^2(t-u)^2(\lambda-\mu)}\\
&\times\left[a+b+c+d+k+\frac{7}{4}-\frac{tu}{\mu}\frac{a+\frac{1}{4}}{\lambda^2}+\frac{(t-1)(u-1)}{\mu-1}\frac{b+\frac{1}{4}}{(\lambda-1)^2}\right.\\
&\left.\qquad+\frac{t(t-1)(t-u)}{\mu-t}\frac{c}{(\lambda-t)^2}+\frac{u(u-1)(u-t)}{\mu-u}\frac{d+\frac{1}{4}}{(\lambda-u)^2}\right],
\end{aligned}
$$

et dans le cas $n=2$, les équations (f_2) s'écrivent

$$
\begin{aligned}
\frac{t(t-1)}{t-\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial t}+\frac{u(u-1)}{u-\mu}\frac{\partial\lambda}{\partial u}&=\frac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda-\mu},\\
\frac{t(t-1)}{t-\lambda}\frac{\partial\mu}{\partial t}+\frac{u(u-1)}{u-\lambda}\frac{\partial\mu}{\partial u}&=\frac{\mu(\mu-1)}{\mu-\lambda}.
\end{aligned}
$$

Les équations (f_n, F_n) renferment seulement $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comme fonctions inconnues; ces équations étant supposées intégrées, les β_j seront donnés en fonction de $t_1, \ldots, t_n$ par les équations (16) et les α_k par les formules

$$\alpha_k=\frac{\psi(t_k)}{\sigma'(t_k)}\sum_{l=1}^{n}\frac{\sigma(\lambda_l)}{\psi'(\lambda_l)}\frac{M_l}{t_k-\lambda_l}$$

qu'on déduit de (26) en faisant $x=t_k$ dans cette dernière équation. Les coefficients de la fonction $p(x)$ qui figure dans (E_n) sont alors complètement déterminés et la résolution du problème énoncé au n° 1 *se trouve ainsi ramenée à l'intégration du système* (f_n, F_n).

II. Étude du système (f_n, F_n).

10. La solution générale du système (f_n, F_n) dépend de $2n$ constantes arbitraires au plus; nous allons démontrer tout d'abord que *ce*

nombre est effectivement atteint, comme nous l'avions annoncé (n° 10); autrement dit, le système (f_n, F_n) est *complètement intégrable*.

Dans ce but, j'établirai d'abord que les équations [1] (f^j_{ik}) et (F^j_i) sont conséquences des équations (f^j_{1k}) et (F^j_1). Le premier point résulte immédiatement de la forme du système (f_n); quant au second point, sa vérification directe serait très laborieuse; aussi j'emploierai l'artifice suivant.

Appelons $\Phi_i(x)$ le premier membre de (12); si les relations (f^j_{1k}) sont vérifiées, il en est de même des relations (11) correspondantes et l'on a par suite

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial t_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_k} + B_k \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - B_1 \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} - 2\left(\Phi_k \frac{\partial B_1}{\partial x} - \Phi_1 \frac{\partial B_k}{\partial x}\right) = 0,$$

les équations (F^j_1) étant vérifiées, il en est de même de $\Phi_1(x) = 0$; on a donc l'identité suivante en x :

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial t_1} - B_1 \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} - 2\frac{\partial B_1}{\partial x}\Phi_k = 0. \tag{28}$$

Soit, dans le voisinage de $x = \lambda_j$,

$$\Phi_k = \frac{A}{(x-\lambda_j)^m} + \ldots \qquad (m = 4, 3, 2, 1, 0 - 1);$$

le premier membre de l'équation (28) possède en $x = \lambda_j$ un pôle d'ordre $m + 2$ dont le coefficient est

$$-(m+2)\frac{A\,\varphi(\lambda_j)}{(\lambda_j - t_1)\,\psi'(\lambda_j)}\,\frac{\psi(t_1)}{\varphi'(t_1)};$$

il ne peut donc être nul que si $A = 0$ (ou $m = -2$), et par suite la fonction $\Phi_k(x)$ possède à distance finie n zéros d'ordre 2 au moins $x = \lambda_1, \ldots, \lambda_n$; de plus $x = \infty$ est un zéro d'ordre 3 : *elle est donc au moins d'ordre* $2n + 3$. Mais elle ne présente au plus que $n + 2$ pôles : $x = 0, 1, t_1, \ldots, t_n$, tous d'ordre 1, sauf $x = t_k$ qui peut être d'ordre 2 : *elle est donc au plus d'ordre* $n + 3$. Par conséquent $\Phi_k(x)$ est identiquement nulle, ce qui exige que les équations (F^j_k) soient toutes vérifiées ($k = 2, \ldots, n$) et notre lemme est démontré.

---

[1] Pour la notation, *voir* les notes des n^{os} 5 et 9.

11. Nous avons donc le droit de réduire le système (f_n, F_n) aux équations (f^j_{1k}) et (F^j_1). Donnons-nous alors les valeurs $(\lambda_j)_0$ et $\left(\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_1}\right)_0$ que prennent λ_j et $\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_1}$ pour $t_1 = t^0_1, \ldots, t_n = t^0_n$, les t^0_i étant un système de valeurs initiales numériques, arbitrairement choisies, mais *régulières*, c'est-à-dire *distinctes, finies et différentes de* o *et* 1 ; de plus, les $(\lambda_j)_0$ doivent être distincts, finis, différents de o et 1, et les $\left(\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_1}\right)_0$ doivent être finis. Cela étant, les équations (F^j_1) permettent de calculer par différentiations répétées toutes les dérivées de la forme $\frac{\partial^m\lambda_j}{\partial t^m_1}$, et à l'aide des équations (f^j_{1k}) on en déduit toutes les autres. On obtient d'ailleurs pour chacune de ces dérivées une valeur unique, indépendante de l'ordre adopté dans les différentiations : cela résulte des relations $\frac{\partial^3\lambda_j}{\partial t^2_1\,\partial t_i} = \frac{\partial^3\lambda_j}{\partial t_i\,\partial t^2_1}$ et $\frac{\partial^3\lambda_j}{\partial t_i\,\partial t_k\,\partial t_1} = \frac{\partial^3\lambda_j}{\partial t_k\,\partial t_i\,\partial t_1}$ qu'on vérifierait sans difficulté. Il est donc bien établi que le système (f_n, F_n) est complètement intégrable et qu'il est possible de former les développements en séries de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ordonnés par rapport aux puissances croissantes de $t_1 - t^0_1, \ldots, t_n - t^0_n$ et répondant aux conditions initiales précédentes.

12. Nous attribuerons dorénavant à $t_2, \ldots, t_n$ des valeurs fixes, de façon à considérer $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ comme fonctions de la seule variable t_1. Les développements du n° 11 seront convergents par rapport à t_1 tant que t_1 sera intérieur au cercle décrit de t^0_1 comme centre et passant par le point singulier $t_1 = a$ de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, le plus rapproché de t^0_1. Nous allons établir que si a est régulier (n° 11), il ne saurait être qu'un pôle pour les combinaisons symétriques élémentaires $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$: autrement dit, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ considérées comme fonctions de l'un quelconque des paramètres, soit t_1, sont MÉROMORPHES *en tout point du plan* (t_1) *distinct de* $t_2, \ldots, t_n$, o, 1, ∞.

En particulier, pour $n = 1$, le système (f_n, F_n) se réduit, comme nous l'avons vu, à l'équation VI qui reproduit par dégénérescence les équations irréductibles du second ordre et du premier degré en λ'', à points critiques fixes : on retrouve ainsi les résultats de M. Painlevé.

13. Tout d'abord, j'établirai une propriété fondamentale du système (f_n, F_n).

Remplaçons t_i par $a_i + \varepsilon t_i$, où les a_i sont des constantes régulières. Lorsque ε tend vers o, le système (f_n, F_n) tend vers un système *simplifié* [1] (f'_n, F'_n) bien remarquable, que nous allons intégrer. Ce système s'écrit :

$$(f'_n) \qquad \frac{\omega'(a_i)(\lambda_j - a_i)}{\psi(a_i)} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} - \frac{\omega'(a_k)(\lambda_j - a_k)}{\psi(a_k)} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_k} = 0,$$

$$(F'_n) \qquad \frac{\partial^2 \lambda_j}{\partial t_i^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{\omega'(\lambda_j)}{\omega(\lambda_j)} - \frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)}\right]\left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n}{}' \frac{\omega(\lambda_j)\psi'(\lambda_l)(\lambda_l - a_i)^2}{\omega(\lambda_l)\psi'(\lambda_j)(\lambda_j - a_i)^2(\lambda_j - \lambda_l)}\left(\frac{\partial \lambda_l}{\partial t_i}\right)^2$$
$$+ \sum_{l=1}^{n}{}' \frac{\lambda_j - a_i}{(\lambda_j - \lambda_l)(\lambda_l - a_i)} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} \frac{\partial \lambda_l}{\partial t_i},$$

en désignant par $\omega(x)$ le polynome $x(x-1)(x-a_1)\dots(x-a_n)$.

Pour intégrer le système (f'_n, F'_n) revenons aux équations (16), (17), (18), d'où nous avons tiré le système (f_n, F_n) [2], et posons :

$$\frac{\beta_j}{\lambda_j(\lambda_j - 1)} = \frac{\beta'_j}{\varepsilon}, \qquad \alpha_k = \frac{\alpha'_k}{\varepsilon^2};$$

nous aurons à la limite

$$(16') \qquad \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} = \frac{2\psi(a_i)\,\omega(\lambda_j)}{\omega'(a_i)\psi'(\lambda_j)(\lambda_j - a_i)} \beta'_j,$$

$$(17') \qquad \beta'_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha'_k}{\lambda_j(\lambda_j - 1)(\lambda_j - a_k)},$$

$$(18') \qquad \frac{\partial \alpha'_k}{\partial t_1} = 0.$$

D'après (18'), l'équation (17') s'écrit

$$\beta'_j = -\frac{\sqrt{\omega(\lambda_j)\,P(\lambda_j)}}{2\,\omega(\lambda_j)} = -\frac{\sqrt{f(\lambda_j)}}{2\,\omega(\lambda_j)},$$

---

(1) *Voir* la note 1 de la page 13.

(2) On pourrait se servir aussi des équations du n° 15.

en posant $f(x)=\omega(x)P(x)$ et $P(x)=A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0$, *les* A *étant des constantes arbitraires*. L'équation (16') donne alors

$$(29)\qquad \frac{\partial\lambda_j}{\partial t_i}=-\frac{\psi(a_i)}{\omega(a_i)\psi'(\lambda_j)(\lambda_j-a_i)}\sqrt{f(\lambda_j)},$$

d'où résultent immédiatement les équations (f'_n) [dans l'hypothèse, bien entendu, où $\sqrt{f(\lambda_j)}$ est pris avec la même détermination quel que soit l'indice i de l'équation (29)]. On vérifie aisément que (F'_n) est également conséquence de (29) en se servant de la relation

$$\frac{P'(\lambda_j)}{\psi'(\lambda_j)}-\frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'^2(\lambda_j)}P(\lambda_j)=\sum_{l=1}^{n}{}^{j}\frac{P(\lambda_l)}{(\lambda_j-\lambda_l)\psi'(\lambda_l)},$$

qui exprime que la somme des résidus de $\dfrac{P(x)}{(x-\lambda_j)\psi(x)}$ est nulle. Or les équations (29) équivalent au système d'équations aux différentielles totales :

$$\frac{1}{\lambda_j-a_1}\frac{\psi(a_1)}{\omega'(a_1)}dt_1+\ldots+\frac{1}{\lambda_j-a_n}\frac{\psi(a_n)}{\omega'(a_n)}dt_n=-\frac{\psi'(\lambda_j)}{\sqrt{f(\lambda_j)}}d\lambda_j\qquad (j=1,\ldots,n),$$

d'où l'on tire, en suivant la même voie que pour résoudre les équations (25) par rapport aux α_k (fin du nº 9) :

$$\frac{t_i-t_i^0}{a_i(a_i-1)}=\sum_{j=1}^{n}\int_{\lambda_j^0}^{\lambda_j}\frac{\omega(\lambda_j)\,d\lambda_j}{\lambda_j(\lambda_j-1)(\lambda_j-a_i)\sqrt{f(\lambda_j)}}\qquad (i=1,\ldots,n).$$

Les combinaisons symétriques élémentaires $\sigma_1=\Sigma\lambda_j$, $\sigma_2=\Sigma\Sigma\lambda_j\lambda_l$, ... sont donc des *fonctions hyperelliptiques de genre n des paramètres* $t_1,\ldots,t_n$ (¹).

14. Revenons maintenant aux équations (F_1^j). Soit t_1^0 un point régu-

---

(¹) Il résulte de l'intégration du système simplifié que *a fortiori* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ ne sauraient avoir leurs points critiques fixes pour le système (f_n, F_n). On peut même aller plus loin : Soient

$$\lambda_j=\sum_{m=0}^{+\infty}\varepsilon^m\lambda_j^{(m)}$$

les développements des λ suivant les puissances de ε et soit $t_1=a$ un point critique, tel qu'un lacet simple autour de a permute $\lambda_j^{(0)}$ en $\lambda_l^{(0)}$; les équations auxquelles satisfont λ_j et λ_l se déduisant l'une de l'autre par permutation de λ_j et λ_l, on voit de proche en proche que $\lambda_j^{(m)}$ sera permuté en $\lambda_l^{(m)}$, et par suite, λ_j en λ_l.

lier du plan t_1; *il existe une solution des équations* (F_1^j) *définie pour* $t_1 = t_1^0$ *par les conditions initiales suivantes :* $\lambda_j = t_1^0$ $(j = 1, \ldots, q_1)$; $\lambda_j = t_i$ $(j = q_{i+1} + 1, \ldots, q_i;\ i = 2, \ldots, n+3)$; $\lambda_j = a_j$ $(j = q_{n+3} + 1, \ldots, n)$, les a_j étant réguliers et non nécessairement distincts. (Bien entendu les égalités $q_{i-1} = q_i$ ou $q_{n+3} = n$ sont vérifiées par un certain nombre d'indices.) Les intégrales définies par ces conditions dépendent en outre de n constantes arbitraires, se répartissent en $2^{q_{n+3}}$ familles algébriquement distinctes [1] et leurs combinaisons symétriques sont méromorphes en $t_1 = t_1^0$.

En effet, pour former les développements précédents, il suffit de poser $t_1 = t_1^0 + \varepsilon T$ et de développer suivant les puissances de ε les intégrales qui prennent pour $T = 0$, *quel que soit* ε, les valeurs initiales données. Soit $\lambda_j = \sum_{m=0}^{+\infty} \varepsilon^m \lambda_j^{(m)}$; les fonctions $\lambda_j^{(0)}$ doivent satisfaire à ces conditions initiales, tandis que les fonctions $\lambda_j^{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ doivent s'annuler pour $T = 0$. Mais il existe toujours un système de fonctions $\lambda_j^{(0)}$ répondant à ces conditions, et leurs combinaisons symétriques sont méromorphes; quant aux $\lambda_j^{(m)}$, ils se déduisent des $\lambda_j^{(0)}$ à l'aide de quadratures. Il résultera d'ailleurs de la suite du raisonnement que les développements analytiques ainsi obtenus pour les combinaisons symétriques des λ_j sont effectivement méromorphes en $t_1 = t_1^0$ [2].

15. Nous allons former maintenant *n polynomes $u_1, \ldots, u_n$ du second degré en $\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_1}$, à coefficients rationnels en λ_j, et qui prennent des valeurs finies quand on remplace les λ_j par les développements précédents* (sauf toutefois si l'une des égalités $\lambda_j = g_j$ est vérifiée, les g_j étant des valeurs régulières arbitrairement choisies une fois pour toutes).

A cet effet, posons

$$\frac{\beta_j}{\lambda_j(\lambda_j - 1)} = \delta_j \quad (j = 1, \ldots, n), \qquad \frac{\alpha_i}{t_i(t_i - 1)} = \gamma_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{t_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\lambda_j} = \gamma_{n+1}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1 - t_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{1 - \lambda_j} = \gamma_{n+2};$$

---

(1) *Cf.* PAINLEVÉ, *Bull. Soc. math.*, t. XXVIII, 1900, p. 234.

(2) *Cf.* PAINLEVÉ, *Ibid.*, p. 228.

l'équation linéaire (E_n) s'écrira

$$\frac{1}{y}\frac{d^2 y}{dx^2}=\sum_{i=1}^{n+2}\left[\frac{c_i}{(x-t_i)^2}+\frac{\gamma_i}{x-t_i}\right]+\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{3}{4(x-\lambda_j)^2}+\frac{\delta_j}{x-\lambda_j}\right]+\frac{c_{n+3}}{x(x-1)},$$

et à l'aide des équations (16) et (17), on obtiendra sans peine les équations suivantes :

$$(30)\quad\left\{\begin{aligned}
\gamma_1 &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\varphi'(t_1)}{4\psi(t_1)}\frac{\psi'(\lambda_j)(t_1-\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)}\left(\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_1}\right)^2\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\psi(t_1)\varphi(\lambda_j)}{\varphi'(t_1)\psi'(\lambda_j)(t_1-\lambda_j)}\left\{q_j+\frac{1}{4}\left[\frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)}-\frac{1}{\lambda_j-t_1}-\frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)}\right]^2\right\}\right),\\
\gamma_k &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\varphi'(t_1)}{4\psi(t_1)}\frac{\psi'(\lambda_j)(t_1-\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)}\frac{(t_1-\lambda_j)\psi(t_k)\varphi'(t_1)}{(t_k-\lambda_j)\psi(t_1)\varphi'(t_k)}\left(\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_1}\right)^2\right.\\
&\qquad-\frac{t_1-t_k}{2(\lambda_j-t_k)^2}\frac{\psi(t_k)\varphi'(t_1)}{\psi(t_1)\varphi'(t_k)}\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_1}\\
&\qquad-\frac{\psi(t_k)\varphi(\lambda_j)}{\varphi'(t_k)\psi'(\lambda_j)(t_k-\lambda_j)}\\
&\qquad\times\left\{q_j+\frac{1}{4}\left[\frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)}-\frac{1}{\lambda_j-t_1}-\frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)}\right]^2\right.\\
&\qquad\qquad\left.\left.-\frac{(t_1-t_k)^2}{2(\lambda_j-t_1)^2(\lambda_j-t_k)^2}\right\}\right)\quad(k\neq 1).
\end{aligned}\right.$$

Les expressions précédentes vérifient des équations différentielles très simples :

$$(31)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\varphi'(t_1)}{\psi(t_1)}\frac{\partial\gamma_1}{\partial t_1} &= \gamma_1\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\lambda_j)}{(\lambda_j-t_1)^3\psi'(\lambda_j)}-1\right]+2c_1\sum_{j=1}^{n}\frac{\varphi(\lambda_j)}{(\lambda_j-t_1)^4\psi'(\lambda_j)},\\
\frac{\varphi'(t_1)}{\psi(t_1)}\frac{\partial\gamma_k}{\partial t_1} &= \frac{\varphi'(t_k)}{(t_1-t_k)\psi(t_k)}\left\{\gamma_k+2c_k\left[\frac{\varphi''(t_k)}{2\varphi'(t_k)}-\frac{1}{t_k-t_1}-\frac{\psi'(t_k)}{\psi(t_k)}\right]\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Les équations (F_1^j), résultant (¹) du système (30), (31) par élimination de γ, peuvent être remplacées par ce système.

Donnons-nous maintenant en $t_1=a$ un système de conditions initiales pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, assujetti à cette seule restriction *qu'aucun des*

(¹) Il suffit d'effectuer le calcul dans le cas $n=1$ (traité par M. R. Fuchs) pour se rendre compte que cette voie est en réalité beaucoup moins simple que celle que nous avons adoptée.

λ_j *ne prenne la valeur* t_k (ou la valeur a); formons comme au n° 14 les développements des λ_j répondant à ces conditions initiales et substituons-les dans γ_k (ou γ_1). Je dis que γ_k (ou γ_1) *prendra une valeur finie arbitraire.*

Pour le voir, il suffit d'observer que dans (31) les coefficients de γ_k et c_k (ou de γ_1 et c_1) sont sûrement finis si la restriction précédente est remplie (même si, parmi les valeurs initiales, il en est d'infinies); si γ_k (ou γ_1) devenait infini d'ordre r par exemple, il y aurait donc dans l'équation (31) correspondante un terme d'ordre $r+1$ qui ne saurait être détruit par aucun autre. D'autre part l'intégrale du système (30), (31) (équivalent aux équations F_1^j) est définie par les valeurs initiales de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$: la valeur prise tout à l'heure par γ_k (ou γ_1) doit donc être arbitraire.

16. Ce point établi, il est facile de former n expressions $u_1, \ldots, u_n$ jouissant de la propriété énoncée au début du n° 15 : pour cela, *nous ajouterons à* γ_i *un terme correctif* ζ_i, de telle sorte que les expressions obtenues

$$u_1 = \gamma_1 + \zeta_1, \qquad u_k = \gamma_k + \zeta_k \qquad (k = 2, \ldots, n), \tag{32}$$

ne soient plus infinies si l'un des λ prend pour $t_1 = a$ la valeur a (ou t_k); par contre elles le deviendront si l'une des égalités $\lambda_j = g_j$ est vérifiée, g_j étant une valeur régulière arbitrairement choisie.

Afin de choisir n fonctions $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ répondant aux conditions précédentes, nous remarquerons que les γ et les δ vérifient l'identité

$$\gamma_1 + \ldots + \gamma_n + \gamma_{n+1} + \gamma_{n+2} + \delta_1 + \ldots + \delta_n = 0.$$

Supposons que parmi les λ_j il y en ait plusieurs, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$, qui pour $t_1 = a$ prennent par exemple la valeur a; γ_1 deviendra infini lorsqu'on substituera dans son expression (30) les développements de $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$; mais γ_k ($k \neq 1$) restera fini pour $\lambda_j = a$ ($j = 1, \ldots, \nu$). Il nous suffira donc d'extraire de l'expression $\Sigma\delta_j$ la partie qui devient infinie, à savoir :

$$\theta_1 = \frac{\varphi'(t_1)}{2\psi(t_1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi'(\lambda_j)(\lambda_j - t_1)}{\varphi(\lambda_j)} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_1};$$

nous substituerons à θ_1, qui devient infini pour $\lambda_j = t_k$, l'expression

$$\theta'_1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\psi'(\lambda_j)}{2\psi(t_1)} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_1},$$

qui a même partie principale pour $\lambda_j = a$ $(j = 1, \ldots, \nu)$. Mais θ'_1 est encore infini s'il existe des λ_j qui deviennent infinis en a : en définitive, nous remplaçons θ_1 par

$$(33)\quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_1 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\psi'(\lambda_j)(t_1 - g_j)^n}{\psi(t_1)(\lambda_j - g_j)^n} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_1}, \\ \text{et nous prendrons de même} \\ \zeta_k = \dfrac{\varphi'(t_1)}{2\varphi'(t_k)} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\psi'(\lambda_j)(\lambda_j - t_1)(t_k - g_j)^n}{\psi(t_1)(\lambda_j - t_k)(\lambda_j - g_j)^n} \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_1} + \frac{\psi'(t_k)}{2\psi(t_k)}. \end{array} \right.$$

On déduit des équations (31), (32), (33) que $u_1, \ldots, u_n$ vérifient un système de la forme

$$(34)\qquad \frac{\partial u_k}{\partial t_1} = \sum_{l=1}^{n} \mathrm{A}_{kl} u_l + \sum_{l=1}^{n} \sum_{g=1}^{n}{}' \mathrm{B}_{klg} \frac{\partial \lambda_l}{\partial t_1} \frac{\partial \lambda_g}{\partial t_1} + \sum_{l=1}^{n} \mathrm{C}_{kl} \frac{\partial \lambda_l}{\partial t_1} + \mathrm{D}_k,$$

où les dérivées $\dfrac{\partial \lambda_l}{\partial t_l}$ sont supposées remplacées par leurs valeurs tirées de (32), et où les A, B, C, D désignent des fonctions rationnelles de λ et de t_1 dont il nous suffit de savoir qu'elles restent finies pour toute valeur attribuée à λ_j, sauf $\lambda_j = g_j$.

17. Réciproquement, supposons que *lorsque t_1 tend vers a, $u_1, \ldots, u_n$ restent finis*, soit $|u_j| < \mathrm{A}$. Nous allons montrer que les combinaisons symétriques $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont méromorphes pour $t_1 = a$.

Pour simplifier le langage, faisons une transformation homographique préalable qui remplace $t_1 = \infty$ par une valeur finie t_{n+3}, et supposons d'abord *que $|\lambda_j - a|$ et $|\lambda_j - t_k|$ $(k \neq 1)$ restent bornés inférieurement lorsque t_1 tend vers a*. Il résulte [1] des expressions de

---

[1] La vérification, immédiate pour $n = 1$, devient intuitive si l'on observe que les

$u_1, \ldots, u_n$ que les dérivées $\frac{\partial \sigma_j}{\partial t_1}$ sont bornées supérieurement. Il suffit alors d'appliquer aux équations en $\sigma_1, \ldots, \sigma_n, u_1, \ldots, u_n$, que nous avons substituées à (F_1^j), le théorème de Cauchy, sous la forme précisée par M. Painlevé, pour voir que les combinaisons symétriques $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, définies pour une valeur de t_1 située sur le chemin $\overline{t_1 a}$ à l'aide de conditions initiales satisfaisant aux conditions précédentes, sont holomorphes dans un cercle de rayon *borné inférieurement*, et qui, par conséquent, finit par comprendre le point a à son intérieur lorsque t_1 est pris suffisamment voisin de a.

18. Supposons donc que lorsque t_1 tend vers a, l'une au moins des quantités $|\lambda_j - a|$ ou $|\lambda_j - t_k|$ devienne très petite; substituons aux équations (F_1^j) le système (32), (34) et considérons une intégrale de ce système définie en t_1 par des conditions initiales (λ_j, u_j) assujetties à cette seule restriction que pour $|t_1 - a| < \varepsilon'$ on ait $|\lambda_j - g_j| > \varepsilon$ et $|u_j| < A$. Comme précédemment (n° 17), les dérivées $\frac{\partial \sigma_j}{\partial t_1}$ s'expriment algébriquement en fonction de $t_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, u_1, \ldots, u_n$ et ont en t_1 des valeurs finies pour des conditions initiales satisfaisant à la restriction précédente; d'ailleurs, le nombre des déterminations de l'ensemble $\frac{\partial \sigma_1}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \sigma_n}{\partial t_1}$ est précisément égal au nombre $2^{q_{n+3}}$ des familles d'intégrales (n° 14). Cela suffit pour qu'on puisse substituer à (F_1^j), par un procédé connu [1], un système différentiel régulier pour les conditions initiales considérées et dont l'intégrale est holomorphe dans un cercle de rayon supérieur à une quantité positive r (ne dépendant que de ε et A). Il suffit de choisir t_1 à une distance de a inférieure à r et ε' pour voir que l'intégrale considérée est holomorphe pour $t_1 = a$.

---

expressions de $\frac{\partial \sigma_j}{\partial t_1}$ en fonction de $u_1, \ldots, u_n$ conservent la même forme dans le cas particulier qui sera examiné plus loin (n° 27, p. 105), cas où le fait énoncé a nécessairement lieu. On aurait pu aussi résoudre les équations (32) par rapport aux $\frac{\partial \sigma_j}{\partial t_1}$ à l'aide d'approximations successives, en posant $t_1 = a + \varepsilon T$ et développant suivant les puissances de ε; pour $\varepsilon = 0$, les équations (29) montrent que les dérivées $\frac{\partial \sigma_j}{\partial t_1}$ sont limitées, etc.

(1) PAINLEVÉ, *Bull. Soc. math.*, t. XXVIII, 1900, p. 229.

En définitive si $|\lambda_j - g_j|$ reste borné inférieurement lorsque t_1 tend vers a_1, il faut, pour que $t_1 = a$ soit un point transcendant de $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, que le MODULE MAXIMUM des u_k croisse indéfiniment lorsque t_1 tend vers a. Je vais montrer que cette hypothèse est absurde.

19. J'exclurai du raisonnement tous les u_i pour lesquels l'*une* des n quantités $|u_i|$ et $\left|\frac{u_i}{u_j}\right|$ $(j \neq i)$ reste bornée (supérieurement), lorsque t_1 tend vers a : aussi bien, je prouverai qu'il existe des points t_1 arbitrairement rapprochés de a, pour lesquels $|u_j|$ est très petit ($j = 1, \dots, \nu$ désignant un u_i non exclu) ; il en résultera évidemment qu'en ces points le module maximum de $u_1, \dots, u_n$ est borné (supérieurement), d'où nous conclurons que a ne peut être transcendant.

Nous allons démontrer tout d'abord qu'il existe nécessairement des points $t_1 = \tau$ pour lesquels le module de l'*un* au moins des u_j $(j = 1, \dots, \nu)$ est très petit. Supposons, en effet, qu'il existe un nombre positif α, tel que t_1 tendant vers a, on ait constamment

$$|u_j| > \alpha \qquad (j = 1, \dots, \nu), \tag{35}$$

et prenons [1] deux quelconques des u_j ; par hypothèse, il y a des points $t_1 = \theta'$ pour lesquels $\left|\frac{u_1}{u_2}\right|$ est très grand, et d'autres $t_1 = \theta''$ pour lesquels $\left|\frac{u_2}{u_1}\right|$ est très grand : il existe donc des points $t_1 = \theta$ pour lesquels on a, par exemple, $\left|\frac{u_2}{u_1}\right| = 1$; on aura alors

$$\frac{u_2(\theta'')}{u_1(\theta'')} = e^{\int_\theta^{\theta''} \left(\frac{u'_2}{u_2} - \frac{u'_1}{u_1}\right) dt_1};$$

mais, d'après les équations (34), on voit que si l'inégalité (35) est vérifiée et *si* $\left|\frac{u_j}{u_1}\right|$ *et* $\left|\frac{u_j}{u_2}\right|$ *sont bornés supérieurement* $(j = 3, \dots, \nu)$, $\frac{u'_2}{u_2} - \frac{u'_1}{u_1}$ est également borné ; d'autre part θ pouvant être pris arbitrairement près de a, l'intervalle d'intégration est aussi petit qu'on le veut et $\frac{u_2(\theta'')}{u_1(\theta'')}$ est alors aussi voisin de 1 qu'on le veut, ce qui est absurde.

---

[1] Ceci suppose implicitement $n > 1$; dans le cas de $n = 1$ le raisonnement est notablement plus simple. (*Cf.* PAINLEVÉ, *Bull. Soc. math.*, t. XXVIII, 1900, p. 235.)

20. Nous avons admis toutefois que $\left|\frac{u_j}{u_1}\right|$ et $\left|\frac{u_j}{u_2}\right|$ restaient bornés dans les intervalles $\overline{00''}$. Supposons qu'il en soit autrement; il existe un point $0'''$, situé entre $0''$ et a, et tel qu'on a, pour une certaine valeur g de l'indice j : $\left|\frac{u_g}{u_1}\right| = 1$ $\left(\text{ou } \left|\frac{u_g}{u_2}\right| = 1\right)$, et $|u_g| > |u_j|$ $(g \neq j; g = 3, \ldots, \nu)$ et tel enfin qu'il n'y a entre $0''$ et $0'''$ aucun autre point où les conditions précédentes seraient vérifiées pour une valeur g' de j $(g \gtreqless g' \neq 1, 2)$. On raisonnerait *de proche en proche*, à partir de u_g, sur $u_3, \ldots, u_\nu$, de la même façon que sur u_1 et u_2 et l'on prouverait que dans l'intervalle $\overline{00''}$ les rapports $\left|\frac{u_j}{u_1}\right|$ et $\left|\frac{u_j}{u_2}\right|$ *sont nécessairement bornés.*

Ainsi, pour que a soit transcendant (dans l'hypothèse $|\lambda_j - g_j| > \varepsilon$), il faut qu'il y ait des points $t_1 = \tau$, en lesquels la condition (35) n'est pas remplie, si petit qu'on ait choisi le nombre positif α. Lorsque $n = 1$, la non-transcendance de a en résulte immédiatement; par contre, pour $n > 1$, une difficulté se présente : le raisonnement précédent prouve seulement qu'il existe des points $t_1 = \tau_j$ $(j = 1, \ldots, \nu)$ pour lesquels $|u_j|$ est très petit, *le module des u restants pouvant dépasser toute limite en ces points*. Il s'agit de lever cette objection.

21. Soit τ_1 un point pour lequel on ait $|u_1| < \alpha$, α étant choisi arbitrairement petit; par hypothèse $\left|\frac{u_j}{u_1}\right|$ peut être très grand en τ_1 : montrons que cette circonstance ne peut avoir lieu. Comme $\left|\frac{u_1}{u_j}\right|$ doit prendre des valeurs très grandes, lorsque t_1 tend vers a, il existe un point τ'_1, situé entre τ_1 et a par exemple, et tel qu'on ait $\left|\frac{u_1(\tau'_1)}{u_j(\tau'_1)}\right| = 1$. Dans l'intervalle $\overline{\tau_1\tau'_1}$ les rapports $\left|\frac{u_g}{u_j}\right|$ $(g \neq j; g = 2, \ldots, n)$ sont bornés supérieurement (le raisonnement du n° 20 appliqué à u_j montre que l'hypothèse opposée est inadmissible). Il en résulte alors que $\left(\frac{u_1}{u_j}\right)'$ *est bornée dans cet intervalle;* on peut donc choisir τ_1 assez près de a pour satisfaire à l'égalité

$$\left|\frac{u_1(\tau_1)}{u_j(\tau_1)}\right| = \left|\frac{u_1(\tau'_1)}{u_j(\tau'_1)} + \varepsilon_1\right| = 1 + \varepsilon_2,$$

ε_1 et ε_2 étant arbitrairement petits, et par suite $u_j(\tau_1)$ est très petit et le point a ne saurait être transcendant.

22. Toutefois, nous avons admis une restriction : nous avons supposé vérifiées le long de $\overline{t_1^0 a}$ les inégalités $|\lambda_j - g_j| < \varepsilon$. Or, *a priori*, il est possible que t_1 tendant vers a, et si petite que soit la quantité positive ε, λ_j finisse par pénétrer dans un cercle de centre g_j, de rayon ε, et cela quel que soit le point (régulier) g_j et quel que soit le chemin $\overline{t_1^0 a}$, de longueur finie, tendant vers a. Je vais montrer que cette hypothèse est absurde : autrement dit, on peut toujours substituer au chemin primitif un nouveau chemin tendant vers a, de longueur finie, et pour lequel l'objection précédente ne se présente plus ou le long duquel $|\lambda_j - g_j|$ est borné inférieurement $(j = 1, \ldots, n)$. Afin de simplifier l'écriture, j'exposerai la démonstration pour $n = 2$, ce qui n'implique aucune restriction pour le cas général.

23. Soient (C_1) et (C_2) deux cercles de rayon ε décrits de g_1 et g_2 comme centres et $\overline{\tau_1 \tau_2}$ un segment de $\overline{t_1^0 a}$ le long duquel λ_1 ou λ_2 pénètre dans (C_1) ou (C_2). Nous pouvons supposer que le long de $\overline{\tau_1 \tau_2}$ $|\lambda_2 - t_k|$ et $|\lambda_2 - \lambda_1|$ $(k = 1, \ldots, 5)$ soient supérieurs à ε', ε' étant une quantité arbitrairement petite : autrement nous substituerions aux équations (F_1^1) et (F_1^2) un système (32), (34) en $\lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_1 \lambda_2$, u_1, u_2 (où g_1 et g_2 auraient de *nouvelles* valeurs) et la méthode que nous allons suivre s'appliquerait à ce système. Le long de $\overline{\tau_1 \tau_2}$ l'une au moins des dérivées $\dfrac{\partial \lambda_1}{\partial t_1}$ et $\dfrac{\partial \lambda_2}{\partial t_1}$ a un module très grand : si l'hypothèse contraire se réalisait, quelque voisin de a que soit $\overline{\tau_1 \tau_2}$, nous en conclurions, d'après le théorème de Cauchy, que a n'est pas transcendant. Soit alors A un nombre positif arbitrairement grand; excluons des segments $\overline{\tau_1 \tau_2}$ tous ceux (ou toutes les portions de ces segments) pour lesquels l'inégalité

$$\left|\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1}\right| \leqq A \tag{36}$$

n'est pas vérifiée. Pour les intervalles exclus, on aurait

$$\left|\frac{d\lambda_1}{d\lambda_2}\right| < A;$$

on leur appliquerait le raisonnement suivant, après permutation de λ_1 et λ_2. Prenons alors λ_1 pour variable; nous pourrons substituer aux équations (F_1^1) et (F_1^2) un système de la forme

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 t_1}{d\lambda_1^2} = (a + b\rho + c\rho^2)\dfrac{dt_1}{d\lambda_1} + d\left(\dfrac{dt_1}{d\lambda_1}\right)^2 + e\left(\dfrac{dt_1}{d\lambda_1}\right)^3, \\ \dfrac{d\rho}{d\lambda_1} = a_1 + b_1\rho + c_1\rho^2 + d_1\rho^3 + e_1\left(\dfrac{dt_1}{d\lambda_1}\right) + f_1\left(\dfrac{dt_1}{d\lambda_1}\right)^2, \\ \dfrac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = \rho, \end{cases}$$

les coefficients $a, \ldots, f_1$ désignant des fonctions de $t_1, \lambda_1, \lambda_2$ holomorphes pour t_1 voisin de a et $|\lambda_j - t_k|$, $|\lambda_2 - t_k|$ et $|\lambda_1 - \lambda_2|$ bornés inférieurement. Or, d'après notre hypothèse, $\dfrac{dt_1}{d\lambda_1}$ est très petit sur le segment $\overline{\tau_1\tau_2}$; écrivons alors

$$\frac{dt_1}{d\lambda_1} = v\left(\frac{dt_1}{d\lambda_1}\right)_0,$$

en désignant par $\left(\dfrac{dt_1}{d\lambda_1}\right)_0$ la valeur prise par $\dfrac{dt_1}{d\lambda_1}$ pour $t_1 = \tau_1$. Pour $\left(\dfrac{dt_1}{d\lambda_1}\right)_0 = 0$, ce système dégénère de la façon suivante :

$$(38)\qquad \begin{cases} \dfrac{dv}{d\lambda_1} = (a + b\rho + c\rho^2)v, \qquad \dfrac{dt_1}{d\lambda_1} = 0, \\ \dfrac{d\rho}{d\lambda_1} = a_1 + b_1\rho + c_1\rho^2 + d\rho^3, \\ \dfrac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = \rho; \end{cases}$$

le système (38) équivaut aux équations (F'_2) et admet une intégrale répondant aux conditions initiales $t_1 = \tau_1$, $\lambda_1 = \lambda_1^0$, $\lambda_2 = \lambda_2^0$, $\rho = \rho_0$, avec $|\rho_0| < A$, et λ_1^0, λ_2^0 vérifiant toujours les restrictions imposées au début du numéro. D'après les théorèmes classiques de M. Poincaré, on en déduit que pour $\left|\left(\dfrac{dt_1}{d\lambda_1}\right)_0\right| < \varepsilon'$, l'intégrale du système (37) peut s'écrire

$$\frac{dt_1}{d\lambda_1} = \left(\frac{dt_1}{d\lambda_1}\right)_0 (1 + \alpha),$$

α désignant une fonction de λ_1 holomorphe lorsque les conditions initiales satisfont aux inégalités indiquées plus haut, nulle pour $\left(\frac{dt_1}{d\lambda_1}\right)_0 = 0$ et de module arbitrairement petit [pour $\left(\frac{dt_1}{d\lambda_1}\right)_0$ assez petit].

Il suffit alors de répéter le raisonnement de M. Painlevé [1] pour voir qu'on peut remplacer le segment $\overline{\tau_1\tau_2}$ par un nouveau segment $\widehat{\tau_1\tau_2}$ de longueur comparable à celle du premier et le long duquel on a $|\lambda_1 - g_1| < \varepsilon$. Effectuons cette substitution pour tous les segments $\overline{\tau_1\tau_2}$ où l'on a $|\lambda_1 - g_1| < \varepsilon$, et nous aurons remplacé le chemin primitif $\overline{t_1^0 a}$ par un nouveau chemin $\mathcal{L}'$, de longueur comparable, et tel que t_1 décrivant $\mathcal{L}'$, λ_1 reste [sauf peut être le long d'intervalles incompatibles avec (36)] à une distance $\varepsilon(1 - k_1)$ bornée inférieurement d'un cercle (C_1') décrit de g_1 comme centre avec un rayon $k_1\varepsilon$ (k étant un nombre positif, inférieur à 1, arbitrairement choisi).

24. Nous allons montrer maintenant qu'on peut substituer à $\mathcal{L}'$ un chemin de longueur finie $\mathcal{L}''$, *tel que t_1 variant le long de $\mathcal{L}''$, λ_1 ne pénètre pas dans le cercle* (C_1') *et* $|\lambda_2 - g_2|$ *soit borné inférieurement.*

Admettons qu'il existe un nombre positif η tel que le long de tous les intervalles $\overline{\tau_1'\tau_2'}$ où l'on a [2] $|\lambda_2 - g_2| \leqq \varepsilon$ on ait en même temps $|\rho| > \eta$, et tel enfin que cette inégalité soit vérifiée le long de tous les segments $\widehat{\tau_1'\tau_2'}$ ayant mêmes extrémités que $\overline{\tau_1'\tau_2'}$ et pour lesquels on a $|\lambda_2 - g_2| \leqq \varepsilon$. Soient λ_2^1 et λ_2^2 les valeurs prises par λ_2 en τ_1' et τ_2', et λ_2' une valeur prise par λ_2 lorsque t_1 est intérieur à $\overline{\tau_1'\tau_2'}$. Quel que soit le chemin l' (évidemment régulier, après la déformation du n° 23) décrit par λ_2' à l'intérieur de (C_2), on peut lui substituer le plus petit l des arcs $\widehat{\lambda_2^1\lambda_2^2}$ de (C_2) à l'aide d'une transformation $\lambda_2 = \lambda_2' + \theta(t_1)$, où λ_2 désigne un point de cet arc, et où $|\theta| < 2\varepsilon$, pour t_1 situé dans l'intervalle $\tau_1'\tau_2'$. A la valeur λ_1' de λ_1 correspondant à λ_2', la transformation précédente substitue une nouvelle valeur λ_1 telle que

$$\lambda_1 - \lambda_1' = \int_{\lambda_2'}^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\rho};$$

(1) *Bull. Soc. math.*, t. XXVIII, 1900, p. 237-238.

(2) L'égalité n'ayant lieu qu'aux extrémités de l'intervalle.

on a donc

$$|\lambda_1 - \lambda'_1| < \frac{2\varepsilon}{\eta}.$$

Prenons ε'_2 égal au plus petit des nombres ε et $\frac{(1-k_1)\varepsilon\eta}{2}$, et soit (C'_1) le cercle décrit de g_2 comme centre avec ε'_2 comme rayon ; après la transformation précédente, λ_1 et λ_2 ne peuvent pénétrer à l'intérieur des cercles (C'_1) et (C'_2). D'ailleurs, *le chemin correspondant $\mathcal{L}''$ décrit par t_1 a une longueur finie,* comme on le voit en intégrant successivement l'égalité

$$\frac{dt_1}{d\lambda_2} = \left(\frac{dt_1}{d\lambda_1}\right)_{\lambda_2=\lambda_2^0} \frac{1+\alpha}{\rho}$$

le long des deux chemins l et l'.

25. Nous avons supposé que pour tous les intervalles $\widehat{\tau'_1\tau'_2}$ où $|\lambda_2 - g_2| \leqq \varepsilon$, on a en même temps $|\rho| > \eta$; nous allons lever cette restriction. Supposons que t_1 décrivant un de ces intervalles, ρ pénètre dans un cercle (Γ) de rayon arbitrairement petit η, décrit de l'origine du plan (ρ) comme centre. Nous allons substituer à $\widehat{\tau'_1\tau'_2}$ un segment de longueur comparable à celle du premier et *tel que t_1 le décrivant, ρ ne pénètre pas à l'intérieur de* (Γ), et que les conditions antérieures continuent à être vérifiées.

Le raisonnement est analogue aux précédents[1] : prenons ρ pour variable et remplaçons les équations (F_1^1) et (F_1^2) par un système donnant $\frac{d\lambda_1}{d\rho}, \frac{d\lambda_2}{d\rho} = \rho\frac{d\lambda_1}{d\rho}, \frac{dt_1}{d\rho} = \frac{dt_1}{d\lambda_1}, \frac{d\lambda_1}{d\rho}$ et $\frac{d^2t_1}{d\rho^2}$ en fonction de t, λ_1, λ_2, ρ et $\frac{dt_1}{d\lambda}$. Les équations (37) montrent que ce système est holomorphe en $\frac{dt_1}{d\lambda_1}$ et ρ, lorsque ces quantités sont suffisamment petites. Posons comme tout à l'heure $\frac{dt_1}{d\lambda_1} = \varphi\left(\frac{dt_1}{d\lambda_1}\right)_0$, $\left(\frac{dt_1}{d\lambda_1}\right)_0$ désignant la valeur prise par $\frac{dt_1}{d\lambda_1}$ pour $t_1 = \tau'_1$[2]; on pourra développer la solution du système

---

[1] *Cf.* J. CHAZY, Thèse déjà citée, p. 58-60.

[2] La fonction $\frac{dt_1}{d\lambda_1}$ finit par être très petite sur les segments en question : sinon il y aurait des points arbitrairement rapprochés de a, pour lesquels λ_1 et λ_2 seraient réguliers, $\frac{d\lambda_1}{dt_1}$ serait borné et $\frac{d\lambda_2}{dt_1} = \rho\frac{d\lambda_2}{dt_1}$ très petit, et a ne serait pas transcendant.

actuel suivant les puissances de $\left(\frac{dt_1}{d\lambda_1}\right)_0$ et le système réduit, équivalent à (38), admet une solution holomorphe pour $t_1 = \tau'_1$, $\lambda_1 = \lambda'_1$, $\lambda_2 = \lambda_1$, et $|\rho_0|$ suffisamment petit.

Cela étant, décrivons un cercle (C''_2), concentrique à (C'_2), et de rayon $k_2\varepsilon$, k_2 désignant un nombre positif inférieur à 1, fixé une fois pour toutes. Il n'y a lieu à démonstration que s'il existe certaines portions $\widehat{\tau''_1 \tau''_2}$ du segment $\widehat{\tau'_1 \tau'_2}$ pour lesquelles λ_2 finit par pénétrer à l'intérieur de (C''_2) : soit τ''_1 le point du segment $\widehat{\tau''_1 \tau''_2}$ pour lequel λ_2 pénètre dans (C''_2) pour la première fois. Je dis que *le long du segment* $\widehat{\tau'_1 \tau''_1}$ $|\rho|$ *est borné inférieurement.* En effet, d'après le théorème déjà employé de M. Poincaré, et appliqué ici aux développements qui viennent d'être formés, on a

$$(39)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_1}{d\rho} = K(1+\beta), \\[2mm] \dfrac{dt_1}{d\rho} = K\left(\dfrac{dt_1}{d\lambda_1}\right)_0 (1+\gamma), \end{cases}$$

$$(40)\qquad \frac{d\lambda_2}{d\rho} = K\rho(1+\beta),$$

en désignant par K une quantité finie, par β et γ des fonctions holomorphes de ρ, ρ_0, $\left(\frac{dt_1}{d\lambda_1}\right)_0$, et nulles en même temps que ces quantités. On déduit immédiatement de (39) que la longueur du segment $\overline{\rho_1 \rho_2}$ décrit par ρ, lorsque t_1 varie de τ'_1 à τ''_1, est au plus égale à $2\eta(1+\varepsilon'')$, ε'' pouvant être rendu aussi petit qu'on le veut, à condition de prendre η assez petit, et l'équation (40) montre alors que la longueur du chemin décrit par λ_2 est au plus $2K\eta^2(1+\varepsilon''')$ (ε''' étant arbitrairement petit), ce qui est absurde puisque cette longueur est au moins égale à $(1-k_2)\varepsilon$.

En appliquant au chemin $\widehat{\tau'_1 \tau'_2}$ la méthode employée plus haut (nos 23 et 24) on lui substituera un nouveau segment $\widehat{\tau'_1 \tau'_2}$, de longueur comparable à celle du premier et jouissant de cette propriété : t_1 décrivant ce segment, λ_1 reste toujours extérieur au cercle (C'_1) (η ayant été pris suffisamment petit) et ρ est extérieur au cercle (Γ).

On retombe alors sur le cas étudié tout à l'heure, et notre dernière restriction est levée.

Il est ainsi établi que l'intégrale $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ de (f_n, F_n) est méromorphe pour $t_1 \neq t_2, \ldots, t_n$.

26. Je vais démontrer maintenant une propriété très importante du système (f_n, F_n) : *son intégrale générale est une* FONCTION ESSENTIELLEMENT TRANSCENDANTE *des* $2n$ *constantes d'intégration, de quelque manière qu'on les choisisse, sauf peut-être pour des valeurs exceptionnelles attribuées aux constantes* $c_1, \ldots, c_{n+1}, c_{n+2}, c_{n+3}$.

Posons, en effet,

$$c_n = -\frac{1}{4} + \varepsilon^2 c'_n \qquad \text{et} \qquad \lambda_j = \sum_{m=0}^{+\infty} \varepsilon^m \lambda_j^{(m)},$$

avec $\lambda_n^{(0)} = t_n$, et développons l'intégrale de (f_n, F_n) suivant les puissances de ε : *les fonctions* $\lambda_j^{(0)}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$ *vérifieront un système* (f_{n-1}, F_{n-1}) (¹). Admettons alors la proposition pour le système (f_{n-1}, F_{n-1}) et nous allons voir qu'elle subsiste pour le système (f_n, F_n).

En effet, soient

$$(41) \qquad \lambda_j = f_j(t_1; a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

(¹) Quant à $\lambda_n^{(1)}$, il est donné par l'équation

$$\frac{\partial^2 \lambda_n^{(1)}}{\partial t_i^2} = \frac{1}{2\lambda_n^{(1)}} \left(\frac{\partial \lambda_n^{(1)}}{\partial t_i}\right)^2 + A_i \frac{\partial \lambda_n^{(1)}}{\partial t_i} + B_i \lambda_n^{(1)} + \frac{C_i}{\lambda_n^{(1)}},$$

avec

$$A_i = \frac{1}{D_i} \frac{\partial D_i}{\partial t_i}, \qquad C_i = -\frac{2\varphi'^2(t_n)}{(t_n - t_i)^2} D_i^2 C'_n$$

et

$$D_i = \frac{(t_i - \lambda_1^{(0)}) \ldots (t_i - \lambda_{n-1}^{(0)})}{t_i(t_i - 1)(t_i - t_1) \ldots (t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i+1}) \ldots (t_i - t_n)(t_i - \lambda_1^{(0)}) \ldots (t_i - \lambda_{n-1}^{(0)})};$$

enfin B_i est rationnel en $\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_{n-1}^{(0)}$ et leurs dérivées par rapport à t_1. L'équation précédente est donc réductible au type

$$\zeta'' = \frac{\zeta'}{2\zeta} + 2q\zeta - \frac{1}{2\zeta}$$

découvert par M. Gambier (*loc. cit.*, p. 27), et, par suite, $\lambda_n^{(1)}$ et les combinaisons symétriques de $\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_{n-1}^{(0)}$ ont leurs points critiques fixes, comme il était évident *a priori*.

les formules qui représentent l'intégrale générale de (f_n, F_n) a_i et b_i désignant les valeurs initiales de λ_i et $\frac{\partial \lambda_i}{\partial t_1}$. Supposons que notre proposition soit en défaut; il existe alors une relation

$$(42) \qquad C = \Phi(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n),$$

telle que si l'on remplace à l'aide de cette relation l'une des constantes primitives a_i, b_i par C, f_j (et par suite toutes les autres fonctions f) soit algébrique en C. Supposons, par exemple, que Φ dépende effectivement de l'un des b_i, soit b_n (le raisonnement serait analogue dans l'hypothèse contraire); tirons b_n de (42) et faisons dans (f_n, F_n) $c_n = -\frac{1}{4}$. Les formules (41) s'écrivent

$$\lambda_j = g_j(t_1; a_1, b_1, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}, a_n, C);$$

en éliminant C entre l'une de ces équations et sa dérivée par rapport à t_1, on en déduit une relation

$$(43) \qquad P\left(\lambda_j, \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_1}; a_1, b_1, \ldots, a_{n-1}, b_{n-1}, a_n\right) = 0,$$

où P est un polynome en λ_j et $\frac{\partial \lambda_j}{\partial t_1}$. Mais il résulte immédiatement du lemme établi plus haut, que cette relation *doit constituer une intégrale première d'un système* (f_{n-1}, F_{n-1}), *lorsqu'on y aura remplacé* a_n *par* t_n, ce qui est absurde.

D'autre part, M. Painlevé a établi [1] que l'intégrale de l'équation I, dégénérescence de VI [ou (F_1)] est une fonction essentiellement transcendante des deux constantes d'intégration; il en est donc de même de (F_1), lorsque les quantités c_1, c_2, c_3, c_4 sont choisies au hasard, et, par suite, notre proposition, exacte pour $n = 1$, est établie pour n quelconque.

Bien entendu, cette proposition peut être en défaut pour des valeurs particulières de $c_1, \ldots, c_{n+3}$; le système (f_n, F_n) peut alors posséder des intégrales algébriques, ou satisfaisant à des équations d'ordre moindre, ou même être réductible. Nous allons étudier, dans la fin de cette troisième Partie, un cas important où le système (f_n, F_n) *admet toutes les solutions d'un système différentiel d'ordre n.*

---

(1) *Bull. Soc. math.*, t. XXVIII, 1900, p. 241-242.

III. Les systèmes hypergéométriques d'ordre supérieur.

27. Supposons que l'équation (E_n) admette une intégrale dont la dérivée logarithmique soit rationnelle, et soit (E'_n) une telle équation. Cette intégrale est nécessairement de la forme

$$y_1 = \prod_{i=1}^{n+2}(x-t_i)^{r_i}\prod_{j=1}^{n}(x-\lambda_j)^{\varepsilon_j},$$

où r_i désigne une racine de l'équation fondamentale déterminante relative à $x = t_i$, et ε_j, l'un des nombres $-\frac{1}{2}$ ou $\frac{3}{2}$. Le point $x=\lambda_j$ étant apparemment singulier, on doit prendre $\varepsilon_j = -\frac{1}{2}$; en effet, dans l'hypothèse $\varepsilon_j = \frac{3}{2}$, l'expression

$$y_2 = y_1\int\frac{dx}{y_1^2},$$

intégrale de (E'_n), renfermerait un terme de la forme $Ay_1\log(x-\lambda_j)$; on a donc

$$y_1 = [\psi(x)]^{-\frac{1}{2}}\prod_{i=1}^{n+2}(x-t_i)^{r_i}. \tag{44}$$

Cette expression étant une intégrale de (E'_n), on doit avoir

$$c_{n+3} = 2\sum_{i=1}^{n+2}\sum_{k=1}^{i} r_i r_k - n\sum_{i=1}^{n+2} r_i + \frac{n(n-1)}{4}, \tag{45}$$

et les coefficients α_i, β_j s'expriment rationnellement en fonction des λ_j.

Il s'agit de déterminer les fonctions $\lambda_j(t_1, \ldots, t_n)$ de telle sorte que le groupe (G') de (E'_n) soit indépendant des t_i. Il est visible que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ seront donnés cette fois par un système différentiel d'ordre n; car, dans le cas actuel, (G') dépend de $2n+2$ paramètres et nous disposons de $n+2$ constantes $c_1, \ldots, c_{n+2}$. C'est ce que nous allons vérifier.

Puisque (G') est indépendant des t_i, on peut [1] toujours associer à

[1] *Voir* plus loin, n° 34.

y_1 une intégrale y_2, telle que (y_1, y_2) forme un système fondamental à substitutions indépendantes des t_i : y_1 doit donc vérifier les équations ([1])

$$(e_n) \qquad \frac{\partial y}{\partial t_i} = \left(\mathrm{A}_i^0 - \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{B}_i}{\partial x}\right) y + \mathrm{B}_i \frac{\partial y}{\partial x}.$$

L'expression $\frac{\partial \log y_1}{\partial t_i} + \frac{\mathrm{B}_i}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log\frac{\mathrm{B}_i}{y_1^2}$ est donc indépendante de x; mais d'après (13) et (44) elle est égale à

$$(46) \quad -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\lambda_j - x}\frac{\partial \lambda_j}{\partial x} + \frac{r_i}{t_i - x} - \frac{\psi(t_i)}{2\varphi'(t_i)}\frac{\varphi(x)}{(x-t_i)\psi(x)}\left[\sum_{k=1}^{n+2}{}^{i}\frac{1-2r_k}{x-t_k} - \frac{2r_i}{x-t_i}\right].$$

Les seuls pôles de l'expression (46) étant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et d'ordre 1, il nous suffit d'écrire que les résidus correspondants sont nuls; il vient alors

$$(47) \qquad \frac{\partial \lambda_j}{\partial t_i} = \frac{\psi(t_i)}{\varphi'(t_i)}\frac{\varphi(\lambda_j)}{(\lambda_j - t_i)\psi'(\lambda_j)}\left[\sum_{k=1}^{n+2}{}^{i}\frac{1-2r_k}{\lambda_j - t_k} - \frac{2r_i}{\lambda_j - t_i}\right].$$

Ce système est bien d'ordre n; vérifions que *toutes ses solutions satisfont à* (f_n, F_n). Tout d'abord, les équations (f_n) sont évidemment des conséquences des équations (47); exprimons qu'il en est de même des équations (F_n) :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\frac{\varphi(\lambda_j)}{\psi'(\lambda_j)}\left[\frac{\varphi'(\lambda_j)}{\varphi(\lambda_j)} - \frac{\psi''(\lambda_j)}{2\psi'(\lambda_j)}\right]\left[\sum_{k=1}^{n+2}{}^{i}\frac{1-2r_k}{\lambda_j - t_k} - \frac{2r_i}{\lambda_j - t_i}\right]^2 \\
&\quad - \sum_{l=1}^{n}{}^{j}\frac{\varphi(\lambda_l)}{4\psi'(\lambda_l)(\lambda_j - \lambda_l)}\left[\sum_{k=1}^{n}{}^{i}\frac{1-2r_k}{\lambda_l - t_k} - \frac{2r_i}{\lambda_l - t_i}\right]^2 \\
&\quad - \frac{\varphi(\lambda_j)}{4\psi'(\lambda_j)}\left[\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1-2r_k}{(\lambda_j - t_k)^2}\right]\left[\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1-2r_k}{\lambda_j - t_k}\right] - \frac{\varphi'(t_i)}{\psi(t_i)}\frac{r_i}{\lambda_j - t_i} \\
&= \sum_{k=1}^{n+3}\left(c_k + \frac{3}{4}\right) - 2 + \sum_{k=1}^{n+2}{}^{i}\frac{\varphi'(t_k)}{\psi(t_k)}\frac{c_k + \frac{1}{4}}{\lambda_j - t_k} + \frac{\varphi'(t_i)}{\psi(t_i)}\frac{c_i}{\lambda_j - t_i}.
\end{aligned}$$

En s'appuyant sur les identités qui expriment que la somme des résidus de $\frac{\varphi(x)}{(x-t_k)(x-t_g)(x-\lambda_j)\psi(x)}$ $(k \gtreqless g)$ est nulle, on vérifie aisément que la relation précédente est une conséquence de (45).

([1]) *Voir* deuxième Partie, n° 3.

28. Nous allons intégrer maintenant le système (47). A cet effet, désignons comme précédemment (n° 12) par $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ les fonctions symétriques élémentaires d'ordre $1, \ldots, n$ de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et substituons à (47) le système différentiel vérifié par $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Au lieu de le déduire directement de (47), ce qui semble difficile, nous emploierons l'artifice suivant : l'expression (46), étant indépendante de x, est égale à

$$-\frac{\psi(t_i)}{2\varphi'(t_i)}\left(n+1-2\sum_{k=1}^{n+2} r_k\right),$$

valeur obtenue en faisant $x=\infty$. Multiplions par $\psi(x)$ les deux membres de l'identité ainsi formée, il viendra :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi(x)}{\partial t_i} = &-2r_i\frac{\psi(x)}{\varphi'(t_i)} - \frac{\psi(t_i)}{\varphi'(t_i)}\frac{\varphi(x)}{x-t_i}\left[{\sum_{k=1}^{n+2}}^{i}\frac{1-2r_k}{x-t_k} - \frac{2r_i}{x-t_i}\right]\\ &+\frac{\psi(t_i)}{\varphi'(t_i)}\left(n+1-2\sum_{k+1}^{n+2} r_k\right)\psi(x).\end{aligned}$$

Mais on a

$$\psi(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma_i x^{n-i} \qquad (\text{avec } \sigma_0 = 1);$$

il suffit alors d'identifier les coefficients des puissances de x dans l'équation précédente pour obtenir le système cherché. Désignons encore par s_ν la combinaison symétrique élémentaire d'ordre ν de $t_1, \ldots, t_n$, $t_{n+1}=0$ et $t_{n+2}=1$, et par s_ν^i, $s_\nu^{i,k}$, $s_\nu^{i,k,l}$ les combinaisons symétriques d'ordre ν des t_g, g prenant toutes les valeurs, sauf celles des indices supérieurs. Nous obtiendrons alors le système cherché

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi'(t_i)\frac{\partial\sigma_l}{\partial t_i} = {}&\psi(t_i){\sum_{k=1}^{n}}^{i} a_k(s_l^{i,k}-\sigma_l)\\ &+(a_i+1)\left\{\psi(t_i)\left[\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^\mu t_i^\mu s_{l-\mu}^i - \sigma_l\right] + \varphi'(t_i)\sum_{\mu=0}^{l-1} t_i^\mu\sigma_{l-\mu-1}\right\}\end{aligned}\right.$$

$$(i, l = 1, \ldots, n),$$

où l'on a posé $2r_k - 1 = a_k$.

29. Lorsque l'expression

$$K = 1 + \sum_{k=1}^{n+2} a_k = 1 + \sum_{k=1}^{n+2} (2r_k - 1)$$

est nulle, *ce système est linéaire*. Pour l'intégrer dans le cas général, nous poserons

$$\sigma_\nu = \frac{\theta_\nu}{\theta_0}. \tag{49}$$

Le système (48) équivaudra au système *linéaire*

$$\left\{\begin{aligned} \varphi'(t_i)\frac{\partial\theta_l}{\partial t_i} = {} & \left[\sum_{k=1}^{n}{}^{i} a_k s_l^{i,k} + (a_i+1)\sum_{\mu=0}^{l}(-1)^\mu s_{l-\mu}^i t_i^\mu\right]\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu t_i^{n-\nu}\theta_\nu \\ & + (a_i+1)\varphi'(t_i)\sum_{\mu=0}^{l-1}(-1)^\mu t_i^\mu \theta_{l-\mu-1} + \rho_i\varphi'(t_i)\theta_l \\ & (i = 1, \ldots, n;\ l = 0, 1, \ldots, n), \end{aligned}\right. \tag{50}$$

où la dernière somme doit être remplacée par o pour $l = 0$ et où $\rho_1, \ldots, \rho_n$ désignent n indéterminées, qu'il faudra choisir de façon que le système (30) soit complètement intégrable. D'après la manière même dont ce système a été obtenu, les conditions d'intégrabilité sont nécessairement compatibles et se réduisent à $\frac{n(n-1)}{2}$:

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t_k} - \frac{\partial\rho_k}{\partial t_i} = f_{ik}(t_1, \ldots, t_n);$$

la solution générale de ce système est de la forme

$$\rho_i = \rho_i^0 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t_i},$$

$(\rho_1^0, \ldots, \rho_n^0)$ désignant une solution particulière et ρ une fonction arbitraire de $t_1, \ldots, t_n$; ce point était d'ailleurs évident *a priori*. Nous allons montrer qu'*on peut prendre les ρ_i^0 et par suite les ρ_i nuls*. Il nous suffira de prouver que dans cette hypothèse les $\frac{n(n-1)}{2}$ identités $\frac{\partial^2\theta_0}{\partial t_i \partial t_k} = \frac{\partial^2\theta_0}{\partial t_k \partial t_i}$ sont vérifiées.

30. On a tout d'abord

$$\varphi'(t_i)\frac{\partial\theta_0}{\partial t_i} = \mathrm{K}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu t_i^{n-\nu}\theta_\nu; \tag{51}$$

pour résoudre les équations (51) par rapport $\theta_1, \ldots, \theta_n$, j'observerai qu'elles entraînent l'identité en x

$$\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\theta_\nu x^{n-\nu} = \frac{\varphi(x)}{\mathrm{K}\,x(x-1)}\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i(t_i-1)}{x-t_i}\frac{\partial\theta_0}{\partial t_i} + \frac{\varphi(x)\theta_0}{x(x-1)}.$$

On en déduit

$$\theta_\nu = s_\nu^{n+1,n+2}\theta_0 - \frac{1}{\mathrm{K}}\sum_{i=1}^{n}t_i(t_i-1)s_\nu^{i,n+1,n+2}\frac{\partial\theta_0}{\partial t_i}; \tag{52}$$

dérivons alors l'équation (51) par rapport à t_k :

$$\varphi'(t_i)\frac{\partial^2\theta_0}{\partial t_i\,\partial t_k} + \frac{\varphi'(t_i)}{t_k-t_i}\frac{\partial\theta_0}{\partial t_i} = \mathrm{K}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu t_i^{n-\nu}\frac{\partial\theta_\nu}{\partial t_k}, \tag{53}$$

remplaçons $\frac{\partial\theta_\nu}{\partial t_k}$ par la valeur tirée de (50), tenons compte de (51) et cherchons alors le coefficient de a_g ($g \neq k$) dans le second membre de (53) : il est égal à

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial t_g}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu t_i^{n-\nu}s_\nu^{k,g},$$

c'est-à-dire à o pour $g \neq i$ et à $\frac{\varphi'(t_i)}{t_i-t_k}$ pour $g = i$. Remarquons maintenant que l'expression

$$\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu t_i^{n-\nu}\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^\mu s_{\nu-\mu}^k t_k^\mu$$

est égale à

$$\sum_{\rho=0}^{n}(-1)^\rho\frac{t_i^{n-\rho+1}-t_k^{n-\rho+1}}{t_i-t_k}s_\rho^k;$$

or

$$\sum_{\rho=0}^{n}(-1)^\rho t_i^{n-\rho+1}s_\rho^k = (-1)^n s_{n+1}^k$$

et

$$\sum_{\rho=0}^{n}(-1)^{\rho}t_k^{n-\rho+1}s_\rho^k=(-1)^n s_{n+1}^k+\varphi'(t_k),$$

en sorte que le coefficient de a_k+1 est

$$-\frac{\varphi'(t_k)}{t_i-t_k}\frac{\partial\theta_0}{\partial t_k}+\mathrm{K}\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\rho}\frac{t_i^{n-\rho+1}-t_k^{n-\rho+1}}{t_i-t_k}\theta_{\rho-1}.$$

Remplaçons alors $\theta_{\rho-1}$ par sa valeur (52), et observons que

$$\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\rho}s_{\rho-1}^{n+1,n+2}t_i^{n-\rho+1}=(-1)^n s_n^{n+1,n+2}=\sum_{\rho=1}^{n}(-1)^{\rho}s_{\rho-1}^{n+1,n+2}t_k^{n-\rho+1},$$

que

$$\sum_{\rho=2}^{n}(-1)^{\rho}s_{\rho-2}^{g,n+1,n+2}t_i^{n-\rho+1}=(-1)^n s_{n-1}^{g,n+1,n+2}\qquad(g\neq i),$$

et, enfin, que

$$\sum_{\rho=2}^{n}(-1)^{\rho}s_{\rho-2}^{i,n+1,n+2}t_i^{n-\rho+1}=(-1)^n s_{n-1}^{i,n+1,n+2}+\frac{\varphi'(t_i)}{t_i(t_i-1)};$$

nous trouverons alors pour le coefficient de a_k+1 :

$$-\frac{\varphi'(t_k)}{t_i-t_k}\frac{\partial\theta_0}{\partial t_k}-\frac{\varphi'(t_i)}{t_i-t_k}\frac{\partial\theta_0}{\partial t_i}+\frac{\varphi'(t_k)}{t_i-t_k}\frac{\partial\theta_0}{\partial t_i},$$

et, finalement, on a l'équation

$$(54)\qquad (t_i-t_k)\frac{\partial^2\theta_0}{\partial t_i\,\partial t_k}=-a_k\frac{\partial\theta_0}{\partial t_i}+a_i\frac{\partial\theta_0}{\partial t_k}\qquad(i,k=1,\ldots,n)$$

qui généralise une équation étudiée par M. Darboux (¹).

Mais cette équation est symétrique en t_i et t_k; en d'autres termes, *les conditions d'intégrabilité de* (50) *sont bien vérifiées pour* $\rho_i=0$.

Par un calcul analogue au précédent, on obtiendrait de même

(¹) *Voir*, par exemple, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, Paris, 1889, p. 54.

l'équation

$$
(55) \qquad \frac{\partial^2\theta_0}{\partial t_i^2} = \left[\sum_{k=1}^{n}{}^{i} \frac{a_k}{t_i - t_k} + \frac{a_{n+1}+a_i}{t_i} + \frac{a_{n+2}+a_i}{t_i - 1}\right]\frac{\partial\theta_0}{\partial t_i} - a_i \sum_{k=0}^{n}{}^{i} \frac{t_k(t_k-1)}{t_i(t_i-1)(t_i-t_k)}\frac{\partial\theta_0}{\partial t_k} - \frac{\mathrm{K}a_i}{t_i(t_i-1)}\theta_0,
$$

formant avec (54) un système linéaire (S_{n+1}) d'équations aux dérivées partielles.

31. Pour $n = 1$, le système (S_2) se réduit à une seule équation

$$
\frac{d^2\theta_0}{dt^2} - \left(\frac{a_2+a}{t} + \frac{a_3+a}{t-1}\right)\frac{d\theta_0}{dt} + \frac{\mathrm{K}a\theta_0}{t(t-1)} = 0
$$

(où l'on a supprimé l'indice $i = 1$) : c'est l'équation de Gauss [1]. Le résultat était d'ailleurs immédiat, car on a alors $\lambda_1 = \sigma_1$; le système (47) se réduit à une équation de Riccati, et le changement de variables défini par (49) coïncide précisément avec la transformation classique qui ramène l'équation de Riccati à une équation linéaire.

Pour $n = 2$, le système (S_3) reproduit un système bien remarquable rencontré par M. Appell [2] et par M. Picard [3], et vérifié par la fonction hypergéométrique de deux variables

$$
F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma; x, y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n)(1, m)(1, n)} x^m y^n,
$$

où (λ, k) désigne le symbole $\lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1)$.

Ici, nous aurons

$$
\alpha = -\mathrm{K}, \quad \gamma = -(a_1+a_2+a_3), \quad \beta = -a_1, \quad \beta' = -a_2, \quad x = t_1, \quad y = t_2.
$$

On peut remarquer encore que $\lambda_1 + \lambda_2 = \sigma_1$, par exemple, satisfait

---

(1) Dans ce cas particulier, ce cas avait été signalé déjà par M. R. Fuchs (*Math. Ann.*, t. LXIII, p. 319).

(2) *Comptes rendus*, t. XC, 1880, p. 296 et 731; t. XCI, 1880, p. 364; *J. de Liouville*, 3e série, t. II, 1882, p. 173.

(3) *Ann. Éc. Norm.*, 2e série, t. X, 1881, p. 305.

par rapport à t_i à une équation différentielle du second ordre (à points critiques fixes) formée par M. Painlevé [1].

32. Passons maintenant au cas général; nous allons établir que θ_0, considéré comme fonction de l'un des paramètres, soit t_i, satisfait [2] à l'équation différentielle d'ordre $n+1$ du type hypergéométrique de Tissot-Pochhammer [3],

$$(56)\quad \Phi(t_i)\frac{d^{n+1}\theta_0}{dt_i^{n+1}}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\big[(\lambda-n+k-1)_{k+1}\Phi^{(k+1)}(t_i) + (\lambda-n+k-1)_k\Psi^{(k)}(t_i)\big]\frac{d^{(n-k)}\theta_0}{dt_i^{n-k}}=0,$$

où l'on a :

$$\Phi(t_i)=\varphi'(t_i)=t_i(t_i-1)(t_i-t_1)\ldots(t_i-t_n),$$

$$\Psi(t_i)=\Phi(t_i)\sum_{k=1}^{n+2}{}'\frac{a_k+1}{t_i-t_k},$$

$$\lambda=a_i+1 \qquad \text{et} \qquad (p)_q=\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2\ldots q}.$$

Il nous suffira de montrer qu'il existe $n+1$ fonctions θ_{0k} ($k=1,\ldots,n,n+2$), linéairement indépendantes par rapport à t_i et vérifiant à la fois le système (S_{n+1}) et l'équation (56). Or la fonction

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned}&\theta_{0k}=\int_0^{t_k}x^{a_{n+1}}(x-1)^{a_{n+2}}(x-t_1)^{a_1}\ldots(x-t_n)^{a_n}\,dx=\int_0^{t_k}\mathrm{V}\,dx\\ &\qquad (k=1,\ldots,n,n+2),\end{aligned}\right.$$

où l'on a

$$\mathrm{V}=x^{a_{n-1}}(x-1)^{a_{n+2}}(x-t_1)^{a_1}\ldots(x-t_n)^{a_n},$$

répond bien à ces conditions, lorsque les constantes a_i sont choisies de

---

[1] *Acta mathem.*, t. XXV, 1902, p. 53, équation (1).

[2] On pouvait d'ailleurs constater sur les équations (50) (où $\rho_i=0$) que parmi les $n+1$ racines de l'équation fondamentale déterminante du système relative à un point singulier quelconque, il en est n de nulles.

[3] Tissot, *Journ. de Liouville*, 1re série, t. XVII, 1852, p. 177. — Pochhammer, *Journ. de Crelle*, Bd., 71, 1870, p. 216. Avant le travail de Pochhammer, l'équation (56) avait été étudiée par Hermite.

telle sorte que l'intégrale (57) ait un sens : cela résulte des identités

$$\frac{\mathrm{V}a_i a_k}{(x-t_i)(x-t_k)} = \left[-\frac{a_k}{t_i-t_k}\,\frac{-a_i}{x-t_i} + \frac{a_k}{t_i-t_k}\,\frac{-a_i}{x-t_k}\right]\mathrm{V},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\mathrm{V}\,x(x-1)}{x-t_i} = \mathrm{V}\left\{1+\sum_{i=1}^{n+2} a_i + \sum_{k=1}^{n+2}{}^{i}\,\frac{t_k(t_k-1)}{t_k-t_i}\,\frac{a_k}{x-t_k}\right.$$

$$\left.+\frac{t_i(t_i-1)}{x-t_i}\left[\sum_{k=1}^{n+2}{}^{i}\,\frac{a_k}{t_i-t_k}+a_i\left(\frac{1}{t_i}+\frac{1}{t_i-1}\right)\right]+\frac{(a_i-1)\,t_i(t_i-1)}{(x-t_i)^2}\right\}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\mathrm{V}\,\Phi(x)}{(x-t_i)^n} = \sum_{j=0}^{n+1}\frac{(a_i-n)\,\Phi^{(j)}(t_i)+j\,\Psi^{(j-1)}(t_i)}{j!}\,\frac{\mathrm{V}}{(x-t_i)^{n-j+1}}$$

[avec $\Psi^{(-1)}(t_i)=0$]; et le résultat établi pour de telles valeurs des a_i est évidemment valable quels que soient les a_i.

33. Toutes les propositions obtenues par M. Appell dans le cas de $n=2$ *s'étendent au cas général*. Tout d'abord, changeons x en x^{-1} dans l'expression (57) et posons

$$\beta_i = -a_i = 1-2r_i,$$

$$\alpha = -\mathrm{K} = -1+\sum_{i=1}^{n+2}(1-2r_i),$$

$$\gamma = -\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n+1}(1-2r_i);$$

nous aurons (au signe près)

$$(58)\qquad \theta_{0,n+2} = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}(1-t_1x)^{-\beta_1}\dots(1-t_nx)^{-\beta_n}\,dx,$$

où l'intégrale est prise le long du chemin rectiligne $\overline{01}$ et, bien entendu, dans l'hypothèse $0<\mathcal{R}(\alpha)<\mathcal{R}(\gamma)$.

On obtient $\frac{(n+3)(n+2)}{2}$ intégrales telles que (58) en substituant aux limites d'intégration deux des quantités $t_1^{-1},\dots,t_n^{-1}$, 0, 1, ∞.

Le développement de l'expression (58) suivant les puissances de

$t_1, \ldots, t_n$ donne

$$\theta_{0,n+2} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} F_1^{(n)}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma; t_1, \ldots, t_n),$$

en posant

$$F_1^{(n)}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma; t_1, \ldots, t_n) \\ = \sum_{m_1=0}^{+\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{+\infty} \frac{(\alpha, m_1+\ldots+m_n)(\beta_1, m_1)\ldots(\beta_n, m_n)}{(\gamma, m_1+\ldots+m_n)(1, m_1)\ldots(1, m_n)} t_1^{m_1}\ldots t_n^{m_n}.$$

La série est absolument et uniformément convergente lorsque $t_1, \ldots, t_n$ varient à l'intérieur de cercles concentriques aux origines de leurs plans respectifs et de rayons inférieurs à 1 : elle représente dans ce domaine une fonction holomorphe des variables.

On peut également représenter θ_0 à l'aide d'intégrales multiples; je donnerai seulement la formule

$$\frac{\Gamma(\beta_1)\ldots\Gamma(\beta_n)\Gamma(\gamma-\beta_1-\ldots-\beta_n)}{\Gamma(\gamma)} F_1^{(n)}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma; t_1, \ldots, t_n) \\ = \overbrace{\int\cdots\int}^{n} x_1^{\beta_1-1}\ldots x_n^{\beta_n-1}(1-x_1-\ldots-x_n)^{\gamma-\beta_1-\ldots-\beta_n-1} \\ \times (1-t_1x_1-\ldots-t_nx_n)^{-\alpha}\,dx_1\ldots dx_n,$$

où l'intégrale est prise à l'intérieur du continuum (réel) défini par les inégalités

$$x_1 \geqq 0, \quad \ldots, \quad x_n \geqq 0, \qquad 1-x_1-\ldots-x_n \geqq 0.$$

On définira comme pour l'équation de Gauss des fonctions contiguës, en faisant varier d'une unité tout ou partie des paramètres $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma$, et l'on généralisera sans peine les relations de Gauss. Je me bornerai à la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t_i} F_1^{(n)}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma; t_1, \ldots, t_n) \\ = \frac{\alpha\beta_i}{\gamma} F_1^{(n)}(\alpha+1, \beta_1, \ldots, \beta_i+1, \ldots, \beta_n, \gamma+1; t_1, \ldots, t_n),$$

d'où l'on déduit que le système (48) possède les intégrales remarquables :

$$\sigma_\nu = s_\nu^{n+1,n+2} + \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{n} \beta_i t_i(t_i-1)\frac{F_1^{(n)}(\alpha+1, \beta_1, \ldots, \beta_i+1, \ldots, \beta_n, \gamma+1, t_1, \ldots, t_n)}{F_1^{(n)}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma; t_1, \ldots, t_n)}.$$

En opérant par dégénérescence sur la fonction $F_1^{(n)}$, on en déduirait des fonctions qui jouent par rapport à $F_1^{(n)}$ le même rôle que les fonctions de Bessel par rapport à la fonction hypergéométrique de Gauss, ou que les transcendantes V, IV, ... de l'Introduction par rapport à la fonction VI.

34. Nous allons retrouver les résultats précédents par une voie entièrement différente. Nous abandonnerons la considération des systèmes différentiels complètement intégrables, pour nous appuyer uniquement sur la notion du groupe (G') de l'équation (E'_n).

Dans le cas actuel, il est aisé de calculer explicitement les coefficients des substitutions du groupe. Soit L_i un lacet simple, D'ORIGINE x_0 FIXÉE UNE FOIS POUR TOUTES, décrit dans le sens direct autour du point singulier $x = t_i$; les intégrales y_1 et y_2 (n° 27) forment un système fondamental qui subit la substitution S^i, correspondant au lacet L_i, et représentée par les formules

$$(59)\qquad \begin{cases} S^i y_1 = s_i y_1, \\ S^i y_2 = s_i R_i y_1 + s_i^{-1} y_2, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$s_i = e^{2\pi r_i\sqrt{-1}} \qquad \text{et} \qquad R_i = \int_{L_i} \frac{dx}{y_1^2}.$$

Soit alors

$$(60)\qquad \begin{cases} Y_1 = \alpha y_1 + \beta y_2, \\ Y_2 = \gamma y_1 + \delta y_2, \end{cases}$$

un système fondamental subissant des substitutions

$$S^i Y_1 = A_i Y_1 + B_i Y_2,$$
$$S^i Y_2 = C_i Y_1 + D_i Y_2,$$

dont les coefficients A_i, B_i, C_i, D_i sont indépendants des t_i. Je dis qu'*on peut toujours obtenir un tel système en prenant* $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Tout d'abord, on peut toujours supposer $B_i = 0$ en remplaçant (Y_1, Y_2) par un système

$$(61)\qquad \begin{cases} Y_1^{(i)} = a_i Y_1 + b_i Y_2, \\ Y_2^{(i)} = c_i Y_1 + d_i Y_2 \end{cases}$$

$(a_i, b_i, c_i, d_i$, constantes indépendantes des $t_k)$ où les constantes a_i, b_i

satisfont à la relation

$$\begin{vmatrix} a_i A_i + b_i C_i & a_i \\ a_i B_i + b_i D_i & b_i \end{vmatrix} = 0.$$

Il résulte alors de théorèmes classiques que l'on a :

soit

$$A_i = s_i, \qquad D_i = s_i^{-1},$$

soit

$$A_i = s_i^{-1}, \qquad D_i = s_i.$$

Il est toujours loisible de supposer le premier cas réalisé en effectuant au besoin sur Y_1, Y_2 une substitution (61), avec $a_i(s_i - s_i^{-1}) = b_i C_i$. Mais, d'après (59) et (60), on aura alors

$$s_i(\alpha y_1 + \beta y_2) = s_i Y_1 = S^i Y_1 = \alpha s_i y_1 + \beta(s_i R_i y_1 + s_i^{-1} y_2),$$

d'où $\beta s_i R_i = 0 = \beta(s_i - s_i^{-1})$. Comme y^2 n'est pas uniforme en général, on en déduit $\beta = 0$, et, en remplaçant Y_1 et Y_2 par $\frac{Y_1}{\alpha}$ et $\frac{Y_2}{\alpha}$, on pourra faire $\alpha = 1$.

30. Cela étant, écrivons que le système

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_1, \\ Y_2 &= \gamma y_1 + \delta y_2 \qquad (\delta \neq 0), \end{aligned}$$

subit autour d'un point singulier *quelconque*, soit t_i, une substitution à coefficients constants, nécessairement de la forme

$$\begin{aligned} S^i Y_1 &= s_i Y_1, \\ S^i Y_2 &= s_i k_i Y_1 + s_i^{-1} Y_2 \qquad (\delta \neq 0), \end{aligned}$$

où k_i est une constante. Nous aurons, d'après (59),

$$\gamma s_i y_1 + \delta(s_i R_i y_1 + s_i^{-1} y_2) = s_i k_i y_1 + s_i^{-1}(\gamma y_1 + \delta y_2),$$

d'où

$$(62) \qquad \gamma(1 - s_i^{-2}) + \delta R_i = k_i \qquad (i = 1, \ldots, n+2),$$

et réciproquement, si ces équations sont vérifiées (E'_n) possède un système fondamental d'intégrales dont les substitutions sont à coefficients constants (c'est-à-dire indépendants de $t_1, \ldots, t_n$).

Éliminons γ et δ entre les $n+2$ équations (62), on en déduit les

n équations suivantes ;

$$(63)\qquad \begin{vmatrix} R_i & 1-s_i^{-2} & k_i \\ R_{n+1} & 1-s_{n+1}^{-2} & k_{n+1} \\ R_{n+2} & 1-s_{n+2}^{-2} & k_{n+2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (i=1, \ldots, n).$$

A priori, il est manifeste que les premiers membres des équations (63) doivent être indépendants de l'origine x_0 des lacets L_i; il est aisé de le vérifier directement, car si l'on remplace x_0 par un autre point x'_0, R_i se change en

$$R_i + (1-s_i^{-2})\int_{x'_0}^{x_0} \frac{dx}{y_1^2}.$$

36. Réciproquement, nous allons montrer qu'en général, si les différences $1-s_i^{-2}$ ne sont pas toutes nulles, *les conditions* (63) *suffisent à exprimer que les équations* (62) *sont compatibles*, et, par conséquent, que le groupe de (E'_n) est indépendant des paramètres t_i. En effet, les équations (62) en α et β ne pourraient être incompatibles que si tous les déterminants

$$(64)\qquad \begin{vmatrix} R_i & 1-s_i^{-2} \\ R_j & 1-s_j^{-2} \end{vmatrix} \qquad (i, j = 1, \ldots, n)$$

étaient nuls, autrement dit si toutes les substitutions de (G') étaient permutables deux à deux. Je dis que cette circonstance *ne peut avoir lieu quels que soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. En effet, s'il en était ainsi, on en déduirait les équations

$$(65)\qquad \begin{vmatrix} R_i^{(k)} & 1-s_i^{-2} \\ R_j^{(k)} & 1-s_j^{-2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (k=0, 1, \ldots, n),$$

où $R_i^{(k)}$ désigne l'intégrale

$$\int_{L_i} W x^k\, dx,$$

avec

$$W = x^{-2r_{n+1}}(x-1)^{-2r_{n+2}}(x-t_1)^{-2r_1}\ldots(x-t_n)^{-2r_n}.$$

Mais les $R_i^{(k)}$ (où k est *quelconque*) sont des fonctions linéaires et homogènes des $n+1$ premiers. Les déterminants (65) seraient donc nuls, quel que soit l'entier positif k, ce qui permet de supposer $\mathfrak{R}(r_i) < 0$ et $\mathfrak{R}(r_j) < 0$. Or ces déterminants ne dépendant pas de x_0, faisons $x_0 = t_i$, d'où $R_i^{(k)} = 0$; il vient alors $(1 - s_i^{-2})\, R_j^{(k)} = 0$. Écartons l'hypothèse banale où tous les s_i^{-2} sont égaux à 1; on devrait avoir

$$\int_{t_i}^{t_j} W x^k \, dx = 0,$$

l'intégrale étant prise le long du chemin rectiligne $\overline{t_i t_j}$. Mais cette circonstance ne peut manifestement se produire : car, moyennant une transformation homographique préalable, on peut toujours supposer que $W(x - t_i)^{2r_i}(x - t_j)^{2r_j} = f(x)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle décrit de t_i comme centre avec $|t_i - t_j|$ comme rayon. Le développement de $[f(x)]^{-1}$, suivant les puissances de $x - t_i$, appliqué à l'intégrale

$$\int_{t_i}^{t_j} \frac{W}{f(x)} \, dx,$$

montre alors que

$$\int_{t_i}^{t_j} (x - t_i)^{-2r_i} (x - t_j)^{-2r_j} \, dx$$

devrait être nul, ce qui est absurde.

37. Revenons maintenant aux équations (63); nous les écrirons

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \Delta_i^{(n-j)} \sigma_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{66}$$

en posant

$$\Delta_i^{(n-j)} = \begin{vmatrix} R_i^{(n-j)} & 1 - s_i^{-2} & k_i \\ R_{n+1}^{(n-j)} & 1 - s_{n+1}^{-2} & k_{n+1} \\ R_{n+2}^{(n-j)} & 1 - s_{n+2}^{-2} & k_{n+2} \end{vmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

et σ_j ayant la même signification que précédemment (nos 12 et 28). On tire alors de (66)

$$\sigma_{n-j} = \frac{|\Delta_i^{(n)} \ldots \Delta_i^{(j+1)} \Delta_i^{(j-1)} \ldots \Delta_i^{(0)}|}{|\Delta_i^{(n-1)} \ldots \Delta_i^{(0)}|},$$

en n'écrivant que les lignes de rang i pour les deux déterminants qui figurent au numérateur et au dénominateur. Nous allons ramener ces déterminants composés (d'ordre n) à des déterminants *simples* d'ordre $n + 2$ dont les éléments auront même forme que ceux des $\Delta_i^{(n-j)}$. Pour simplifier l'écriture, posons

$$R_i^{(k)} = \int_{L_i} W x^k \, dx = x_i^{k+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$1 - s_i^{-2} = x_i^{n+1}, \qquad k_i = x_i^{n+2}, \qquad \Delta_i^{(n-j)} = y_i^{n-j+1} = \begin{vmatrix} x_j^i & x_j^{n+1} & x_j^{n+2} \\ x_{n+1}^i & x_{n+2}^{n+1} & x_{n+1}^{n+2} \\ x_{n+2}^i & x_{n+2}^{n+1} & x_{n+2}^{n+2} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x_{n+1}^{n+1} & x_{n+1}^{n+2} \\ x_{n+2}^{n+1} & x_{n+2}^{n+2} \end{vmatrix} = \alpha, \qquad \begin{vmatrix} x_j^{n+2} & x_j^{n+1} \\ x_{n+2}^{n+2} & x_{n+2}^{n+1} \end{vmatrix} = \beta_j, \qquad \begin{vmatrix} x_j^{n+1} & x_j^{n+2} \\ x_{n+1}^{n+1} & x_{n+1}^{n+2} \end{vmatrix} = \gamma_j,$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^n & x_1^{n+1} & x_1^{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & \ldots & x_n^n & x_n^{n+1} & x_n^{n+2} \\ x_{n+1}^1 & \ldots & x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n+1} & x_{n+1}^{n+2} \\ x_{n+2}^1 & \ldots & x_{n+2}^n & x_{n+2}^{n+1} & x_{n+2}^{n+2} \end{vmatrix}.$$

En se bornant au déterminant qui figure au dénominateur, il s'agit de calculer

$$D = \begin{vmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \ldots & y_1^n \\ y_2^1 & y_2^2 & \ldots & y_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_n^1 & y_n^2 & \ldots & y_n^n \end{vmatrix}.$$

Or, le déterminant peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \alpha x_1^1 + \beta_1 x_{n+1}^1 + \gamma_1 x_{n+2}^1 & \ldots & \alpha x_1^n + \beta_1 x_{n+1}^n + \gamma_1 x_{n+2}^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha x_n^1 + \beta_n x_{n+1}^1 + \gamma_n x_{n+2}^1 & \ldots & \alpha x_n^n + \beta_n x_{n+1}^n + \gamma_n x_{n+2}^n \end{vmatrix};$$

il se réduit donc à la somme de 3^n déterminants, tous nuls, sauf ceux qui contiennent n ou $n-1$ colonnes en α, et ceux qui contiennent $n-2$ colonnes en α, les deux autres renfermant respectivement les β *et* les γ. Posons encore

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^2 \end{vmatrix} = \delta;$$

nous aurons, d'après ce qui précède,

$$(67)\quad \mathrm{D} = \alpha^n \delta + \alpha^{n-1} \sum_{i=1}^{n} x^i_{n+1} \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^{i-1} & \beta_1 & x_1^{i+1} & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & \ldots & x_n^{i-1} & \beta_n & x_n^{i+1} & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$+ \alpha^{n-1} \sum_{i=1}^{n} x^i_{n+2} \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^{i-1} & \gamma_1 & x_1^{i+1} & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & \ldots & x_n^{i-1} & \gamma_n & x_n^{i+1} & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$+ \alpha^{n-2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} x^i_{n+1} x^k_{n+2} \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^{i-1} & \beta_1 & x_1^{i+1} & \ldots & x_1^{k-1} & \gamma_1 & x_1^{k+1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & \ldots & x_n^{i-1} & \beta_n & x_n^{i+1} & \ldots & x_n^{k-1} & \gamma_n & x_n^{k+1} & \ldots \end{vmatrix}$$

Associons au terme général de la dernière somme celui qui s'en déduit par l'échange de i et k; d'après les valeurs des β et des γ, leur somme est égale à

$$\alpha \begin{vmatrix} x^i_{n+1} & x^k_{n+1} \\ x^i_{n+2} & x^k_{n+2} \end{vmatrix}$$
$$\times \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^{i-1} & x_1^{n+1} & x_1^{i+1} & \ldots & x_1^{k-1} & x_1^{n+2} & x_1^{k+1} & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & \ldots & x_n^{i-1} & x_n^{n+1} & x_n^{i+1} & \ldots & x_n^{k-1} & x_n^{n+2} & x_n^{k+1} & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Cela étant, la règle de Laplace montre que la somme de tous les termes précédents est

$$(68)\qquad \alpha(\Delta - \alpha\delta - x^{n+1}_{n+1} \mathrm{Y}^{n+1}_{n+1} + x^{n+1}_{n+2} \mathrm{Y}^{n+1}_{n+2} - x^{n+2}_{n+1} \mathrm{Y}^{n+2}_{n+1} + x^{n+2}_{n+2} \mathrm{Y}^{n+2}_{n+2});$$

où l'on a posé

$$\mathrm{Y}^h_g = (-1)^{g-h} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} x^i_{g'} \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^{i-1} & x_1^{i+1} & \ldots & x_1^n & x_1^{h'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^1 & \ldots & x_n^{i-1} & x_n^{i+1} & \ldots & x_n^n & x_n^{h'} \end{vmatrix},$$

chacune des caractéristiques (g, g') (h, h') désignant l'ensemble des nombres $n+1$, $n+2$, pris dans un ordre arbitraire.

Tenant compte des valeurs des β, des γ, des y et de l'expression (68), on voit alors que l'expression (67) se réduit à

$$\mathrm{D} = \alpha^{n-1}\Delta.$$

Il résulte immédiatement de cette égalité que l'on a

$$(69)\qquad \sigma_{n-j} = \frac{\omega_{n-j}}{\omega_0} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1),$$

avec

$$(70)\quad \left\{\begin{aligned} &\omega_{n-j} = \begin{vmatrix} R_1^{(n)} & \ldots & R_1^{(j+1)} & R_1^{(j-1)} & \ldots & R_1^{(0)} & 1 - s_1^{-2} & k_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{n+2}^{(n)} & \ldots & R_{n+2}^{(j+1)} & R_{n+2}^{(j-1)} & \ldots & R_{n+2}^{(0)} & 1 - s_{n+2}^{-2} & k_{n+2} \end{vmatrix} \\ &\qquad\qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1), \\ &\omega_0 = \begin{vmatrix} R_1^{(n-1)} & \ldots & R_1^{(0)} & 1 - s_1^{-2} & k_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{n+2}^{(n-1)} & \ldots & R_{n+2}^{(0)} & 1 - s_{n+2}^{-2} & k_{n+2} \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Nous avons ainsi l'expression des σ_{n-j} comme quotients de fonctions ω_{n-j} contenant linéairement et sous forme homogène $n+1$ constantes (car on peut supposer $k_{n+2}=0$, le point x_0 étant arbitraire), et, par suite, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *dépendent bien de n constantes*. D'autre part, les coefficients de l'équation (E'_n) étant connus dès que les λ sont déterminés, on voit que *les équations* (69), (70) *permettent de construire effectivement une équation différentielle linéaire du second ordre admettant un groupe réductible donné* (du type G') (n° 17).

28. Je vais montrer maintenant qu'on a

$$(71)\qquad \omega_0 = \theta_0 \prod_{i=1}^{n+2} \prod_{k=1}^{n+2,\ i} (t_i - t_k)^{-2r_i - 2r_k + 1}.$$

Je supposerai $\mathcal{R}(2r_i - 1) < 0$; l'égalité (71), une fois établie dans cette hypothèse, sera évidemment valable quel que soit r_i. On peut donc prendre $t_{n+1} = 0$ comme origine des lacets et remplacer, après suppression d'un facteur constant, la valeur de ω_0 par la suivante :

$$(72)\qquad \omega_0 = \begin{vmatrix} \int_0^{t_1} W x^{n-1}\,dx & \ldots & \int_0^{t_1} W\,dx & k_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \int_0^{t_n} W x^{n-1}\,dx & \ldots & \int_0^{t_n} W\,dx & k_n \\ \int_0^{1} W x^{n-1}\,dx & \ldots & \int_0^{1} W\,dx & k_{n+2} \end{vmatrix},$$

où les intégrales sont prises le long des segments rectilignes $\overline{O t_j}$.

Au lieu de former par dérivations successives l'équation différentielle d'ordre $n+1$ vérifiée par ω_0, j'étudierai directement ω_0 considéré comme fonction de t, par exemple.

Les intégrales qui entrent dans le déterminant (72) ne peuvent avoir d'autres points singuliers que $t_1 = t_2, \ldots, t_n$, 0, 1 et ∞. Dans le voisinage de $t_1 = 0$, par exemple, toutes sont holomorphes, sauf

$$\begin{aligned}\int_0^{t_1} \mathrm{W}\, x^i\, dx \\ &= \int_0^{t_1} x^{-2r_{n+1}+i}(x-1)^{-2r_{n+2}}(x-t_1)^{-2r_1}\ldots(x-t_n)^{-2r_n}\,dx \\ &= t_1^{-2r_{n+1}-2r_1+i+1}\int_0^1 y^{-2r_{n+1}+i}(y-1)^{-2r_1}(t_1 y-1)^{-2r_{n+2}}\ldots(t_1 y-t_n)^{-2r_n}\,dx,\end{aligned}$$

la dernière intégrale étant holomorphe en t_1, pour $t_1 = 0$. Multipliant alors la première ligne du déterminant par $t_1^{2r_{n+1}+2r_1-i-1}$, on voit que ω_0 est de la forme

$$t_1^{-2r_1-2r_{n+1}+1}[\mathcal{F}(t_1) + c_1 t_1^{2r_1+2r_{n+1}-1}\mathcal{G}(t_1)],$$

$\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ désignant deux fonctions holomorphes dans le voisinage de $t_1 = 0$, et les coefficients de $\mathcal{F}$ dépendant linéairement de n constantes arbitraires. Toutefois, *il n'en résulte nullement*, ce qui est essentiel pour nous, *que les n premiers coefficients de $\mathcal{F}$ peuvent être choisis arbitrairement :* nous pouvons seulement affirmer que les racines de l'équation fondamentale déterminante en $t_1 = 0$ de l'équation linéaire $(\mathcal{E})$ vérifiée par $\omega_0 t_1^{2r_1-2r_{n+1}-1}$ sont

$$\varepsilon_1^{n+1}, \quad 1+\varepsilon_2^{n+1}, \quad \ldots, \quad n-1+\varepsilon_n^{n+1}, \quad 2r_1+2r_{n+1}-1+\varepsilon_{n+1}^{n+1},$$

les ε désignant ici, comme plus loin, des entiers positifs ou nuls. En général, les racines de l'équation fondamentale déterminante de $(\mathcal{E})$, relative à $t_1 = t_i$, sont

$$\varepsilon_1^i, \quad 1+\varepsilon_2^i, \quad \ldots, \quad n-1+\varepsilon_n^i, \quad 2r_1+2r_i-1+\varepsilon_{n+1}^{(i)}.$$

On verrait de même que pour $t_1 = \infty$, ces racines sont

$$\begin{gathered}1-2r_1+\varepsilon_1, \quad 2-2r_1+\varepsilon_2, \quad \ldots, \quad n-2r_1+\varepsilon_n, \\ -2r_1-2r_2-\ldots-2r_n+n+1+\varepsilon_{n+1}.\end{gathered}$$

Enfin, l'équation $(\mathcal{E})$ peut encore posséder ν points apparemment singuliers, $t_{n+4}, \ldots, t_{n+\nu+3}$, la somme des racines de l'équation fondamentale déterminante pour le point t_{n+3+l} étant $\frac{n(n+1)}{2}+\varepsilon^l$, où ε^l désigne un entier positif. Écrivons alors que la somme des racines précédentes est égale à $\frac{n^2(n+1)}{2}$; il viendra

$$\sum_{i=2}^{n+2}\sum_{j=1}^{n+1}\varepsilon_j^i+\sum_{j=1}^{n+1}\varepsilon_j+\sum_{l=1}^{\nu}\varepsilon^l=0;$$

tous les ε *sont donc nuls*, ce qui exige $\nu=0$, autrement dit, les seuls points singuliers de $(\mathcal{E})$ sont $t_2, \ldots, t_n$, 0, 1, ∞; de plus, dans le domaine de chacun des $n+1$ premiers points, il existe n déterminations des intégrales appartenant respectivement aux exposants 0, $1, \ldots, n-1$; et, de même, dans le domaine de $t_1=\infty$, ω_0' admet un développement de la forme

$$\left(\frac{1}{t_1}\right)^{1-2r_1}\mathcal{F}_1\left(\frac{1}{t_1}\right)+\left(\frac{1}{t_1}\right)^{-\sum\limits_{i=1}^{n+2}2r_i+n+1}\mathcal{G}_1\left(\frac{1}{t_1}\right),$$

$\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{G}_1$ étant holomorphes en $\frac{1}{t_1}$ et les n premiers coefficients de $\mathcal{F}_1$ étant arbitraires. D'après les résultats de Pochhammer, l'équation à laquelle satisfait ω_0' est précisément (56) (avec $i=1$).

En procédant de même avec $t_2, \ldots, t_n$, on démontrerait enfin que l'identité (71) est vérifiée.

39. Dans son Mémoire des *Mathematische Annalen* (¹), M. Richard Fuchs s'était proposé le problème actuel, au point de vue du n° 34, pour $n=1$; il est arrivé ainsi à cette conclusion :

Pour que le groupe de (E_1') soit indépendant de t_1, il faut et il suffit que

$$\int\frac{dx}{y_1^2}=\int x^{-2r_2}(x-1)^{-2r_3}(x-t_1)^{-2r_1}(x-\lambda_1)\,dx$$

prenne la même valeur pour tout chemin fermé L, abstraction faite d'un facteur constant (indépendant de t_1).

Or, l'énoncé précédent suppose implicitement que y_1^2 est uniforme;

d'ailleurs, c'est seulement à cette condition que les formules

$$S^i y_1 = s_i y_1,$$
$$S^i y_2 = s_i R_i y_1 + s_i y_2$$

qu'il prend comme point de départ [au lieu de (59)] sont exactes.

Néanmoins, l'application qu'il en fait (*loc. cit.*, p. 320) aux périodes de l'intégrale elliptique de seconde espèce se trouve exacte. Plus généralement, nous allons démontrer ce théorème :

Pour que le rapport des valeurs $\mathfrak{L}_i$ et $\mathfrak{L}_j$ de l'intégrale

$$\int \psi(x) \prod_{i=1}^{n+2} (x - t_i)^{-2r_i}\, dx, \tag{73}$$

prise le long de deux cycles quelconques $(\mathfrak{S}_i)$ *et* $(\mathfrak{S}_j)$, *soit indépendant des* t_i, *il faut et il suffit que* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *vérifient le système* (47) [1].

Les équations (63) entraînent, en effet,

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{L}_i & s'_i & k'_i \\ R_{n+1} & 1 - s_{n+1}^{-2} & k_{n+1} \\ R_{n+2} & 1 - s_{n+2}^{-2} & k_{n+2} \end{vmatrix} = 0, \tag{74}$$

s'_i et k'_i désignant de nouvelles constantes. Montrons que s'_i *est nul si* $(\mathfrak{S}_i)$ *est un cycle*. Il résulte de (74) que l'on a encore

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{L}_i + s'_i \displaystyle\int_{x_0}^{x'_0} \frac{dx}{y_1^2} & s'_i & k'_i \\ R_{n+1} + (1 - s_{n+1}^{-2}) \displaystyle\int_{x_0}^{x'_0} \frac{dx}{y_1^2} & 1 - s_{n+1}^{-2} & k_{n+1} \\ R_{n+2} + (1 - s_{n+2}^{-2}) \displaystyle\int_{x_0}^{x'_0} \frac{dx}{y_1^2} & 1 - s_{n+2}^{-2} & k_{n+2} \end{vmatrix} = 0,$$

en appelant x_0 l'origine des lacets L_{n+1} L_{n+2}, origine qu'on peut supposer située sur $(\mathfrak{S}_i)$ et x'_0 un point quelconque. Mais l'équation précé-

---

[1] La proposition serait dépourvue de sens si l'intégrale $\int \psi(x) \prod (x - t_i)^{-2r_i} dx$ prise le long d'un cycle quelconque était nulle; mais il résulte du n° 36 que cette hypothèse, appliquée aux cycles $L_i L_j L_i^{-1} L_j^{-1}$, est inadmissible.

dente peut encore s'écrire

$$(75)\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{L}_i + s'\displaystyle\int_{x_0}^{x'_0} \frac{dx}{y_1^2} & s'_i & k'_i \\ \mathrm{R}_{n+1}(x'_0) & 1 - s_{n+1}^{-2} & k_{n+1} \\ \mathrm{R}_{n+2}(x'_0) & 1 - s_{n+2}^{-2} & k_{n+2} \end{vmatrix} = 0,$$

en appelant $\mathrm{R}_i(x'_0)$ valeur de $\int \frac{dx}{y_1^2}$ prise sur lacet d'origine x'_0 et entourant le point t_i. Mais, puisque $\mathfrak{L}_i$ est un cycle, nous pouvons écrire l'équation (74) en substituant x_0 à x'_0 dans R_{n+1} et R_{n+2}, et en conservont la même valeur à $\mathfrak{L}_i$. Rapprochons l'équation ainsi obtenue de (75), il viendra

$$s' \begin{vmatrix} 1 - s_{n+1}^{-2} & k_{n+1} \\ 1 - s_{n+2}^{-2} & k_{n+2} \end{vmatrix} \int_{x_0}^{x'_0} \frac{dx}{y_1^2} = 0.$$

Or, en remplaçant au besoin les indices $n+1$, $n+2$ par d'autres indices, on voit que le dernier déterminant est différent de zéro; sinon les déterminants (64) seraient nuls [en vertu de (62) et de la condition $\delta \neq 0$], ce qui est impossible (n° 36). On a donc $s' = 0$, et, par suite,

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{L}_i & 0 & k'_i \\ \mathrm{R}_{n+1} & 1 - s_{n+1}^{-2} & k_{n+1} \\ \mathrm{R}_{n+2} & 1 - s_{n+2}^{-2} & k_{n+2} \end{vmatrix} = 0.$$

Écrivons l'égalité analogue pour $(\mathfrak{S}_i)$, il viendra

$$\frac{\mathfrak{L}_i}{\mathfrak{L}_j} = \frac{k'_i}{k'_j},$$

et notre proposition est établie.

Réciproquement, considérons les deux cycles $\mathrm{L}_i \mathrm{L}_{n+1} \mathrm{L}_i^{-1} \mathrm{L}_{n+1}^{-1}$ et $\mathrm{L}_{n+1} \mathrm{L}_{n+2} \mathrm{L}_{n+1}^{-1} \mathrm{L}_{n+2}^{-1}$, et supposons que le rapport des valeurs de l'intégrale (73) prise le long de ces cycles soit constant; on aura

$$\begin{vmatrix} \mathrm{R}_i & 1 - s_i^{-2} & k_i \\ \mathrm{R}_{n+1} & 1 - s_{n+1}^{-2} & 0 \\ \mathrm{R}_{n+2} & 1 - s_{n+2}^{-2} & k_{n+2} \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

où les k_i sont des constantes, les R et les s ayant la même signification que précédemment, et, par suite, les λ vérifient le système (47).

En particulier, supposons tous les r_i égaux à $\frac{1}{4}$; l'expression (73) est alors une intégrale hyperelliptique

$$\int \frac{\psi(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}dx = \int \frac{(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n)}{\sqrt{x(x-1)(x-t_1)\ldots(x-t_n)}}dx \tag{76}$$

de seconde ou de troisième espèce, selon que n est impair ou pair; $\mathfrak{L}_i$ et $\mathfrak{L}_j$ désignent deux périodes de cette intégrale, et nous avons ainsi le théorème suivant :

Pour que le rapport des périodes de l'intégrale (76) *soit indépendant des paramètres t_i, il faut et il suffit que $\lambda_1, \ldots, \lambda_2$ vérifient le système*

$$\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_i} = \frac{\psi(t_i)}{2\,\varphi'(t_i)}\,\frac{\varphi(\lambda_j)}{(\lambda_j - t_i)\,\psi'(\lambda_j)}\left[\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{\lambda_j - t_k} - \frac{1}{\lambda_j - t_i}\right].$$

Si n est pair, et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vérifient le système précédent, *les périodes de l'intégrale* (76) *seront indépendantes des paramètres $t_1, \ldots, t_n$.*