ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE COTTON

Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 28 (1911), p. 473-521

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1911_3_28__473_0>

SUR

LES SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES,

PAR M. ÉMILE COTTON.

Introduction.

L'objet de ce Mémoire est la recherche des solutions d'un système différentiel qui tendent vers zéro ([1]) quand la variable indépendante croît indéfiniment, ou plus généralement qui restent voisines de zéro dans les mêmes conditions. Les fonctions et les variables sont supposées réelles.

Cette question, intéressante au double point de vue de la théorie pure et des applications, a déjà fait l'objet de travaux importants ([2]). Ceux de M. Poincaré ont ouvert la voie; nous aurons très souvent dans la suite à citer ceux de M. Liapounoff et de M. Bohl.

Dans ce travail nous utilisons une méthode nouvelle qui consiste à transformer les équations différentielles données (D) en équations intégrales ([3]) (I), et à appliquer à celles-ci le procédé classique d'approximations successives de M. Picard.

([1]) Un changement de variables ramène à ce cas particulier le cas général des solutions tendant, pour de grandes valeurs de la variable, vers une solution connue, ou encore restant voisines d'une solution approchée connue.

([2]) *Voir* le n° 12 pour la bibliographie, et le n° 13 pour les applications.

([3]) L'une des limites des intégrales est variable; les équations ne sont pas linéaires par rapport aux fonctions inconnues.

On est conduit à la transformation précédente, par l'un des procédés donnant par quadratures les solutions d'un système différentiel linéaire non homogène, quand on observe que, pour des valeurs des variables voisines de zéro, les termes de moindre degré des fonctions sont les plus importants.

Les noyaux des équations intégrales (I) sont les solutions d'un système différentiel linéaire (L) très voisin (et souvent non distinct) de celui qu'on obtient en réduisant à leur partie linéaire les équations (D) résolues par rapport aux dérivées des fonctions inconnues.

L'étude des équations (I) et de leurs approximations successives se fait aisément à l'aide d'un système d'équations intégrales linéaires (I') convenablement construit. Les séries auxquelles conduit la méthode des approximations successives appliquée à ce système de comparaison (I') ont leurs termes respectivement supérieurs aux valeurs absolues des termes correspondants des séries données par la même méthode appliquée au système (I); il suffit donc d'établir la convergence des premières, ce que nous avons fait d'une façon simple.

Dans le Chapitre I, nous étudions le cas où les équations (L) sont à coefficients constants. Bien que les résultats énoncés (*voir* n° 11) soient à peu près ceux de M. M. Liapounoff et Bohl, nous avons cru devoir traiter avec soin ce cas de beaucoup le plus important [1] où les propositions ont un caractère très pratique.

Nous appliquons ensuite (Chap. II) notre méthode à la démonstration et à l'extension [2] des résultats déduits par M. Liapounoff d'une notion importante qu'il a introduite dans la Science, celle de nombre caractéristique d'un groupe de fonctions. Les équations (L) sont maintenant à coefficients variables; à leurs solutions à nombre caractéristique positif correspondent des solutions de (D) asymptotiques à zéro dépendant du même nombre de constantes arbitraires. Ces nombres caractéristiques semblent, il est vrai, difficiles à déterminer pratiquement (sauf dans le cas des équations à coefficients constants), mais leur intérêt théorique est grand. Ils montrent en effet qu'un élément

---

[1] On ramène à ce cas particulier celui des équations (L) à coefficients périodiques et plus généralement celui des équations réductibles de Liapounoff.

[2] Nous ne supposons plus les équations (D) analytiques par rapport aux inconnues.

essentiel dans la recherche des solutions de D asymptotiques à zéro est la rapidité avec laquelle certaines solutions de (L) tendent vers zéro. Ils mesurent en quelque sorte cette rapidité par une comparaison avec la fonction exponentielle.

On est naturellement tenté de généraliser cette notion, en conservant le même mode de comparaison, mais en utilisant des fonctions monotones autres que la fonction exponentielle. Nous n'avons pas abordé l'étude systématique de cette généralisation dans le présent Mémoire, mais nous avons montré l'intérêt qu'elle peut présenter par un cas particulier important, auquel est consacré le Chapitre III. La variable indépendante ne figure pas explicitement dans les équations (D); un des nombres caractéristiques (et un seulement) des solutions de (L) est nul. Nous avons pu montrer, dans des cas fréquents (*voir* n° 22), l'existence d'une famille de solutions asymptotiques à zéro d'un degré de généralité plus grand que les résultats antérieurs ne permettaient de le supposer.

CHAPITRE I.

1. Nous étudierons tout d'abord les équations différentielles du type suivant :

$$(1) \qquad \frac{dz_i}{dt} - \lambda_{i1} z_1 - \ldots - \lambda_{in} z_n = L_i(z_1, \ldots, z_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les λ *sont des constantes*. Les fonctions L sont finies et continues, les valeurs absolues des fonctions $L(0, \ldots, 0, t)$ et celles des dérivées [1] $\frac{\partial L}{\partial z}$ sont supposées suffisamment petites [2], ces hypothèses étant relatives au domaine

$$(2) \qquad |z_1| < Z, \qquad \ldots, \qquad |z_n| < Z, \qquad t_0 < t.$$

(1) Au lieu de dérivées on pourrait considérer les coefficients d'inégalités de Lipschitz.

(2) En général, ces dérivées ne s'annulent pas pour $z_1 = \ldots = z_n = 0$. Les inégalités traduisant le degré de petitesse des fonctions $L(0, \ldots, 0, t)$ et $\left|\frac{\partial L}{\partial z}\right|$ ne dépendent que des λ.

On pourra parfois substituer à la dernière inégalité (2) la suivante $t > t_0$ ou encore supprimer toute condition de grandeur pour t.

L'équation caractéristique

$$(3) \qquad \Delta(r) = \begin{vmatrix} \lambda_{11} - r & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} - r & \ldots & \lambda_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \ldots & \lambda_{nn} - r \end{vmatrix} = 0$$

du système homogène

$$(4) \qquad \frac{dz_i}{dt} - \lambda_{i1} z_1 - \ldots - \lambda_{in} z_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

obtenu en supprimant les seconds membres des équations (8), sera d'abord supposée à racines réelles et distinctes.

Une substitution linéaire et homogène à coefficients constants effectuée sur les variables z transforme les systèmes (1) et (4) en des systèmes de même forme où tous les λ_{ij} à indices différents sont nuls, les λ_{ii} à indices égaux sont précisément les racines de l'équation caractéristique (3). Les résultats concernant les équations de cette *forme réduite* seront ensuite étendus aux équations primitives.

Nous ramènerons au cas précédent celui où l'équation (3) a des racines imaginaires (n° 9) et étudierons enfin le cas des racines multiples (n° 10).

Le signe des coefficients λ dans les équations de forme réduite a une grande importance, nous le mettrons en évidence en écrivant nos équations

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = -\, l_i x_i + \mathrm{P}_i(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_h; t), \\ \dfrac{dy_j}{dt} = m_j y_j + \mathrm{Q}_j(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_h; t), \\ (i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, h;\ k + h = n). \end{cases}$$

Les coefficients $l_1, \ldots, l_k$ *seront tous positifs*. Quant aux coefficients $m_1, \ldots, m_h$ ils ne seront *jamais négatifs ;* nous les supposerons d'abord positifs, pour examiner ensuite le cas où quelques-uns d'entre eux sont nuls. Bien entendu, il se peut qu'on ait soit $k = 0$, soit $h = 0$.

2. *Nous transformerons les équations* (5) *en un système d'équations intégrales*. Rappelons, à cet effet, que la solution générale de l'équation linéaire

$$\frac{dx}{dt} = lx + \mathrm{F}(t), \tag{6}$$

où l est constant, est [1]

$$x = \mathrm{A}\, e^{lt} + \int_{t_0}^{t} e^{l(t-\alpha)}\, \mathrm{F}(\alpha)\, d\alpha, \tag{7}$$

t_0, A étant des constantes arbitraires.

Les équations intégrales correspondant aux équations (55) seront, d'après cela,

$$\tag{8} \left\{ \begin{array}{l} x_i(t) = a_i e^{-l_i t} + \displaystyle\int_{t_1}^{t} e^{-l_i(t-\alpha)}\, \mathrm{P}_i[x_1(\alpha), \ldots, y_h(\alpha), \alpha]\, d\alpha, \\ y_j(t) = b_j e^{m_j t} + \displaystyle\int_{t_2}^{t} e^{m_j(t-\alpha)}\, \mathrm{Q}_j[x_1(\alpha), \ldots, y_h(\alpha), \alpha]\, d\alpha \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, k;\ j = 1, 2, \ldots, h;\ k + h = n). \end{array} \right.$$

---

(1) On le vérifie immédiatement. A ce propos observons que la formule de dérivation

$$\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} e^{l(t-\alpha)}\mathrm{F}(\alpha) = l\int_{t_0}^{t} e^{l(t-\alpha)}\,\mathrm{F}(\alpha)\,d\alpha + \mathrm{F}(t)$$

est applicable même si t_0 est infini (pourvu que l'intégrale ait un sens), car si l'on fait sortir e^{lt} du signe $\int$ la fonction à intégrer ne contient plus la variable de dérivation.

Envisageons ensuite une expression de la forme $\mathrm{I} = \int_t^{+\infty} \varphi(t, \alpha) f(\alpha)\, d\alpha$, où les fonctions $\varphi(t, \alpha), f(\alpha)$ sont définies pour $\alpha > t > t_0$ (t_0 constante fixe). Supposons qu'il existe un nombre positif l tel que les produits $\varphi(t, \alpha)\, e^{l(t-\alpha)}$, $\frac{\partial \varphi(t, \alpha)}{\partial t}\, e^{l(t-\alpha)}$ soient bornés et que l'intégrale $\int_t^{\infty} e^{-l(t-\alpha)}\, |f(\alpha)|\, d\alpha$ ait un sens. Dans ces conditions I est une fonction de t bien définie et l'intégrale obtenue par application de la règle habituelle de dérivation sous le signe $\int$ étant uniformément convergente, donnera la dérivée $\frac{d\mathrm{I}}{dt}$.

Des remarques de même nature s'appliquant à toutes les intégrales que nous aurons à considérer dans la suite, nous regarderons dès à présent comme démontré qu'il n'y a pas lieu de se préoccuper des limites infinies pour leur dérivation.

On remarque que les limites d'intégration t_1, t_2 (qui sont constantes) dépendent seulement du signe des facteurs de t figurant en exposant. Ces constantes pourront être infinies.

L'étude de ce système (8) d'équations intégrales [1] peut être substituée à celle du système différentiel (5).

3. En particulier cette forme se prête bien à l'application de la *méthode d'approximations successives* dont la fécondité a été mise en évidence par les beaux travaux de M. Picard.

Les approximations de rang s $x_i^s(t)$, $y_j^s(t)$ se déduisent de celles de rang $s-1$ en substituant celles-ci $x_i^{s-1}(t)$, $y_i^{s-1}(t)$ aux fonctions inconnues dans les seconds membres des formules (8). On prend comme premières approximations

$$x_i^1(t) = a_i e^{-l_i t}, \qquad y_j^1(t) = b_j e^{m_j t}.$$

Quand les limites d'intégration sont finies, la présence des *noyaux* $e^{-l_i(t-\alpha)}$, $e^{m_j(t-\alpha)}$ donne des approximations plus rapidement convergentes que dans la méthode ordinaire (où les noyaux sont égaux à l'unité) et valables pour un intervalle plus étendu.

Mais ces noyaux présentent un autre avantage : ils nous permettront de supposer infinie l'une des limites d'intégration et d'étudier ainsi les solutions de (5) dans un intervalle s'étendant à l'infini.

Indiquons enfin *comment on démontre l'existence et la convergence des approximations successives*.

A chaque système d'équations intégrales (I) nous ferons correspondre un système d'équations intégrales linéaires (I'), appelé *système de comparaison*.

---

(1) Ces équations sont *à limites variables* comme celles dites de Volterra étudiées systématiquement par ce savant (*Atti dell'Accademia di Torino*, t. XXXI, 1896; *Annali di Mathematica*, 2e série, t. XXV, 1897).

M. Le Roux l'avait précédé dans cette voie, en étudiant incidemment de telles équations dans sa Thèse (*Annales de l'École Normale*, 1895, p. 244. *Voir* aussi *Travaux scientifiques de l'Université de Rennes*, t. VII, 1908).

Dans les équations du type Volterra, les facteurs des noyaux sont *linéaires* par rapport aux fonctions inconnues. L'application des équations intégrales (*non linéaires* telles que celles considérées ici) aux équations différentielles a été signalée et leur étude faite pour le cas le plus simple dans un article du *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1910, p. 144.

Les inconnues et les équations de (I′) correspondront aux inconnues et aux équations de (I); les intervalles d'intégration intervenant dans (I′) comprendront les intervalles relatifs aux intégrales correspondantes de (I) et pourront être plus étendus. Les expressions linéaires figurant dans (I′) sous les signes $\int$ seront à coefficients positifs, ces coefficients étant supérieurs en valeur absolue aux dérivées correspondantes (ou aux coefficients de Lipschitz) des expressions correspondantes de (I). Enfin les premières approximations de (I′) seront supérieures en valeur absolue aux premières approximations de (I); les approximations successives de (I′) iront en augmentant avec leur rang. Leur convergence étant établie, il suffira de s'assurer que les différences entre les approximations de rang i et celles de rang $i-1$ sont pour (I) inférieures en valeur absolue à ce que sont les différences correspondantes pour (I′).

Cette dernière vérification étant immédiate, nous nous contenterons le plus souvent d'indiquer la formation du système de comparaison et de montrer la convergence de ses approximations successives.

4. Pour éviter des longueurs d'écriture et des indices trop nombreux nous examinerons en détail le cas de $k = h = 1$; le raisonnement étant manifestement général il suffira d'énoncer les résultats lorsque k et h seront quelconques.

Considérons donc le système différentiel

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -lx + P(x, y, t),\\ \frac{dy}{dt} &= \quad my + Q(x, y, t). \end{aligned}\right.$$

Les équations intégrales de comparaison que nous rencontrerons dans son étude se présentent naturellement quand on considère *les solutions constantes des équations linéaires*

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -lX + \varepsilon(X+Y) + la,\\ \frac{dY}{dt} &= \quad mY - \varepsilon(X+Y) + mb, \end{aligned}\right.$$

comme fonctions de ε. Les coefficients l, m, ε, a, b sont réels, positifs et constants.

Ces solutions constantes vérifient les équations

$$l(X-a) = m(Y-b) = \varepsilon(X+Y),$$

qu'on résout en les écrivant

$$\frac{X-a}{\frac{1}{l}} = \frac{Y-b}{\frac{1}{m}} = \frac{X+Y}{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{a+b}{\frac{1}{\varepsilon}-\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right)}. \tag{11}$$

Les solutions cherchées

$$\left\{\begin{aligned} X &= a + \frac{a+b}{l}\,\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right)},\\ Y &= b + \frac{a+b}{m}\,\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right)},\end{aligned}\right. \tag{12}$$

sont développables en séries entières en ε, pourvu que

$$\varepsilon\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right) < 1. \tag{13}$$

Nous supposerons cette inégalité vérifiée.

Écrivons ces développements :

$$\left\{\begin{aligned} X &= a + \frac{a+b}{l}\varepsilon + \frac{a+b}{l}\varepsilon^2\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right) + \ldots + \frac{a+b}{l}\varepsilon^i\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right)^{i-1} + \ldots,\\ Y &= b + \frac{a+b}{m}\varepsilon + \frac{a+b}{m}\varepsilon^2\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right) + \ldots + \frac{a+b}{m}\varepsilon^i\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right)^{i-1} + \ldots\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Désignons par X_i, Y_i les sommes des i premiers termes de ces séries, par ΔX_i et ΔY_i les différences $X_i - X_{i-1}$, $Y_i - Y_{i-1}$; nous voyons que X_i, Y_i, ΔX_i, ΔY_i sont positifs.

D'autre part, les solutions constantes de (10) vérifient les équations intégrales

$$\left\{\begin{aligned} X &= a + \varepsilon\int_{-\infty}^{t} e^{l(\alpha-t)}\quad (X+Y)\,d\alpha,\\ Y &= b + \varepsilon\int_{t}^{+\infty} e^{-m(\alpha-t)}(X+Y)\,d\alpha,\end{aligned}\right. \tag{15}$$

car on a, l et m étant positifs,

$$\int_{-\infty}^{t} e^{l(\alpha-t)}\,d\alpha = \frac{1}{l}, \qquad \int_{t}^{+\infty} e^{-m(\alpha-t)}\,d\alpha = \frac{1}{m}. \tag{16}$$

Appliquons au système (15) la méthode d'approximations successives en prenant

$$\overline{X_1} = a, \qquad \overline{Y_1} = b,$$

et d'une façon générale

$$\left\{\begin{aligned} \overline{X_i} &= a + \varepsilon\int_{-\infty}^{t} e^{l(\alpha-t)}\,(\overline{X_{i-1}} + \overline{Y_{i-1}})\,d\alpha, \\ \overline{Y_i} &= b + \varepsilon\int_{t}^{+\infty} e^{-m(\alpha-t)}\,(\overline{X_{i-1}} + \overline{Y_{i-1}})\,d\alpha. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Ces approximations $\overline{X_i}$, $\overline{Y_i}$ *sont identiques aux précédentes* X_i, Y_i, car on a $\overline{X_1} = X_1$, $\overline{Y_1} = Y_1$ et les relations de récurrence qu'on déduit de (16) et (17)

$$\frac{\overline{X_i} - \overline{X_{i-1}}}{\frac{1}{l}} = \frac{\overline{Y_i} - \overline{Y_{i-1}}}{\frac{1}{m}} = \frac{\overline{X_{i-1}} - \overline{X_{i-2}} + \overline{Y_{i-1}} - \overline{Y_{i-2}}}{\frac{1}{\varepsilon}}, \tag{18}$$

sont bien vérifiées aussi par X_i, Y_i.

5. *En modifiant les limites des intégrales et les termes qui les précèdent*, nous déduisons des équations (15) les équations suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{X}(t) &= \overline{a}(t) + \varepsilon\int_{t_0}^{t} e^{l(\alpha-t)}\,[\mathcal{X}(\alpha) + \mathcal{Y}(\alpha)]\,d\alpha, \\ \mathcal{Y}(t) &= \overline{b}(t) + \varepsilon\int_{t}^{+\infty} e^{-m(\alpha-t)}\,[\mathcal{X}(\alpha) + \mathcal{Y}(\alpha)]\,d\alpha. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Supposons les fonctions $\overline{a}$ et $\overline{b}$ bien définies pour $t > t_0$ et de plus

$$\left\{\begin{aligned} 0 &< \overline{a}(t) < a, \\ 0 &< \overline{b}(t) < b, \end{aligned}\right. \tag{20}$$

et appliquons la méthode d'approximations successives :

$$(21)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_1(t) = \bar{a}(t), \qquad \mathfrak{Y}_1(t) = \bar{b}(t), \\ \mathfrak{X}_i(t) = \bar{a}(t) + \varepsilon \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{l(\alpha - t)} \quad [\mathfrak{X}_{i-1}(\alpha) + \mathfrak{Y}_{i-1}(\alpha)]\, d\alpha, \\ \mathfrak{Y}_i(t) = \bar{b}(t) + \varepsilon \displaystyle\int_{t}^{\infty} e^{-m(\alpha - t)} [\mathfrak{X}_{i-1}(\alpha) + \mathfrak{Y}_{i-1}(\alpha)]\, d\alpha. \end{cases}$$

En comparant de proche en proche ces approximations à celles du numéro précédent, on voit que $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{Y}_i$ et leurs différences $\Delta\mathfrak{X}_i = \mathfrak{X}_i - \mathfrak{X}_{i-1}$, $\Delta\mathfrak{Y}_i = \mathfrak{Y}_i - \mathfrak{Y}_{i-1}$ sont, pour $t > t_0$, bien définies, positives et respectivement inférieures à X_i, Y_i, ΔX_i, ΔY_i. Cela tient aux inégalités (20) et à ce que l'étendue de l'un des intervalles d'intégration est moindre pour les formules (21) que pour les formules (17).

Donc $\mathfrak{X}_i(t)$ et $\mathfrak{Y}_i(t)$ *tendent uniformément vers des limites* $\mathfrak{X}(t)$ et $\mathfrak{Y}(t)$ *solutions des équations intégrales* (19); on a de plus

$$(22)\quad \begin{cases} 0 < \mathfrak{X}(t) < a + \dfrac{a+b}{l} \dfrac{\varepsilon}{1 - \varepsilon\left(\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{m}\right)}, \\ 0 < \mathfrak{Y}(t) < b + \dfrac{a+b}{m} \dfrac{\varepsilon}{1 - \varepsilon\left(\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{m}\right)}. \end{cases}$$

Les solutions ainsi trouvées sont les seules possibles pour les équations intégrales (19). En effet s'il en existait d'autres $\mathfrak{X}'(t)$, $\mathfrak{Y}'(t)$ les différences

$$\Xi(t) = \mathfrak{X} - \mathfrak{X}', \qquad \mathrm{H}(t) = \mathfrak{Y} - \mathfrak{Y}',$$

vérifieraient

$$(23)\quad \begin{cases} \Xi(t) = \varepsilon \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{l(\alpha - t)} \quad [\Xi(\alpha) + \mathrm{H}(\alpha)]\, d\alpha, \\ \mathrm{H}(t) = \varepsilon \displaystyle\int_{t}^{+\infty} e^{-m(\alpha - t)} [\Xi(\alpha) + \mathrm{H}(\alpha)]\, d\alpha \end{cases}$$

et, par suite, le système différentiel

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Xi}{dt} = -l\Xi + \varepsilon(\Xi + \mathrm{H}), \\ \dfrac{d\mathrm{H}}{dt} = m\mathrm{H} - \varepsilon(\Xi + \mathrm{H}). \end{cases}$$

L'équation caractéristique

$$\rho^2 + \rho(l - m) - lm + \varepsilon(l + m) = 0$$

a ses racines réelles et de signes contraires, à cause de l'inégalité (13). Comme H doit, d'après (23), s'annuler pour t infini positif, la racine négative seule peut figurer dans Ξ et H. Mais Ξ s'annulant pour $t = t_0$ le coefficient de l'exponentielle restante est nulle, Ξ et H sont identiquement nulles, ce qu'on voulait établir.

On peut évidemment établir de la même façon l'existence de solutions pour d'autres systèmes d'équations intégrales, par exemple pour celui qu'on déduit de (19) en y remplaçant $+\infty$ par $t_1 > t_0$, ou encore pour le système

$$(25) \qquad \begin{cases} \mathfrak{X}(t) = \mathfrak{X}_1(t) + \varepsilon \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{l(\alpha - t)} \, [\mathfrak{X}(\alpha) + \mathfrak{Y}(\alpha)] \, d\alpha, \\ \mathfrak{Y}(t) = \mathfrak{Y}_1(t) + \varepsilon \displaystyle\int_{t}^{+\infty} e^{-m(\alpha - t)} \, [\mathfrak{X}(\alpha) + \mathfrak{Y}(\alpha)] \, d\alpha, \end{cases}$$

où $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{Y}_1$ sont des fonctions continues et bornées pour toutes les valeurs réelles de t. En prenant par exemple

$$\mathfrak{X}_1 = \int_{-\infty}^{t} e^{l(\alpha - t)} \varphi(\alpha) \, d\alpha, \qquad \mathfrak{Y}_1 = \int_{t}^{+\infty} e^{-m(\alpha - t)} \psi(\alpha) \, d\alpha,$$

$\varphi(t)$ et $\psi(t)$ étant bien définies continues et bornées pour toutes les valeurs de t, on voit que le système différentiel

$$(26) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{X}}{dt} = -l\mathfrak{X} + \varepsilon(\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}) + \varphi(t), \\ \dfrac{d\mathfrak{Y}}{dt} = m\mathfrak{Y} \quad - \varepsilon(\mathfrak{X} + \mathfrak{Y}) - \psi(t) \end{cases}$$

admet une solution restant bornée quel que soit t, dès que ε satisfait à la relation (13).

La méthode des approximations successives appliquée aux équations (25) donne cette solution sous forme de séries entières en ε. Ces séries sont à termes positifs si les fonctions φ et ψ sont positives.

6. Revenons au système

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\,lx + P(x, y, t), \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = my \;\; + Q(x, y, t). \end{cases}$$

Si P et Q sont nulles, ce système admet une famille à un paramètre de solutions asymptotiques à zéro *pour* $t = +\infty$. Nous allons voir qu'il en est ainsi dans le cas suivant.

Admettons que P et Q satisfassent aux conditions que voici :

1° Pour

$$t \geqq t_0, \qquad |x| < A, \qquad |y| < A,$$

ces fonctions sont bien définies, continues, admettent des dérivées partielles (¹) par rapport à x et y, dérivées continues et inférieures en valeur absolue à $\dfrac{1}{\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{m}}$ lorsque x et y sont nuls (²).

On peut donc déterminer $\sigma < A$, tel que pour $|x| \leqq \sigma$, $|y| \leqq \sigma$ ces dérivées soient inférieures en valeur absolue à un nombre

$$\varepsilon < \frac{1}{\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{m}}.$$

2° P (o, o, t) et Q (o, o, t) sont nulles.

Observons que si $|x|$, $|y|$, $|x'|$, $|y'|$ sont inférieurs à σ on a

$$(27)\qquad \begin{cases} |P(x, y, t) - P(x', y', t)| < \varepsilon \{ |x - x'| + |y - y'| \}, \\ |Q(x, y, t) - Q(x', y', t)| < \varepsilon \{ |x - x'| + |y - y'| \}. \end{cases}$$

De plus ces inégalités montrent que P et Q sont bornées pour $|x| < \sigma$, $|y| < \sigma$ (on fait $x' = y' = 0$).

Considérons les équations intégrales correspondant aux solutions

---

(¹) L'existence de ces dérivées et *a fortiori* leur continuité ne sont pas des hypothèses essentielles ; mais l'énoncé des hypothèses sur les coefficients de Lipschitz qu'il faudrait faire à la place de celles-ci, entraînerait des longueurs inutiles.

(²) On traduit ceci en langage ordinaire en disant pour $> t_0$ P et Q *varient lentement* au voisinage de $x = y = 0$.

de (9), asymptotiques à zéro pour $t = +\infty$,

$$(28) \quad \begin{cases} x(t) = \mathcal{A} e^{-l(t-t_0)} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{l(\alpha-t)} \ \mathrm{P}[x(\alpha), y(\alpha), \alpha]\, d\alpha, \\ y(t) = \qquad -\displaystyle\int_{t}^{+\infty} e^{-m(\alpha-t)} \mathrm{Q}[x(\alpha), y(\alpha), \alpha]\, d\alpha. \end{cases}$$

Supposons $|\mathcal{A}|$ assez petite pour qu'on ait

$$(29) \quad \begin{cases} |\mathcal{A}| \left[1 + \dfrac{\varepsilon}{l} \dfrac{1}{1 - \varepsilon\left(\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{m}\right)} \right] < \sigma, \\ |\mathcal{A}| \left[\dfrac{\varepsilon}{m} \dfrac{1}{1 - \varepsilon\left(\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{m}\right)} \right] < \sigma. \end{cases}$$

Écrivons les *équations intégrales de comparaison*

$$(30) \quad \begin{cases} \mathcal{X}(t) = |\mathcal{A}| e^{-l(t-t_0)} + \varepsilon \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{l(\alpha-t)} \ [\mathcal{X}(\alpha) + \mathcal{Y}(\alpha)]\, d\alpha, \\ \mathcal{Y}(t) = \qquad \varepsilon \displaystyle\int_{t}^{+\infty} e^{-m(\alpha-t)} [\mathcal{X}(\alpha) + \mathcal{Y}(\alpha)]\, d\alpha. \end{cases}$$

Elles appartiennent au type (19) dont elles se déduisent en faisant

$$\bar{a}(t) = |\mathcal{A}| e^{-l(t-t_0)}, \qquad \bar{b}(t) = 0.$$

Prenant comme premières approximations, pour (28),

$$x_1(t) = \mathcal{A} e^{-l(t-t_0)}, \ y_1(t) = 0$$

et, pour (30),

$$\mathcal{X}_1(t) = |\mathcal{A}| e^{-l(t-t_0)} \mathcal{Y}_1(t) = 0,$$

et calculons les approximations successives par le procédé habituel

$$\begin{aligned} &x_{i+1}(t) = \mathcal{A} e^{-l(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{l(\alpha-t)} \,\mathrm{P}[x_i(\alpha), y_i(\alpha), \alpha]\, d\alpha, \\ &y_{i+1}(t) = \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nous avons, pour $t > t_0$,

$$|\mathrm{P}(x_1, y_1, t)| = |\mathrm{P}(x_1, y_1, t) - \mathrm{P}(0, 0, t)| < \varepsilon[|x_1| + |y_1|] = \varepsilon(\mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1),$$
$$|\mathrm{Q}(x_1, y_1, t)| < \varepsilon(\mathcal{X}_1 + \mathcal{Y}_1),$$

ce qui montre que $x_2(t)$, $y_2(t)$ sont bien définis et que $|x_2-x_1|$, $|y_2-y_1|$ sont inférieurs à $\mathfrak{X}_2-\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_2-\mathfrak{Y}_1$. On en conclut que $|x_2|$, $|y_2|$ sont inférieurs à $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ solutions de (30) et par suite [inégalités (22)] aux premiers membres des inégalités (29), donc aussi à σ. Cela permet d'affirmer l'existence de x_3, y_3.

Plus généralement, ayant établi l'existence des approximations

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_i, \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_i, \end{matrix}$$

et le fait que les différences

$$\begin{matrix} x_2-x_1, & x_3-x_2, & \ldots, & x_i-x_{i-1}, \\ y_2-y_1, & y_3-y_2, & \ldots, & y_i-y_{i-1}, \end{matrix}$$

sont respectivement inférieures en valeur absolue à

$$\begin{matrix} \mathfrak{X}_2-\mathfrak{X}_1, & \mathfrak{X}_3-\mathfrak{X}_2, & \ldots, & \mathfrak{X}_i-\mathfrak{X}_{i-1}, \\ \mathfrak{Y}_2-\mathfrak{Y}_1, & \mathfrak{Y}_3-\mathfrak{Y}_2, & \ldots, & \mathfrak{Y}_i-\mathfrak{Y}_{i-1}, \end{matrix}$$

on peut affirmer que $|x_i|$, $|y_i|$ sont inférieures à σ.

Donc $P(x_i, y_i, t)\, Q(x_i, y_i, t)$ étant bornées et continues, x_{i+1}, y_{i+1} existent, et en écrivant les intégrales donnant $x_{i+1}-x_i$, $y_{i+1}-y_i$, on voit en utilisant les inégalités de Lipschitz (27) qu'on a aussi

$$(31) \qquad |x_{i+1}-x_i| < \mathfrak{X}_{i+1}-\mathfrak{X}_i, \qquad |y_{i+1}-y_i| < \mathfrak{Y}_{i+1}-\mathfrak{Y}_i.$$

L'existence de x_i, y_i et les inégalités (31) sont ainsi établies pour toutes les valeurs de i.

Il résulte (n° 3) de cette comparaison que *les approximations successives $x_i(t)$, $y_i(t)$ tendent uniformément vers des limites $x(t)$, $y(t)$, vérifiant les équations intégrales* (28) *et les équations différentielles* (9).

Ces solutions sont asymptotiques à zéro pour $t=\infty$.

C'est évident pour $y(t)$, d'après les équations (28); pour x on le voit en observant que $|x| < \mathfrak{X}$, et que $\mathfrak{X}$ limite d'une suite uniformément convergente $\mathfrak{X}_1, \ldots, \mathfrak{X}_i, \ldots$ de fonctions asymptotiques à zéro est lui-même asymptotique à zéro.

On pourrait d'ailleurs calculer $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ comme solutions d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants et vérifier qu'ils sont asymptotiques à zéro pour $t=+\infty$.

On observe que les solutions x *et* y *dépendent d'un paramètre variable* $\mathcal{A}$, valeur de x pour $t = t_0$.

7. Nous avons supposé dans ce qui précède que P et Q s'annulaient quel que soit t pour $x = y = 0$. Cette hypothèse 2° n'est pas nécessaire pour établir la convergence des approximations successives, mais si elle n'est pas remplie les limites de ces approximations ne sont plus nécessairement asymptotiques à zéro.

Les hypothèses 1° restant valables, *désignons par* M *une limite supérieure de* $|P(0, 0, t)|$, $|Q(0, 0, t)|$ et substituons aux équations (28) les suivantes

$$(32) \quad \begin{cases} x(t) = \mathcal{A} e^{-l(t-t_0)} + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{l(\alpha-t)} P(0, 0, \alpha)\, d\alpha \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{l(\alpha-t)} \{P[x(\alpha) y(\alpha) \alpha] - P(0, 0, \alpha)\}\, d\alpha, \\ y(t) = \qquad - \displaystyle\int_{t}^{+\infty} e^{-m(\alpha-t)} Q(0, 0, \alpha)\, d\alpha \\ \qquad\qquad - \displaystyle\int_{t}^{+\infty} e^{-m(\alpha-t)} \{Q[x(\alpha), y(\alpha), \alpha] - Q(0, 0, \alpha)\}\, d\alpha. \end{cases}$$

On peut alors prendre, comme équations de comparaison, les équations obtenues en faisant dans les équations (19)

$$\bar{a}(t) = \frac{M}{l} + |\mathcal{A}| e^{-l(t-t_0)}, \qquad \bar{b}(t) = \frac{M}{m}.$$

Le raisonnement établissant la convergence sera valable si les équations de comparaison admettent des solutions assez petites. D'une façon plus précise si

$$(33) \quad \begin{cases} \left[|\mathcal{A}|\left(1 - \dfrac{\varepsilon}{m}\right) + \dfrac{M}{l}\right] \dfrac{1}{1 - \varepsilon\left(\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{m}\right)} < \sigma, \\ \dfrac{|\mathcal{A}|\varepsilon + M}{m} \, \dfrac{1}{1 - \varepsilon\left(\dfrac{1}{l} + \dfrac{1}{m}\right)} < \sigma, \end{cases}$$

l'existence de solutions pour les équations (32) est assurée. Donc :

Si les conditions 1° sont réalisées et si $P(0, 0, t)$ *et* $Q(0, 0, t)$ *sont assez petits en valeur absolue, les équations* (9) *admettent une famille à un paramètre de solutions restant bornées pour* $t = +\infty$.

Il est bon de noter qu'*on a ainsi toutes les solutions de cette nature*. D'une façon plus précise il ne peut exister qu'une seule solution $x(t)$, $y(t)$ de (9), telle que $x(t_0) = \mathcal{A}$, que x et y restent pour $t > t_0$ plus petits que σ en valeur absolue.

En effet s'il existait deux solutions de cette nature $x_1(t)$, $y_1(t)$ et $x_2(t)$, $y_2(t)$, on aurait, en retranchant membre à membre les équations correspondant à (32),

$$x_1(t) - x_2(t) = \int_{t_0}^{t} e^{l(\alpha - t)} \{P[x_1(\alpha), y_1(\alpha)] - P[x_2(\alpha), y_2(\alpha)]\} d\alpha,$$
$$y_1(t) - y_2(t) = \ldots.$$

Posant $x_1 - x_2 = \xi$, $y_1 - y_2 = \eta$, nous écrirons

$$\xi(t) = \int_{t_0}^{t} e^{l(\alpha-t)} [\pi(\alpha)\xi(\alpha) + \pi_1(\alpha)\eta(\alpha)] d\alpha,$$
$$\eta(t) = -\int_{t}^{+\infty} e^{-m(\alpha-t)} [\varkappa(\alpha)\xi(\alpha) + \varkappa_1(\alpha)\eta(\alpha)] d\alpha;$$

π, π_1, $\varkappa$, $\varkappa_1$, qui sont des valeurs de $\frac{\partial P}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial Q}{\partial y}$ pour des arguments dont la valeur absolue est inférieure à σ, sont inférieurs en valeur absolue à ε. Dès lors, en désignant par Ξ et H des limites supérieures de ξ et η, on a d'abord

$$|\xi| < (\Xi + H) \int_{t_0}^{t} e^{l(\alpha-t)} d\alpha < \frac{\varepsilon}{l}(\Xi + H),$$
$$|\eta| < \frac{\varepsilon}{m}(\Xi + H);$$

remplaçant Ξ et H par ces nouvelles valeurs il viendra

$$|\xi| < \frac{\Xi + H}{l} \varepsilon^2 \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m}\right), \qquad |\eta| < \frac{\Xi + H}{m} \varepsilon^2 \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m}\right),$$

et ainsi de suite, on aura, quel que soit p,

$$(34)\qquad |\xi| < \frac{\Xi + \mathrm{H}}{l}\varepsilon^p\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right)^{p-1}, \qquad |\eta| < \frac{\Xi+\mathrm{H}}{m}\varepsilon^p\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right)^{p-1}.$$

Or $\varepsilon\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right) < 1$, on en conclut $|\xi| = |\eta| = 0$. C. Q. F. D.

Comparons deux solutions du type étudié, des équations (9), x_1, y_1, x_2, y_2 *correspondant à deux valeurs* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ *de la constante arbitraire* $\mathcal{A}$. Leurs différences ξ, η vérifient des équations intégrales de la forme

$$\xi(t) = (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2)e^{-l(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{l(\alpha-t)}[\pi(\alpha)\xi(\alpha) + \pi_1(\alpha)\xi_1(\alpha)]\,d\alpha,$$
$$\eta(t) = -\int_{t}^{+\infty}[\varkappa(\alpha)\xi(\alpha) + \varkappa_1(\alpha)\xi_1(\alpha)]\,d\alpha,$$

$|\pi|, |\pi_1|, |\varkappa|, |\varkappa_1|$ étant inférieurs à ε. Donc $|\xi|$ et $|\eta|$ sont inférieurs aux solutions d'un système (19) où l'on aurait

$$\overline{a}(t) = |\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2|e^{-l(t-t_0)}, \qquad \overline{b}(t) = 0.$$

Ces solutions sont asymptotiques à zéro; donc x_2 *est asymptotique à* x_1 *et* y_2 *l'est à* y_1 *pour* $t = +\infty$.

Le même raisonnement qui a servi à établir l'existence d'une famille de solutions bornées montre que *les équations* (9) *admettent un système de solutions bornées pour toutes les valeurs de* t *si quel que soit* t *les conditions* 1° *sont réalisées, et si en outre* $|\mathrm{P}(0,0,t)|$, $|\mathrm{Q}(0,0,t)|$ *restent inférieurs à* M *tel que*

$$(35)\qquad \frac{\mathrm{M}}{l}\,\frac{1}{1-\varepsilon\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right)} < \sigma, \qquad \frac{\mathrm{M}}{m}\,\frac{1}{1-\varepsilon\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{m}\right)} < \sigma.$$

Il suffit pour le voir d'étudier les équations se déduisant de (32) en y faisant $\mathcal{A} = 0$ et $t_0 = -\infty$. Il ne peut d'ailleurs y avoir qu'un seul système de cette nature, le raisonnement fait plus haut s'appliquant encore pour $\mathcal{A} = 0$, $t_0 = -\infty$.

8. Nous avons supposé $m > 0$. Cette hypothèse semble essentielle pour établir les résultats du n° 7 si l'on ne modifie pas les hypothèses 1° du n° 6; mais il n'en est pas de même pour les résultats du n° 6. En

effet, *nous allons montrer qu'en supposant* $l > 0$, $m = 0$, *et les hypothèses* 1° *et* 2° (n° 6) *vérifiées, les équations* (19) *admettent toujours une famille de solutions asymptotiques à zéro pour* $t = +\infty$.

Il nous faut pour cela étendre un peu les résultats antérieurs (nos 4 et 5); nous nous contenterons d'énoncer les propositions, le raisonnement étant analogue à celui du n° 4.

Le système différentiel

$$(10\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -lX + \varepsilon(X+Y) + (l-r)ae^{-rt},\\ \frac{dY}{dt} &= mY - \varepsilon(X+Y) - (m+r)be^{-rt}, \end{aligned}\right.$$

où r, l, ε, a, b sont des constantes positives, m une constante positive ou nulle, admet une solution de la forme

$$(12\ bis)\qquad X = X_0 e^{-rt}, \qquad Y = Y_0 e^{-rt},$$

x_0, y_0 étant des constantes données par

$$(11\ bis)\qquad \frac{X_0 - a}{\dfrac{1}{l-r}} = \frac{Y_0 - b}{\dfrac{1}{m+\varepsilon}} = \frac{X_0 + Y_0}{\dfrac{1}{\varepsilon}} = \frac{a+b}{\dfrac{1}{\varepsilon} - \left(\dfrac{1}{l-r} + \dfrac{1}{m+r}\right)}.$$

Ce nombre r nous permet, on le voit, d'éviter les dénominateurs infinis auxquels conduit la théorie antérieure, lorsque $m = 0$. Si nous supposons

$$(13\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &0 < r < l,\\ &\varepsilon\left(\frac{1}{l-r} + \frac{1}{m+r}\right) < 1, \end{aligned}\right.$$

les fonctions (12 *bis*) solutions de (10 *bis*) sont développables en séries entières en ε uniformément convergentes pour $t > t_0$; ces séries sont à termes positifs; soient X_i, Y_i les sommes de leurs i premiers termes.

Les fonctions X, Y vérifient le système d'équations intégrales

$$(15\ bis)\qquad \left\{\begin{aligned} X(t) &= ae^{-rt} + \varepsilon\int_{-\infty}^{t} e^{l(\alpha-t)}\,[X(\alpha)+Y(\alpha)]\,d\alpha,\\ Y(t) &= be^{-rt} + \varepsilon\int_{t}^{+\infty} e^{-m(\alpha-t)}\,[X(\alpha)+Y(\alpha)]\,d\alpha, \end{aligned}\right.$$

et peuvent être obtenues en résolvant ce système par approximations successives, les premières approximations étant $X_1 = ae^{-rt}$, $Y_1 = be^{-rt}$. Les approximations de rang i sont d'ailleurs les sommes X_i, Y_i dont il vient d'être question.

De ces résultats nous déduisons l'existence de solutions pour les équations intégrales suivantes, qui serviront d'*équations de comparaison* pour les équations (28) correspondant au système différentiel (9),

$$(19\ bis)\quad \begin{cases} \mathcal{X}(t) = \overline{a}(t) + \varepsilon \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{l(\alpha - t)} [\mathcal{X}(\alpha) + \mathcal{Y}(\alpha)]\, d\alpha, \\ \mathcal{Y}(t) = \overline{b}(t) + \varepsilon \displaystyle\int_{t}^{+\infty} e^{-m(\alpha - t)} [\mathcal{X}(\alpha) + \mathcal{Y}(\alpha)]\, d\alpha. \end{cases}$$

Dans ces équations $\overline{a}(t)$ et $\overline{b}(t)$ sont des fonctions définies pour $t > t_0$, positives et telles que *les produits* $\overline{a}(t)e^{rt}$, $\overline{b}(t)e^{rt}$ *sont bornés*.

On peut alors raisonner comme au n° 6; si les hypothèses 1° et 2° sont vérifiées, l'inégalité $\varepsilon\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m}\right) < 1$ étant toutefois remplacée par $\varepsilon\left(\frac{1}{l-r} + \frac{1}{m+r}\right) < 1$, *l'existence des solutions asymptotiques à zéro pour* $t = +\infty$ *est établie pour le système* (9), *lorsque* l *est positif et* m *positif ou nul.*

On pourrait aussi étendre les résultats du n° 7, mais il ne suffit plus de supposer $P(0, 0, t)$, $Q(0, 0, t)$ bornés, il faut encore, d'après l'étude qui vient d'être faite des équations (19 *bis*), admettre l'existence d'un nombre positif r tel que les produits $P(0, 0, t)e^{rt}$, $Q(0, 0, t)e^{rt}$ restent bornés pour $t > t_0$. (On peut toujours remplacer r par un nombre positif $r' < r$ et par suite supposer $r < l$).

9. Les raisonnements précédents s'étendent manifestement au cas où il y a plus de deux équations; on peut donc énoncer pour les systèmes (5) du n° 1 des résultats analogues à ceux qui viennent d'être établis.

Si les fonctions P_i et Q_i satisfont à des conditions analogues aux conditions 1°, où l'on remplacerait $\dfrac{1}{\frac{1}{l} + \frac{1}{m}}$ par $\dfrac{1}{\frac{1}{l_1} + \ldots + \frac{1}{l_k} + \frac{1}{m_1} + \ldots + \frac{1}{m_h}}$, ou par $\dfrac{1}{\dfrac{1}{l_1 - r} + \ldots + \dfrac{1}{l_k - r} + \dfrac{1}{m_1 + r} + \ldots + \dfrac{1}{m_h + r}}$ si l'un des m est nul, si de plus les fonctions $P_i(0, 0, \ldots, 0, t)$, $Q_j(0, 0, \ldots, 0, t)$ sont toutes nulles, le *système* (5) *admet une famille à* k *paramètres* [1] *de solutions* $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_h$, *toutes ces fonctions étant asymptotiques à zéro pour* $t = +\infty$. On étend de même les résultats du n° 7.

Nous avons dit (n° 1) qu'on pouvait ramener à la forme (5) les équations (1) au moyen d'une substitution linéaire à coefficients réels et constants, dès que les racines de l'équation caractéristique (3) étaient réelles et distinctes.

Lorsque les racines de l'équation (3), *sans être toutes réelles, sont encore distinctes*, on peut effectuer encore la réduction à la forme (5) par une substitution linéaire dont les coefficients sont fonctions de t, mais sont néanmoins réels et bornés, le déterminant de la substitution étant différent de zéro.

Nous admettrons que, s'il y a des racines imaginaires, on peut trouver une substitution linéaire à coefficients constants [2] ramenant les équations (1) à des équations du type (5) où $k + h < n$ et à des couples d'équations telles que les suivantes, où ω et g sont des constantes,

$$
(36) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= gu + \omega v + U, \\
\frac{dv}{dt} &= -\omega u + gv + V.
\end{aligned}
\right.
$$

La transformation

$$
(37) \qquad \left\{
\begin{aligned}
u &= u' \cos \omega t + v' \sin \omega t, \\
v &= -u' \sin \omega t + v' \cos \omega t
\end{aligned}
\right.
$$

ramène le système (36) au suivant

$$
(38) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{du'}{dt} &= gu' + U', \\
\frac{dv'}{dt} &= gv' + V',
\end{aligned}
\right.
$$

---

(1) On peut supposer naturellement qu'il n'y ait pas de nombres m; toutes les solutions de (5) sont alors asymptotiques à zéro pour $t = +\infty$.

(2) *Voir*, pour la bibliographie, la page 16 du Mémoire cité plus loin (p. 498) de M. Bohl, et en outre un Mémoire de M. Sauvage (*Annales de l'École normale*, 1891).

où

$$U' = U \cos \omega t - V \sin \omega t,$$
$$V' = U \sin \omega t + V \cos \omega t.$$

Le système (38) est formé d'équations du type (5) dont l'étude a été faite antérieurement. *On notera que le coefficient g est égal à la partie réelle commune aux deux racines imaginaires conjuguées de l'équation caractéristique qui correspondent aux variables u, v.*

Il est évident que, en ce qui concerne l'existence, la continuité et la grandeur, les fonctions U', V' jouissent de propriétés analogues à U et V. En résumé, *nous pouvons considérer comme faite l'étude du cas où l'équation (3) n'a que des racines simples.*

10. Reste à examiner le cas où *cette équation a des racines multiples.* La transformation des équations (1) en des équations du type réduit (5) peut alors être impossible. Mais on utilise une forme réduite moins simple pour laquelle on va cependant, comme nous allons le voir, développer une théorie analogue à la précédente.

Nous supposerons, pour simplifier, qu'il y a trois équations et qu'il s'agit d'une racine double, nécessairement réelle, nous admettrons qu'elle est négative, l'autre étant positive. Lorsque la réduction à la forme (5) est impossible, on emploie la forme réduite suivante

$$(39) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= - lx + P(x, y, z, t), \\ \frac{dy}{dt} &= x - ly + Q(x, y, z, t), \\ \frac{dz}{dt} &= \phantom{x - ly + {}} mz + R(x, y, z, t). \end{aligned} \right.$$

Toute intégrale de ce système définie dans un intervalle $t_0 t_1$ satisfait aux équations intégrales

$$(40) \qquad \left\{ \begin{aligned} x(t) &= \mathcal{A} e^{-lt} + \int_{t_0}^{t} e^{l(\alpha-t)} P[x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha), \alpha]\, d\alpha, \\ y(t) &= \mathcal{A} t e^{-lt} + \mathcal{B} e^{-lt} + \int_{t_0}^{t} e^{l(\alpha-t)} Q[x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha), \alpha]\, d\alpha \\ &\qquad + \int_{t_0}^{t} e^{l(\alpha-t)} (t-\alpha) P[x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha), \alpha]\, d\alpha, \\ z(t) &= \mathcal{C} e^{mt} - \int_{t}^{t_1} e^{-m(\alpha-t)} R[x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha), \alpha]\, d\alpha. \end{aligned} \right.$$

Pour étudier les solutions asymptotiques à zéro on prendra $t_1 = +\infty$, $\varphi = 0$. Comme précédemment l'existence de ces solutions s'établit facilement par l'emploi d'un système d'équations de comparaison analogues aux équations (30) et dont l'étude se fait elle-même par comparaison avec le système suivant, analogue au système (15)

$$(41)\quad \begin{cases} X(t) = a + \varepsilon\displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{l(\alpha-t)}[X(\alpha)+Y(\alpha)+Z(\alpha)]\,d\alpha, \\ Y(t) = b + \varepsilon\displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{l(\alpha-t)}[X(\alpha)+Y(\alpha)+Z(\alpha)]\,d\alpha \\ \qquad\qquad + \varepsilon\displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{l(\alpha-t)}(t-\alpha)\,[X(\alpha)+Y(\alpha)+Z(\alpha)]\,d\alpha, \\ Z(t) = c + \varepsilon\displaystyle\int_{t}^{+\infty} e^{-m(\alpha-t)}[X(\alpha)+Y(\alpha)+Z(\alpha)]\,d\alpha, \end{cases}$$

où a, b, c, ε désignent des constantes positives. Ce système admet une solution particulière formée de constantes vérifiant aussi les équations différentielles

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -\ l(X-a) & &+\varepsilon(X+Y+Z), \\ \frac{dY}{dt} &= -\ l(Y-b)+(X-a) & &+\varepsilon(X+Y+Z), \\ \frac{dZ}{dt} &= \quad m(Z-c) & &-\varepsilon(X+Y+Z). \end{aligned}$$

Ces constantes sont données par

$$\varepsilon(X+Y+Z) = l(X-a) = m(Z-c) = \frac{l^2(Y-b)}{1+l},$$

d'où

$$\frac{X-a}{\frac{1}{l}} = \frac{Y-b}{\frac{1+l}{l^2}} = \frac{Z-c}{\frac{1}{m}} = \frac{X+Y+Z}{\frac{1}{\varepsilon}} = \frac{a+b+c}{\frac{1}{\varepsilon}-\left(\frac{1}{l}+\frac{1+l}{l^2}+\frac{1}{m}\right)},$$

x, y, z sont développables en séries entières en ε si ε n'est pas trop grand. Ces séries sont à termes positifs; on vérifie facilement que les sommes de leurs i premiers termes sont identiques aux approximations de rang i quand on applique au système (41) la méthode des approximations successives.

Par là se trouve établie, moyennant des hypothèses convenables sur P, Q, R, l'existence pour (39) de solutions qui sont pour $t = +\infty$ bornées ou asymptotiques à zéro, suivant les hypothèses faites.

On ramène le cas de racines imaginaires multiples au cas des racines réelles multiples par des substitutions analogues à celles du n° 9.

11. En résumé, nous avons étudié un certain nombre de formes réduites auxquelles on peut ramener, par une substitution linéaire convenable effectuée sur les fonctions inconnues, les équations du type (1).

En observant que cette substitution transforme linéairement les seconds membres L_i, et par suite que les hypothèses analogues à celles des n^{os} 6 et 7 sur ces seconds membres entraînent des hypothèses de même nature sur les équations réduites, on peut énoncer les propositions générales suivantes :

Considérons les équations

$$(1) \qquad \frac{dz_i}{dt} - \lambda_{i1} z_1 - \ldots - \lambda_{in} z_n = L_i(z_1, \ldots, z_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les λ sont des constantes, les L_i des fonctions satisfaisant aux conditions que voici : Pour

$$(D) \qquad t_0 < t, \qquad |z_1| < Z, \qquad |z_2| < Z, \qquad \ldots, \qquad |z_n| < Z,$$

ces fonctions sont bien définies, continues, admettent par rapport aux variables z des dérivées partielles elles-mêmes continues ; de plus lorsque tous les z sont nuls ces dérivées sont inférieures en valeur absolue à un nombre positif ρ qui peut être déterminé en fonction des seuls coefficients λ.

I. *On suppose toutes les fonctions $L_i(0, 0, \ldots, 0, t)$ nulles.* Le système (1) admet alors une famille de solutions $z_1, \ldots, z_n$ toutes asymptotiques à zéro pour $t = +\infty$. Cette famille dépend d'un nombre de constantes arbitraires au moins égal [1] au nombre des racines à partie réelle négative de l'équation caractéristique (3).

II. *On suppose les fonctions* $L_i(0, 0, \ldots, 0, t)$ *non nécessairement nulles mais seulement inférieures en valeur absolue à un nombre* ρ' qui peut être déterminé quand on connaît les λ et un système d'inégalités traduisant la continuité des dérivées $\frac{\partial L}{\partial z}$ dans le domaine (D). *On admet de plus que l'équation caractéristique* (3) *n'admet pas de racines nulles ou à partie réelle nulle* [2].

Le système admet alors une famille de solutions restant bornées pour $t = +\infty$, dépendant d'un nombre de constantes arbitraires égal à celui des racines de l'équation caractéristique à partie réelle négative. Ces solutions sont asymptotiques les unes aux autres pour $t = +\infty$.

On aurait naturellement des résultats analogues pour $t = -\infty$ (en modifiant en conséquence les hypothèses précédentes).

III. *Enfin, si les conditions précédentes sont réalisées en prenant* $t_0 = -\infty$, le système admet une solution restant bornée pour toutes les valeurs de t.

12. La notion de solutions asymptotiques à une solution donnée d'un système différentiel est due aux admirables travaux de M. Poincaré [3]. Un changement de variables ramène le cas général au cas des solutions toutes asymptotiques à zéro.

M. Poincaré étudie les équations de la forme (1) où les coefficients λ sont fonctions périodiques de t. Par un changement de variables il les réduit à des équations de même forme où les λ_{ij} à indices différents sont nuls, les λ_{ii} étant constants. Dans ces équations réduites, il

---

(1) Si l'équation caractéristique a des racines nulles ou à partie réelle nulle, le premier nombre peut surpasser le second (*voir* des exemples plus loin, Chapitre III).

(2) Dans le cas de racines nulles ou à partie réelle nulle on peut cependant énoncer des propositions analogues à II pourvu que les fonctions $L_i(0, 0, \ldots, 0, t)$ soient inférieures en valeur absolue à des fonctions positives convenablement asymptotiques à zéro.

(3) *Courbes définies par une équation différentielle*, Chap. XIX (*Journal de Liouville*, 4e série, t. 2, 1886; *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 335).

suppose les seconds membres L fonctions analytiques et périodiques de t, et fonctions analytiques des z s'annulant ainsi que leurs dérivées premières $\frac{\partial L}{\partial z}$ pour $z_1 = \ldots = z_n = 0$.

M. Poincaré développe les solutions des équations réduites en séries entières par rapport aux expressions $A_i e^{\lambda_i t}$, convergentes si les modules de ces expressions sont assez petits; en ne conservant que les A_i correspondant aux λ à partie réelle négative, il a une famille de solutions asymptotiques à zéro pour $t = +\infty$.

La démonstration de M. Poincaré a été modifiée et les résultats ont été généralisés par M. Picard (1) qui a fait des hypothèses moins restrictives sur la façon dont les L dépendaient de t.

M. Liapounoff (2) a donné des résultats plus généraux encore, sur lesquels nous reviendrons bientôt.

Dès à présent nous pouvons dire qu'ils se rapportent à des équations de la forme (1), mais où les λ sont des fonctions continues et bornées pour $t > t_0$. Les L jouissent de propriétés analogues en tant que fonctions de t, mais ils sont toujours fonctions analytiques de $z_1, \ldots, z_n$ et s'annulent ainsi que leurs dérivées premières pour $z_1 = \ldots = z_n = 0$.

Après avoir défini une suite de nombres, qu'il appelle *nombres caractéristiques* (3) (*voir* plus loin n° 14) et que nous désignerons par $-\rho_1, -\rho_2, \ldots, -\rho_n$, M. Liapounoff forme des développements en séries entières (à coefficients fonctions de t) par rapport à celles des expressions $\alpha_i e^{(\rho_i+\varepsilon)t}$ qui correspondent à des ρ_i à partie réelle négative; les α sont des constantes de valeur absolue assez petite, ε est positif et assez petit Ces développements, dont il montre la convergence, donnent bien des solutions asymptotiques à zéro.

Les résultats énoncés dans la proposition I du n° 11, plus généraux

(1) *Traité d'Analyse*, t. III, Chap. VIII.

(2) *Problème général de la stabilité du mouvement* publié en 1892 en langue russe, dans les *Mémoires de la Société mathématique de Kharkow*. Une traduction française de ce travail, due à M. E. Davaux, a été publiée en 1907 dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (2e série, t. IX). *Voir* aussi le Mémoire de M. Liapounoff, *Sur l'instabilité de l'équilibre...* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. III, 1897).

(3) Ces nombres caractéristiques sont égaux aux parties réelles changées de signe des racines de l'équation caractéristique lorsque les λ sont des constantes.

que ceux de MM. Poincaré et Picard à cause des hypothèses plus larges faites sur les L, paraissent moins étendus que ceux de M. Liapounoff, puisque nous supposons les λ constants.

Nous démontrerons plus loin les propositions de M. Liapounoff en les généralisant un peu ; pour le moment observons qu'en ce qui concerne les systèmes appelés *réductibles* par M. Liapounoff, c'est-à-dire les systèmes qu'on peut ramener à la forme (1) avec des λ constants, la proposition I donne des résultats plus complets à cause des hypothèses plus larges sur les L.

C'est dans un important travail (1) de M. P. Bohl qu'ont été énoncées pour la première fois les propositions II et III indiquées ci-dessus. Les hypothèses de M. Bohl sont à peu près celles faites plus haut ; la méthode suivie est une méthode qualitative (2) basée sur le signe constant que prennent certaines fonctions des z lorsqu'on y remplace ces variables par des solutions du système (1).

Après avoir ainsi établi l'existence des solutions bornées du système (1), M. P. Bohl donne, pour les représenter, la méthode d'approximations successives indiquée plus haut, mais il utilise ses premiers résultats pour établir la convergence de ces approximations.

Notons que *le théorème II, dû à M. Bohl, comprend comme cas particulier le théorème I sur les solutions asymptotiques à zéro*. La démonstration de ce théorème I par la méthode qualitative de M. Bohl suppose toutefois que l'équation caractéristique correspondant au système (1) n'a pas de racines à partie réelle nulle.

En définitive, dans les pages précédentes, c'est la méthode (3) qui

---

(1) *Sur certaines équations différentielles d'un type général utilisable en Mécanique.* Une traduction française de ce Mémoire publié en 1900 à Dorprat en langue russe, due à M[lle] Tarnarider, a été insérée en 1910 dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XXXVIII).

(2) Cette méthode, dont M. Poincaré avait déjà fait usage dans ses Mémoires sur les courbes définies par une équation différentielle (*Journal de Mathématiques*), a été utilisée pour l'étude de l'instabilité de l'équilibre (travaux de MM. Liapounoff, Hadamard, Kneser, Painlevé, etc.).

(3) *Voir* ma Note, *Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles* (*Comptes rendus*, février 1910). Cette Note a paru avant la traduction française du Mémoire de M. Bohl.

est nouvelle. Elle s'applique à des cas moins étudiés que les précédents. Nous avons cru toutefois devoir exposer d'abord avec quelques détails les démonstrations simples qu'elle donne de résultats connus, à cause de l'importance même de ces résultats, que les indications du numéro suivant mettent en évidence.

13. Indiquons rapidement quelques exemples tirés de la Mécanique.

Le plus simple concerne l'existence de *mouvements asymptotiques à une position d'équilibre instable* pour un système holonome à liaisons indépendantes du temps où il y a une fonction de forces U; la non-existence d'un maximum de U se reconnaissant par les termes du second ordre U_2 du développement de Taylor correspondant à la position d'équilibre; le nombre des carrés positifs de U_2 donne le nombre de paramètres dont dépendent les mouvements asymptotiques considérés (1).

M. Bohl (2) a donné une extension intéressante à ces résultats. Considérons *un système analogue au précédent* (3), *mais soumis à d'autres forces dites perturbatrices* dépendant des positions, des vitesses et du temps. Si ces forces ont des intensités assez petites et varient assez lentement avec les positions et les vitesses au voisinage de la position d'équilibre et des vitesses nulles, il existe une famille de mouvements où le système reste (pour t tendant vers $+\infty$) à distance finie, les vitesses restant petites. Ces mouvements dépendent d'un nombre de paramètres égal à celui des carrés positifs de U_2; ils sont tous asymptotiques les uns aux autres pour $t=+\infty$. Si de plus les forces perturbatrices sont définies, quel que soit t, et satisfont encore aux conditions précédentes, on peut établir l'existence d'un mouve-

(1) On peut étendre ceci au cas où il n'y a pas de fonction de forces, les forces dépendant de la seule position ; mais il n'est pas nécessaire d'insister sur ces résultats bien connus. L'une des démonstrations concernant l'instabilité peut être présentée comme une conséquence de l'existence des solutions asymptotiques à la position d'équilibre, en utilisant la réversibilité du mouvement.

(2) Chapitre IV du Mémoire cité.

(3) On doit supposer cependant que le discriminant de U_2, considéré comme fonction de tous les paramètres de position, n'est pas nul.

ment où le système reste quel que soit t voisin de la position d'équilibre.

Ce sont là des conséquences immédiates des propositions de M. Bohl signalées plus haut (n° 11, énoncés II et III).

Considérons enfin le *cas d'une position d'équilibre stable avec dissipation de l'énergie*. D'une façon plus précise, soit Σ un système matériel holonome à liaisons indépendantes du temps dont la position est caractérisée par les paramètres $q_1, \ldots, q_n$.

Supposons ce système soumis :

1° A des forces dérivant d'une fonction de forces U maximum pour $q_1 = \ldots = q_n = 0$, ce maximum se reconnaissant aux termes du second ordre qui constituent une forme définie positive;

2° A des forces résistantes dépendant des vitesses (et des positions), s'annulant avec les vitesses, donnant dans les équations de Lagrange des termes dont les développements de Taylor commencent par des termes $-\frac{\partial R}{\partial q'_i}$, R étant une forme quadratique définie positive à coefficients constants des variables q'_i; c'est la *fonction dissipatrice* (¹);

3° A des forces perturbatrices fonctions des positions des vitesses et du temps.

On étudie les mouvements de Σ au voisinage de $q_1 = \ldots = q_n = 0$, $q'_1 = \ldots = q'_n = 0$, en construisant d'abord un système linéaire homogène à coefficients constants en supprimant les forces perturbatrices 3°, en faisant sur la force vive et la fonction des forces les approximations classiques de la théorie des petits mouvements et en ne conservant, pour les forces 2°, que les termes $\frac{\partial R}{\partial q'_i}$.

Les racines de l'équation caractéristique de ce système linéaire et homogène sont toutes à partie réelle négative.

De ce système linéaire et homogène on déduit les équations exactes du mouvement de Σ par addition des termes complémentaires cor-

(¹) Voir *Encyklopädie der Math. Wiss.*, IV-26 (H. Lamb) n° 1_c pour la bibliographie. On suppose ici qu'il n'y a pas de forces gyroscopiques, ou du moins qu'elles sont assez petites pour être classées parmi les forces perturbatrices.

respondant aux forces perturbatrices et aux approximations faites sur la force vive et les forces 1° et 2°.

Moyennant des hypothèses convenables sur la continuité et la grandeur de ces termes complémentaires (ce qui suppose en particulier les forces perturbatrices petites et variant lentement au voisinage de $q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q'_1 = \ldots = q'_n = 0$), il résulte de ce qui précède (n° 11, II) que pour des positions et vitesses initiales pas trop grandes en valeur absolue [1], le mouvement ultérieur se fera au voisinage de la position d'équilibre avec des vitesses petites; les divers mouvements correspondant aux diverses données initiales étant asymptotiques les uns aux autres pour $t = +\infty$,

Cette tendance à l'établissement d'un mouvement indépendant des données initiales est une large extension d'une partie des résultats concernant l'étude habituelle des phénomènes de résonance, étude qui se fait en considérant une seule équation linéaire à coefficients constants avec second membre fonction périodique du temps (ou somme de fonctions périodiques). Les hypothèses beaucoup plus larges qui viennent d'être faites ici sur les termes complémentaires ne permettent plus de donner une représentation analytique du mouvement qui tend à s'établir. M. Bohl (dans le Chapitre III du Mémoire cité) a indiqué des cas étendus où une telle représentation analytique est possible.

Du reste, la théorie classique de la résonance ne s'adapte aux faits d'expérience que sous le bénéfice de certaines approximations.

Convenablement dirigée [2], la méthode suivie plus haut permettrait de se rendre compte de la mesure dans laquelle celles de ces approximations qui ont un caractère mathématique sont légitimes. Elle permettrait vraisemblablement alors de retrouver les représentations analytiques de M. Bohl.

---

(1) Il n'y a pas ici d'intégrales à limite infinie, les valeurs initiales de toutes les variables sont arbitraires.

(2) Pour ce qui concerne l'estimation des erreurs au moyen des méthodes d'approximations successives, *voir* mes articles sur l'intégration approchée (*Acta Mathematica*, t. XXXI; *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1908 et 1910).

CHAPITRE II.

14. Nous allons maintenant établir et généraliser une partie des résultats obtenus par M. Liapounoff dans le Chapitre I (n^{os} 6 à 13) de son Mémoire : *Problème général de la stabilité du mouvement.*

Nous rappellerons tout d'abord la notion importante sur laquelle ils reposent, celle de *nombre caractéristique*, et énoncerons quelques propositions à son sujet en renvoyant pour les démonstrations au Mémoire précédent.

Étant donnée une fonction réelle $f(t)$ de la variable réelle t définie pour $t > t_0$ le nombre caractéristique de cette fonction est la borne supérieure des nombres l tels que $e^{lt}f(t)$ tende vers zéro quand t tend vers $+\infty$; c'est aussi la borne inférieure des nombres m tels que $e^{mt}f(t)$ ne soit pas borné quand t devient infini positif, autrement dit tels que dans ces conditions la plus grande limite de $e^{mt}|f(t)|$ soit infinie. Bien entendu le nombre caractéristique peut être infini (positif ou négatif).

Le nombre caractéristique de la somme de deux fonctions est égal au plus petit des nombres caractéristiques des deux fonctions si ces nombres sont différents, il ne leur est pas inférieur s'ils sont égaux.

Le nombre caractéristique du produit de deux fonctions n'est pas inférieur à la somme de leurs nombres caractéristiques.

M. Liapounoff définit le *nombre caractéristique d'un groupe de fonctions* $f(t)\ldots k(t)$; c'est le plus petit des nombres caractéristiques des fonctions composant le groupe.

Considérons le système linéaire et homogène

$$\text{(1)} \qquad \frac{dz_i}{dt} = \lambda_{i1} z_1 + \ldots + \lambda_{in} z_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les λ *sont pour* $t > t_0$ *des fonctions réelles continues et bornées de la variable réelle* t (c'est ce que nous appelons la condition (a), dans la suite). M. Liapounoff établit que *toute solution autre que* $z_1 = \ldots = z_n = 0$ *admet un nombre caractéristique.*

Il définit ensuite un *système normal* de solutions. C'est un ensemble de n solutions

$$z_1 = z_{1i}, \quad \ldots, \quad z_n = z_{ni} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

tel que toute combinaison linéaire homogène à coefficients constants $C_1, C_2, \ldots, C_p$, non nuls,

$$\begin{gathered} z_1 = C_1 z_{1\alpha_1} + C_2 z_{1\alpha_2} + \ldots + C_p z_{1\alpha_p}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_n = C_1 z_{n\alpha_1} + C_2 z_{n\alpha_2} + \ldots + C_p z_{n\alpha_p}, \end{gathered}$$

de p de ces solutions, ait un nombre caractéristique égal au nombre caractéristique de l'ensemble des np fonctions $z_{i\alpha_k}$ figurant dans ces solutions.

Les systèmes (1) satisfaisant aux conditions (a) admettent toujours des systèmes normaux de solutions ([1]).

M. Liapounoff attache ([2]) à un système normal de solutions un groupe de n nombres caractéristiques et établit l'invariance de ce groupe vis-à-vis du passage d'un système normal à un autre, et vis-à-vis des substitutions linéaires Σ effectuées sur les fonctions inconnues et dont les coefficients sont des fonctions de t satisfaisant aux conditions suivantes. Pour $t > t_0$, ces fonctions et leurs dérivées premières par rapport à t sont continues et bornées; l'inverse du déterminant formé avec ces coefficients est également borné.

M. Liapounoff distingue parmi ces systèmes différentiels (1) les systèmes *réguliers*. Ce sont ceux pour lesquels la somme des nombres caractéristiques des solutions d'un système normal est égal au nombre caractéristique changé de signe de l'inverse du déterminant formé par les n^2 fonctions constituant ce système normal. On sait que ce déterminant est égal à $Ce^{\int^t (\lambda_{11} + \ldots + \lambda_{nn})\,dt}$, C étant une constante convenablement choisie.

Parmi les systèmes réguliers on peut ranger les systèmes (1) à coefficients constants périodiques. Les seconds systèmes peuvent d'ailleurs

([1]) *Voir* le n° 8 du Mémoire cité, p. 232.
([2]) *Ibid.*, n° 10, p. 240.

être ramenés aux premiers, par une substitution linéaire à coefficients périodiques effectués sur les fonctions inconnues.

M. Liapounoff a appelé systèmes *réductibles* les systèmes (1) qui peuvent être ramenés à des systèmes à coefficients constants par une substitution linéaire Σ du caractère considéré plus haut. Les nombres caractéristiques du système linéaire (primitif ou transformé) sont égaux aux parties réelles changées de signes des racines de l'équation caractéristique du système à coefficients constants.

On peut dès lors énoncer à propos des équations différentielles

$$(2)\qquad \frac{dz_i}{dt}-\lambda_{i1}z_1-\ldots-\lambda_{in}z_n=\mathrm{L}_i(z_1,\ldots,z_n,t)\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

qui correspondent (par suppression des seconds membres) à des systèmes réductibles, des propositions analogues à celles énoncées dans le Chapitre précédent (proposition I du n° 11).

Nous n'insisterons pas, car nous allons établir avec M. Liapounoff, une proposition analogue concernant les systèmes réguliers, dont les systèmes réductibles ne sont qu'un cas particulier.

15. A cet effet nous rappellerons comment on intègre un système linéaire non homogène

$$(3)\qquad \frac{dz_i}{dt}-\lambda_{i1}z_1-\ldots-\lambda_{in}z_n=f_i(t)\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

quand on a intégré le système homogène (1) correspondant. Soient

$$(4)\qquad z_1=z_{1h}(t),\qquad \ldots,\qquad z_n=z_{nh}(t)\qquad (h=1,2,\ldots,n)$$

n solutions linéairement indépendantes du système (1); le déterminant

$$(5)\qquad \Delta(t)=\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \ldots & z_{n1}\\ z_{12} & z_{22} & \ldots & z_{n2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ z_{1n} & z_{2n} & \ldots & z_{nn}\end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

Appelons $\mathrm{A}_{ij}(t)$ le coefficient de $z_{ij}(t)$ dans le développement de ce déterminant.

Les expressions

$$(6)\quad z_s(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j z_{sj}(t) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_j}^{t} z_{sj}(t)\,\frac{A_{ij}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} f_i(\alpha)\,d\alpha \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

où les C_j désignent des constantes arbitraires et les t_j l'une ou l'autre des limites de l'intervalle où l'on fait varier t, représentent, dans cet intervalle, la solution générale du système (3). C'est une proposition connue, facile à vérifier du reste [1].

Supposons que le système de solutions (4) soit un système *normal;* appelons $l_1, \ldots, l_n$ les nombres caractéristiques de ses solutions. Nous admettrons de plus que le système homogène (1) est un système *régulier*. On démontre alors [2] facilement que *le nombre caractéristique du quotient* $\frac{A_{ij}(t)}{\Delta(t)}$ *est non inférieur à* $-l_j$; celui de $z_{sj}(t)$ n'est pas inférieur à l_j.

A tout nombre positif r arbitrairement petit, on pourra faire correspondre un nombre K tel qu'on ait, quels que soient les indices s, i, j pour α et t compris entre t_0 et $+\infty$,

$$(7)\quad \left| z_{sj}(t)\,\frac{A_{ij}(\alpha)}{\Delta(\alpha)}\right| < K\,e^{(-l_j+r)t}\,e^{(l_j+r)\alpha} = K\,e^{(l_j+r)(\alpha-t)}\,e^{2rt} = K\,e^{(l_j-r)(\alpha-t)}\,e^{2r\alpha}.$$

Cette inégalité nous sera très utile dans la suite.

---

(1) On peut écrire le second terme des expressions (6) sous forme symbolique

$$-\frac{\begin{vmatrix} z_{11}(\alpha) & \ldots & z_{n1}(\alpha) & z_{s1}(t)\displaystyle\int_{t_1}^{t} d\alpha \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{1n}(\alpha) & \ldots & z_{nn}(\alpha) & z_{sn}(t)\displaystyle\int_{t_n}^{t} d\alpha \\ f_1(\alpha) & \ldots & f_n(\alpha) & 0 \end{vmatrix}}{\Delta(\alpha)}$$

en convenant de remplacer, dans l'expression développée, tout terme de la forme $F(\alpha)z_{sk}(t)\int_{t_k}^{t} d\alpha$ par $z_{sk}(t)\int_{t_k}^{t} F(\alpha)\,d\alpha$ qu'on écrit $\int_{t_k}^{t} z_{sk}(t)F(\alpha)\,d\alpha$.

Cette forme se prête bien à la vérification indiquée.

(2) *Voir* le n° 10 du Mémoire cité de M. Liapounoff.

16. Revenons aux équations de la forme

$$(2)\qquad \frac{dz_i}{dt} = \lambda_{i1} z_1 - \ldots - \lambda_{in} z_n = \mathrm{L}_i(z_1, \ldots, z_n, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

en supposant maintenant que les équations linéaires et homogènes correspondantes (1) forment le système régulier que nous venons de considérer. D'après ce qui vient d'être dit, *les solutions de ce système* (2) *satisfont au système d'équations intégrales suivant* (les C et les t_j étant convenablement choisis) :

$$(8)\qquad \left\{ \begin{array}{l} z_s(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathrm{C}_j z_{sj}(t) + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \int_{t_j}^{t} z_{sj}(t) \frac{\mathrm{A}_{ij}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} \mathrm{L}_i[z_1(\alpha), \ldots, z_n(\alpha), \alpha]\, d\alpha \\ \qquad\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

Nous appliquerons ceci à la recherche de solutions asymptotiques à zéro pour $t = +\infty$ d'un système (2), remplissant des conditions qui seront indiquées plus loin.

Observons tout d'abord que la solution $z_{ij}(t), \ldots, z_{nj}(t)$ des équations homogènes (1) sera composée de fonctions toutes asymptotiques à zéro pour $t = +\infty$ si le nombre caractéristique l_j est positif. Pour former les équations intégrales que nous utiliserons dans la suite, *nous supposerons nulles, dans les équations* (8), *toutes les constantes* C_j *correspondant à des solutions de* (1) *à nombre caractéristique* l_j *négatif ou nul;* nous indiquerons ceci en accentuant les constantes C.

Nous admettrons que *le nombre r choisi pour former les inégalités* (7) *a été pris inférieur au tiers du plus petit des nombres caractéristiques positifs* l_j. De la sorte, aux nombres l_j non nuls correspondent des différences $l_j - 3r$ de mêmes signes, et aux nombres l_j nuls des différences $l_j - 3r$ négatives.

Nous prendrons $t_j = t_0$ (t_0 *étant une constante assez grande*) *si le nombre* l_j *est négatif ou nul, et* $t_j = +\infty$ *si le nombre* l_j *est positif.* Nous désignerons ce choix particulier des limites en écrivant t'_j au lieu de t_j.

Nous supposerons que *les fonctions* $\mathrm{L}_i(z_i, \ldots, z_n, t)$ *satisfont aux conditions suivantes*, que nous appellerons, dans la suite, les conditions (b).

Pour $t \geqq t_0$ et $|z_1| < Z, \ldots, |z_n| < Z$, ces fonctions sont bien définies, continues, admettent par rapport aux variables z_i des dérivées partielles du premier ordre continues et des dérivées secondes bornées. De plus, pour $z_1 = \ldots = z_n = 0$, les fonctions L_i et leurs dérivées premières par rapport à $z_1, \ldots, z_n$ sont nulles (1).

D'après la nature bornée des dérivées secondes, on pourra faire correspondre à un nombre positif ε arbitrairement choisi, un nombre h tel que les inégalités, valables pour $t \geqq t_0$,

$$(9) \qquad |z_i| < h e^{-2rt}, \qquad h e^{-2rt} < Z \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

entraînent les suivantes :

$$(10) \qquad \left| \frac{\partial L_i(z_1, \ldots, z_n, t)}{\partial z_j} \right| < \frac{\varepsilon}{n} e^{-2rt} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

On aura alors, si les z' satisfont, comme les z, aux inégalités (9),

$$(11) \quad |L_i(z_1, \ldots, z_n, t) - L_i(z'_1, \ldots, z'_n, t)| < \frac{\varepsilon}{n} e^{-2rt} [|z_1 - z'_1| + \ldots + |z_n - z'_n|].$$

Observons encore que du moment où nous ne conserverons que les solutions de (1) $z_{1j}, \ldots, z_{nj}$ à nombres caractéristiques positifs, ces nombres étant supérieurs à $2r$, on aura (t_0 étant assez grand) les inégalités suivantes :

$$(12) \qquad \left| \sum_{j=1}^{n} C'_j z_{sj} \right| < b_s e^{-2rt} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

De plus les nombres b_s peuvent être pris aussi petits qu'on le voudra, en prenant les C' assez petits en valeur absolue.

17. Le système d'équations intégrales qui va nous servir dans la recherche des solutions asymptotiques à zéro est

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_s(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} C'_j z_{sj}(t) + \sum_{j=1}^{n} \int_{t'_j}^{t} z_{sj}(t) \sum_{i=1}^{n} \frac{A_{ij}(\alpha)}{\Delta(\alpha)} L_i[z_1(\alpha), \ldots, z_n(\alpha), \alpha]\, d\alpha \\ \qquad\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

(1) Ces hypothèses sont plus générales que celles de M. Liapounoff qui suppose les L fonctions holomorphes des z. Nous aurions pu les prendre encore plus larges (mais en compliquant notablement les énoncés) en procédant comme au n° 8 (*voir* p. 491).

Étudions d'abord le *système d'équations intégrales linéaires*

$$(14)\quad \left\{ \begin{array}{l} Z_s(t) = b_s e^{-2rt} + \varepsilon K \sum_{j=1}^{n} (\pm 1) \int_{t''_j}^{t} e^{(l_j - r)(\alpha - t)} [Z_1(\alpha) + \ldots + Z_n(\alpha)] \, d\alpha \\ \qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

où les limites t''_j sont égales à $+\infty$ pour les l_j négatifs ou nuls et à $-\infty$ pour les l_j positifs, où le facteur (± 1) indique que dans la première hypothèse on doit multiplier l'intégrale par -1. De cette façon on aura, suivant les cas,

$$\int_t^{+\infty} \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{t}.$$

Ce système (14) est analogue au système (15 *bis*) du n° 8 et s'étudie de la même façon.

Les équations (14) admettent un système de solutions de la forme

$$(15)\qquad Z_1(t) = \zeta_1 e^{-2rt}, \quad \ldots, \quad Z_n(t) = \zeta_n e^{-2rt},$$

$\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ étant des constantes positives.

Substituant dans (14), il vient, en effet, après division par e^{-2rt},

$$(\zeta_s - b_s) = \varepsilon K \sum_{j=1}^{n} (\zeta_1 + \ldots + \zeta_n)(\pm 1) \int_{t''_j}^{t_j} e^{(l_j - 3r)(\alpha - t)} \, d\alpha$$

ou, en effectuant les intégrations [*voir* n° 4, formules (16)],

$$(16)\qquad \zeta_s - b_s = \varepsilon K \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|l_j - 3r|} (\zeta_1 + \ldots + \zeta_n).$$

On peut encore écrire

$$\frac{\zeta_s - b_s}{\varepsilon K \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|l_j - 3r|}} = \frac{\zeta_1 + \ldots + \zeta_n}{1} = \frac{b_1 + \ldots + b_n}{1 - n\varepsilon K \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|l_j - 3r|}}$$

et l'on a ainsi

$$(16\ bis)\qquad \zeta_s = b_s + (b_1 + \ldots + b_n) \frac{\varepsilon K \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|l_j - 3r|}}{1 - n\varepsilon K \sum^{n} \frac{1}{|l_j - 3r|}}.$$

Si donc ε est assez petit pour que

$$(17) \qquad \varepsilon \mathrm{K} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|l_j - 3r|} < \frac{q}{n} < \frac{1}{n},$$

q étant un nombre fixe, le système (14) admet des solutions de la forme (15) où les ζ sont développables en séries entières ordonnées suivant les puissances de ε.

Convenons de prendre

$$(18) \qquad q < \frac{n}{n+1},$$

alors $\zeta_s < b_s + (b_1 + \ldots + b_n)$, et si $b_1, \ldots, b_n$ sont tous inférieurs à $\frac{h}{n+1}$, on aura

$$(19) \qquad |\mathrm{Z}_s| < h\, e^{-2rt} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Aux séries (16 *bis*) trouvées pour les ζ_s correspondent des séries pour les Z_s et les sommes Z_s^p des p premiers termes de ces séries sont précisément les approximations de rang p qu'on obtient en appliquant au système (14) la méthode des approximations successives, les premières approximations étant

$$\mathrm{Z}_1^1(t) = b_1 e^{-2rt}, \qquad \ldots, \qquad \mathrm{Z}_n^1(t) = b_n e^{-2rt}.$$

On en conclut la convergence uniforme de ces approximations successives.

En procédant toujours comme au Chapitre I, nous étudierons *les équations intégrales de comparaison*

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{z}_s(t) = b_s e^{-2rt} + \varepsilon \mathrm{K} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \pm(1) \int_{t'_j}^{t} e^{(l_j - r)(\alpha - t)} [\mathfrak{z}_1(\alpha) + \ldots + \mathfrak{z}_n(\alpha)]\, d\alpha \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

où les limites t'_j sont maintenant les mêmes que pour le système (13), le facteur (± 1) étant pris comme dans le système (14), égal à -1 pour les l_j négatifs, à $+1$ pour les l_j positifs ou nuls.

On voit que les approximations successives $\mathfrak{z}_s^p(t)$ données par (20) en partant des $\mathfrak{z}_s^1(t) = b_s e^{-2rt}$ sont positives et inférieures aux précédentes; elles tendent uniformément, en croissant, vers des limites $\mathfrak{z}_s(t)$ vérifiant les équations (20), et l'on a, pour $t > t_0$,

$$
0 < \mathfrak{z}_s^p(t) < \mathfrak{z}_s(t) < h\, e^{-2rt}. \tag{21}
$$

18. Appliquons alors la méthode des approximations successives au système (13) lui-même, en prenant comme premières approximations

$$
z_s^1(t) = \sum_{j=1}^{n} C'_j\, z_{sj}(t).
$$

Rappelons les hypothèses suivantes : on admet qu'on a choisi ε de façon à satisfaire aux inégalités (17) et (18), qu'on a déterminé h de manière à ce que la dernière inégalité (9) et les inégalités (10) soient vérifiées. Enfin les b sont tous inférieurs en valeur absolue à $\dfrac{h}{n+1}$ et les valeurs absolues des constantes C′ sont assez petites pour que les inégalités (12) aient lieu pour $t > t_0$.

On montre alors, en utilisant le système (20) comme système de comparaison, que les secondes approximations de (13) $z_s^2(t)$ sont bien définies, inférieures en valeur absolue aux fonctions $\mathfrak{z}_s^2(t)$ correspondantes, et qu'on a

$$
|z_s^2(t) - z_s^1(t)| < \mathfrak{z}_s^2(t) - \mathfrak{z}_s^1(t).
$$

En raisonnant comme au n° 6, on établit de proche en proche l'existence des approximations successives $z_s^p(t)$ et les inégalités

$$
|z_s^p(t) - z_s^{p-1}(t)| < \mathfrak{z}_s^p(t) - \mathfrak{z}_s^{p-1}(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n;\ p = 1, 2, \ldots).
$$

Il en résulte que *ces approximations successives convergent uniformément vers des limites $z_s(t)$ vérifiant les équations intégrales* (13) et les inégalités

$$
|z_s(t)| < h\, e^{-2rt}.
$$

Elles sont donc *asymptotiques à zéro pour $t = +\infty$*, et dépendent des constantes C′ dont le nombre est égal à celui des l positifs.

Ces résultats se résument dans l'énoncé suivant :

Les fonctions $\lambda_{ij}(t)$ et $L_i(z_1, \ldots, z_n, t)$ satisfaisant aux conditions *énoncées plus haut* [n° 14, *conditions* (a), et n° 16 *conditions* (b)], *le système* (1) *étant de plus régulier, le système* (2) (n° 16) *admet une famille de solutions formées de solutions toutes asymptotiques à zéro pour t infini positif. Cette famille dépend de constantes arbitraires en nombre égal à celui des solutions de* (1), *appartenant à un système normal, ayant un nombre caractéristique positif.*

Ce théorème généralise, à cause des hypothèses plus larges faites sur les L, celui qu'a donné M. Liapounoff (théorème II, p. 253 de la traduction de M. Davaux).

Pour faire des applications pratiques de ces résultats il faudrait déterminer les nombres caractéristiques, ou tout au moins savoir combien il en est de positifs. Cette question paraît très difficile dès que les λ ne sont plus constants. M. Liapounoff a donné à ce sujet (n^{os} 48 à 53 de son Mémoire) des résultats concernant les équations (1) à coefficients λ périodiques. On pourrait vraisemblablement retrouver et généraliser ces résultats en utilisant les méthodes d'approximations successives du Chapitre I du présent Mémoire, mais nous n'insisterons pas sur ce point.

Les résultats basés sur la notion de nombre caractéristique sont très intéressants, par contre, au point de vue théorique. Ils mettent bien en évidence le fait que l'existence des solutions asymptotiques à zéro du système (2) est une conséquence de l'existence de solutions de (1) où toutes les fonctions z restent inférieures en valeur absolue à des fonctions du type $(e^t)^{-m}$, m étant une constante positive. On est conduit dès lors à chercher à étendre ces résultats en substituant à l'exponentielle e^t d'autres fonctions monotones [1] pour t assez grand. Le cas particulier étudié dans les pages suivantes [où la décroissance des solutions de (1) peut être considérée comme estimée par comparaison soit à e^t, soit à t] montre l'intérêt que peut présenter une telle extension, dont nous n'aborderons cependant pas ici l'étude systématique.

(1) *Les Leçons sur la théorie de la croissance*, de M. Émile Borel, montrent le parti qu'on peut tirer d'une telle comparaison dans diverses questions analytiques ou arithmétiques. Les modes de comparaison employés par M. Borel, même ceux qui concernent les *ordres parenthèses*, sont toutefois plus restrictifs que celui de M. Liapounoff.

CHAPITRE III.

19. Les résultats antérieurement obtenus se prêtent aisément à l'étude des solutions asymptotiques à zéro pour t infini positif des systèmes

$$\frac{dz_i}{dt} = P_i(z_1, \ldots, z_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

où la variable indépendante ne figure pas dans les équations différentielles. Ces équations correspondent à ce que M. Liapounoff appelle un *mouvement permanent*, étendant ainsi une dénomination due à Routh qui a montré le grand intérêt de certains systèmes de cette nature dans diverses questions de dynamique [1].

Pour éviter des longueurs dans l'énoncé des hypothèses, nous admettrons que les P sont développables en séries entières pour $z_1 = \ldots = z_n = 0$. En faisant passer dans les premiers membres les termes du premier ordre de ces séries, nous donnerons au système (1) la forme

$$\frac{dz_i}{dt} - \lambda_{i1} z_1 - \ldots - \lambda_{in} z_n = L_i(z_1, \ldots, z_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Les L sont indépendants de t, leurs dérivées premières s'annulent pour $z_1 = \ldots = z_n = 0$. Le système linéaire homogène correspondant

$$\frac{dz_i}{dt} - \lambda_{i1} z_1 - \ldots - \lambda_{in} z_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

est à coefficients constants; *si l'équation caractéristique admet p racines à partie réelle négative,* (1) *admet une famille à p paramètres de solutions asymptotiques à zéro pour $t = +\infty$.*

Ce résultat, bien connu depuis les travaux de M. Poincaré, peut être considéré comme un cas particulier de la proposition I du n° 11.

[1] Routh, *Stability of Motion*, *Rigid Dynamics*. *Voir* aussi les intéressantes recherches de M. T. Levi-Civita (*Prace mat. fizycn.*, t. XVII, 1906).

Mais il n'est nullement établi que le système (1) ne puisse admettre d'autres solutions asymptotiques à zéro que celles dont nous avons établi l'existence. L'exemple même des équations homogènes (3) conduit à penser que (1) ne peut admettre une famille de solutions asymptotiques à zéro pour $t = +\infty$ dépendant de plus de $n - p'$ paramètres, p' désignant le nombre des racines de l'équation caractéristique attachée à (3) dont la partie réelle est positive. Mais cette équation caractéristique peut admettre des racines à partie réelle nulle. Peut-il arriver qu'à ces racines correspondent de nouvelles solutions asymptotiques à zéro pour $t = +\infty$?

Nous allons montrer qu'il peut effectivement en être ainsi. Nous n'examinerons cependant ici que le cas particulier où *l'équation caractéristique admet une seule racine nulle, les parties réelles de toutes les autres racines étant différentes de zéro.*

Nous supposerons les équations (1) mises sous une forme réduite indiquée par M. Liapounoff. Cette transformation préalable des équations (1) n'exigerait, pour être effectivement pratiquée, que des résolutions d'équations finies.

Dans cette forme réduite certains termes apparaissent comme plus importants que les autres; en les conservant seuls nous obtenons des équations différentielles approchées dont les intégrales asymptotiques à zéro nous serviront de premières approximations pour l'étude du système (1). Cette étude sera faite encore par la méthode d'approximations successives appliquée à des équations intégrales à limites variables.

20. Pour éviter des notations compliquées, supposons $n = 3$. Soit le système

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \mathrm{P}(x, y, z), \\ \dfrac{dy}{dt} = \mathrm{Q}(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dt} = \mathrm{R}(x, y, z). \end{cases}$$

En ne conservant dans P, Q, R que les termes du premier ordre, on a un système linéaire dont l'équation caractéristique admet par hypothèse une racine nulle, les deux autres étant à partie réelle non nulle.

Alors, par un choix convenable des variables x, y, z, on ramène le système (5) à un système de même forme où P, Q, R satisfont aux conditions suivantes [1] :

1° P ne contient aucun terme du premier degré ; Q, R en contiennent, mais leurs termes du premier degré sont indépendants de x.

2° Soit m le degré de la moindre puissance de x figurant dans le développement de $P(x, 0, 0)$ *supposée non identiquement nulle ;* les fonctions $Q(x, 0, 0)$, $R(x, 0, 0)$ ne contiennent pas de terme de degré inférieur à m. Nous nous contenterons d'examiner en détail le cas de $m = 2$, et énoncerons ensuite les résultats pour m quelconque.

Une nouvelle transformation permet de supposer que les termes du premier degré de P et Q ne contiennent respectivement que y et z. Cette transformation peut, il est vrai (*voir* n° 9), faire dépendre de t les coefficients des termes de P et Q de degré supérieur ou égal à deux, mais ces coefficients restant bornés quel que soit t, le raisonnement suivant (où nous supposons P, Q indépendants de t) subsisterait.

Pour montrer les divers cas possibles pour les limites d'intégration, nous supposerons les deux racines non nulles de l'équation caractéristique réelles et de signe contraire. En choisissant convenablement la variable x, on peut partir de la forme réduite

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x^2 + x(ay + bz) + a'y^2 + 2b'yz + c'z^2 + \varphi(x, y, z), \\ \dfrac{dy}{dt} = -ly + Y(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dt} = mz + Z(x, y, z), \end{cases}$$

où l, m sont des constantes positives ; a, b, a', b', c' sont des constantes ; les fonctions φ, Y, Z sont holomorphes au voisinage de $x=y=z=0$, et ne contiennent, la première, pas de termes de degré inférieur à trois, les autres pas de termes du premier degré.

---

(1) Liapounoff, Mémoire cité, n° 28.

En considérant le système particulier

$$\frac{dx}{dt} = -x^2, \qquad \frac{dy}{dt} = -ly + \mathrm{Y}(x), \qquad \frac{dz}{dt} = mz + \mathrm{Z}(x),$$

on est conduit à penser que si l'on fait dans le système (5) le changement de variables

$$(6) \qquad x = \frac{1+x_1}{t}, \qquad y = \frac{y_1}{t^{1+\rho}}, \qquad z = \frac{z_1}{t^{1+\rho}} \qquad (0 < \rho < 1),$$

le système obtenu admettra une famille de solutions où x, y, z resteront bornés quand t tendra vers $+\infty$. Écrivons ce système :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{x_1}{t} - \frac{x_1^2}{t} + (1+x_1)\frac{ay_1 + bz_1}{t^{1+\rho}} \\ &\quad + \frac{a_1 y_1^2 + 2b' y_1 z_1 + c' z_1^2}{t^{1+2\rho}} + t\varphi\left(\frac{1+x_1}{t}, \frac{y_1}{t^{1+\rho}}, \frac{z_1}{t^{1+\rho}}\right), \\ \frac{dy_1}{dt} &= -ly_1 + \frac{1+\rho}{t} y_1 + t^{1+\rho}\,\mathrm{Y}\left(\frac{1+x_1}{t}, \frac{y_1}{t^{1+\rho}}, \frac{z_1}{t^{1+\rho}}\right), \\ \frac{dz_1}{dt} &= mz_1 + \frac{1+\rho}{t} z_1 + t^{1+\rho}\,\mathrm{Z}\left(\frac{1+x_1}{t}, \frac{y_1}{t^{1+\rho}}, \frac{z_1}{t^{1+\rho}}\right). \end{aligned} \right.$$

En supprimant les indices de x, y, z, nous écrirons

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{x}{t} + f(t) + \mathfrak{X}(x, y, z, t), \\ \frac{dy}{dt} &= -ly + g(t) + \mathfrak{Y}(x, y, z, t), \\ \frac{dz}{dt} &= mz + h(t) + \mathfrak{Z}(x, y, z, t). \end{aligned} \right.$$

Les produits $t^2 f(t)$, $t^{1-\rho} g(t)$, $t^{1-\rho} h(t)$ restent bornés pour t infini positif; nous poserons pour $t > t_0 > 0$, t_0 étant assez grand,

$$(9) \qquad |f(t)| < \frac{\mathrm{A}}{t^2}, \qquad |g(t)| < \frac{\mathrm{B}}{t^{1-\rho}}, \qquad |h(t)| < \frac{\mathrm{C}}{t^{1-\rho}}.$$

Les fonctions $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ s'annulent pour $x = y = z = 0$; il est aisé de voir du reste que, ε étant un nombre positif arbitrairement petit, on pourra, en prenant $t > t_0$, t_0 étant assez grand et $|x|$, $|y|$, $|z|$ inférieurs à un nombre η assez petit, satisfaire aux inégalités

$$(10)\quad \begin{cases} \left|\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}\right| < \dfrac{\varepsilon}{t}, & \left|\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y}\right| < \dfrac{\varepsilon}{t}, & \left|\dfrac{\partial\mathfrak{X}}{\partial z}\right| < \dfrac{\varepsilon}{t}, \\ \left|\dfrac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial x}\right| < \varepsilon, & \left|\dfrac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}\right| < \varepsilon, & \left|\dfrac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial z}\right| < \varepsilon, \\ \left|\dfrac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x}\right| < \varepsilon, & \left|\dfrac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial y}\right| < \varepsilon, & \left|\dfrac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right| < \varepsilon. \end{cases}$$

Remplaçons alors les équations différentielles (8) par les équations intégrales

$$(11)\quad \begin{cases} x(t) = \dfrac{p}{t} + \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{t_0}^{t} \alpha\{f(\alpha) + \mathfrak{X}[x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha), \alpha]\}\,d\alpha, \\ y(t) = q\,e^{-lt} + e^{-lt}\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{l\alpha}\{g(\alpha) + \mathfrak{Y}[x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha), \alpha]\}\,d\alpha, \\ z(t) = -e^{mt}\displaystyle\int_{t}^{+\infty} e^{-m(\alpha)}\{h(\alpha) + \mathfrak{Z}[x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha), \alpha]\}\,d\alpha. \end{cases}$$

Dans ces équations, p, q, t_0 sont des constantes. Nous allons montrer que si t_0 est assez grand et $|p|$ et $|q|$ assez petits, la méthode d'approximations successives donne un système de solutions de ces équations (11).

Considérons d'abord les premières approximations :

$$(12)\quad \begin{cases} x_1(t) = \dfrac{p}{t} + \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{t_0}^{t} \alpha\, f(\alpha)\,d\alpha, \\ y_1(t) = q\,e^{-lt} + e^{-lt}\displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{l\alpha} g(\alpha)\,d\alpha, \\ z_1(t) = -e^{mt}\displaystyle\int_{t}^{+\infty} e^{-m\alpha} h(\alpha)\,d\alpha. \end{cases}$$

Les inégalités (9) donnent immédiatement, en supposant $t_0 > 1$,

$$(13)\quad \begin{cases} |x_1(t)| < \dfrac{|p|}{t} + \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{t_0}^{t} \dfrac{A}{\alpha}\,d\alpha = \dfrac{|p|}{t} + \dfrac{A(\log t - \log t_0)}{t} < \dfrac{|p|}{t} + \dfrac{A\log t}{t}, \\ |z_1(t)| < \dfrac{e^{mt}C}{t^{1-\rho}}\displaystyle\int_{t}^{\infty} e^{-m\alpha}\,d\alpha = \dfrac{C}{m t^{1-\rho}}. \end{cases}$$

Considérons ensuite $e^{-lt}\int_{t_0}^{t} e^{l\alpha}g(\alpha)\,d\alpha$; la valeur absolue de cette expression est inférieure à

$$(14)\qquad B\,e^{-lt}\int_{t_0}^{t}\frac{e^{l\alpha}}{\alpha^{1-\rho}}\,d\alpha.$$

Soit l' un nombre positif inférieur à l, nous écrirons (14) sous la forme

$$(15)\qquad \frac{B}{t^{1-\rho}}\int_{t_0}^{t}\frac{\dfrac{e^{l'\alpha}}{\alpha^{1-\rho}}}{\dfrac{e^{l't}}{t^{1-\rho}}}\,e^{(l-l')(\alpha-t)}\,d\alpha.$$

Si t_0 est assez grand, pour $t > t_0$ $\frac{e^{l't}}{t^{1-\rho}}$ est une fonction croissante de t, la fraction figurant dans l'intégrale (15) est inférieure à un, et l'expression (14) est plus petite que

$$\frac{B}{t^{1-\rho}}\int_{t_0}^{t} e^{(l-l')(\alpha-t)}\,d\alpha < \frac{B}{(l-l')\,t^{1-\rho}}.$$

Il résulte de tout cela qu'on pourra trouver un nombre μ compris entre zéro et un et des nombres $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ tels que pour $t > t_0$, $|p|$ et $|q|$ étant assez petits, on ait

$$(16)\qquad |x_1(t)| < \frac{\mathcal{A}}{t^{\mu}},\qquad |y_1(t)| < \frac{\mathcal{B}}{t^{\mu}},\qquad |z_1(t)| < \frac{\mathcal{C}}{t^{\mu}}.$$

21. Nous formerons alors, en nous appuyant sur les inégalités (16) et (10), les *équations intégrales de comparaison :*

$$(17)\qquad \begin{cases} X(t) = \dfrac{\mathcal{A}}{t^{\mu}} + \dfrac{\varepsilon}{t}\displaystyle\int_{t_0}^{t}[X(\alpha)+Y(\alpha)+Z(\alpha)]\,d\alpha, \\ Y(t) = \dfrac{\mathcal{B}}{t^{\mu}} + \varepsilon\,e^{-lt}\displaystyle\int_{t_0}^{t}[X(\alpha)+Y(\alpha)+Z(\alpha)]\,e^{l\alpha}\,d\alpha, \\ Z(t) = \dfrac{\mathcal{C}}{t^{\mu}} + \varepsilon\,e^{mt}\displaystyle\int_{t}^{+\infty}[X(\alpha)+Y(\alpha)+Z(\alpha)]\,e^{-m\alpha}\,d\alpha, \end{cases}$$

qui nous serviront à établir, comme d'habitude, l'existence de solutions pour le système (11).

Les premières approximations pour les équations (17) étant

$$X_1(t) = \frac{\mathcal{A}}{t^\mu}, \qquad Y_1(t) = \frac{\mathcal{B}}{t^\mu}, \qquad Z_1(t) = \frac{\mathcal{C}}{t^\mu}, \tag{18}$$

les approximations suivantes $X_2, Y_2, Z_2, X_3, Y_3, Z_3, \ldots$ seront toutes positives et croissantes. On aura d'abord

$$0 < X_2 - X_1 < \frac{\varepsilon}{1-\mu}(X_1 + Y_1 + Z_1),$$

$$0 < Y_2 - Y_1 < \frac{\varepsilon}{l-l'}(X_1 + Y_1 + Z_1),$$

$$0 < Z_2 - Z_1 < \frac{\varepsilon}{m}(X_1 + Y_1 + Z_1).$$

Désignons par ΔX_i, ΔY_i, ΔZ_i les différences $X_i - X_{i-1}$, $Y_i - Y_{i-1}$, $Z_i - Z_{i-1}$, et par $M(\xi)$ une limite supérieure pour $t > t_0$ d'une fonction $\xi(t)$; le même calcul montre qu'on peut prendre

$$\frac{M(\Delta X_i)}{\frac{\varepsilon}{1-\mu}} = \frac{M(\Delta Y_i)}{\frac{\varepsilon}{l-l'}} = \frac{M(\Delta Z_i)}{\frac{\varepsilon}{m}} = \frac{M(\Delta X_i) + M(\Delta Y_i) + M(\Delta Z_i)}{\varepsilon\left[\frac{1}{1-\mu} + \frac{1}{l-l'} + \frac{1}{m}\right]}$$
$$= M(\Delta X_{i-1}) + M(\Delta Y_{i-1}) + M(\Delta Z_{i-1}).$$

Les sommes $M(\Delta X_i) + M(\Delta Y_i) + M(\Delta Z_i)$ sont inférieures aux termes d'une série entière en ε convergente si

$$\varepsilon\left|\frac{1}{1-\mu} + \frac{1}{l-l'} + \frac{1}{m}\right| < 1.$$

Il en est de même des expressions ΔX_i, ΔY_i, ΔZ_i et *la convergence des approximations successives* X_i, Y_i, Z_i *est bien établie*. De plus il est évident, à cause des dénominateurs t^μ qui figurent dans les expressions (18), et par suite dans les expressions $M(\Delta X_i)$, $M(\Delta Y_i)$, $M(\Delta Z_i)$, que les limites X, Y, Z de ces approximations successives sont asymptotiques à zéro pour $t = +\infty$. D'autre part, en prenant t_0 assez grand, $|p|$, $|q|$ assez petits, on peut supposer $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ aussi petits qu'on voudra, et par suite aussi X, Y, Z inférieurs à η.

De ces résultats on conclut, par un raisonnement trop souvent employé pour qu'il soit nécessaire de le répéter, l'existence de solutions asymptotiques à zéro pour les équations intégrales (8). En remontant enfin au système différentiel, on voit que *le système* (5) *admet une famille à deux paramètres* (p *et* q) *de solutions asymptotiques à zéro pour* $t = +\infty$.

22. Nous avons déjà dit que la même méthode s'applique à des cas plus étendus. Contentons-nous d'indiquer la marche à suivre pour le système

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = gx^s + P_{s-1}x^{s-1} + P_{s-2}x^{s-2} + \ldots + P_1 x + Q + R, \\ \dfrac{dy}{dt} = -ly + Y(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dt} = \quad mz \quad + Z(x, y, z), \end{cases}$$

où nous supposons $g \neq 0$ et s entier > 1. Les P sont des formes linéaires de y et z, Q est une forme quadratique des mêmes variables, $R = \Sigma A_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha y^\beta z^\gamma$ est une fonction holomorphe telle que si $\beta + \gamma = 0$, $\alpha > s$, et si $\beta + \gamma = 1$, $\alpha > s - 1$. Enfin $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ sont holomorphes; $Y(x, 0, 0)$, $Z(x, 0, 0)$ commencent par des termes de degré au moins égal à s.

On intègre immédiatement le système

$$(20)\qquad \frac{dx}{dt} = gx^s, \qquad \frac{dy}{dt} = -ly, \qquad \frac{dz}{dt} = mz.$$

Si s est pair, ce système admet toujours une famille à deux paramètres de solutions asymptotiques à zéro pour $t = +\infty$; si s est impair avec $g < 0$, il en est de même. Dans les deux cas, on peut ramener par un choix convenable de la variable x, g à la valeur $\frac{1}{1-s}$.

Cette réduction faite, on effectuera dans (19) le changement de variables

$$(21)\qquad x = \frac{1 + x_1}{\frac{1}{t^{1-s}}}, \qquad y = \frac{y_1}{t^{1+\rho}}, \qquad z = \frac{z_1}{t^{1+\rho}},$$

où $0 < \rho < \frac{1}{s-1}$. On transformera le système obtenu en un système d'équations intégrales dont l'étude se fait comme précédemment (n° 21). On démontre ainsi que le système (19) admet une famille de solutions asymptotiques à zéro pour $t=+\infty$ dépendant d'autant de paramètres arbitraires que la famille correspondante de (20).

Ce résultat peut encore être étendu. On peut substituer d'abord à $-ly$ et mz dans les équations (20) deux formes linéaires à coefficients constants $ay+bz$, $cy+dz$, pourvu que l'équation caractéristique $(a-r)(d-r)-cb=0$ n'ait ni racine nulle, ni racine à partie réelle nulle. Enfin on peut supposer qu'au lieu de deux variables y et z on en ait un nombre quelconque, et on parvient ainsi au résultat suivant:

Si l'équation caractéristique du système linéaire (3) *correspondant aux équations* (2) *admet une seule racine nulle, les parties réelles de toutes les autres racines étant différentes de zéro, on effectuera dans ce système une transformation due à Liapounoff* (1). *En ne conservant dans les seconds membres des équations obtenues que les premiers termes, on arrive à un système réduit* Σ *formé d'une équation*

$$\frac{dx}{dt}=gx^s \tag{24}$$

(*où nous supposons* $g\neq 0$) *et d'un système linéaire à coefficients constants de* $n-1$ *équations à* $n-1$ *inconnues* $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Soit ν *le nombre des racines de l'équation caractéristique de ce système linéaire dont la partie réelle est négative. Si* s *est pair ou si* s *étant impair* g *est négatif, le système* (2) *admet une famille de solutions asymptotiques à zéro pour* $t=+\infty$ *dépendant de* $\nu+1$ *constantes arbitraires.*

Ainsi donc, sauf dans le cas où s est impair et g positif, nous trouvons une famille de solutions asymptotiques à zéro dépendant d'un paramètre de plus que les familles antérieurement considérées (n° 11, proposition I).

Ce résultat, que nous croyons nouveau (2), est à rapprocher de ceux obtenus par M. Bendixon dans son important Mémoire sur les courbes définies par des équations différentielles (3).

---

(1) Mémoire cité, n°s 28 et 29.

(2) Liapounoff n'examine que le cas où $\nu=n-1$, et le traite par une autre méthode.

(3) *Acta Mathematica*, t. XXIV, 1901.

23. Examinons, à titre d'exemple, l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -l\frac{dx}{dt} + gx^m, \tag{25}$$

équation dont il est aisé de trouver une interprétation mécanique. On la ramène au système

$$\frac{dx'}{dt} = -lx' + gx^m, \qquad \frac{dx}{dt} = x',$$

que le changement de variables

$$x = y + \frac{x'}{l}$$

transforme en

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g}{l}\left(y + \frac{x'}{l}\right)^m = \frac{g}{l}y^m + \ldots,$$

$$\frac{dx'}{dt} = -lx' + g\left(y + \frac{x'}{l}\right)^m = -lx' + \ldots.$$

Ce système a bien la forme voulue; le système réduit Σ correspondant est

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g}{l}y^m, \qquad \frac{dx'}{dt} = -lx'.$$

On a donc pour l'équation (25) une famille de solutions asymptotiques à zéro pour $t = +\infty$ dépendant de deux constantes arbitraires si $l > 0$, d'une seule si $l < 0$, sauf dans le cas où m est impair et $\frac{g}{l}$ négatif, où ces nombres doivent être réduits d'une unité.