

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE PICARD

Sur les équations intégrales de troisième espèce

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 28 (1911), p. 459-472

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1911_3_28_459_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1911, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR

LES ÉQUATIONS INTÉGRALES

DE

TROISIÈME ESPÈCE;

PAR M. ÉMILE PICARD.

On peut appeler *équation intégrale de troisième espèce* une équation de Fredholm de la forme

$$(1) \quad A(x)f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy = \psi(x),$$

où $f(x)$ est la fonction inconnue. Il est clair que, si $A(x)$ ne s'annule pas entre a et b , cette équation est une équation habituelle de Fredholm, puisqu'il suffit de poser

$$(2) \quad A(x)f(x) = F(x)$$

pour avoir une telle équation relative à la nouvelle fonction inconnue $F(x)$.

Le problème devient tout autre si la fonction $A(x)$ s'annule entre a et b . C'est le cas que nous nous proposons d'étudier ici, en supposant que $A(x)$ ait un certain nombre de racines *simples* entre a et b .

En faisant le changement de fonction indiqué par (2) on a l'équation

$$(3) \quad F(x) + \lambda \int_a^b \frac{K(x, y)}{A(y)} F(y) dy = \psi(x).$$

Nous allons l'étudier en nous plaçant au point de vue suivant.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ les racines de $A(y)$ comprises entre a et b . Autour du point α_i supprimons l'intervalle

$$(\alpha_i - \varepsilon_i, \alpha_i + \eta_i) \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

les ε_i et η_i étant des quantités positives qui tout à l'heure tendront vers zéro. Supposons alors que, dans l'équation (3), le champ d'intégration soit formé par l'intervalle (a, b) , où l'on a supprimé les intervalles précédents ; nous avons une équation intégrale susceptible d'être résolue par la formule de Fredholm. On va maintenant faire tendre les ε et les η vers zéro. Nous nous proposons de montrer que *la valeur de $F(x)$ obtenue par les considérations précédentes a une valeur limite qui est linéaire (fractionnaire) isolément par rapport aux m constantes C_i , en posant*

$$C_i = \lim \log \frac{\eta_i}{\varepsilon_i}.$$

L'intégrale ainsi obtenue de l'équation (3), et par suite de l'équation (1), dépend de m constantes arbitraires, et cela linéairement par rapport à chacune d'elles. La solution $f(x)$ ainsi obtenue de l'équation (1) admet en général les pôles $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

Après avoir établi ce théorème général, nous considérerons particulièrement le cas où il n'y a qu'une seule racine de $A(x)$ entre a et b , c'est-à-dire le cas de l'équation

$$(x - \alpha)f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)f(y) dy = \psi(x) \quad (a < \alpha < b),$$

et nous démontrons qu'il existe en général des valeurs singulières de λ pour lesquelles cette équation fonctionnelle admet une solution $f(x)$ continue de a à b ⁽¹⁾.

Je ferai dans un autre travail diverses applications de ces théorèmes.

I.

1. Sans chercher à faire des hypothèses du caractère le plus géné-

(1) J'ai donné, dans diverses Notes des *Comptes rendus* (28 février 1910; 6 juin, 11 septembre et 2 octobre 1911), les indications essentielles sur le point de vue où je me place dans la théorie des équations intégrales de troisième espèce.

ral, nous supposerons que $K(x, y)$ et $A(y)$ sont des fonctions holomorphes de x et y pour toutes les valeurs réelles de x et y comprises entre a et b , ou encore qu'elles sont holomorphes, par rapport à la variable complexe x et par rapport à la variable complexe y , dans une aire à contour simple R comprenant le segment réel (a, b) .

Il suffira évidemment de raisonner dans le cas où $A(y)$ aurait une seule racine α entre a et b ; le cas de plusieurs racines se traiterait d'une façon tout à fait analogue. Nous supposerons donc

$$A(y) = y - \alpha,$$

et l'équation (3) devient

$$(4) \quad F(x) + \lambda \int_a^b \frac{K(x, y)}{y - \alpha} F(y) dy = \psi(x).$$

Comme il a été expliqué, on a dans l'équation (3) supprimé de l'intervalle (a, b) l'intervalle

$$(\alpha - \varepsilon, \alpha + \eta).$$

L'équation (4) est alors une équation ordinaire de Fredholm, et nous pouvons employer pour sa résolution les formules habituelles. Il s'agit de voir ce que devient cette formule quand ε et η tendent vers zéro. Nous pouvons d'ailleurs supposer que α est nul et l'on a par suite $a < 0, b > 0$.

2. Étudions d'abord le dénominateur $D(\lambda)$ qui est, dans le cas actuel, représenté par la formule

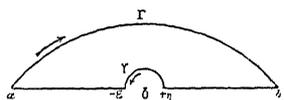
$$D(\lambda) = \sum_{1.2\dots n} \frac{\lambda^n}{1.2\dots n} \int_a^b \int_a^b \dots \int_a^b \frac{K \left(\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{matrix} \right)}{x_1 x_2 \dots x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

ou

$$K \left(\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{matrix} \right) = \begin{vmatrix} K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) & \dots & K(x_1, x_n) \\ K(x_2, x_1) & K(x_2, x_2) & \dots & K(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n, x_1) & K(x_n, x_2) & \dots & K(x_n, x_n) \end{vmatrix}.$$

Dans le plan de chacune des variables complexes x_1, x_2, \dots, x_n , la ligne d'intégration est formée des deux segments, situés sur l'axe réel $(a, -\varepsilon)$ et $(+\eta, b)$.

D'après les hypothèses faites sur $K(x, \gamma)$, nous pouvons remplacer la ligne d'intégration qui vient d'être indiquée par une courbe Γ joignant a à b , située au-dessus de l'axe réel, et une petite courbe γ joignant le point $+\eta$ au point $-\varepsilon$ placée également au-dessus de l'axe réel; ces deux courbes sont parcourues dans les sens indiqués par les flèches. On doit concevoir que dans chacun des plans relatifs aux variables x_1, x_2, \dots, x_n est tracée la figure ci-dessous :



Nous nous proposons de montrer que $D(\lambda)$ a une limite quand les courbes γ tendent vers le point O en même temps que ε et η tendent vers zéro.

3. Faisons d'abord une remarque à peu près évidente. Soient une fonction $\varphi(x)$ holomorphe dans un cercle Γ de centre O , et la ligne γ de la figure précédente située dans un cercle Γ' concentrique à Γ et de rayon moindre. Envisageons l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(\gamma) d\gamma}{\gamma}$$

le long de la courbe γ . Si M est le maximum de $|\varphi(\gamma)|$ dans Γ , le module de l'intégrale précédente est inférieur à

$$M \sqrt{\left(\log \frac{\eta}{\varepsilon}\right)^2 + k^2},$$

k^2 étant un nombre fixe, c'est-à-dire indépendant de la fonction φ et de la courbe γ (supposée restant dans le cercle Γ'). D'ailleurs quand γ tend vers le point O , k tend vers π .

4. Soit M_n le module maximum de

$$K \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix},$$

quand, dans leurs plans respectifs, x_1, x_2, \dots, x_n restent à l'intérieur de la région R considérée au paragraphe 1. Nous allons chercher une

limite supérieure du maximum du module de l'intégrale

$$(5) \quad \int_a^b \dots \int_a^b \frac{\mathbf{K} \left(\begin{matrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{matrix} \right)}{x_1 x_2 \dots x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Pour chacun des x , la ligne d'intégration est formée d'une courbe Γ et d'une courbe γ . Désignons par ρ la distance *minima* d'un point d'une courbe Γ à l'origine.

Supposons d'abord, dans l'évaluation de l'intégrale (5), que tous les points x soient sur la courbe Γ correspondante. La valeur de l'intégrale répondant à cette partie du champ d'intégration aura un module moindre que

$$M_n \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^n,$$

σ désignant la longueur de la courbe Γ .

Supposons ensuite que un des points x soit sur une courbe γ , les autres étant sur une courbe Γ ; on aura manifestement, comme limite supérieure du module de la partie correspondante de (5),

$$M_n \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^{n-1} U$$

en posant

$$U = \sqrt{\left(\log \frac{\eta}{\varepsilon} \right)^2 + k^2}.$$

Les combinaisons précédentes sont évidemment en nombre n . Elles donnent la limite

$$n M_n \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^{n-1} U.$$

On peut continuer ainsi. La partie de l'intégrale (5), pour laquelle *deux* points x sont sur une courbe γ , les $n - 2$ autres points étant sur une courbe Γ , donne évidemment comme limite supérieure de son module

$$\frac{n(n-1)}{2} M_n \left(\frac{\sigma}{\rho} \right)^{n-2} U^2,$$

et ainsi de suite.

En réunissant toutes ces expressions, on voit de suite que le module de (5) est inférieur à

$$M_n (\sigma + U)^n.$$

5. Il est alors bien facile de démontrer que $D(\lambda)$ a une limite quand ε et η tendent vers zéro. On sait en effet, d'après un théorème de M. Hadamard sur les déterminants, qu'on peut prendre

$$M_n = n^{\frac{n}{2}} M^n,$$

M désignant le maximum du module de $K(x, y)$, quand x et y sont dans R . On a donc à étudier la série de terme général

$$M^n \frac{\lambda^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} \left(\frac{\sigma}{\rho} + U \right)^n,$$

U , σ et ρ étant des nombres fixes. C'est le même calcul élémentaire que dans le cas ordinaire de l'équation de Fredholm. *Nous avons donc établi que $D(\lambda)$ tend vers une limite quand ε et η tendent vers zéro, $\log \frac{\eta}{\varepsilon}$ ayant une limite finie.*

6. On peut aller plus loin et montrer que $D(\lambda)$ est une courbe linéaire de la constante C , en posant

$$C = \lim \log \frac{\eta}{\varepsilon}.$$

Il suffit, pour l'établir, de vérifier que l'intégrale (5) est une fonction linéaire de $\log \frac{\eta}{\varepsilon}$.

Considérons à cet effet la partie de l'intégrale (5) correspondant à x_1, x_2, \dots, x_p , ($p \leq n$) situés sur une courbe γ , tandis que x_{p+1}, \dots, x_n sont sur une courbe Γ . Soit le développement

$$(6) \quad K(x, y) = \sum x^m f_m(y),$$

valable quand x est dans le voisinage de O , y étant quelconque dans R . Envisageons alors le quotient

$$(7) \quad \frac{\begin{vmatrix} K(x_1, x_1) & K(x_1, x_2) & \dots & K(x_1, x_n) \\ K(x_2, x_1) & K(x_2, x_2) & \dots & K(x_2, x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_n, x_1) & K(x_n, x_2) & \dots & K(x_n, x_n) \end{vmatrix}}{x_1 x_2 \dots x_p}$$

et étudions son développement par rapport à x_1, x_2, \dots, x_p dans le voisinage de $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_p = 0$. Le déterminant placé au numérateur peut être développé d'après la règle de Laplace, en considérant les p premières lignes et les $n - p$ autres. On a alors une somme de produits de deux déterminants respectivement d'ordre p et $n - p$. Le déterminant d'ordre p est de la forme

$$\begin{vmatrix} K(x_1, x_\alpha) & K(x_1, x_\beta) & \dots & K(x_1, x_\lambda) \\ K(x_2, x_\alpha) & K(x_2, x_\beta) & \dots & K(x_2, x_\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x_p, x_\alpha) & K(x_p, x_\beta) & \dots & K(x_p, x_\lambda) \end{vmatrix},$$

$\alpha, \beta, \dots, \lambda$ étant p nombres distincts entre 1 et n . En remplaçant K par le développement (6), nous aurons une somme de déterminants de la forme

$$f_{\alpha'}(x_\alpha) f_{\beta'}(x_\beta) \dots f_{\lambda'}(x_\lambda) \begin{vmatrix} x_1^{\alpha'} & x_1^{\beta'} & \dots & x_1^{\lambda'} \\ x_2^{\alpha'} & x_2^{\beta'} & \dots & x_2^{\lambda'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_p^{\alpha'} & x_p^{\beta'} & \dots & x_p^{\lambda'} \end{vmatrix},$$

$\alpha', \beta', \dots, \lambda'$ étant p entiers positifs ou nuls.

Or il est presque immédiat que chaque terme de ce dernier déterminant contient en facteur au moins $p - 1$ des lettres x_1, x_2, \dots, x_p . Ceci est évident si aucun des nombres $\alpha', \beta', \dots, \lambda'$ n'est nul. Il n'y a ensuite qu'à considérer le cas où un seul d'entre eux serait nul, car autrement le déterminant serait nul. Soit donc λ' égal à zéro, les autres nombres n'étant pas nuls; il est clair alors que chaque terme du déterminant développé suivant la dernière colonne renferme en facteur $p - 1$ des lettres x_1, x_2, \dots, x_p .

Il résulte de là que l'expression (7) est susceptible de se mettre sous la forme

$$\frac{A_1}{x_1} + \frac{A_2}{x_2} + \dots + \frac{A_p}{x_p},$$

les A étant holomorphes. Par suite, si p est supérieur à l'unité, la partie envisagée de l'intégrale (5) tend vers zéro quand ε et η tendent vers zéro. Quand $p = 1$, on obtient une expression qui renferme au premier degré la limite de $\log \frac{\eta}{\varepsilon}$ que nous avons désignée par C .

Il est donc établi que $D(\lambda)$ est, pour $\varepsilon = \eta = 0$, une fonction linéaire de C . On aura donc

$$D(\lambda) = G_1(\lambda) C + G_2(\lambda),$$

G_1 et G_2 étant des fonctions entières de λ .

7. Revenons à l'équation (4) pour étudier la solution $F(x)$. On aura dans le cas actuel (on a fait $\alpha = 0$)

$$F(x) = \psi(x) - \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b \frac{D(x, y; \lambda)}{y} \psi(y) dy,$$

l'intégrale étant toujours prise, en supprimant l'intervalle $(-\varepsilon, +\eta)$, et $D(x, y; \lambda)$ étant la fonction entière en λ donnée par

$$D(x, y; \lambda) = \sum \frac{\lambda^n}{1 \cdot 2 \dots n} \int_a^b \dots \int_a^b \frac{K \begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \dots, x_n \\ y, x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix}}{x_1 x_2 \dots x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Nous avons, en définitive, à étudier la série

$$\sum \frac{\lambda^n}{1 \cdot 2 \dots n} \int_a^b \dots \int_a^b \frac{K \begin{pmatrix} x, x_1, x_2, \dots, x_n \\ x, x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix}}{y x_1 x_2 \dots x_n} \psi(y) dy dx_1 \dots dx_n,$$

l'intégrale multiple étant d'ordre $n+1$.

Il n'y a rien à changer à la méthode suivie plus haut pour établir que cette série a une limite, fonction déterminée de x , quand ε et η tendant vers zéro, $\log \frac{\eta}{\varepsilon}$ a une limite finie C ; nous supposons que $\psi(x)$ est holomorphe dans R .

Il en est à peu près de même pour montrer que *la limite trouvée est une fonction linéaire de C* . Concevons, comme précédemment, les courbes Γ et γ relatives à chacune de nos variables y, x_1, x_2, \dots, x_n . Nous avons à considérer le quotient

$$\frac{\begin{vmatrix} K(x, y) & K(x_1, y) & \dots & K(x_n, y) \\ K(x, x_1) & K(x_1, x_1) & \dots & K(x_n, x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(x, x_n) & K(x_1, x_n) & \dots & K(x_n, x_n) \end{vmatrix}}{y x_1 x_2 \dots x_n}.$$

Posons ici

$$K(x, y) = \sum y^m f_m(x),$$

ce développement étant valable quand y est dans le voisinage de l'origine, x étant quelconque dans R .

En raisonnant comme précédemment, on voit de suite que si p des $n + 1$ lettres, soient par exemple $y, x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$, restent sur les courbes γ , les autres étant sur les courbes Γ , on peut, pour l'intégration, mettre le quotient indiqué sous la forme

$$\frac{B_1}{x_1} + \frac{B_2}{x_2} + \dots + \frac{B_{p-1}}{x_{p-1}} + \frac{B_p}{y},$$

les B étant holomorphes. Il n'y a donc de termes en $\log \frac{\eta}{\varepsilon}$ que pour $p = 1$, et ces termes sont du premier degré.

Nous avons donc établi le théorème énoncé au début de ce Mémoire, pour le cas où $A(y)$ a une seule racine entre a et b .

La solution de l'équation (4)

$$F(x) + \lambda \int_a^b \frac{K(x, y)}{y} F(y) dy = \psi(x),$$

l'intégration étant effectuée en supprimant l'intervalle $(-\varepsilon, +\eta)$, a une limite pour $\varepsilon = \eta = 0$. Cette limite est une fonction linéaire (fractionnaire) de la constante C , en posant

$$C = \lim \log \frac{\eta}{\varepsilon}.$$

La démonstration du cas, où il y a m racines simples de $A(y)$ entre a et b , peut évidemment être faite de la même manière, et l'on obtient la proposition énoncée dans l'introduction.

II.

8. On pouvait deviner bien aisément la proposition précédente par l'examen d'un cas particulier utilisé déjà par plusieurs auteurs dans la théorie de l'équation de Fredholm, celui où

$$K(x, y) = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \dots + X_m Y_m,$$

les X et les Y étant respectivement des fonctions de x et de y .

La solution $F(x)$ de l'équation

$$F(x) + \int_a^b \frac{X_1 Y_1 + \dots + X_m Y_m}{y - \alpha} F(y) dy = \psi(x)$$

est manifestement de la forme

$$F(x) = B_1 X_1 + B_2 X_2 + \dots + B_m X_m + \psi(x),$$

où les B ne dépendent pas de x . On les calcule facilement, et l'on obtient des fonctions linéaires fractionnaires de $\log \frac{\eta}{\varepsilon}$ de même dénominateur. Nous vérifierons tout à l'heure sur ce cas particulier quelques faits généraux.

9. Revenant à l'équation

$$(E) \quad (x - \alpha) f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy = \psi(x) \quad (a < \alpha < b),$$

il résulte de notre analyse que la solution $f(x)$ de cette équation est en général une fonction de x ayant α comme pôle simple; elle dépend de la constante arbitraire désignée plus haut par C , et bien entendu du paramètre λ .

Peut-il arriver que *cette solution soit continue dans l'intervalle* (a, b) ? Il faut écrire que le résidu de $f(x)$ est nul en α . Au premier abord, il semble qu'on obtiendra ainsi une équation entre λ et C , mais nous allons montrer que *cette équation contient seulement* λ , *de telle sorte que l'équation (E) aura, pour les valeurs de* λ *racines de cette équation, une solution* $f(x)$ *continue entre* a *et* b .

En nous reportant au paragraphe 7, et écrivant que $F(x)$ s'annule pour $x = \alpha$, ce qui revient à dire que le résidu de $f(x)$ en α est nul, on obtient la relation (en ayant posé $\alpha = 0$)

$$D(\lambda) \psi(0) - \lambda \int_a^b \frac{D(0, y; \lambda) \psi(y)}{y} dy = 0,$$

l'intégrale étant prise toujours en supprimant l'intervalle $(-\varepsilon, +\eta)$. Nous devons montrer que cette équation ne dépend pas du rapport limite $C = \lim \log \frac{\eta}{\varepsilon}$.

Le coefficient de λ^{n+1} dans le premier membre est égal à

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\psi(0)}{1.2\dots(n+1)} \int_a^b \dots \int_a^b \frac{\mathbf{K} \left(\begin{array}{c} x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \\ x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \end{array} \right)}{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} dx_1 dx_2 \dots dx_{n+1} \\ - \frac{1}{1.2\dots n} \int_a^b \dots \int_a^b \frac{\mathbf{K} \left(\begin{array}{c} 0, x_1, x_2, \dots, x_n \\ y, x_1, x_2, \dots, x_n \end{array} \right)}{y x_1 x_2 \dots x_n} \psi(y) dy dx_1 \dots dx_n, \end{array} \right.$$

les intégrales multiples d'ordre $n+1$ étant toujours prises dans les mêmes conditions.

Chacune de ces intégrales multiples est, comme nous l'avons vu, une fonction linéaire de $\log \frac{\eta}{\varepsilon}$ à la limite. Il faut établir que, dans l'expression (8), il n'y a pas de terme en $\log \frac{\eta}{\varepsilon}$. Or, d'après ce que nous avons vu, on obtient le coefficient de $\log \frac{\eta}{\varepsilon}$ dans la première intégrale multiple qui figure dans cette expression, en formant la somme des intégrales multiples d'ordre n :

$$\int_a^b \dots \int_a^b \frac{\mathbf{K} \left(\begin{array}{c} x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{n+1} \\ x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{n+1} \end{array} \right)}{x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{n+1}} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_{n+1},$$

le domaine d'intégration étant formé par les courbes Γ du paragraphe 2 et l'entier i prenant les valeurs $1, 2, \dots, n+1$; ces $n+1$ intégrales sont égales.

Quant à la seconde intégrale figurant dans (8), le coefficient de $\log \frac{\eta}{\varepsilon} y$ est semblablement égal à une somme de $n+1$ intégrales, mais on reconnaît de suite que n de ces intégrales sont nulles et il reste seulement

$$\psi(0) \int_a^b \dots \int_a^b \frac{\mathbf{K} \left(\begin{array}{c} 0, x_1, x_2, \dots, x_n \\ 0, x_1, x_2, \dots, x_n \end{array} \right)}{x_1 x_2 \dots x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

le domaine d'intégration de cette intégrale multiple d'ordre n étant formé par les courbes Γ . Il résulte immédiatement de ce calcul que l'expression (8) ne dépend pas de $\lim \log \frac{\eta}{\varepsilon}$.

Nous avons donc en résumé une fonction entière $G(\lambda)$, pour les racines desquelles l'équation (E) a une solution $f(x)$ continue entre a et b .

10. Cette solution dépend-elle de la constante C ? Nous allons montrer que la réponse est négative.

Soit donc λ_0 une racine de l'équation

$$G(\lambda) = 0,$$

et désignons par C_1 et C_2 deux valeurs de la constante C , pour lesquelles

$$G_1(\lambda_0)C_1 + G_2(\lambda_0) \neq 0, \quad G_1(\lambda_0)C_2 + G_2(\lambda_0) \neq 0.$$

Aux deux constantes C_1 et C_2 correspondent respectivement les solutions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ de l'équation

$$F(x) + \lambda_0 \int_a^b \frac{K(x, y)}{y - \alpha} F(y) dy = \psi(x).$$

F_1 correspond à $\lim \log \frac{\eta_1}{\varepsilon} = C_1$, et F_2 à $\lim \log \frac{\eta_2}{\varepsilon} = C_2$. Les deux fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ s'annulent d'ailleurs pour $x = \alpha$. Écrivons donc

$$F_1(x) + \lambda_0 \int_a^{\alpha - \varepsilon} \frac{KF_1}{y - \alpha} dy + \lambda_0 \int_{\alpha + \eta_1}^b \frac{KF_1}{y - \alpha} dy = \psi(x) \quad \left(\text{pour } \lim \frac{\eta_1}{\varepsilon} = C_1 \right),$$

et cette équation peut prendre la forme

$$F_1(x) + \lambda_0 \int_a^{\alpha - \varepsilon} \frac{KF_1}{y - \alpha} dy + \lambda_0 \int_{\alpha + \eta_2}^b \frac{KF_1}{y - \alpha} dy = \psi(x) - \lambda_0 \int_{\alpha + \eta_1}^{\alpha + \eta_2} \frac{KF_1}{y - \alpha} dy.$$

Or, F_1 s'annulant en α , il est clair que le second membre tend vers $\psi(x)$ quand η_1 et η_2 tendent vers zéro. Il en résulte que F_1 est donnée par la même formule que F_2 (qui correspond à $\lim \frac{\eta_2}{\varepsilon} = C_2$). Nous avons donc $F_1(x) = F_2(x)$ et par suite la solution $f(x)$ de l'équation

$$(x - \alpha)f(x) + \lambda_0 \int_a^b K(x, y)f(y) dy = \psi(x),$$

continue de a à b , ne dépend pas de la constante C figurant en apparence dans la formule qui la donne.

11. Ces résultats généraux se vérifient bien aisément sur l'équation particulière indiquée au paragraphe 8. Reprenons l'équation

$$F(x) + \lambda \int_a^b \frac{X_1(x)Y_1(y) + \dots + X_m(x)Y_m(y)}{y - \alpha} F(y) dy = \psi(x),$$

et déterminons les constantes B , correspondant à la solution

$$F(x) = B_1 X_1 + \dots + B_m X_m + \psi(x).$$

On trouve de suite les m équations

$$(9) \quad B_i + \lambda \left\{ B_1 \left[Y_i(\alpha) X_1(\alpha) \log \frac{\varepsilon}{\eta} + \dots \right] \right. \\ \left. + \dots + B_m \left[Y_i(\alpha) X_m(\alpha) \log \frac{\varepsilon}{\eta} + \dots \right] \right\} = -\lambda Y_i(\alpha) \psi(\alpha) \log \frac{\varepsilon}{\eta} + \dots$$

(i prenant les valeurs 1, 2, ..., m), les termes non écrits ne dépendant pas de $\log \frac{\varepsilon}{\eta}$. Il est aisé de voir que les B sont des fonctions linéaires de ce logarithme et de même dénominateur.

Vérifions les résultats obtenus dans les paragraphes précédents relatifs aux valeurs singulières de λ . L'équation donnant les valeurs de λ pour lesquelles il y a une solution $F(x)$ s'annulant pour $x = \alpha$ [et par suite une solution continue dans l'équation en $f(x)$] est ici

$$(10) \quad B_1 X_1(\alpha) + B_2 X_2(\alpha) + \dots + B_m X_m(\alpha) + \psi(\alpha) = 0.$$

Considérons le premier membre de cette équation. Quand on remplace les B par leurs valeurs, il deviendra une fonction linéaire fractionnaire de $\log \frac{\varepsilon}{\eta}$. Je dis que le numérateur de cette fraction ne dépend pas de $\log \frac{\varepsilon}{\eta}$. En effet, dans le cas contraire, l'équation (9) mise sous la forme

$$B_i = -\lambda Y_i(\alpha) [B_1 X_1(\alpha) + \dots + B_m X_m(\alpha) + \psi(\alpha)] \log \frac{\varepsilon}{\eta} + \dots,$$

donnerait pour B_i une fonction rationnelle de $\log \frac{\varepsilon}{\eta}$, dont le numérateur serait du second degré.

Il en résulte que l'équation (10) ne contient que λ (et non $\log \frac{\varepsilon}{\eta}$). Nous avons implicitement admis que

$$B_1 X_1(\alpha) + \dots + B_m X_m(\alpha)$$

n'était pas indépendant de $\log \frac{\varepsilon}{\eta}$, mais dans ce cas le résultat cherché était évident.

L'équation (10) est l'équation

$$G(\lambda) = 0$$

du paragraphe 9,

On vérifie ainsi que, pour les racines de $G(\lambda) = 0$, les B sont des constantes par rapport à $\log \frac{\varepsilon}{\eta}$, car alors les équations (9) donnant les B ne renferment pas $\log \frac{\varepsilon}{\eta}$.

12. Terminons en prenant le cas de $m = 1$, c'est-à-dire l'équation

$$F(x) + \lambda \int_a^b \frac{X(x)Y(y)}{y-x} F(y) dy = \psi(x).$$

La solution est

$$F(x) = B X(x) + \psi(x),$$

et B est déterminé par l'équation

$$(11) \quad B \left[1 + \lambda X(\alpha) Y(\alpha) \log \frac{\varepsilon}{\eta} + \lambda X(\alpha) Y(\alpha) \log \frac{b-\alpha}{\alpha-a} + \lambda \int_a^b \chi(y) dy \right] \\ + \lambda \left[\psi(\alpha) Y(\alpha) \log \frac{\varepsilon}{\eta} + \psi(\alpha) Y(\alpha) \log \frac{b-\alpha}{\alpha-a} + \int_a^b \theta(y) dy \right] = 0,$$

en posant

$$\chi(y) = \frac{X(y)Y(y) - X(\alpha)Y(\alpha)}{y-\alpha}, \\ \theta(y) = \frac{\psi(y)Y(y) - \psi(\alpha)Y(\alpha)}{y-\alpha}.$$

L'équation

$$B X(\alpha) + \psi(\alpha) = 0,$$

où l'on remplace B par sa valeur tirée de (11), ne dépend pas de $\log \frac{\varepsilon}{\eta}$;

B ne dépend pas de $\log \frac{\varepsilon}{\eta}$, comme il a été établi d'une manière générale. La valeur de $F(x)$ se réduit à

$$F(x) = \frac{\psi(x)X(\alpha) - \psi(\alpha)X(x)}{X(\alpha)}.$$